東海大學統計碩士班

碩士論文

指導教授：黃連成博士

多項式定理證明之探討

研究生：王薏婷

中華民國九十八年七月

摘 要

在數學上, 二項式定理 (binomial theorem) 爲一基礎且重要的定理, 尤其是機率、數統上的應用, 如二項式分配、動差。其中, 多項式定理 (multinomial theorem) 又爲二項式定理的推廣。在機率論或數理統計的教科書中, 它們所寫的都是以數學歸納法 (mathematical induction) 或組合法 (combinatorics) 去證明二項式定理, 然後提示我們也可以用這兩種方法延伸證明多項式定理, 但是這兩種方法並非唯一可證明多項式定理的方法。本文將介紹五種不同的方法證明多項式定理, 除傳統的二種方法, 數學歸納法和組合法以外, 還有二種已經被提出可證明二項式定理的方法, Rosalsky (2007) 提出機率方法 (probabilistic) 和 Hwang (2009) 提出微分方法 (differential calculus), 除此之外, 尙可利用泰勒公式定理 (Taylor’s formula) 證明的方法。並藉由範例中說明利用多項式定理求解期望値會比利用已求得的機率値求解期望値要來得容易且不易犯錯。

目錄

第一章 緒論

第 1.1 節 背景及研究動機

在數學上, 二項式定理 (binomial theorem) 爲一基礎且重要的定理, 尤其在機率、統計上的應用, 如二項式分配、動差... 等。而我們可由二項和的平方展開示推廣到二項和的 n 次方, 即二項式定理, 再將二項式推廣到多項式, 即包含多於兩項實數和的 n 次方。所以多項式定理 (multinomial theorem) 又爲二項式定理的推廣。在此對於二項式定理與多項式定理之詳細敍述將於下文加以介紹。

我們在教科書中常見用來證明二項式定理標準做法爲數學歸納法 (mathematical induction), 可參考 Ross(2006 pp.8-9), 另外也有些教科書會以組合法 (combinatorics) 證明二項式定理, 如 Ross(2006 p.9), 而此方法相較於數學歸納法是比較容易證明的。而除此兩種方法外, 目前已經有其它方法被提出證明二項式定理, 如 Fulton (1952) 提出一個簡單的二項式定理證明其中包含了歸納法的論點, Rosalsky (2007) 提出機率方法 (probabilistic) 證明二項式定理, Hwang (2009) 提出微分方法 (differential calculus) 證明二項式定理。

我們在大部分的教科書中, 多項式定理的證明通常會被放到習題自行證明, 它們可能會提示利用數學歸納法或組合法證明多項式定理, 可是我們都知道數學歸納法的證明是很繁雜且麻煩的。而我們已知多項式定理是由二項式定理推廣的, 所以考慮是否可利用已被提出證明二項式定理之方法去證明多項式定理, 如 Fulton (1952) 提出包含歸納法的論點但簡單的證明, 或 Rosalsky (2007)

提出機率方法, Hwang (2009) 提出微分方法。除了上述的方法外, 我們也考慮是否還有其它方法可用來證明多項式定理, 而我們發現泰勒展開式定理可證明多項式定理, 在此對於泰勒展開式定理 (Taylor's formula) 將於下文加以介紹。上述的這些方法將是本文接下來想要探討的部分。

第 1.2 節 研究架構

本文主要介紹五種不同方法的多項式定理證明, 分別爲數學歸納法、組合法、機率方法、微分方法和泰勒公式定理等。並且介紹兩個範例說明利用多項式定理可解決以往繁複的計算過程, 這裡我們分成四章來討論。

第一章的第1.1節中簡單說明多項式定理及本文的研究動機和目的; 第1.2節敍述本文架構。

第二章的第2.1節標準數學歸納法證明多項式定理; 第2.2節組合法證明多項式定理; 第2.3節機率方法證明多項式定理; 第2.4節微分方法證明多項式定理; 第2.5節泰勒公式定理證明多項式定理。

