

東海大學統計研究所

碩士論文

指導教授：劉家頤 博士

模擬 $1/f$ 神經傳導流間隔時間之 ARIMA 配模
探討

On ARIMA modeling of waiting time series of
 $1/f$ simulated spike-trains

研究生：郭芳如 撰

中華民國一零五年一月

謝 誌

憶起這些年在東海的求學過程，承蒙系上許多老師的諄諄教誨及同學的相互督促，得以順利完成學業，在此獻上至高謝意。

本篇論文能順利完成，首要感謝的是劉家頤老師，在論文撰寫的期間從題目的選定、問題的發掘到觀念的指正都予以我耐心的教導，在我徬徨無助時也伸出援手，提供我寶貴的意見，能跟在老師的身邊學習我受益良多，此份師恩將永遠銘記我心，永難忘懷，並在此表達我由衷的敬意與謝意。

另外還要特別感謝張玉媚老師及楊權輝老師二位口試委員，在百忙中能挪出時間詳加審閱並提供完善的意見，得以使本篇論文更加的完善。

最後，研究所期間，謝謝還有群共患難的朋友陪在我身邊，更要感謝在我情緒低落的期間有老師和助教群們的鼓勵與意見，還有家人、朋友們對我的關懷與協助，在背後默默支持著陪我走過這一關。僅以此論文獻給我最親愛的家人以及所有關心、幫助過我的人。

郭芳如 謹致

民國一零五年一月

摘要

在 Gruneis et al. (1989)中,以實測貓在異相睡眠和注視鳥時其腦網狀組織(MRF)下神經傳導流之波動求出頻譜密度函數,結果發現其頻譜圖有 $1/f$ 之特性。由於群集普瓦松過程亦同樣具有 $1/f$ 型態之頻譜密度函數,故本研究以群集卜瓦松過程模擬 Gruneis et al.在 1989 年所提出的論述資料,隨機生成貓在這兩種狀態下其神經傳導流之頻率,以統計性質分析探討,加入 ARIMA 配模、比對,做一探索性的分析。

關鍵字：神經傳導流、點過程、群集普瓦松、 $1/f$ 、頻譜分析、自迴歸移動平均模型

Abstract

In Grüneis F, Nakao M, Yamamoto M, Musha T, Nakahama H., 1989, An interpretation of $1/f$ fluctuations in neuronal spike trains during dream sleep, the fluctuation of the neural spike-trains of cats while during paradoxical sleep (PS) and bird watching (BW) was measured to obtain their spectral density functions. The spectra demonstrating a so-called $1/f$ pattern were shown to have been resulted from clustering Poisson processes. The $1/f$ characteristic in point processes was tried to duplicate in this paper. Different patterns of $1/f$ spectra were generated via clustering Poisson processes as well as Box and Jenkins' ARIMA series. The relationship between the pattern and the coefficients in the ARIMA models were discussed. The further research directions were also proposed.

Keyword : Neural spike-train, Point process, Clustering poisson process, $1/f$, Spectral analysis, Autoregressive integrated moving average model.

目 錄

第一章、緒論.....	1
第一節 研究背景與目的.....	1
第二節 研究流程.....	2
第三節 1/f 型態.....	3
第四節 時間序列模型之辨識.....	4
第二章、群集卜瓦松的概念及應用.....	6
第一節 點過程.....	6
第二節 廣義發生次數.....	7
第三節 群集卜瓦松過程 (Clustering Poisson process)	8
(一) 群集卜瓦松過程之定義.....	8
(二) 群集過程之分配.....	9
(三) 群集個數之分配.....	9
第三章、研究方法.....	10
第一節 頻譜分析 (spectral analysis)	10
第二節 動力轉換函數 (power transfer function)	13
第四章、模擬與分析.....	15
第一節 模擬資料.....	15
(一) 參數選取.....	15
(二) 生成資料.....	15
第二節 分析探討.....	18
(一) ARMA 配適結果	18
(二) 參數變動.....	21
第五章、結論與後續研究.....	32
參考文獻.....	33

表目錄

表一	主要過程與次要過程神經傳導流之參數選取.....	15
表二	動力轉換函數.....	18
表三	貓在異相睡眠時之 ARMA(2,1)參數.....	19
表四	貓在注視鳥時之 ARMA(1,2)參數.....	20

圖目錄

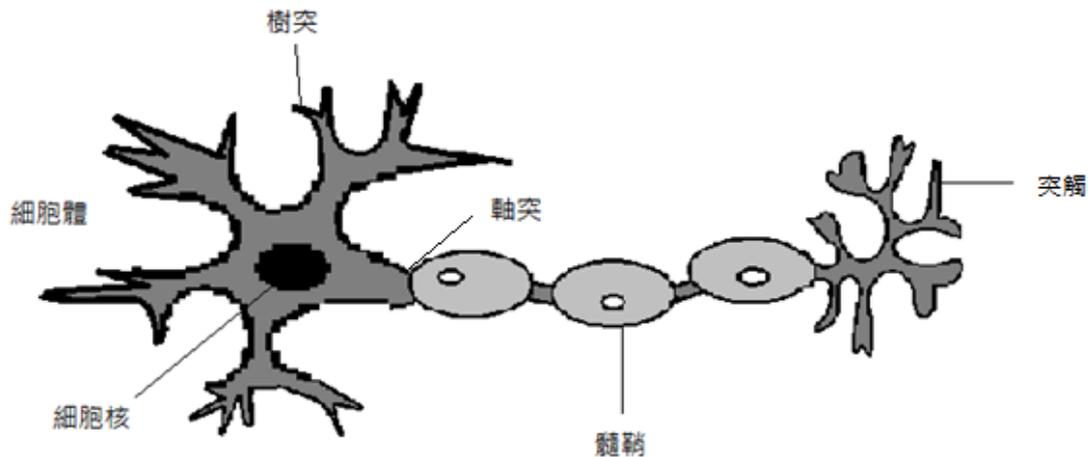
圖一	典型神經元的結構.....	1
圖二	各種聲波的分布.....	3
圖三	事件發生之時間序列與間隔時間序列.....	6
圖四	群集卜瓦松過程.....	8
圖五	雙對數尺度頻譜圖.....	12
圖六	低通濾波器剖面圖.....	14
圖七	高通濾波器剖面圖.....	14
圖八	貓在異相睡眠時頻譜圖.....	17
圖九	貓在注視鳥時頻譜圖.....	17
圖十	貓在異相睡眠時之 ARMA(2,1)頻譜圖.....	19
圖十一	貓在注視鳥時之 ARMA(1,2)頻譜圖.....	20
圖十二	在不同窗戶下，貓在異相睡眠時 ARMA(2,1)的對照圖.....	21
圖十三	在不同窗戶下，貓在注視鳥時 ARMA(1,2)的對照圖.....	22
圖十四	使用 AR(p)與 MA(q)模型比對貓在異相睡眠時頻譜圖之變化.....	23
圖十五	使用 AR(p)與 MA(q)模型比對貓在注視鳥時頻譜圖之變化.....	24
圖十六	ARMA(1,1)之頻譜圖.....	25
圖十七	ARMA(1,2)之頻譜圖.....	26
圖十八	ARMA(2,1)之頻譜圖.....	29

第一章 緒論

本章將敘述本研究的背景、目的、流程、文獻回顧與時間序列模型的概述。

第一節 研究背景與目的

腦網狀組織〈Reticular Activating System〉是腦部的一個區域，位於腦幹的神經元網路，有各式各樣的神經的傳遞，可以控制睡眠與覺醒、意識行為、調節呼吸、調控疼痛…等，科學家把神經分成不同的面向做研究，有突觸的層級、細胞膜的層次、神經群的功能…等，本研究探討的單一神經層次，即研究單一的神經細胞之於事件的發生。(吳京一, 2008)



圖一、典型神經元的結構

神經元 (neuron)，又名神經原或神經細胞 (nerve cell)，是神經系統的結構與功能單位之一。雖然神經元形態與功能多種多樣，但結構上大致都可分成胞體 (soma) 和神經突 (neurite) 兩部分。神經突又分樹突 (dendrites) 和軸突 (axon) 兩種，軸突的直徑均勻，離開細胞體若干距離後始獲得髓鞘，成為神經纖維。神經元按照傳輸方向及功能分為三種：感覺神經元、運動神經元和聯絡神經元，但不論是何種神經元，皆可分成：接收區 (receptive zone)、觸發區 (trigger zone)、傳導區 (conducting zone)，和輸出區 (output zone)。接收區：為樹突到胞體的部

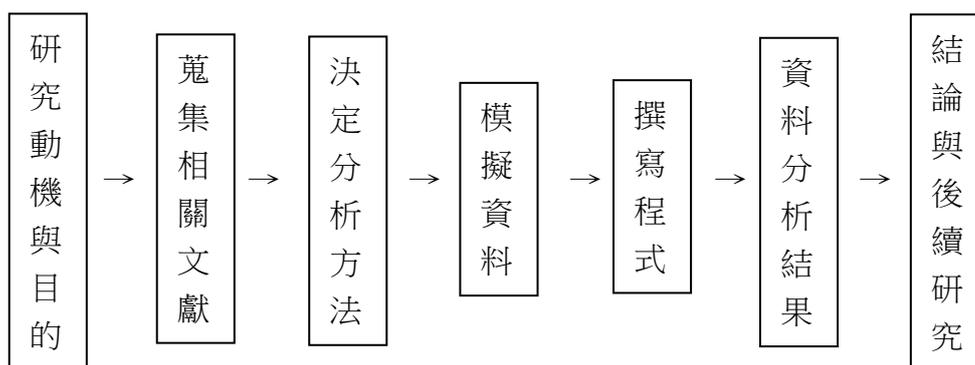
份，會有電位的變化，為階梯性的生電（graded electrogenesis）。觸發區：決定是否產生神經衝動的起始點，位於軸突和胞體交接的地方。傳導區：為軸突的部份，用來傳導神經衝動。輸出區：神經衝動的目的就是要讓神經末梢的化學物質釋出，才能影響下一個接受的細胞。(吳兆田, 2013)

在 Grüneis et al. (1989) 中，以實測貓的大腦皮層下單極神經元的傳導做為研究對象，探討貓在異相睡眠(paradoxical sleep, 以下簡稱 PS)和注視鳥(birds watching, 以下簡稱 BW)時，大腦活動的神經元傳導波動，紀錄成 1/f 的波動形態，並將此波動應用到群集卜瓦松的過程上。

因此本研究將以點過程為出發點，嘗試以不同的分析方法做為判斷的依據，並對其結果進行分析與探討。

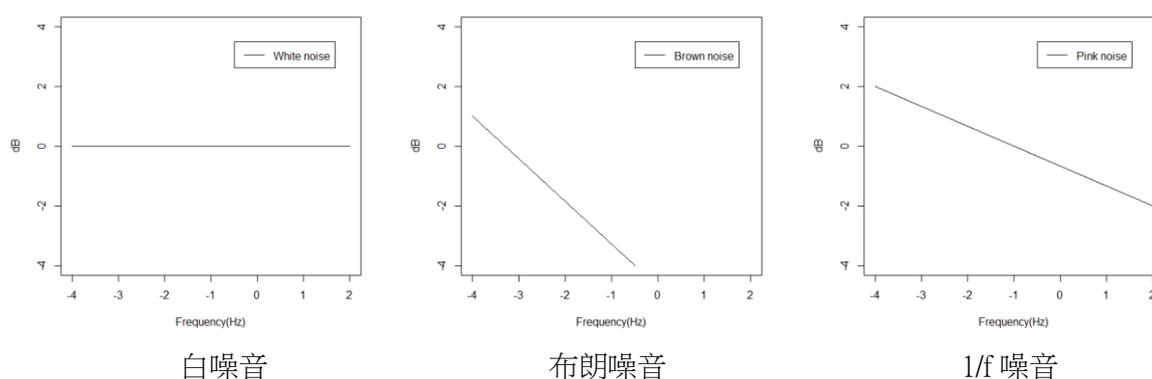
第二節 研究流程

在參考許多有關 1/f 波動與頻譜圖的相關文獻後，決定以 Grüneis et al. (1989) 為基礎，模擬貓在異相睡眠和注視鳥時兩組不同樣本的群集卜瓦松廣義次數，並用頻譜分析和時間序列法配適建模，比較不同的統計分析方法，評估各項指標的影響相關係。下表為本研究之流程圖：



