

東海大學

應用數學系

碩士論文

三相直流無刷馬達的數學模型與模擬

Mathematical Model and Simulation of Three
Phase Brushless DC Motors

The seal of Tungshai University is a circular emblem with a scalloped outer edge. It features a central cross, a horizontal line, and a stylized 'S' shape. The text 'TUNGSHAI UNIVERSITY' is written in a circular path around the center, and '1955' is at the bottom. The seal is rendered in a light gray, semi-transparent style.

研究生：陳銘郎

指導老師：黃皇男教授

中華民國一〇五年一月

東海大學
應用數學系
碩士學位口試委員審定書

本系碩士班 陳銘郎 君

所提論文 MATHEMATICAL MODEL AND SIMULATION OF THREE PHASE
BRUSHLESS DC MOTORS.
(三相直流無刷馬達的數學模型與模擬)

合於碩士班資格水準，業經本委員會評審通過，特此證明。

口試委員：陳淑汀

陳永毅

陳碩聰

指導教授：黃望男

所長：楊智煥

中華民國 一〇五 年 一 月 二十二 日

摘要

本文主要目的是進行三相直流無刷馬達的數學建模，必須先了解馬達的組成部分以及驅動的方式，以微分方程式的形式呈現，最後採用並用 MATLAB/SIMULINK 進行模擬驗證馬達的響應行為。

關鍵字: 直流無刷馬達, 三相, PWM, matlab, simulink



Abstract

This thesis focuses on the mathematical modeling of 3 phase brushless DC motor. The integration components of motor and electrical drives must be understood and represented by a series of differential equation. Matlab/Simulink is adopted to build block-wise model of motor behavior and run to simulate the associated dynamical response.

Keywords: brushless DC motor, 3 phase, PWM, matlab, simulink



誌 謝

感謝指導教授黃皇男博士，在研究所的時光裡，每週會面中給予我許多的意見與指導。您豐富的學識與研究上的經驗與數學的精通與靈巧，都是我要努力的效法的目標。

感謝邱靖宏學長、陳文欽經理與六俊電機的栽培與指導，讓我在這個領域可以馬上銜接，接觸了許多實務的寶貴經驗，讓我在研究中不停前進。

感謝每週報告時間陪伴的陳淑珍教授、陳碩聰教授，耐心幫助我，可以越來越好，也感謝同學秉諺、諾曼，學弟世銘，一起在研究室中渡過許多和諧與愉快的氣氛。

最後，感謝在我背後，默默關心我與支持我的家人們，每每分享自己的難處，而給我許多的關懷與包容，也感謝女友曉伊的陪伴與一次次的鼓勵與付出。此論文的結果獻給一個關心我的家人與幫助我的師長和朋友們，真的非常感謝你們。

目 錄

摘要	I
誌謝	III
目錄	IV
表目錄	V
圖目錄	VI
第一章 緒論	1
1.1 研究目的與動機	1
1.2 文獻回顧	1
1.3 研究方法	2
1.4 本文結構	2
第二章 基本知識介紹	3
2.1 簡介馬達的演變過程與比較	3
2.2 直流無刷馬達的元件介紹	6
2.3 馬達驅動原理	9
第三章 控制器模擬設計	11
3.1 馬達數學系統方程式	11
3.2 三相直流無刷馬達數學系統方程式	13
第四章 模擬結果與討論	17
4.1 直流馬達 Simulink 的參數設定與結果	17
4.2 三相直流無刷馬達 Simulink 的參數設定與結果	20
第五章 未來展望	30
參考文獻	31
附錄一	32