第三章的第3.1節介紹帽子混合的例子, 利用原本的機率值去求解期望值和利用多項式定理去求解期望值; 第3.2節介紹夫妻同坐一圓桌的例子, 利用原本的機率值去求解期望值和利用多項式定理去求解期望值。

第四章主要說明我們提出其它三種證明方法與傳統上兩種證明方法的差異, 且說明我們利用多項式定理求解期望值的優點。

第二章 定理證明

本章一開始先敍述二項式定理與多項式定理, 之後將分別介紹五種不同的方法證明多項式定理。

二項式定理:

對任意實數 x 和 y , 且n爲正整數, 則

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

多項式定理:

對任意實數$x_1, x_2, \ldots, x_r$, 且n和r爲正整數, 則

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_r): \\ n_1+n_2+\ldots+n_r=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

右式中的 $n_1, n_2, \ldots, n_r$ 爲非負整數, 且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, 並且 $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$。

我們在此先給定一個範例, 以此說明多項式定理。

例: $r = 3, n = 2$ 時, $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + x_3)$ 的展開式中包含 $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$項, 其中 $n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2$, 且 $n_1 + n_2 + n_3 = 2$ 。接著我們分別算出$x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$項的係數。

當 $n_1 = 2, n_2 = 0, n_3 = 0$, 則 x_1^2 項係數爲 $\binom{2}{2,0,0} = 1$;

當 $n_1 = 0, n_2 = 2, n_3 = 0$, 則 x_2^2 項係數爲 $\binom{2}{0,2,0} = 1$;

當 $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 2$, 則 x_3^2 項係數爲 $\binom{2}{0,0,2} = 1$;

當 $n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0$, 則 $x_1 x_2$ 項係數爲 $\binom{2}{1,1,0} = 2$;

當 $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 1$, 則 $x_1 x_3$ 項係數爲 $\binom{2}{1,0,1} = 2$;

當 $n_1=0, n_2=1, n_3=1$, 則 x_2x_3 項係數爲 $\binom{2}{0,1,1}=2$。

由上述求得的$x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}$項係數可得到展開式爲

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^2 &= \sum_{\substack{(n_1,n_2,n_3):\\ n_1+n_2+n_3=2}} \binom{n}{n_1,n_2,n_3} x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3} \\ &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\end{aligned}$$

經由此範例使我們更加了解多項式定理。

第 2.1 節 數學歸納法

首先我們先利用傳統數學歸納法去證明多項式定理, 證明過程如下:

當 $r=1$ 時, $x_1^n = \sum_{n_1:n_1=n} \binom{n}{n_1} x_1^{n_1}$, 其中 n_1 爲非負整數, 且 $n_1=n$, 則等式成立。

假設 $r=k$ 時成立, 則

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_k):\\ n_1+n_2+\cdots+n_k=n}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$$

其中 $n_1,n_2,\ldots,n_r$ 爲非負整數, 且 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$。

令$r=k+1$, 則

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})^n \\ &= (x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}+(x_k+x_{k+1}))^n \\ &= \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},l):\\ n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+l=n}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},l} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_{k-1}^{n_{k-1}}(x_k+x_{k+1})^l\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},l):\\ n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+l=n}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},l} x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_{k-1}^{n_{k-1}} \\
&\qquad \times \Big[\sum_{\substack{(n_k+n_{k+1}):\\ n_k+n_{k+1}=l}} \binom{l}{n_k,n_{k+1}} x_k^{n_k}\, x_{k+1}^{n_{k+1}} \Big] \qquad \text{(由二項式定理可知)} \\
&= \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},l):\\ n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+l=n}} \sum_{\substack{(n_k+n_{k+1}):\\ n_k+n_{k+1}=l}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},l} \binom{l}{n_k,n_{k+1}} \\
&\qquad \cdot x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_{k-1}^{n_{k-1}} x_k^{n_k}\, x_{k+1}^{n_{k+1}} \\
&= \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_k,n_{k+1}):\\ n_1+n_2+\cdots+n_k+n_{k+1}=n}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k,n_{k+1}} x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}\, x_{k+1}^{n_{k+1}}
\end{aligned}
$$