第三節 1/f 型態

自然界中存在著各式各樣的聲音波動，而“1/f 波動”如同人類心跳和腦波的變化、潺潺的流水、拂面的清風…等，都是一種看似不規則，卻不單調的波動。科學家(Pressing, 1998)將這些波動按功率頻譜密度(spectral power density)和頻率(frequency)對應關係分為三種波，一種是反覆且密集的白色波動(white noise)，這種波動使人感到焦躁不安；另一種是完全無規律性的布朗波動(Brown noise)，此波動會讓人覺得單調乏味；而 70 年代，日本著名物理學家武者利光教授(Musha et al, 1997)提出的 1/f 波動理論，此波動介於兩者之間，這種波動在人的視、聽、觸、味、嗅覺上皆有反應，給人的感受舒適且和諧。以聲音為例，建築工地的機械聲刺耳難鳴，而世界名曲卻能讓人安定、放鬆心靈，是因為它的頻譜密度十分接近 1/f 的波動曲線。下圖可見，聲波在頻域的分布情況：



圖二、各種聲波的分布

第四節 時間序列模型之辨識

時間序列分析就是根據資料的特性去建構合理的統計模型，然後利用模型的統計特性去解釋資料的規律性，進而達到預測之目的。Box-Jenkins 法是時間序列分析領域中大家最耳熟能詳、廣泛應用的模式型態，下面將介紹 Box-Jenkins 的 ARIMA 模式，由於 ARIMA 是對不平穩序列取差分的一個過程，但本研究所探討的資料皆是平穩序列，故以下將以 ARMA 取代之。

① 白噪音 (White noise)

又稱白雜訊，是一個自相關為 0 的雜訊訊號，也就是說在時間 t 時的值與過去時刻和未來的值都不相關，是一個無記憶性的時間序列 $\{\varepsilon_t, t \in \mathbf{Z}\}$ 。

$$E[\varepsilon_t] = 0, t \in \mathbf{Z},$$

$$\text{Var}[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_t^2] = \sigma^2, t \in \mathbf{Z},$$

$$\gamma(k) = \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = 0, t \in \mathbf{Z}, k \neq 0$$

② p 階自我迴歸模式 (order p autoregression model)，簡稱 AR(p)：

給定一組時間序列 $\{y_t, t \in \mathbf{Z}\}$ ， $y_t = c + \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \dots + \rho_p y_{t-p} + \varepsilon_t$ ， c

和 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ 為參數，其中 $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ，則我們稱此序列為一個自我迴歸(AR)模

式。 $y_t - \mu = \rho_1(y_{t-1} - \mu) + \rho_2(y_{t-2} - \mu) + \dots + \rho_p(y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t$ ， μ 和 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$

為參數，設 $y_t^* = y_t - \mu$ ，將上式改寫為 $y_t^* = \rho_1 y_{t-1}^* + \rho_2 y_{t-2}^* + \dots + \rho_p y_{t-p}^* + \varepsilon_t$ ，

可記成 $\Phi_p(B)y_t = \varepsilon_t$ ，這個 B 的 p 階多項式記做 $\Phi_p(B) = (1 - \rho_1 B - \rho_2 B^2 - \dots - \rho_p B^p)$ ，其中 B 是後退算子 (backshift operator)。

由模型可看出 $\{y_t\}$ 為對過去 p 期時間點的值當成解釋變數的迴歸模型，故我們稱此模型為 p 階自我迴歸模型。

③ q 階移動平均模型 (order q moving average model)，簡稱 MA(q)：

給定一組時間序列 $\{y_t, t \in Z\}$, $y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$, μ 和

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ 為參數, 其中 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, 則我們稱此序列為一個移動平均(MA)模式。

可記成 $y_t = \mu + \theta_q(B)\varepsilon_t$, 後退算子多項式為 $\theta_q(B) = (1 - \theta_1B - \theta_2B^2 - \dots - \theta_qB^q)$, 亦即 $B\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$ 。

由模型可看出 $\{y_t\}$ 是白噪音序列 $\{\varepsilon_t\}$ 的當期與過去 q 期值的線性組合, 因此 ε_t 只會影響 y_t 與 q 個未來值 $\{y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+q}\}$, 故間隔時間超過 q 期的兩兩 y_t 不相關, 所以無論 $\{\theta_i, i = 1, 2, \dots, q\}$ 值為何, $\{y_t\}$ 都會為一穩定時間序列。

④ 自迴歸移動平均過程 (Mixed autoregressive moving average process), 簡稱 ARMA(p, q):

是上述兩者的混合, 在一數列資料 $\{y_t, t \in Z\}$, $y_t = c + \rho_1y_{t-1} + \rho_2y_{t-2} + \dots + \rho_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$, 其中 $c, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ 和 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ 為其參

數值, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, 我們稱此序列為一個自我迴歸移動平均(ARMA)模式。

$y_t - \mu = \rho_1(y_{t-1} - \mu) + \rho_2(y_{t-2} - \mu) + \dots + \rho_p(y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$, 設 $y_t^* = y_t - \mu$, 將上式改寫為 $y_t^* = \rho_1y_{t-1}^* + \rho_2y_{t-2}^* + \dots + \rho_py_{t-p}^* + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$, 可記成 $\Phi_p(B)y_t^* = \theta_q(B)\varepsilon_t$, 後退算子多項式分別為 $\Phi_p(B) = (1 - \rho_1B - \rho_2B^2 - \dots - \rho_pB^p)$ 及 $\theta_q(B) = (1 - \theta_1B - \theta_2B^2 - \dots - \theta_qB^q)$ 。

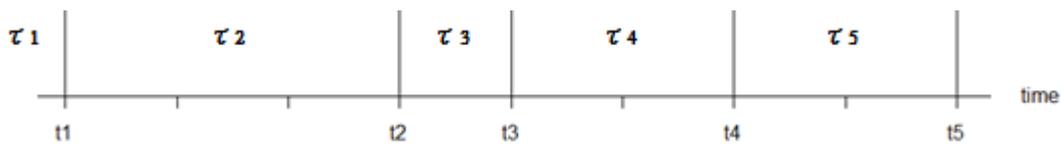
第二章 群集卜瓦松的概念及應用

第一節 點過程

在宇宙萬物中，每天都會發生各種不同規律與不規律的現象，而這些隨機現象的發生與波動的變化，我們可以用空間上的任一點來做紀錄，在一段隨機過程的實現值(realizations)是由一序列的點事件所組成，再透過某些特殊機率分配函數的計算，推導出來的統計理論我們就叫做隨機點過程(stochastic point process)，簡稱點過程。(陳旭昇, 2009)

一個點過程的實現值可以用事件發生之時間序列 $\{t_i\}$ 來加以描述，但此序列僅代表事件發生的時間，並不足以將點過程所具有的特性完全表達。因此，為了提供更完善的訊息及強調此一點過程的特性，通常利用事件發生間隔時間 $\{\tau_i\}$ 或次數兩種不同的方式將 $\{t_i\}$ 拆解成新的序列，而新的序列將更具有更多統計意義，並可將點過程的特徵彰顯出來。

新的間隔時間序列 $\tau_i = t_i - t_{i-1}, i = 1 \dots n, (t_0 = 0)$ ，代表第 i 個間隔時間是第 i 個事件與第 $i - 1$ 個事件之間的差距，因此可見， $\{\tau_i\}$ 是由一序列的正實數所組成。



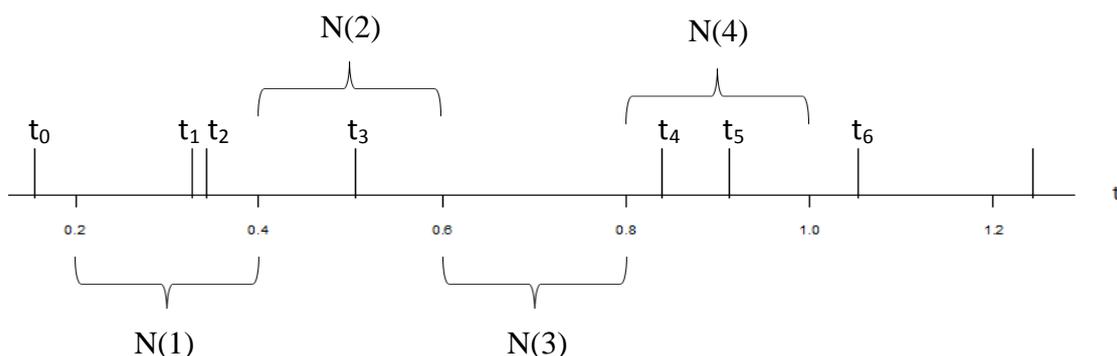
圖三、事件發生之時間序列與間隔時間序列

第二節 廣義發生次數

將原始資料記錄之間隔時間轉換成在固定時間窗戶(window, 簡稱 w)裡所發生之次數, 產生的新序列為一正實數序列, 以 $N(t)$ 表示之。計算方法詳述如下, 假設一事件之實現值為下圖



$w = 0.2$ 下, 0.2~0.4 間發生兩次實現值; 0.4~0.6 間發生一次實現值; 0.6~0.8 間沒有發生; 0.8~1.0 間發生兩次實現值, 但以這種一般的計次方法來計算往往會忽略了這段訊息將提供給我們的資訊, 好比 0.6~0.8 間發生次數其實並非 0。



我們運用一種特殊的計次方法—廣義發生次數來計算, 以每個實現值之間隔發生率為 1, 實現值與窗戶起始點間的距離百分比來計算, 形成一新序列。舉例來說, 用上圖例來做說明, $t_0=0.18, t_1=0.34, t_2=0.35, t_3=0.51, t_4=0.82, t_5=0.91, t_6=1.05$, 在第一個 $N(1)$ 的窗戶下, 是使用範圍 $N(1)$ 內實現值 t_0 到實現值 t_1 的距離百分比, 加上 t_1 到 t_2 的實現值, 再加上範圍 $N(1)$ 內實現值 t_2 到實現值 t_3 的距離百分比, 如下:

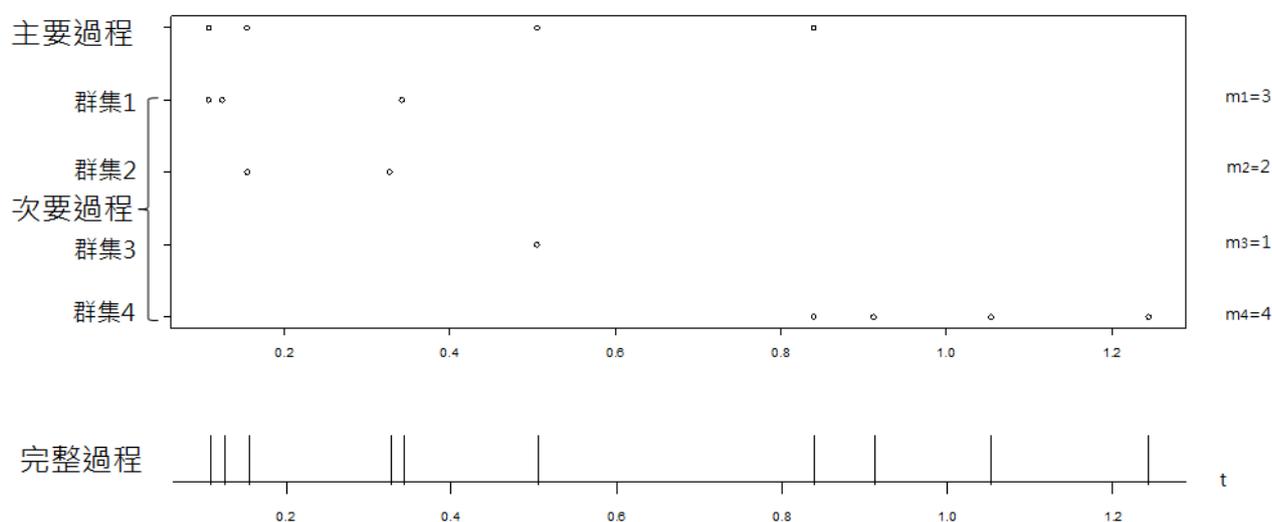
$$\frac{t_1 - 0.2}{t_1 - t_0} + \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} + \frac{0.4 - t_2}{t_3 - t_2} = \frac{0.34 - 0.2}{0.34 - 0.18} + 1 + \frac{0.4 - 0.35}{0.51 - 0.35} = 2.19$$