表目錄

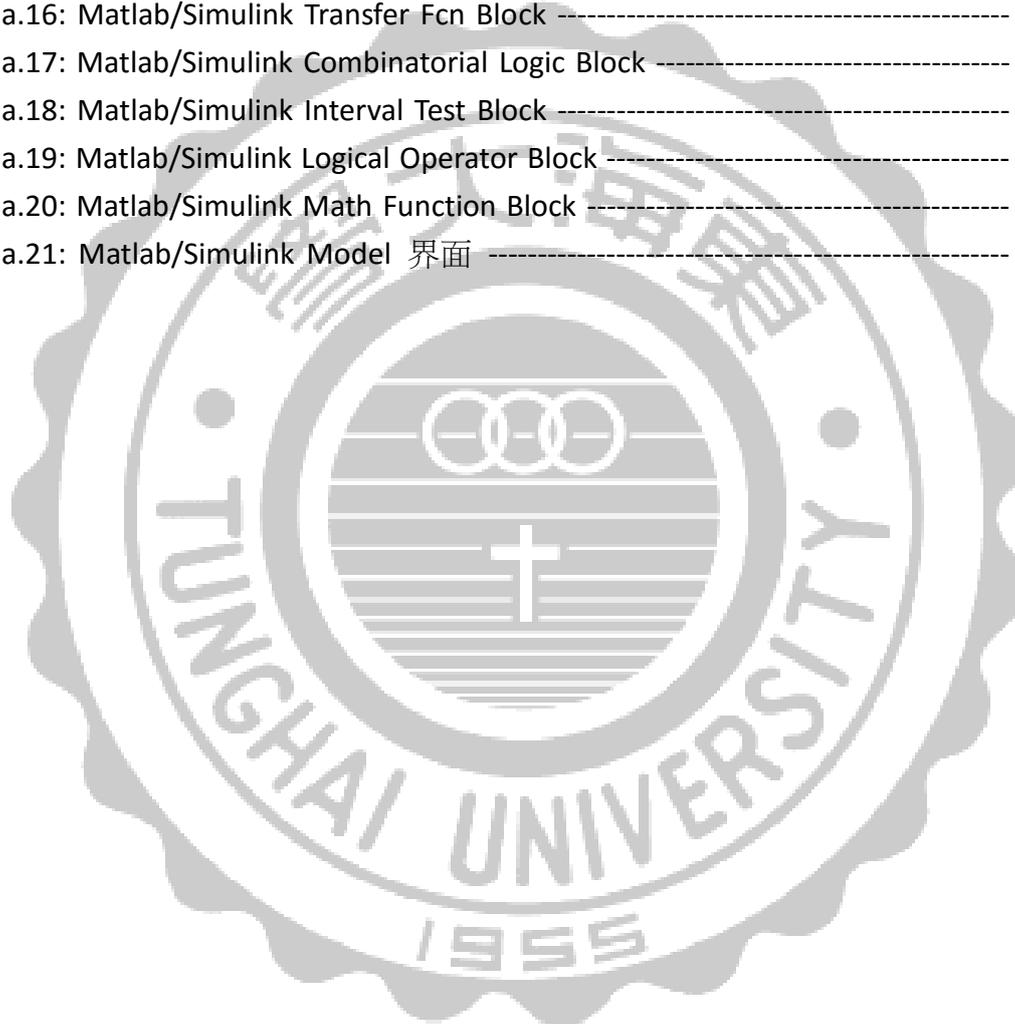
表 2.1: 六步方波換相時間表	8
表 2.2: 180 度的方波驅動之換相真值表	10



圖 目 錄

圖 2.1: 同步馬達類型區分 -----	4
圖 2.2: 非同步馬達類型區分 -----	4
圖 2.3: 直流無刷馬達的流程圖 -----	6
圖 2.4: 金氧半場效電晶體與馬達接線圖 -----	7
圖 2.5: 六步方波換相圖 -----	7
圖 2.6: 霍爾元件配置圖 -----	8
圖 2.7: 反應電動勢對外換開關訊號的時序圖 -----	10
圖 3.1: 直流馬達電路圖 -----	10
圖 3.2: 直流馬達的 Lapace Transform 的馬達系統方塊圖 -----	12
圖 3.3: 三相直流無刷馬達的簡圖 -----	14
圖 3.4: 三相正弦波的反應電動勢 -----	14
圖 3.5: 三相梯形波的反應電動勢 -----	15
圖 3.6: 三相直流無刷馬達的方塊圖 -----	16
圖 4.1: 直流馬達 Simulink 模擬 I -----	17
圖 4.2: 直流馬達 Simulink 模擬 II -----	17
圖 4.3: 直流馬達 Simulink 模擬得的角速度 -----	18
圖 4.4: 直流馬達 Simulink 模擬得的電流 -----	19
圖 4.5: Brushless DC Motor 的 Simulink 模擬 -----	20
圖 4.6: Brushless DC Motor 的 Invertor 模擬 -----	21
圖 4.7: Brushless DC Motor 的參數在 m.file 檔裡 -----	21
圖 4.8: Brushless DC Motor 的 Hall senser 偵測的訊號 -----	22
圖 4.9: Brushless DC Motor 的 Mosfet 輸出的訊號與角位置時序圖 -----	23
圖 4.10: Brushless DC Motor 的三相電壓大小的時序圖 -----	24
圖 4.11: Brushless DC Motor 的三相電壓大小與 PWM 總合的時序圖 -----	25
圖 4.12: Brushless DC Motor in Simulink 模擬的角速度 -----	26
圖 4.13: Brushless DC Motor in Simulink 模擬的角位移 -----	26
圖 4.14: Brushless DC Motor in Simulink 模擬的三相電流 -----	27
圖 4.15: Brushless DC Motor in Simulink 模擬的電流總合 -----	27
圖 4.16: Brushless DC Motor in Simulink 模擬的正弦波反應電動勢 -----	28
圖 5.1: 理想馬達模擬系統 -----	30
圖 a.1: Matlab 操作界面圖 -----	32
圖 a.2: Matlab/Simulink 的操作界面 -----	32
圖 a.3: Matlab/Simulink Add Block -----	33
圖 a.4: Matlab/Simulink Mux Block -----	34
圖 a.5: Matlab/Simulink Gain Block -----	34
圖 a.6: Matlab/Simulink Product Block -----	35