其中 $n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}$ 爲非負整數, 且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k + n_{k+1} = n$ 。上述等式是因爲原項數和 $\sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},l):\\ n_1+n_2+\cdots+n_{k-1}+l=n}} \sum_{\substack{(n_k+n_{k+1}):\\ n_k+n_{k+1}=l}}$ 可表示爲 $\sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_k,n_{k+1}):\\ n_1+n_2+\cdots+n_k+n_{k+1}=n}}$, 並且 $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},l}\binom{l}{n_k,n_{k+1}} = \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k,n_{k+1}}$。

根據數學歸納法, 得證此定理,

$$
(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r} x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}
$$

其中 $n_1, n_2, \ldots, n_r$ 爲非負整數, 且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$。

第 2.2 節 組合法

我們接著再證明傳統常用的另一種證明法, 利用組合去證明多項式定理, 證明過程如下:

我們考慮下列乘積

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=(x_1+x_2+\cdots+x_r)(x_1+x_2+\cdots+x_r)\cdots\\ \cdot(x_1+x_2+\cdots+x_r)$$

它的展開式是由 r^n 項的和所組成, 又此 r^n 項中每一項都包含 x_i 的因子, $i=1,2,\ldots,r$。所以在這 r^n 項的和中, 會包含 n_1 個 x_1, n_2 個 x_2 , …和 n_r 個 x_r 的項數, 其中 n_i 爲非負整數, $i=1,2,\ldots,r$, 且$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$, 亦即 $x_1^{n_1}$ 的項有 $\binom{n}{n_1}$, $x_2^{n_2}$ 項有 $\binom{n-n_1}{n_2}$, …,$x_r^{n_r}$的項有 $\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$。則展開式中$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$的項有

$$\begin{aligned}&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}\\&=\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-2}}{n_{r-1}}\\&=\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}。\end{aligned}$$

所以我們得證,

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

其中 $n_1,n_2,\ldots,n_r$ 爲非負整數, 且 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$。

第 2.3 節 機率方法

我們在此利用 Rosalsky(2007) 提出機率的方法去證明多項式定理, 證明過程如下:

我們考慮下列乘積

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=(x_1+x_2+\cdots+x_r)(x_1+x_2+\cdots+x_r)\cdots$$
$$\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_r)$$

它的展開式會等於

$$\sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} M(n;n_1,n_2,\ldots,n_r)\,x_1^{n_1}\,x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r} \qquad (1)$$

其中$n_1,n_2,\ldots,n_r$爲非負整數, 且$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ 。

我們希望證明:$M(n;n_1,n_2,\ldots,n_r)=\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r}$

在不失一般性下, 令$0\le x_i\le 1$,$i=1,2,\ldots,r$, 並且$\sum_{i=1}^{r}x_i=1$。令$(Y_1,Y_2,\ldots Y_r)$ 是一個 n 次試驗, 個別地機率爲$x_1,x_2,\ldots,x_r$的多項式分配, 則$(Y_1,Y_2,\ldots Y_r)$ 的聯合機率質量函數 (joint probability mass function) 爲

$$f(n_1,n_2,\ldots,n_r)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}\,x_1^{n_1}\,x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

其中 $n_1,n_2,\ldots,n_r$ 爲非負整數, 且 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$。又因爲$f(n_1,n_2,\ldots,n_r)$是聯合機率質量函數, 所以

$$1=\sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} f(n_1,n_2,\ldots n_r)=\sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}\,x_1^{n_1}\,x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r} \qquad (2)$$

令 $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i = 1, 0 \leq x_i \leq 1\,, i = 1, 2, \ldots, r$, 則由 (1) 式可得

$$1 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} M(n; n_1, n_2, \ldots, n_r)\, x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \tag{3}$$

所以我們由 (2) 和 (3) 得到

$$\sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} (M(n; n_1, n_2, \ldots, n_r) \;-\; \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots\, n_r!})\, x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} = 0$$

假設 $Q(n_1, n_2, \ldots, n_r) = M(n; n_1, n_2, \ldots, n_r) - \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots\, n_r!}$ 爲與$n_1, n_2, \ldots, n_r$有關的常數, 則

$$\sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} Q(n_1, n_2, \ldots, n_r)\, x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} = 0 \tag{4}$$