即 $N(1)=2.19, N(2)=0.92, N(3)=0.61, N(4)=1.71\cdots$ 等。此方法產生的一新序列, 雖然會喪失實現值本身的計次方式, 但透過這樣的特殊計次方式, 即使窗戶寬度再小也不會降低這一資訊所能提供的程度。

第三節 群集卜瓦松過程(Clustering Poisson process)

(一) 群集卜瓦松過程之定義

群集卜瓦松過程顧名思義及以卜瓦松過程為基礎所發展而成。一個群集卜瓦松過程，是由一隨機序列的群集內含不同個數之隨機事件依時間發生先後順序排列組成，它包含主要過程與次要過程兩個重要部份(見 Grüneis et al., 1989)，茲說明如下：



圖四、群集卜瓦松過程

① 主要過程(primary process)

是由一序列的主要事件所組成。(Grüneis, 1989)

② 次要過程(secondary process)

在主要過程中，每個主要事件皆會觸發(trigger)一序列的次要事件，即群集，每個群集都是由 m 個隨機事件所組成(m 為隨機變數)。各群集間不但彼此獨立，且具有相同的分配，次要過程即這些群集的集合。因此，當 $m=1$ 時，只有主要事件的發生，未觸發任何次要過程，不具群集的現象；當 $m>1$ 時，表示此過程是由主要事件與其觸發的一序列次要事件所組成，具有群集的現象。

③ 完整過程(complete process)

將所有不同群集內發生之次要事件，依其發生時間的先後依序疊合，形成一個無差別序列(indistinguishable sequence)，亦即當一個完整的群集卜瓦松過程形成後，各群集內的結構也就不這麼重要了。

(二) 群集過程之分配

主要過程是由一序列的主要事件所組成，在此本研究以卜瓦松分配定義之，在時間區間 t 中發生 x 次事件的機率，機率分配如下，

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots, n, 0 \leq \lambda t < \infty . \quad (2.1)$$

$$E[x] = \lambda t, \text{Var}[x] = \lambda t .$$

若主要過程發生次數呈卜瓦松分配，其間隔時間機率密度函數是指數分配：

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda} x}, x = 0, 1, 2, \dots, n, \lambda > 0 . \quad (2.2)$$

$$E[x] = \lambda, \text{Var}[x] = \lambda^2 .$$

(三) 群集個數之分配

群集個數分配是指每個群集事件發生個數之分配，群集個數以隨機變數 m 表示之，其機率函數為

$$P(m) = \frac{m^z}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z} . \quad (2.3)$$

其中， N_0 表給定之最大群集個數， z 表特定實數，

M 之期望值為

$$E(m) = \sum_{m=1}^{N_0} m \cdot p(m) = \frac{\sum_{m=1}^{N_0} m^{z+1}}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z} . \quad (2.4)$$

m 之二次動差為

$$E(m^2) = \sum_{m=1}^{N_0} m^2 \cdot p(m) = \frac{\sum_{m=1}^{N_0} m^{z+2}}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z} . \quad (2.5)$$

第三章 研究方法

第一節 頻譜分析(spectral analysis)

在時間序列分析法可分為時間定義域分析法(time domain analysis)和頻率定義域分析法(frequency domain analysis)兩大類，兩者中間的過程經過正弦與餘弦的傅利葉轉換(Fourier transform)劃上等價的關係。比如說一個訊號的進入，可以將它從時間定義域經傅利葉轉換成頻率定義域，也可用逆傅利葉轉換將它轉回時間定義域。(Shumway, 2000)

① 時間定義域分析：

以事件發生與數列時間的對應關係，利用自我相關函數(Autocorrelation function，簡稱 ACF)做為建模的依據。

② 頻率定義域分析：

以頻率週期做為觀測對象，紀錄累積發生次數之序列，將數列中的週期波分離出來，探討其週期性內部資料的重要性，故此方法著重於解釋而非預測。

頻譜分析即屬頻率定義域範疇，主要是研究時間數列的頻率特性，頻譜密度函數(spectral density function) $S(f)$ 即頻率 f 的函數。週期性(seasonal)時間序列是指每隔一時段，會重複一次，最常見的週期函數是餘弦曲線(cosine curve)：

$$R \cos(2\pi ft + \phi) . \quad (3.1)$$

R 表振幅(amplitude)， f 表週期(frequency)， ϕ 表相位角(phase angle)，它的連續波動函數可使用三角法(trigonometric)重新參數化表示為：

$$A \cos(2\pi ft) + B \sin(2\pi ft) . \quad (3.2)$$

其中 $A = R \cos(\phi)$ ， $B = -R \sin(\phi)$ ，亦即 $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ ，在 m 個餘弦曲線內隨意給定一振幅、週期和相位角，做成線性組合式表示如下：

$$y_t = A_0 + \sum_{j=1}^m [A_j \cos(2\pi f_j t) + B_j \sin(2\pi f_j t)] . \quad (3.3)$$

其中週期 $0 < f_1 < f_2 < \dots < f_m < \frac{1}{2}$, $A_j \sim N(0, \sigma_j^2)$, $B_j \sim N(0, \sigma_j^2)$,

一序列 $\{\gamma_k\} = \{\dots, \gamma_{-2}, \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots\}$ 經傅立葉轉換頻譜密度寫做：

$$S(f) = \gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(2\pi f k) . \quad (3.4)$$

逆函數

$$\gamma_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(f) \cos(2\pi f k) df . (Cryer, 2008) \quad (3.5)$$

群集普瓦松過程之頻譜密度函數由兩部分組成，如下：

$$\begin{aligned} S(f) &= 2 \langle n_{\text{tot}} \rangle + 2 \langle n_c \rangle \times Q(f) \\ &= 2 \langle n_c \rangle \langle m \rangle + 2 \langle n_c \rangle \times c \times (f \times \langle \lambda \rangle)^{-b} \end{aligned} \quad (3.6)$$

在上列數學式中，第一項為白噪音，第二項為額外噪音(excess noise，簡略 EXN)，

其中 $\langle n_{\text{tot}} \rangle = \langle n_c \rangle \langle m \rangle$ 、 $Q(f) = c \times (f \times \langle \lambda \rangle)^{-b}$ ，

$\langle n_{\text{tot}} \rangle$ ：事件總平均發生率〈mean rate of overall occurrence of events〉，

$\langle n_c \rangle$ ：群集平均發生率〈mean rate of cluster occurrence〉，

$\langle m \rangle$ ：群集平均個數〈mean rate of cluster size〉，

$\langle \lambda \rangle$ ：群集內事件發生之平均間隔時間，

$Q(f)$ ：群集內事件時間相互之關係，

c ：常數〈constant〉，

f ：頻率〈frequency〉，

b 為特定實數 z 的函數，定義為

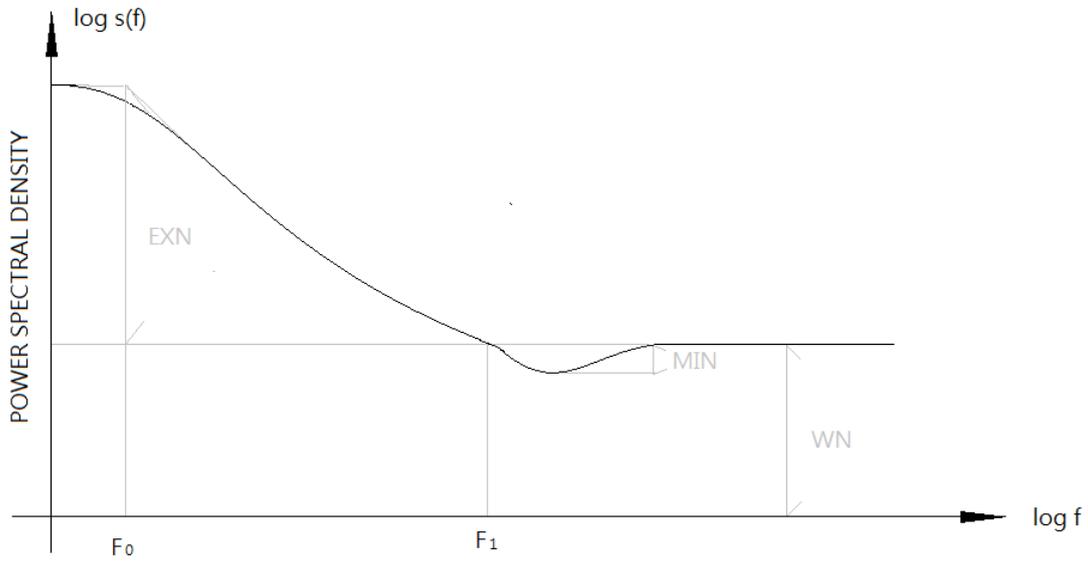
$$b = \begin{cases} 0 & , \text{ 當 } -\infty < z \leq -3 \\ z+3 & , \text{ 當 } -3 \leq z \leq -1 \\ 2 & , \text{ 當 } -1 \leq z \leq \infty \end{cases} ,$$

(Grüneis and Baiter, 1986)。

下圖可見一雙對數尺度頻譜圖〈double-logarithmic scale spectrum〉，呈 $1/f$ 波動形態，其中又以額外噪音的上下界 F_0 與 F_1 及範圍 EXN 可求出頻譜密度的斜率 B_e ，

也就是說當頻率 f 增加時 $S(f)$ 遞減的快慢程度，

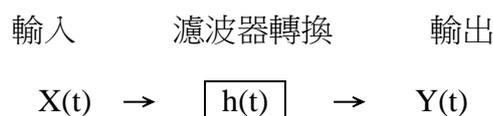
$$EXN = \frac{\langle m^2 \rangle}{\langle m \rangle}, \quad B_e = \frac{\log(EXN)}{\log\left(\frac{F_1}{F_0}\right)}.$$



圖五、雙對數尺度頻譜圖

第二節 動力轉換函數 (Power transfer function)

這裡的轉換函數亦指，一個隨機信號的輸入，經由一個線性系統帶通濾波器 (band-pass filters) 的轉換，轉變成一個有效的資訊，原理如下：



傳統的轉換函數(transfer function)是在給定頻率定義域下，輸入平穩信號 $X(t)$ 的頻譜密度 $S_x(f)$ ：

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma x(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau . \quad (3.7)$$

反映函數 $h(t)$ (response function) 透過傅利葉線性轉換成 $H(f)$ ，共軛根乘積的

$|H(f)|^2$ 即是動力轉換函數：

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi j f t} dt . \quad (3.8)$$

$$H(f) \cdot \overline{H(f)} = |H(f)|^2 . \quad (3.9)$$

最終推導結果， $S_y(f)$ 是信號 $X(t)$ 轉換後的頻譜密度，如下：

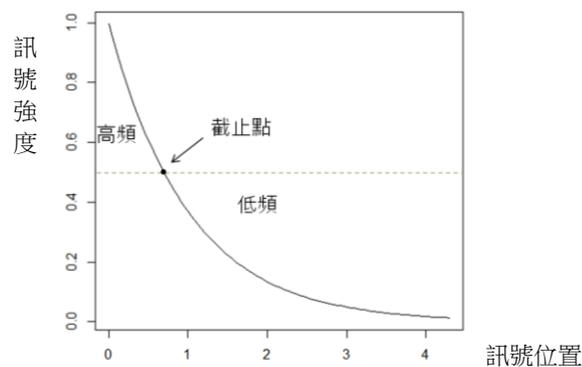
$$S_y(f) = S_x(f) H(f) \cdot \overline{H(f)} = S_x(f) \cdot |H(f)|^2 . \quad (3.10)$$

本研究在此使用的 $H(f) = \theta(e^{i2\pi f})$ ，其中 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 。(Shumway, 2000)

濾波器(filter)是擷取某特定頻率範圍之訊號，除去不必要之雜訊，其目的在通過一特定頻帶的訊號，並衰減此頻帶以外的所有訊號。依據其頻率的特性，可分為「低通濾波器(low pass filter)」、「高通濾波器(high pass filter)」、「帶通濾波器(band pass filter)」及「帶拒濾波器(band reject filter)」等四類。在本研究中，只針對前兩項濾波器之功能特性做探討。(陳明周, 2002)