其中 $n_1, n_2, \ldots, n_r$ 爲非負整數, 且$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i = 1$。

對任意 k_i, n_i爲非負整數, $i = 1, 2, \ldots, r$, $\sum\limits_{i=1}^{r} k_i = n$, $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = n$。然後對 (4) 式兩邊做偏微分,

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_r^{k_r}} \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_r): \\ n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n}} Q(n_1, n_2, \ldots, n_r)\, x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} = 0$$

$\exists i = 1, 2, \ldots, r\,, k_i \neq n_i$,

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_r^{k_r}} Q(n_1, n_2, \ldots, n_r)\, x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} = 0$$

$\forall i = 1, 2, \ldots, r\,, k_i = n_i$,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_r^{k_r}} Q(n_1, n_2, \ldots, n_r)\, x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \\ &= Q(k_1, k_2, \ldots, k_r) k_1! k_2! \cdots k_r! \end{aligned}$$

則

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_r^{k_r}}\sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} Q(n_1,n_2,\ldots,n_r)\,x_1^{n_1}\,x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

$$= Q(k_1,k_2,\ldots,k_r)k_1!k_2!\cdots k_r! = 0$$

所以 $Q(k_1,k_2,\ldots,k_r)=0$。

最後我們得證, 對任意$k_i \geq 0,\ i=1,2,\ldots,r,$ 且$\sum_{i=1}^{r} k_i = n,$ 則

$$M(n;k_1,k_2,\ldots,k_r) \;=\; \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots\, k_r!}。$$

第 2.4 節 微分方法

我們在此利用 Hwang(2009) 提出微分的想法去證明多項式定理, 證明過程如下:

我們考慮下列乘積

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=(x_1+x_2+\cdots+x_r)(x_1+x_2+\cdots+x_r)\cdots \\ \cdot(x_1+x_2+\cdots+x_r)$$

它的展開式會等於

$$\sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} M(n;n_1,n_2,\ldots,n_r)\,x_1^{n_1}\,x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r} \tag{5}$$

其中$n_1,n_2,\ldots,n_r$為非負整數, 且$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ 。

對任意 $k_1,k_2,\ldots,k_r$ 為非負整數 , 且$\sum_{i=1}^{r}k_i=n$。然後對 (5) 之左式做偏微

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^n}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_r^{k_r}}(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n\\
&=\frac{\partial^{n-k_r}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_{r-1}^{k_{r-1}}}[\frac{\partial^{k_r}}{\partial x_r^{k_r}}(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n]\\
&=\frac{\partial^{n-k_r}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_{r-1}^{k_{r-1}}}[n(n-1)\cdots(n-k_r+1)(x_1+x_2+\cdots+x_r)^{n-k_r}]\\
&=n(n-1)\cdots(n-k_r+1)\frac{\partial^{n-k_r-k_{r-1}}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_{r-2}^{k_{r-2}}}[\frac{\partial^{k_{r-1}}}{\partial x_{r-1}^{k_{r-1}}}(x_1+x_2+\cdots+x_r)^{n-k_r}]\\
&=n(n-1)\cdots(n-k_r+1)(n-k_r)\cdots(n-k_r-k_{r-1}+1)\\
&\qquad\times\tfrac{\partial^{n-k_r-k_{r-1}}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\cdots\partial x_{r-2}^{k_{r-2}}}(x_1+x_2+\cdots+x_r)^{n-k_r-k_{r-1}}\\
&=\cdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n(n-1)\cdots(n-k_r+1)(n-k_r)\cdots(n-k_r-k_{r-1}+1) \\
&\quad \cdots(n-k_r-\cdots-k_1+1) \\
&= n! \qquad (6)
\end{aligned}
$$

接著對 (5) 之右式做偏微, $\exists i = 1, 2, \ldots, r\,, k_i \neq n_i$,

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_r^{k_r}} M(n; n_1, n_2, \ldots, n_r)\, x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} = 0$$

$\forall i = 1, 2, \ldots, r\,, k_i = n_i$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_r^{k_r}} M(n; k_1, k_2, \ldots, k_r)\, x_1^{k_1}\, x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r} \\
&\quad = M(n; k_1, k_2, \ldots, k_r) k_1! k_2! \cdots k_r!
\end{aligned}
$$

則

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^n}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_r^{k_r}} \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} M(n; n_1, n_2, \ldots, n_r)\, x_1^{n_1}\, x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \\
&\quad = M(n; k_1, k_2, \ldots, k_r) k_1! k_2! \cdots k_r! \qquad (7)
\end{aligned}
$$

所以對任意 $k_1, k_2, \ldots, k_r$爲非負整數 , 且$\sum_{i=1}^{r} k_i = n$, 我們由 (6) 和 (7) 可得

$$n! = M(n; k_1, k_2, \ldots, k_r) k_1! k_2! \cdots k_r!$$

最後得證

$$M(n; k_1, k_2, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}\text{。}$$

第 2.5 節 泰勒公式定理

我們由 Wade (2004) 的書中所敘述的 n 度空間泰勒公式定理 (Taylor Formula on $\mathcal{R}^n$), 希望利用其定理證明多項式定理。在此我們先定義高階微分, 令 $p \geq 1$, V 是 $\mathcal{R}^n$ 上的開集合, $f: V \to \mathcal{R}$。我們說 f 在 $\boldsymbol{a}$ 有第 p 階的微分, 亦即 f 的第 $(p-1)$ 階偏微存在在 V 上, 且在 $\boldsymbol{a}$ 上微分, 我們定義

$$D^{(p)}f(\boldsymbol{a};\boldsymbol{h}) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}(\boldsymbol{a}) h_{i_1} \cdots h_{i_p}, \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathcal{R}^n$$

對 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{R}^n$, 我們定義從 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$線段的集合

$$L(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}) = \{(1-t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} : t \in [0,1]\}。$$

接著我們敘述n度空間泰勒公式定理。

定理: (n度空間泰勒公式)

令 $p \in \mathrm{N}$, V是$\mathcal{R}^n$上的開集合, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \in V$, 且假設 $f: V \to \mathcal{R}$. 如果f的第p階微分在V存在, 且$L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a}) \subseteq V$, 則存在有一個點$\boldsymbol{c} \in L(\boldsymbol{x};\boldsymbol{a})$ 使得 $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} D^{(k)} f(\boldsymbol{a};\boldsymbol{h}) + \frac{1}{p!} D^{(p)} f(\boldsymbol{c};\boldsymbol{h})$, 其中 $\boldsymbol{h} \equiv \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$

現在我們利用 n 度空間泰勒公式定理去證明多項式定理, 證明過程如下:

令

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$$

$$f(\boldsymbol{0}) = 0$$

接著計算 $D^{(k)}f(\mathbf{0};\boldsymbol{x})$,

$$D^{(1)}f(\mathbf{0};\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0})\, x_i$$

$$= n[(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^{n-1}|_{x_i=0, i=1,2,\ldots,r}]x_1 + \cdots$$

$$+ n[(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^{n-1}|_{x_i=0, i=1,2,\ldots,r}]x_r = 0$$

$$\vdots$$

$$D^{(n-1)}f(\mathbf{0};\boldsymbol{x}) = 0$$

$$D^{(n)}f(\mathbf{0};\boldsymbol{x}) = \sum_{i_1=1}^{r}\sum_{i_2=1}^{r}\cdots\sum_{i_n=1}^{r} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_n}}(\mathbf{0}) x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$$

$$= n! \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

其中 $n_1, n_2, \ldots, n_r$爲非負整數, 且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$。上述等式中因爲$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_n}}(\boldsymbol{x}) = n!$。

因爲

$$\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_{n+1}}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^{n+1}}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_{n+1}}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = 0$$

所以 $\forall \boldsymbol{c}$,

$$D^{(n+1)}f(\boldsymbol{c};\boldsymbol{x}) = \sum_{i_1=1}^{r}\sum_{i_2=1}^{r}\cdots\sum_{i_{n+1}=1}^{r} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_{n+1}}}(\boldsymbol{c}) x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n+1}} = 0$$