① 低通濾波器

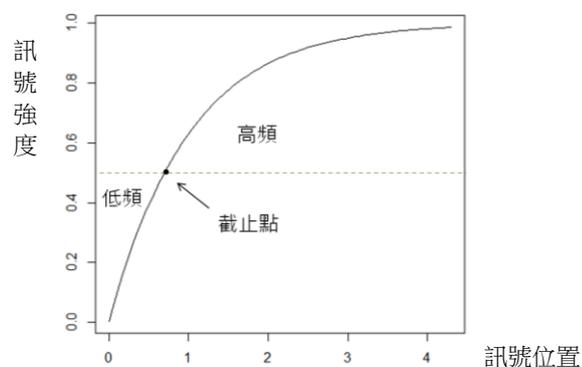
低通濾波器的功能是使比較尖銳的訊號(高頻的部分)會被壓低，而低頻的部分則比較不受到影響，也就是說，低頻訊號通過一截止點(cutoff point)，高頻訊號衰減。頻率濾波器剖面圖如下：



圖六、低通濾波器剖面圖

② 高通濾波器

高通濾波器是指高於截止頻率之訊號通過，低於截止頻率之訊號衰減，與低通濾波器正好相反。頻率濾波器剖面圖如下：



圖七、高通濾波器剖面圖

第四章 模擬與分析

本章將描述本研究的資料模擬過程與目的，及所採用的研究方法。

第一節 模擬資料

(一) 參數選取

本研究以 Grüneis et al. (1989)文中，依據實際測量所估出貓在異相睡眠和注視鳥時神經傳導流之群集普瓦松過程，進行兩種不同參數之模擬。茲說明如下(見表一)：

表一、主要過程與次要過程神經傳導流之參數選取

參數	異相睡眠	注視鳥
$\langle n_c \rangle$ 群集平均發生率	1.24	3.01
$\langle m \rangle$ 群集平均個數	18.1	1.95
N_0 給定之最大群集個數	554	50
z 特定實數	-1.50	-2.35

(二) 生成資料

本模擬生成之資料係使用統計軟體 R，版本 2.15.2 執行。針對貓在上表兩種生理狀態下，依據 Grüneis et al. (1989)文中給定參數模擬各自的神經傳導流，兩組資料除了參數不一外，其生成方式相同。將生成方式說明步驟如下：

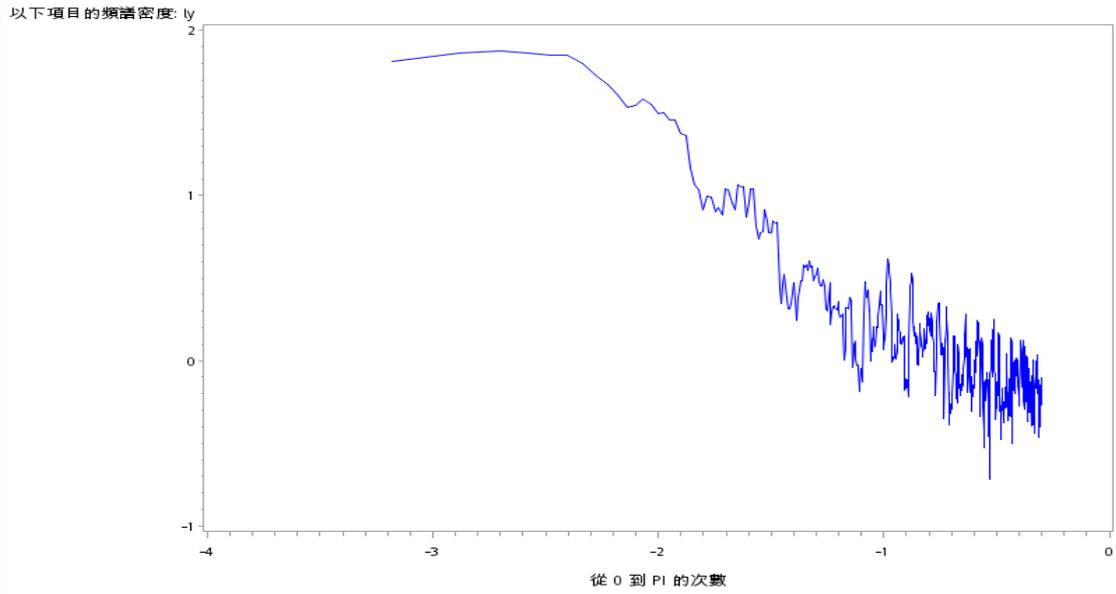
步驟一，先產生主要過程。由於主要過程之發生次數呈卜瓦松分配，所以其間隔時間機率密度函數呈指數分配，在資料的產生將務必以指數分配來生成。在本研究中，為了模擬出各自擁有 1000 筆的廣義次數，將貓在異相睡眠與注視鳥時，分別隨機產生 200 筆群集平均發生率為 1.24 的資料，與 600 筆群集平均發生率為 3.01 的資料，各自產生之結果即為主要過程。

步驟二，次要過程的發生。次要過程乃是主要事件觸發之群集，這些群集呈一特殊機率分配(見(2.3))，詳述如下：貓在異相睡眠時給訂最大群集個數 $N_0=554$ 、特定實數 $z=-1.50$ ，經特殊機率分配隨機生成 200 筆，再變數轉換成不同群集內次要事件發生的個數，使用指數分配群集平均個數 $m=18.1$ 生成次要過程；貓在注視鳥時給定最大群集個數 $N_0=50$ 、特定實數 $z=-2.35$ ，經特殊分配隨機生產 600 筆，經變數轉換，不同群集內次要事件發生的個數，再使用指數機率分配，群集平均個數 $m=1.95$ 產生次要過程。

計算完步驟一之主要過程後，再將所有群集內之次要事件依其發生時間先後排序，依次堆疊在主要過程上，疊合而成的一序列之隨機事件，亦即生成完整之集群普瓦松過程。

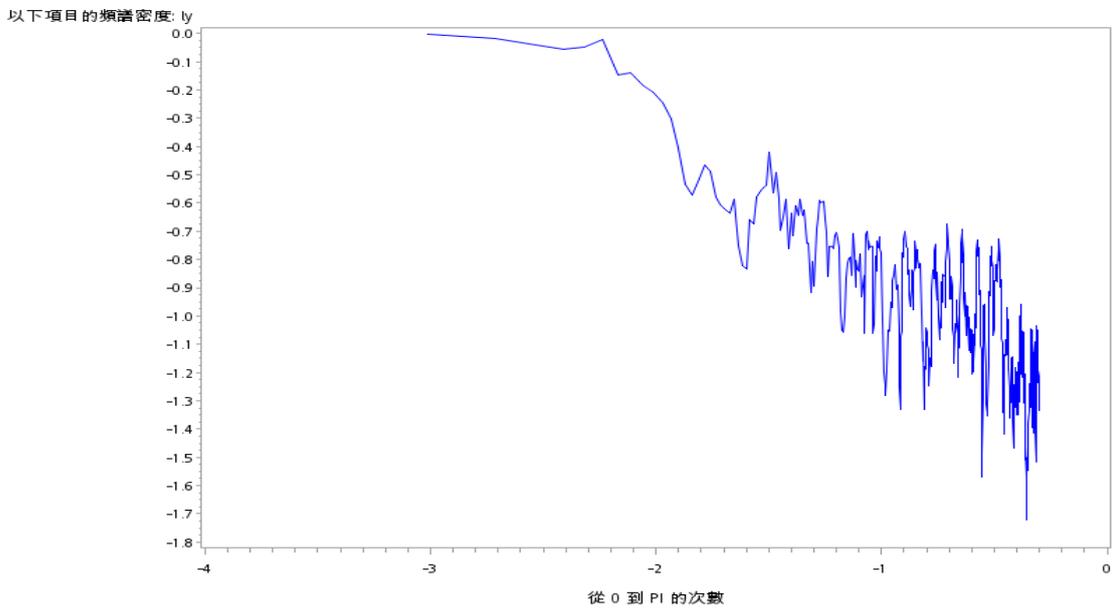
步驟三，將上面得出貓在異相睡眠和注視鳥的完整過程，使用前述第二章第二節之廣義發生次數計算法將資料轉換，在窗戶 $= 0.2$ 下，分別計算出其頻率即其頻譜密度函數，使用統計軟體 SAS 9.4 版本，取對數後畫出之頻譜圖，可以看出不論是模擬貓在異相睡眠的情況下或在注視鳥時，其頻譜密度均符合我們第一章節所提到的 $1/f$ 波動型態〈見下頁圖八、圖九〉。

a. 貓在異相睡眠時：



圖八、貓在異相睡眠時頻譜圖

b. 貓在注視鳥時：



圖九、貓在注視鳥時頻譜圖

第二節 分析探討

(一) ARMA 配適

在本研究中發現，貓在異相睡眠和注視鳥時的神經元傳導流之信號，取窗戶寬度=0.2 下，透過 ARMA 配適經以下動力函數轉換過後，不但可以任意變動參數值，亦可達到 1/f 的效果。下頁可見本研究貓在異相睡眠與看鳥之最佳配適模型與頻譜圖。

表二、動力轉換函數

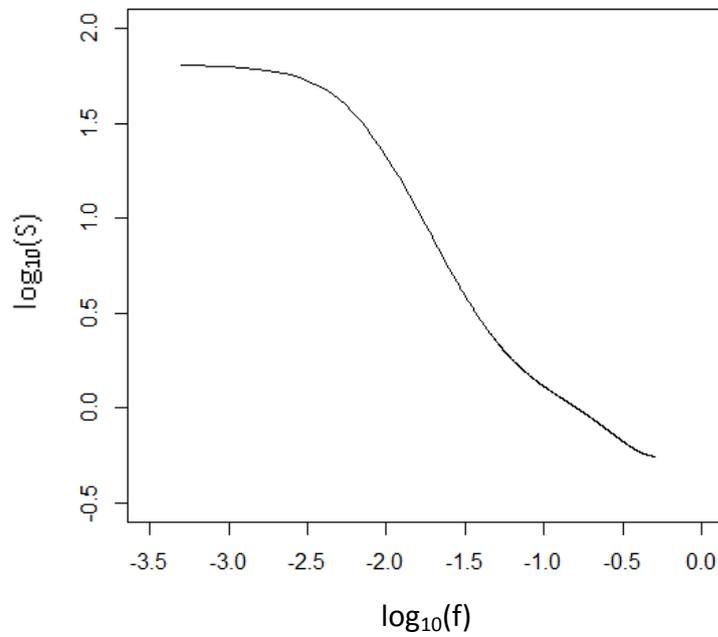
模型	(p , q)	$H(f)$
AR(1)	(1 , 0)	$\frac{1}{1 - \rho e^{2\pi i f}}$
AR(2)	(2 , 0)	$\frac{1}{1 - \rho_1 e^{2\pi i f} - \rho_2 e^{4\pi i f}}$
MA(1)	(0 , 1)	$1 - \theta e^{2\pi i f}$
MA(2)	(0 , 2)	$1 - \theta_1 e^{2\pi i f} - \theta_2 e^{4\pi i f}$
ARMA(1,1)	(1 , 1)	$\frac{1 - \theta e^{2\pi i f}}{1 - \rho e^{2\pi i f}}$
ARMA(1,2)	(1 , 2)	$\frac{1 - \theta_1 e^{2\pi i f} - \theta_2 e^{4\pi i f}}{1 - \rho e^{2\pi i f}}$
ARMA(2,1)	(2 , 1)	$\frac{1 - \theta_1 e^{2\pi i f}}{1 - \rho_1 e^{2\pi i f} - \rho_2 e^{4\pi i f}}$
ARMA(2,2)	(2 , 2)	$\frac{1 - \theta_1 e^{2\pi i f} - \theta_2 e^{4\pi i f}}{1 - \rho_1 e^{2\pi i f} - \rho_2 e^{4\pi i f}}$

a. 貓在異相睡眠時配適 ARMA(2,1) :

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \rho_2 y_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} = \left(\frac{1 - \theta_1 B}{1 - \rho_1 B - \rho_2 B^2} \right) \varepsilon_t .$$

表三、貓在異相睡眠時之 ARMA(2,1)參數

參數	估計值	標準誤
ρ_1	1.13849	0.04751
ρ_2	-0.17283	0.04183
θ_1	0.72443	0.03712



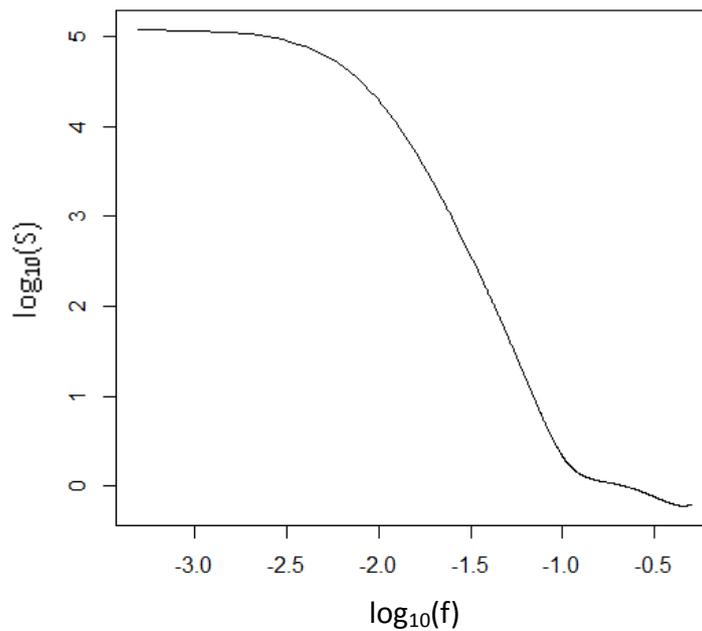
圖十、貓在異相睡眠時之 ARMA(2,1)頻譜圖

b. 貓在注視鳥時配適 ARMA(1,2) :

$$y_t = \rho_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} = \left(\frac{1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2}{1 - \rho_1 B} \right) \varepsilon_t .$$

表四、貓在注視鳥時之 ARMA(1,2)參數

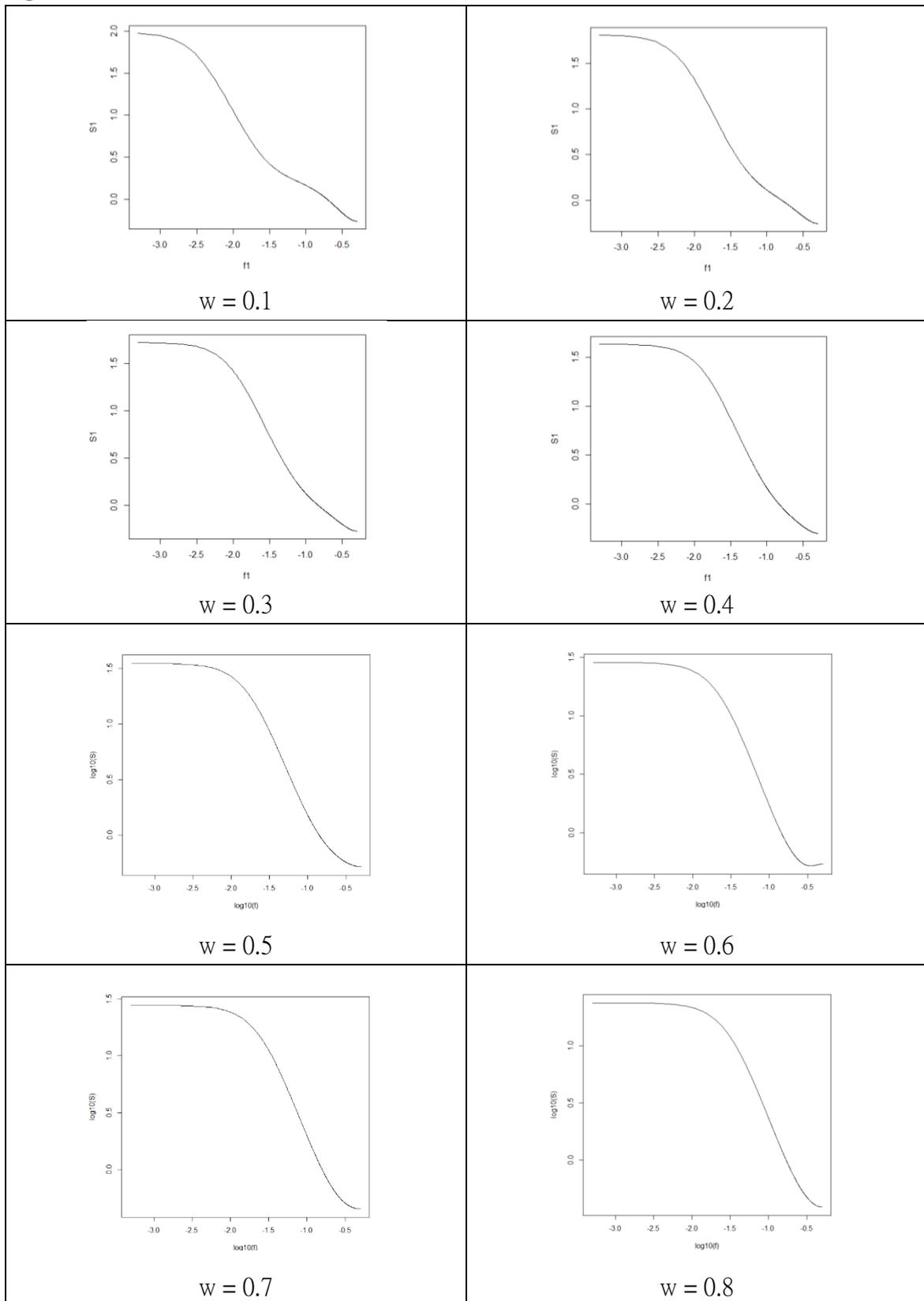
參數	估計值	標準誤
ρ_1	0.94647	0.02409
θ_1	0.64168	0.04016
θ_2	0.19353	0.03440