最後我們由 n 度空間泰勒公式定理得到,

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{0}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^{(k)}f(\mathbf{0};\boldsymbol{x}) + \frac{1}{(n+1)!} D^{(n+1)}f(\boldsymbol{c};\boldsymbol{x})$$

$$= \frac{1}{n!}[n! \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}]$$

$$= \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

故得證

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,n_2,\ldots,n_r):\\ n_1+n_2+\cdots+n_r=n}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_r} x_1^{n_1}\,x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

其中$n_1, n_2, \ldots, n_r$ 爲非負整數, 且 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ 。

第 三 章 多項式定理應用於範例上

我們透過下面兩個常見的範例, 一個是關於帽子混合在一起的問題, 另一個則是關於夫妻同坐一圓桌的問題, 都分別做了利用原本機率求解期望值和利用多項式定理求解期望值。

第 3.1 節 帽子混合的問題

假設參加宴會的n位客人將他們的帽子放在房間中央, 這些帽子經過混和後, 每一位客人再隨機拿取一頂帽子, 請問客人拿到自己帽子的人數期望值爲何?

I. 利用原本的機率值求解期望值

令 E_i 爲第 i 個人拿到自己帽子的事件, $i = 1, 2, \ldots, n$, 則

$$P(E_{i_1} \cdots E_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!},\ k = 1, 2, \ldots, n。$$

假設 X_n 爲客人取到自己帽子的人數, $X_n = 0, 1, 2, \ldots, n$, 其機率爲

$$P(X_n = 0) = P(\text{都沒人取到自己的帽子}) = P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)$$
$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} = P_n$$
$$P(X_n = k) = P(\text{恰有k人取到自己的帽子}) = \frac{\binom{n}{k}(n-k)!P_{n-k}}{n!}$$
$$= (1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!})/k!$$

所以期望值

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k) &= 0 \times [1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}] \\ &+ 1 \times [(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!})/1!] \\ &+ 2 \times [(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!})/2!] + \cdots \\ &+ k \times [(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!})/k!] + \cdots \\ &+ (n-2) \times [(1 - 1 + \frac{1}{2!})/(n-2)!] + (n-1) \times 0 + n \times \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

由上述演算過程我們可知, 利用機率值求解期望值是極端繁複, 因此我們希望有其它的方法能幫助我們求解期望值的過程是較簡潔的, 所以我們利用多項式定理求解期望值。

II. 利用多項式定理求解期望值

令$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{第}i\text{位客人拿到自己帽子} \\ 0 & \text{其他情況} \end{cases}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 則 Y_i是具有相同分配但並不彼此獨立。

假設 X_n爲客人拿回自己的帽子的人數, 且$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, 則X_n的第k個動差爲

$$\mathrm{E}(X_n^k) = \mathrm{E}((Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)^k) = \sum_{\substack{(i_1, i_2, \ldots, i_n): \\ i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k}} \frac{k!}{i_1! i_2! \cdots i_n!} \mathrm{E}(Y_1^{i_1} Y_2^{i_2} \cdots Y_n^{i_n}),$$

其中 $i_1, i_2, \ldots, i_n$爲非負整數, 且$\sum_{j=1}^{n} i_j = k$。

令 $l = l(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 表示在 $(Y_1^{i_1} Y_2^{i_2} \cdots Y_n^{i_n})$ 中 $i_j \geq 1$ 的個數。我們知道 $1 \leq l \leq min\{k, n\}$, 且在 $c > 0$ 下, $Y_i^c = Y_i$, 故 $Y_1^{i_1} Y_2^{i_2} \cdots Y_n^{i_n}$ 與 $Y_1 Y_2 \ldots Y_{l(i_1, i_2, \ldots, i_n)}$ 有相同的分配。

於是

$$P(Y_1^{i_1}Y_2^{i_2}\cdots Y_n^{i_n}=1)=P(Y_1Y_2\ldots Y_{l(i_1,i_2,\ldots,i_n)}=1)=\frac{(n-l)!}{n!},$$