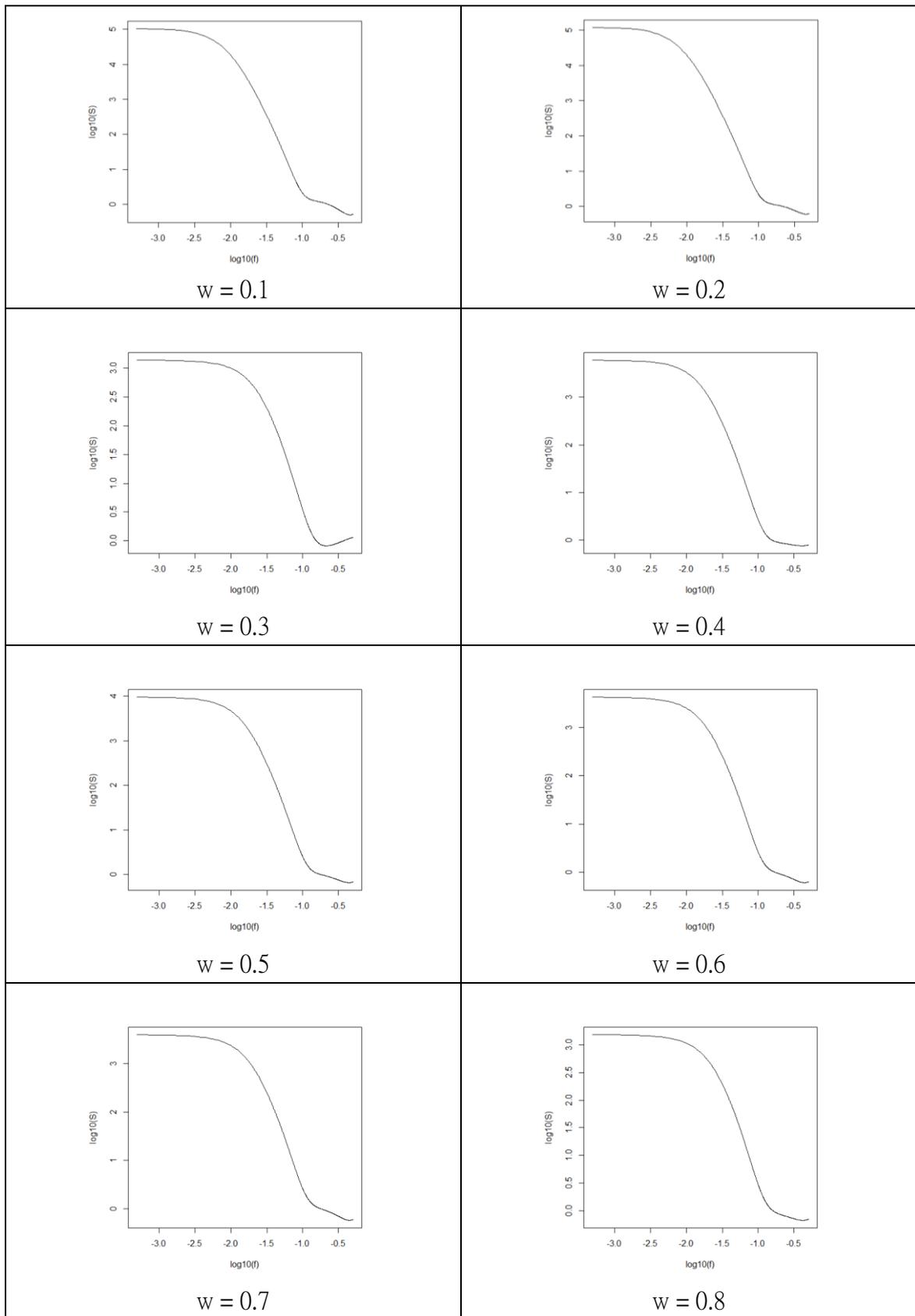
圖十一、貓在注視鳥時之 ARMA(1,2)頻譜圖

(二) 參數變動：藉由變更參數值來觀察頻譜密度函數圖形的變化。

①



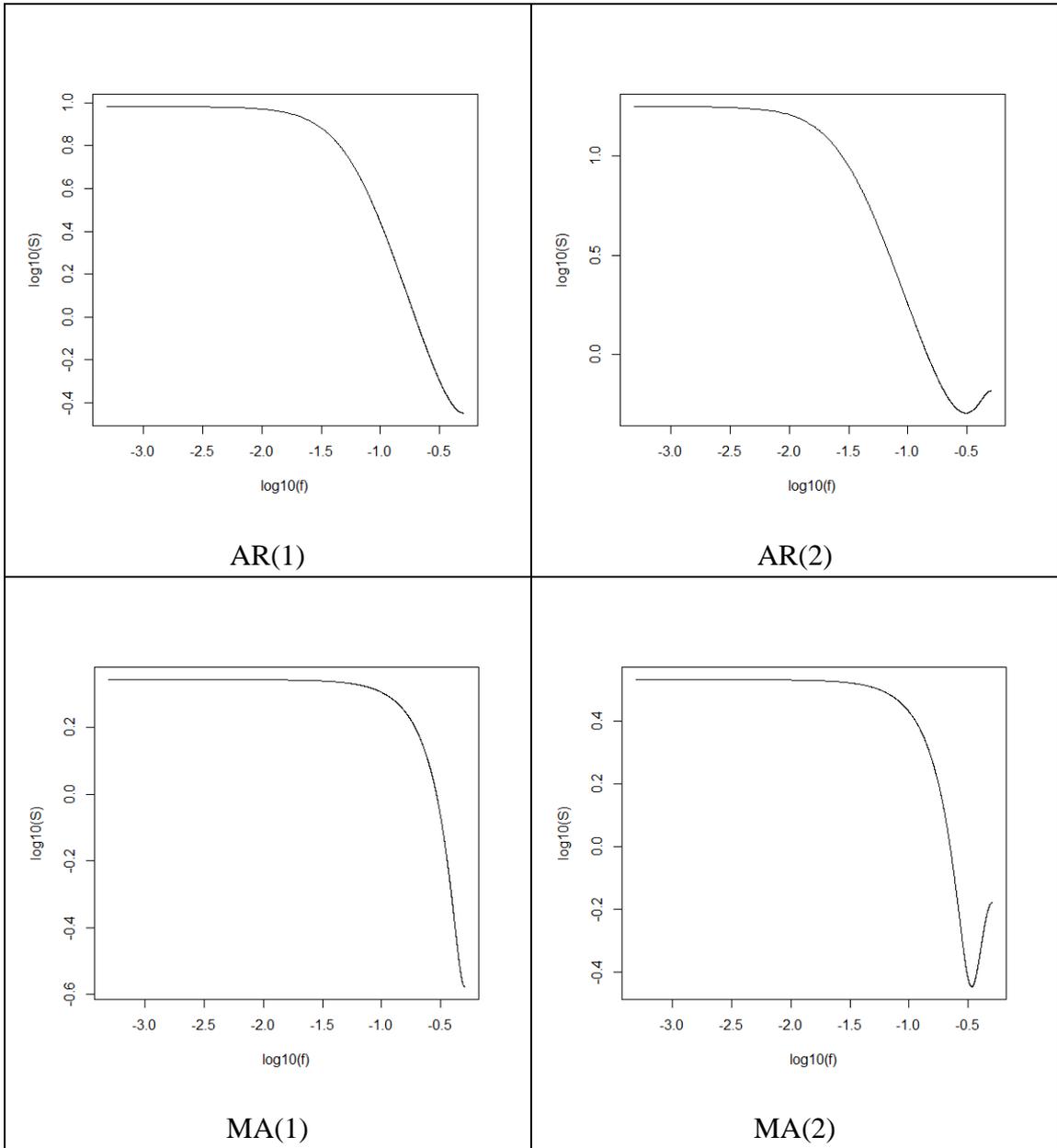
圖十二、在不同窗戶下，貓在異相睡眠時 ARMA(2,1)的對照圖



圖十三、在不同窗戶下，貓在注視鳥時 ARMA(1,2)的對照圖

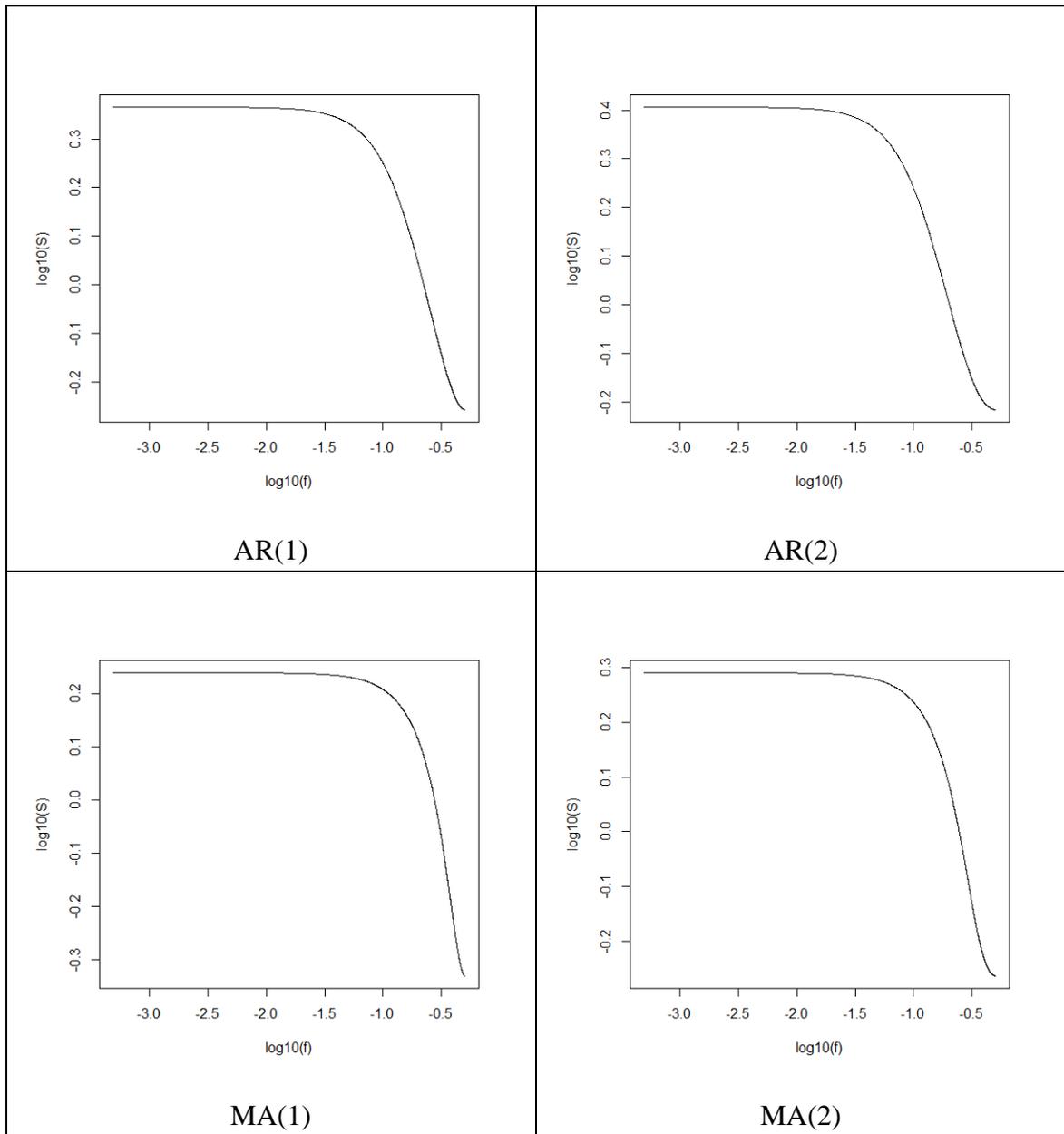
由此可見，我們窗戶取得越小，尾巴會微微翹起，窗戶越大，會越趨平緩。

②



圖十四、使用 AR(p)與 MA(q)模型比對貓在異相睡眠時頻譜圖之變化

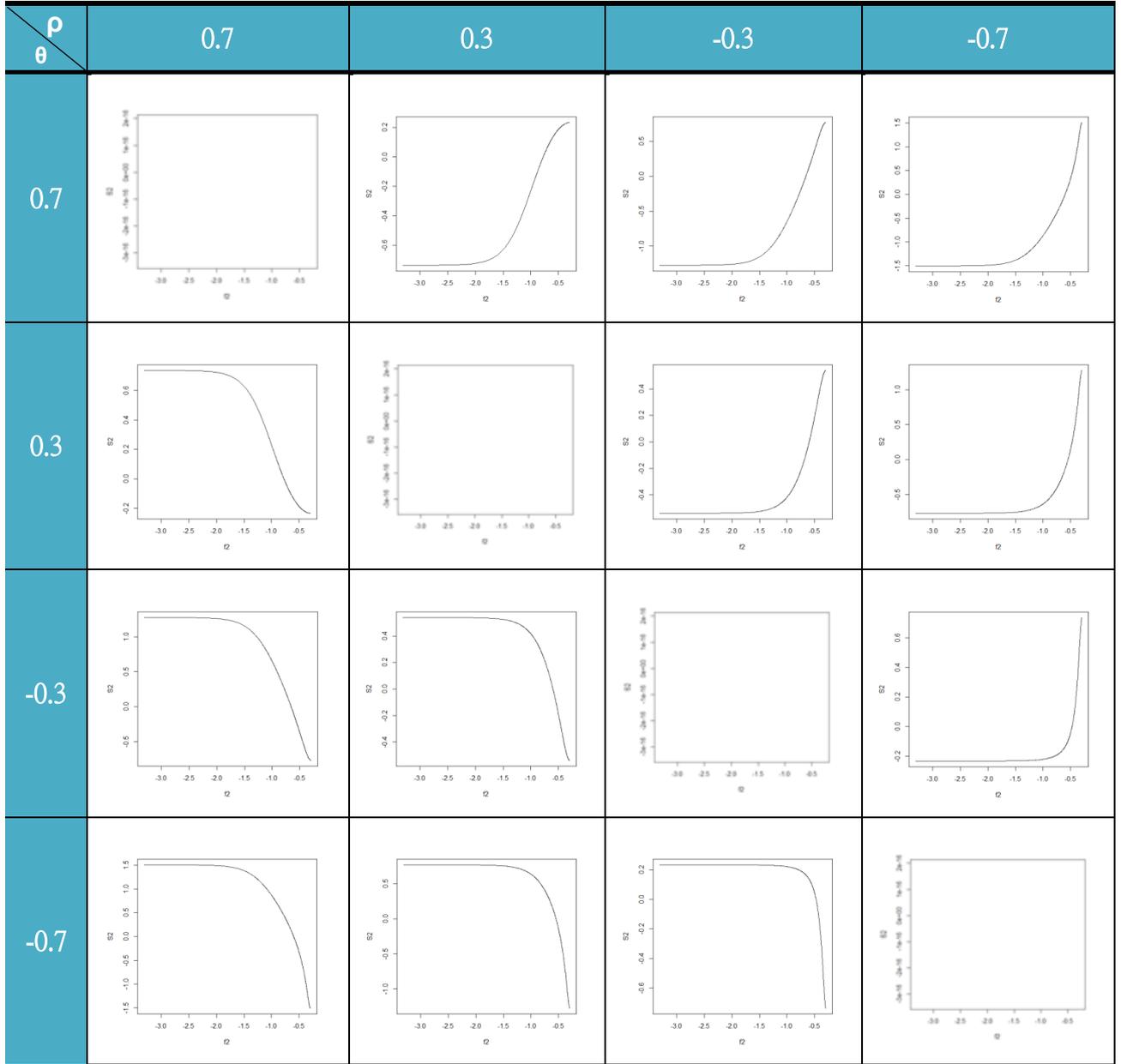
貓在異相睡眠時參數 p, q 取到 2 時尾巴會上鉤，更接近 Gruneis et al. (1989) 的頻譜密度函數圖。



圖十五、使用 AR(p)與 MA(q)模型比對貓在注視鳥時頻譜圖之變化

貓在注視鳥時參數 p, q 取 1 的時候坡度較緩、較接近 Gruneis et al. (1989)的頻譜密度函數圖。

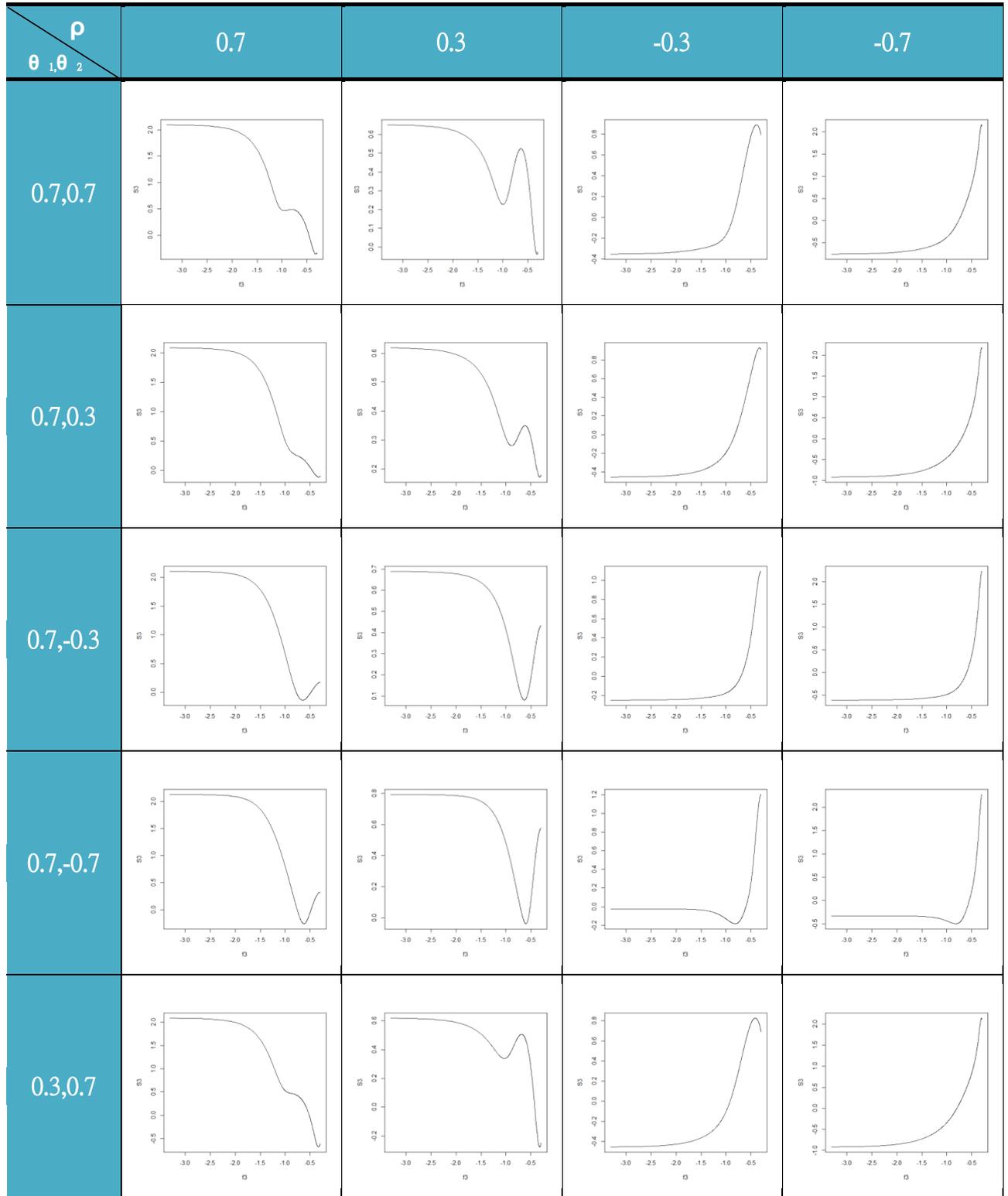
③ 另外本研究要探討的是變動 ARMA(p,q)模型中 ρ_p 與 θ_q 的參數會對頻譜圖有什麼影響，各取 ρ_p 為 0.3, -0.3, 0.7, -0.7 以及 θ_q 為 0.3, -0.3, 0.7, -0.7 之組合探討：