所以

$$\mathrm{E}(Y_1Y_2\cdots Y_l)=\frac{(n-l)!}{n!}$$

令$\mathcal{N}_l^+\equiv\{(i_1,i_2,\ldots,i_l):i_j\geq 1,$ 對所有j而言$, 1\leq j\leq l,$ 且$i_1+\cdots+i_l=k\}$。

最後我們求得 X_n 的第 k 個動差爲

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_n^k)&=\sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n):\\ i_1+i_2+\cdots+i_n=k}}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\mathrm{E}(Y_1^{i_1}Y_2^{i_2}\cdots Y_n^{i_n})\\&=\sum_{l=1}^{min\{k,n\}}\sum_{N_l^+}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_l!}\binom{n}{l}\frac{(n-l)!}{n!}\\&=\sum_{l=1}^{min\{k,n\}}\sum_{N_l^+}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_l!}\frac{1}{l!}\end{aligned}$$

所以我們得到X_n的期望值$\mathrm{E}(X_n)=1$, 即平均n個人中會恰有一人會選取到自己的帽子。

由上述的兩種方法去求解期望值, 我們可以看出利用多項式定理相較於直接利用機率值求解期望值的過程是較簡潔的, 不需經過聾長的計算過程, 即可求得期望值。

第 3.2 節 夫妻同坐一圓桌

假設有n對夫妻圍一圓桌隨機而坐, 試求夫妻坐在一起的對數之期望值為何?

I. 利用原本的機率去求解期望值

令 E_i 為第 i 對夫妻坐在一起的事件, $i = 1, 2, \ldots, n$, 則

$$P(E_{i_1} \cdots E_{i_k}) = \frac{2^k(2n-k-1)!}{(2n-1)!},\ k = 1, 2, \ldots, n$$

假設 X_n 為夫妻坐在一起的對數, $X_n = 0, 1, 2, \ldots, n$, 則機率為

$$\begin{aligned}
P(X_n = 0) &= P(\text{都沒有夫妻坐在一起}) = P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \\
&= 1 - \binom{n}{1}\frac{2(2n-2)!}{(2n-1)!} + \binom{n}{2}\frac{2^2(2n-3)!}{(2n-1)!} + \cdots \\
&+ (-1)^n\binom{n}{n}\frac{2^n(2n-n-1)!}{(2n-1)!} \\
&= P_n
\end{aligned}$$

對於恰有 k 對夫妻坐在一起的機率, 我們可利用與第一個範例相似的想法求得一般式 $P(X_n = k) = P(\text{恰有k對夫妻坐在一起})$, 但是其求解機率值的過程又比第一個範例求解機率值的過程更加複雜, 所以更不用說其求解期望值的演算過程是極端繁複。因此我們希望有其它的方法能幫助我們求解期望值的過程是較簡潔的, 所以我們利用多項式定理求解期望值。

II. 利用多項式定理求解期望值

令$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{第}i\text{對夫妻坐在一起} \\ 0 & \text{其他情況} \end{cases}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 則 Y_i是具有相同分配但並不彼此獨立。

假設 X_n爲夫妻坐在一起的對數, 且$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, 則X_n的第k個動差爲

$$\mathrm{E}(X_n^k) = \mathrm{E}((Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)^k) = \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n):\\ i_1+i_2+\cdots+i_n=k}} \frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\mathrm{E}(Y_1^{i_1}Y_2^{i_2}\cdots Y_n^{i_n}),$$

其中 $i_1, i_2, \ldots, i_n$爲非負整數, 且$\sum_{j=1}^{n} i_j = k$。

令$l = l(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ 表示在$(Y_1^{i_1}Y_2^{i_2}\cdots Y_n^{i_n})$ 中 $i_j \geq 1$ 的個數。我們知道 $1 \leq l \leq min\{k, n\}$, 且在 $c > 0$ 下, $Y_i^c = Y_i$, 故$Y_1^{i_1}Y_2^{i_2}\cdots Y_n^{i_n}$ 與 $Y_1Y_2\ldots Y_{l(i_1,i_2,\ldots,i_n)}$ 有相同的分配。