圖十六、ARMA(1,1)之頻譜圖

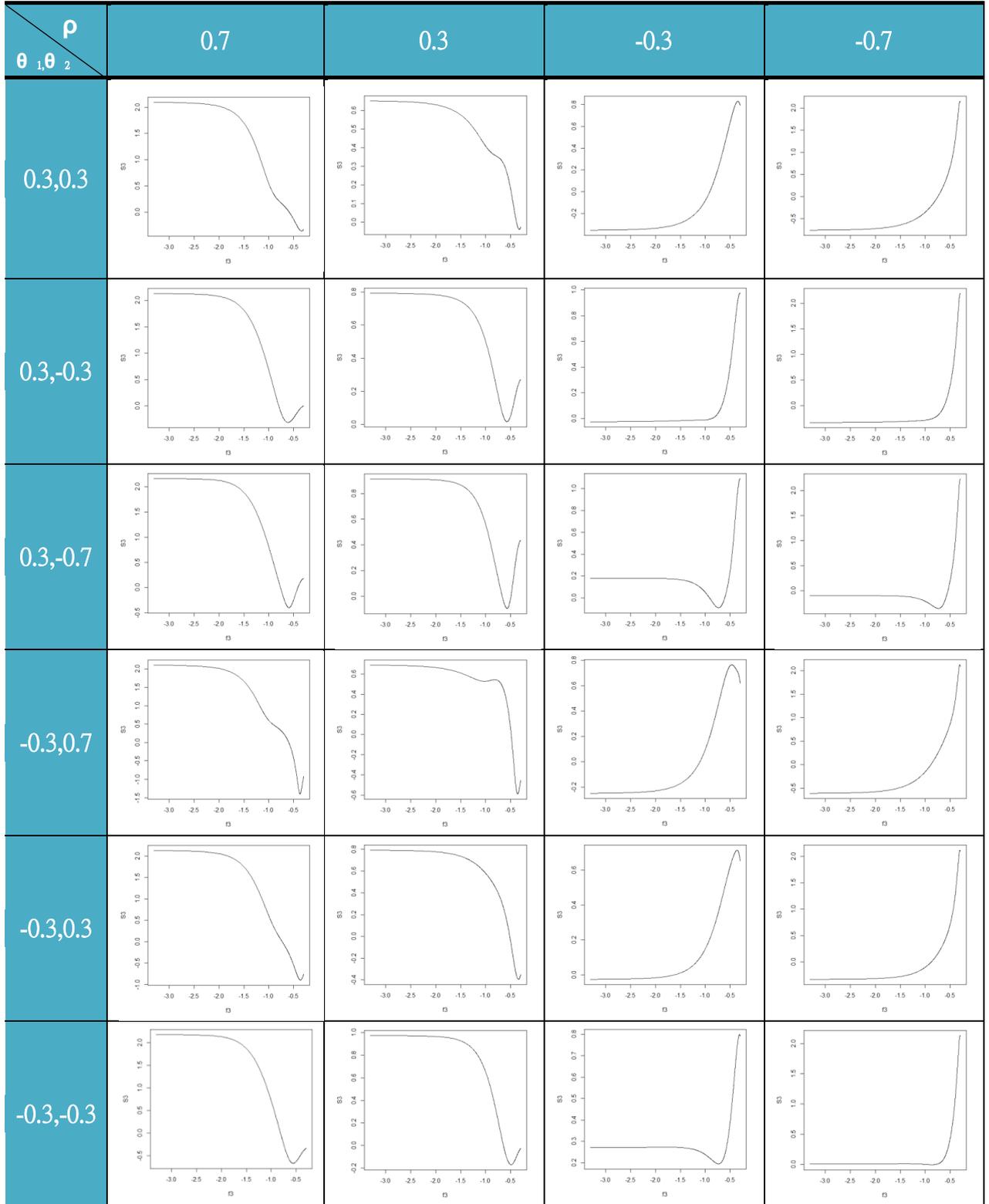
當 $\theta > \rho$ 時呈現高通濾波器型態，反之，當 $\theta < \rho$ 時呈現低通濾波器型態。

圖十七、ARMA(1,2)之頻譜圖



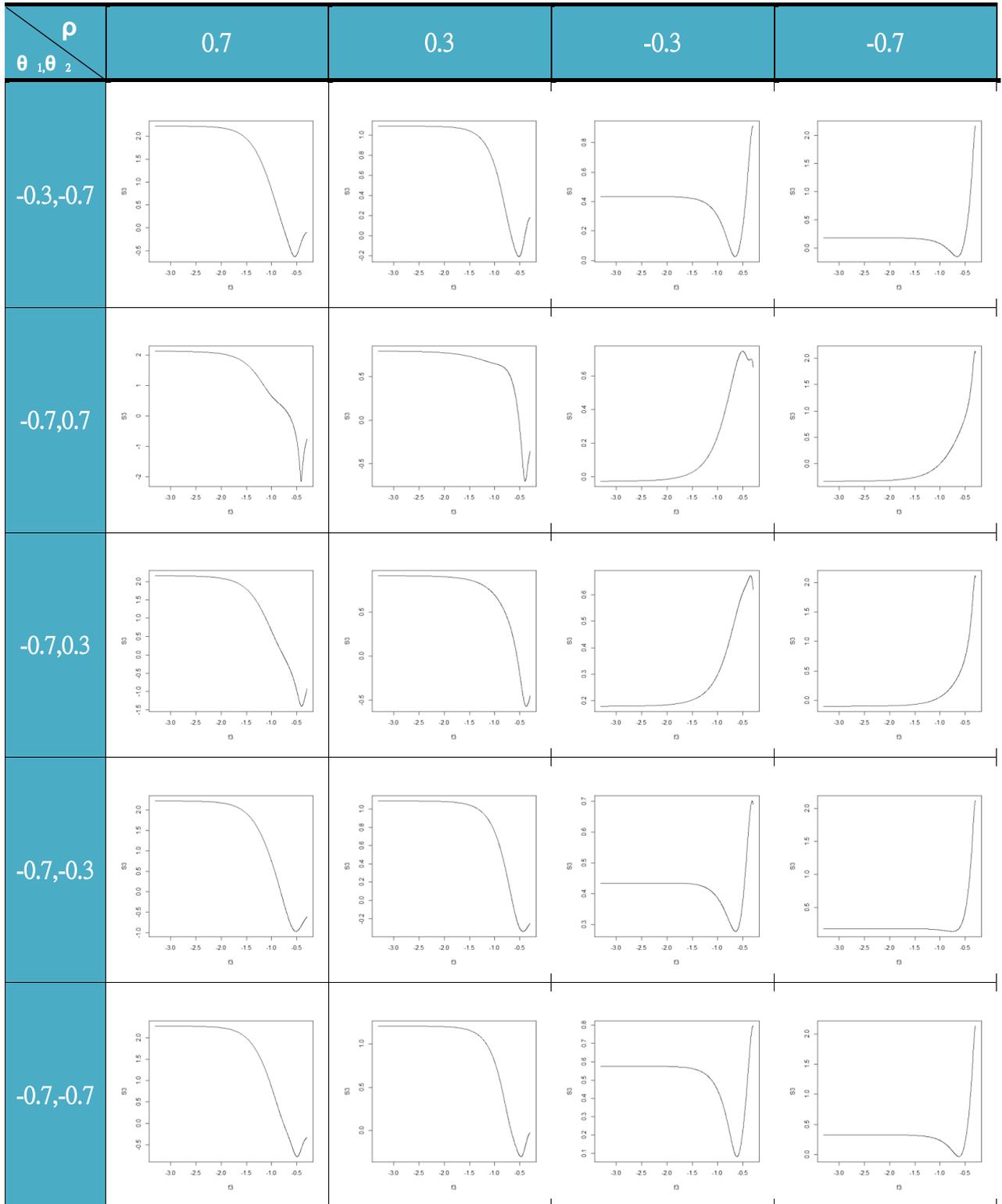
(續後頁)

(接前頁)



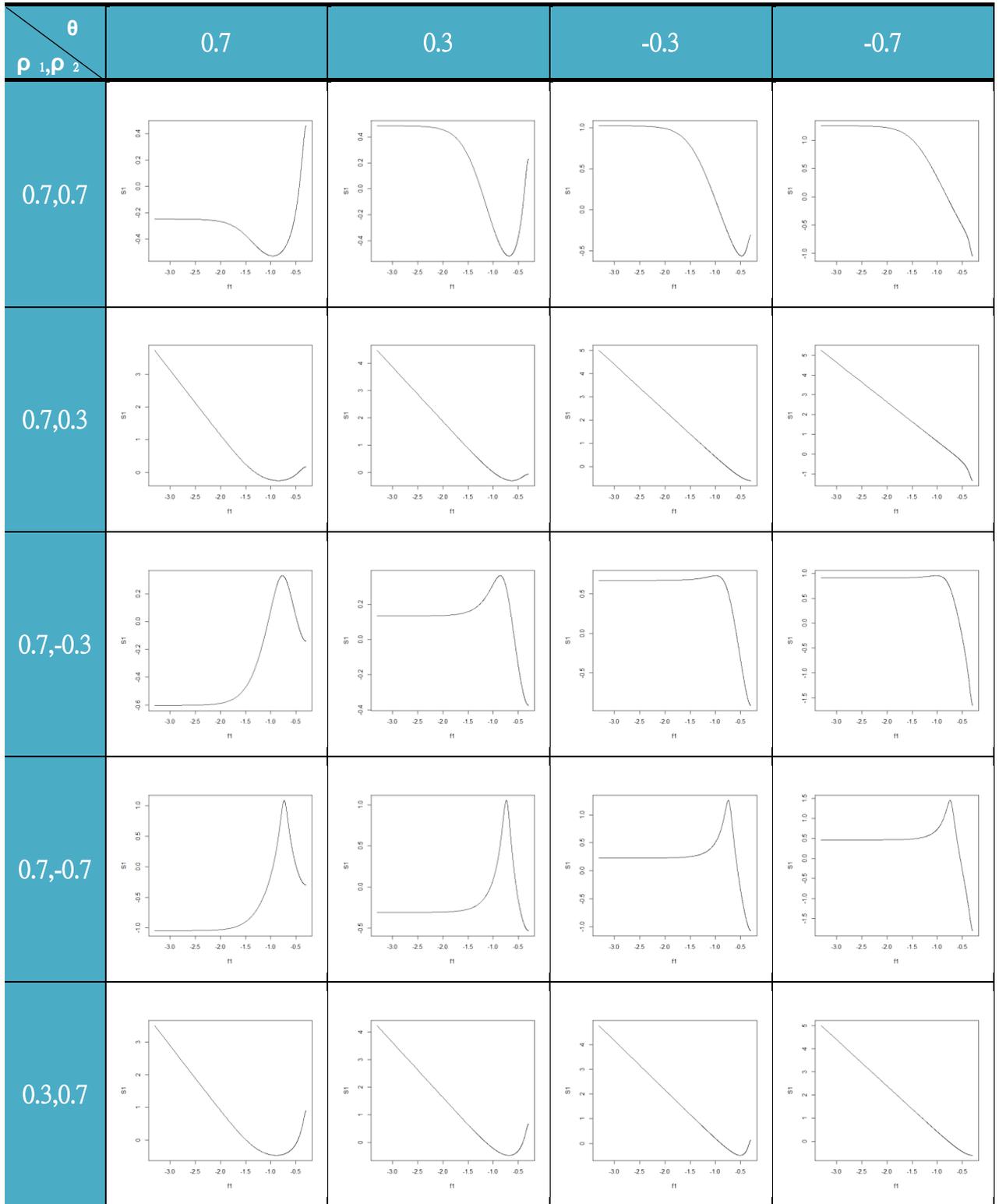
(續後頁)