於是

$$P(Y_1^{i_1}Y_2^{i_2}\cdots Y_n^{i_n} = 1) = P(Y_1Y_2\ldots Y_{l(i_1,i_2,\ldots,i_n)} = 1) = \frac{2^l[(2n-1)-l]!}{(2n-1)!},$$

所以

$$\mathrm{E}(Y_1Y_2\cdots Y_l) = \frac{2^l[(2n-1)-l]!}{(2n-1)!}$$

令$\mathcal{N}_l^+ \equiv \{(i_1, i_2, \ldots, i_l) : i_j \geq 1,$ 對所有j而言, $1 \leq j \leq l,$ 且$i_1+\cdots+i_l = k\}$。

最後我們求得 X_n 的第 k 個動差爲

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_n^k) &= \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_n):\\ i_1+i_2+\cdots+i_n=k}} \frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\mathrm{E}(Y_1^{i_1}Y_2^{i_2}\cdots Y_n^{i_n}) \\ &= \sum_{l=1}^{min\{k,n\}} \sum_{N_l^+} \frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_l!}\binom{n}{l}\frac{2^l[(2n-l)-l]!}{(2n-1)!}\end{aligned}$$

所以我們得到X_n的期望值$\mathrm{E}(X_n) = \binom{n}{1}\frac{2[(2n-1)-1]!}{(2n-1)!} = \frac{2n}{2n-1}$, 即平均$n$對中會有$\frac{2n}{2n-1}$對夫妻會坐在一起。

第 四 章 結論

我們在證明多項式定理的五種方法中發現, 如果以傳統上常用的兩種證明法, 數學歸納法和組合法, 以數學歸納法證明的過程是很繁雜且麻煩的, 而以組合法證明則是相較下較容易的。而在我們利用的其它三種證明法, 機率方法, 微分方法和泰勒公式定理, 我們發現以微分方法證明是最容易的, 其證明過程也是很簡潔的。但是以機率方法去證明多項式定理, 它的證明過程是有比較繁雜, 但它提供了一種新的証明方式。而以泰勒公式定理的方法證明多項式定理, 其證明過程也是很簡潔的, 可是相較微分法其觀念還是比較難的。綜觀五種證明方法, 雖然有些方法的証明過程很繁複, 但是都提供了我們以不同的想法去證明多項式定理, 且此五種方法都是利用我們已學過的定理和觀念。雖然我們無法說其它三種方法是否眞的都有優於傳統的二種方法, 但我們可以說組合法和微分法確實都是比較容易證明且使用的觀念都較爲基礎。

我們在應用多項式定理去求解期望值的例子中, 我們知道以原本機率值求解期望值會會不容易的, 尤其是在其機率值是非常繁雜時, 計算期望值變得很麻煩。但是利用多項式定理的方法求解期望值, 其求解過程變得較簡易, 且原本機率值的繁雜計算也可免除。因此以後計算類似題型之期望值時, 我們都可以利用多項式定理輕易求解。

參考文獻

Casella, G. and Berger R.L. (2002), Statistical Inference (2nd ed.), Pacific Grove, Ca. : Duxbury.

Fulton, C.M. (1952), "A Simple Proof of the Binomial Theorem", The American Mathematical Monthly, 59, 243-244.

Hwang, L.C. (2009), "A Simple Proof of the Binomial Theorem Using Differential Calculus", The American Statistician, 63, 43-44.

Lengyel, T. (1997), "The Moment of the Number of cycles of a Random Permutation by Simple Enumeration", The Indian Journal of Statistics, 59, 133-137.

Rosalsky, A. (2007), "A Simple and Probabilistic Proof of the Binomial Theorem", The American Statistical , 61, 161-162.

Ross, S. (2006), A First Course in probability (7th ed.), Upper Saddle River, N.J. :Pearson Prentice Hall.

Wade, W.R. (2004), An Introduction to Analysis(3rd ed.), Upper Saddle River, N.J. : Pearson Prentice Hall.