(接前頁)



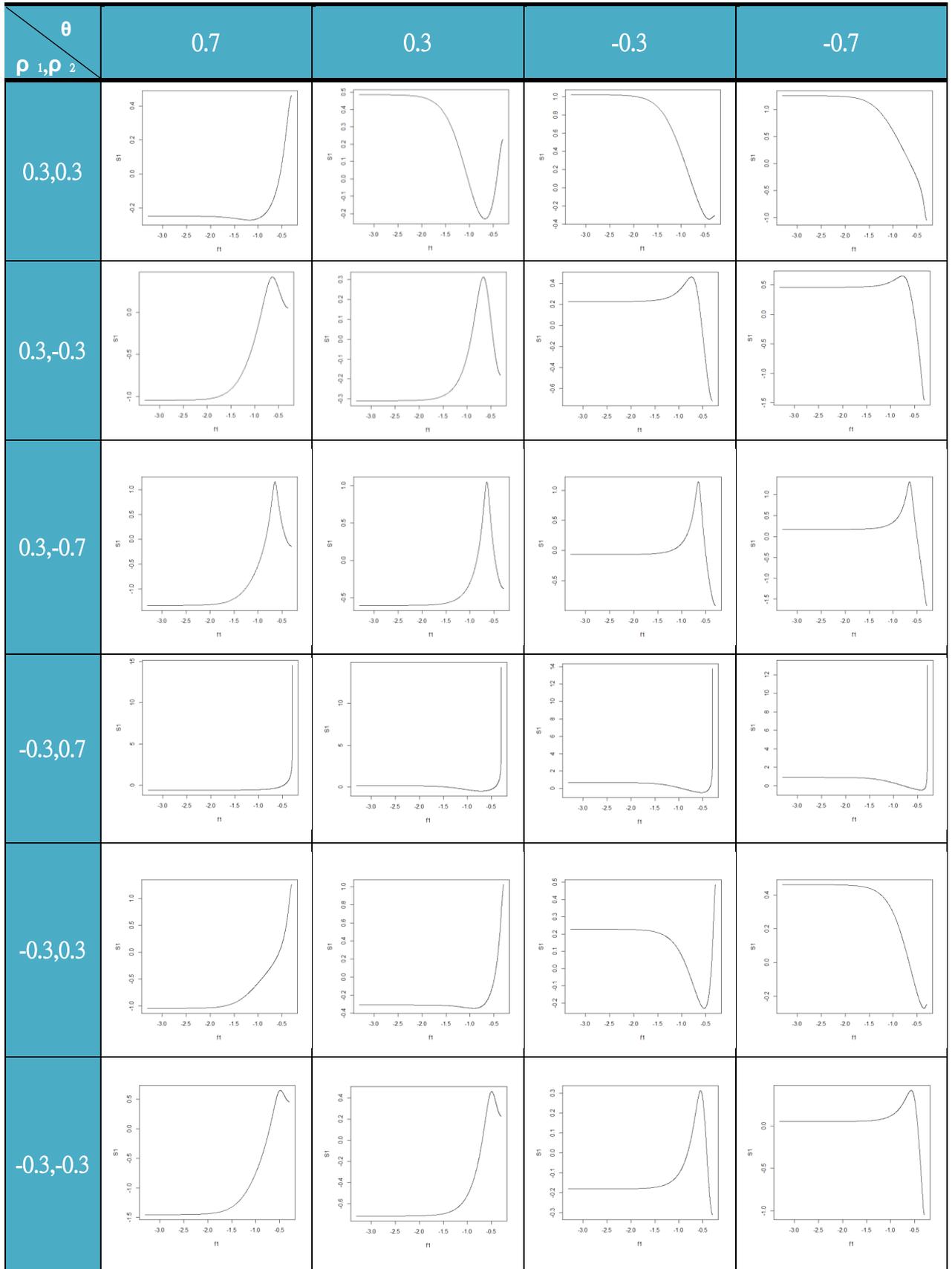
可以發現到，不論 θ_1 和 θ_2 如何變動，當 $\rho > 0$ 時呈現低通濾波器型態； $\rho < 0$ 時呈現高通濾波器型態。

圖十八、ARMA(2,1)之頻譜圖



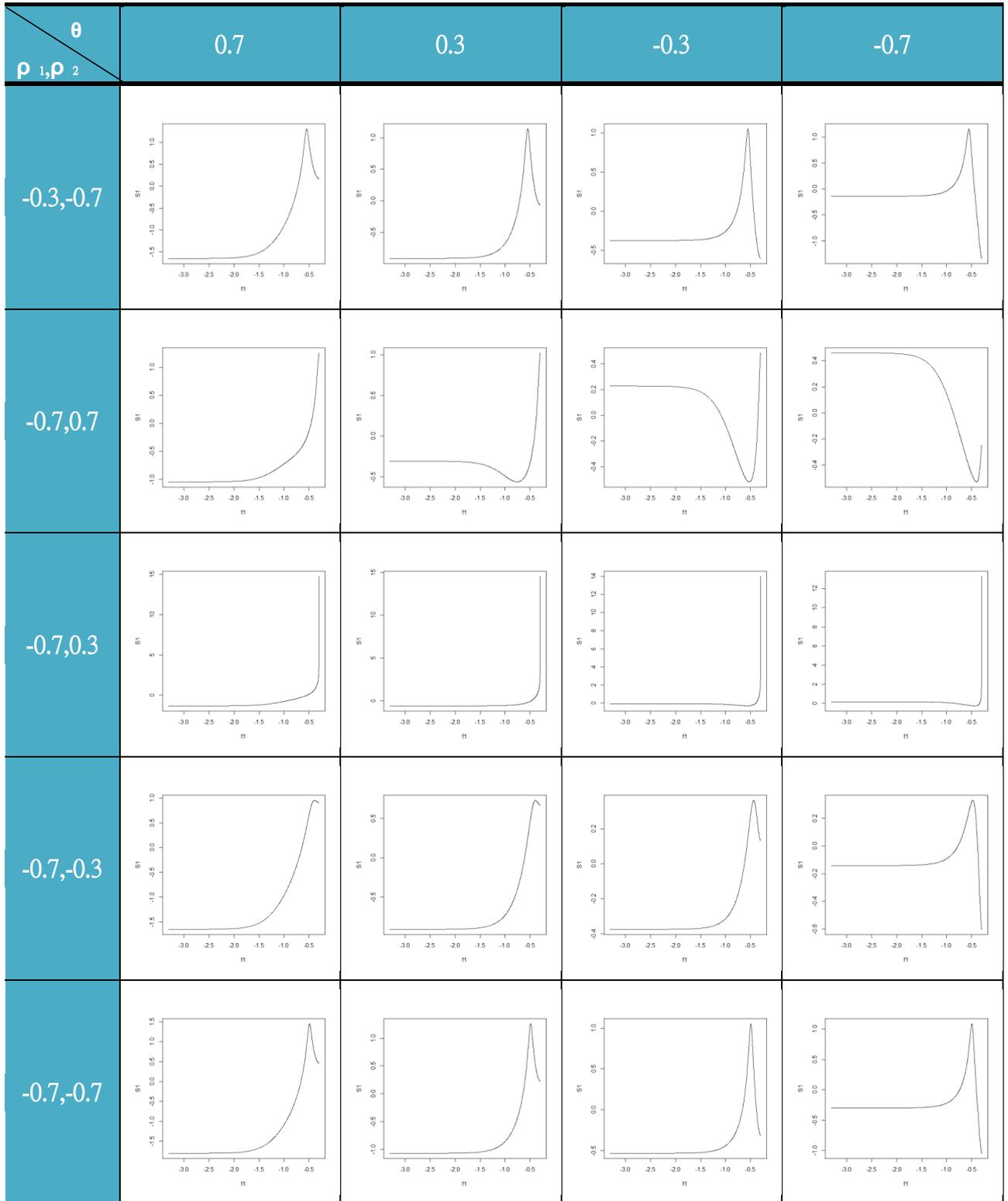
(續後頁)

(接前頁)



(續後頁)

(接前頁)



跟 ARMA(1,2)不同的是，不論 ρ_1 和 ρ_2 怎麼組合 θ 值由正到負的頻譜密度圖有漸趨平緩的趨勢，甚至是由高通濾波器翻轉成對立的低通濾波器。

第五章 結論與後續研究

第一節 結論

本研究利用模擬之資料來探討貓的 MRF 神經傳導流所具備之統計性質，並與 Gruneis et al. (1989)實測之頻譜圖做比對，所得結果一致，貓在異相睡眠和注視鳥時皆具有 $1/f$ 的波動特性，所以在實際資料取得不易的情況下，群集卜瓦松之過程不失做為此類神經傳導流研究模擬之一種選擇。

接著我們使用 ARIMA 配適結果發現，此方法亦可達到 $1/f$ 的波動效果(見圖十、十一)，進而從各參數的變動，發現有高、低通濾波器波動的型態。在 ARMA(1,1) 時 $\theta > \rho$ 時呈現高通濾波器型態，反之， $\theta < \rho$ 時呈現低通濾波器型態；在 ARMA(1,2) 時，不論 θ_1 和 θ_2 如何變動， $\rho > 0$ 時呈現低通濾波器型態； $\rho < 0$ 時呈現高通濾波器型態；在 ARMA(2,1) 時，不論 ρ_1 和 ρ_2 怎麼組合 θ 值由正到負的頻譜密度圖有漸趨平緩的趨勢，甚至是由高通濾波器翻轉成對立的低通濾波器。

第二節 後續研究

本研究只單針對貓的腦網狀組織下的神經傳導流，在後續可嘗試使用不同的神經元，譬如感覺神經、運動神經或是地震、心跳脈搏…等資料做相關研究。

參考文獻

中文部分

1. 吳京一、童麗珠(2008)，睡眠你知多少事？(四)—簡說睡眠之神經調節，科學教育月刊，0017-0028。
2. 吳兆田(2013)，引導反思的第一本書(頁 132-133)，台北市：五南出版社。
3. 陳明周 (2002)，主動式濾波器簡介。元智大學。取至 <http://www2.hpu.edu.cn/www2/etc/upload/2012/12/222472520.pdf>
4. 陳旭昇(2009)，時間序列分析--總體經濟與財務金融之應用，台北市：東華書局。
5. 高碧徽(民國 87 年)，1/f 型態神經傳導流之點過程統計性質分析，東海大學統計研究所。
6. 朱家儀(民國 102 年)，台灣地區之地震發生頻度分析--以群集卜瓦松過程為適配工具，東海大學統計研究所。

英文部分

1. Grüneis, F., Nakao, M., Yamamoto, M., Musha, T., Nakahama, H., 1989, *An interpretation of 1/f fluctuations in neuronal spike trains during dream sleep.*, Biological Cybernetics: 161-169.
2. Grüneis, F. and Baiter, H.J., *More detailed explication of a number of a number fluctuation model generating 1/f pattern.* Physical 36A:432-452.
3. Pressing, J., 1999, *Sources for 1/f noise effects in human cognition and performance*, Paideusis - Journal for Interdisciplinary and Cross-Cultural Studies: Volume 2.
4. Musha, T. and Yamamoto, M., 1997, *1/f fluctuations in biological systems*, Engineering in Medicine and Biology Society, Proceedings of the 19th Annual International Conference of the IEEE, vol.6: 2692-2697.
5. Laguna, P., Moody, G.B., and Mark, R.G., 1998, *Power Spectral Density of*

Unevenly Sampled Data by Least-Square Analysis: Performance and Application to Heart Rate Signals, IEEE TRANSACTIONS ON BIOMEDICAL ENGINEERING, VOL. 45, NO. 6: 698-715.

6. Cryer, J.D., Chan, K.S., 2008, *Time Series Analysis With Applications in R*, 2nd Ed., Springer Texts in Statistics.
7. Shumway, R.H. and Stoffer, D.S., 2000, *Time series analysis and its applications*, Springer Texts in Statistics.
8. Reinsel G.C., 1997, *Elements of Multivariate Time Series Analysis*, 2nd Ed., Springer series in statistics.
9. Gardner W.A., 1988, *Statistical Spectral Analysis: A Non-Probabilistic Theory*, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, Prentice Hall information and system sciences series.