圖 a.7: Matlab/Simulink Trigonometric Function Block -----	36
圖 a.8: Matlab/Simulink Scope Block -----	37
圖 a.9: Matlab/Simulink Scope Block of Number of Axes -----	37
圖 a.10: Matlab/Simulink Scope Block of History -----	38
圖 a.11: Matlab/Simulink Scope Block of Style -----	38
圖 a.12: Matlab/Simulink Scope Block of Pulse Generator Block -----	39
圖 a.14: Matlab/Simulink Sin Wave Block -----	40
圖 a.15: Matlab/Simulink Step Block -----	41
圖 a.16: Matlab/Simulink Transfer Fcn Block -----	42
圖 a.17: Matlab/Simulink Combinatorial Logic Block -----	43
圖 a.18: Matlab/Simulink Interval Test Block -----	43
圖 a.19: Matlab/Simulink Logical Operator Block -----	44
圖 a.20: Matlab/Simulink Math Function Block -----	45
圖 a.21: Matlab/Simulink Model 界面 -----	46



第一章

緒論

1.1 研究動機與目的

由於工業自動化的發展，傳統直流有刷馬達只能透過改變電壓大小來影響效能，並改變輸入電壓方向使之改變馬達方向，且馬達內部的碳刷為耗損的變因，使得傳統直流馬達不易長期使用。

直流無刷馬達(Brushless DC Motor，簡稱BLDC Motor)的出現，其控制性更佳與前，也能大量的用在各個工業需求的領域中，且BLDC Motor會用到MCU和感測器來偵測馬達轉子狀況，進而知道轉速和轉子位子，但在馬達系統中，確實會有換相與系統訊號的量測來模擬仿真，並且市面上有許多廠商的馬達數據不甚完整，也透過此篇論文，可以判斷馬達參數，以至於這篇論文的產生。

1.2 文獻回顧

Pillay 在 1989 年，當時採用同步參考座標軸，且此參考座標 d 軸固定於轉子最大磁通處，進而推導其公式，在電壓端也轉換為 d - p 軸的電壓，用 Matlab/Simulink 將其實現[1,2]。

C. Gencer 和 M. Gedikpinar 也在 2006 年間，將三相馬達的電壓輸入分開，並用梯形的反應電動勢完成了直流無刷馬達的模擬 [3]。

1.3 研究方法

由於無刷馬達訊號不易驅動控制，所以而要監控馬達內部系統的電流與換相的零交越點時間，而所採用研究的方式是，先用 MATLAB/Simulink 模擬仿真，可以使其更了解馬達的特性。

1.4 本文結構

本論文共分為五章，各章節之內容大綱分別說明如下：第一章為緒論，說明本文的研究動機與背景、方法及目的。第二章為介紹本文實驗之直流無刷馬達相

關的基本知識。第三章了解數學模型與過程，並認識電動機驅動原理。第四章則將本文之架構以 MATLAB/SIMULINK 模擬實現並驗證其可行性。第五章為結論與未來的研究發展，針對本文之研究作總結與提出本文未來可進行的方向。



第二章

基礎知識介紹

本文要介紹實驗的直流馬達，從直流無刷馬達的演變過、控制迴路，最後說明馬達數學模型。2.1 簡介馬達的演變過程與比較，與直流無刷馬達的與傳統馬達的優缺點比較；2.2 討論直流無刷馬達的元件介紹；2.3 介紹馬達驅動原理

2.1 馬達的演變過程與比較

馬達的發展首先由安德魯·戈登（Andrew Gordon）在 1740 年的蘇格蘭創建的靜電設備。到 1827 年，匈牙利物理學家安幼思·傑德利克（ÁnyosJedlik）出現，而他試圖實驗簡單的電磁線圈。在傑德利克的手中，他解決一些技術層面的問題後，稱他的設備為「電磁自轉機」。雖是用在教學目的，但第一款傑德利克的設備已包含今日直流馬達的三個主要組成部分：定子，轉子和換向器。

美國一位鐵匠湯馬斯·達文波特（Thomas Davenport）在 1835 年創造出全球第一台能驅動小電車的應用馬達，也在 1837 年申請了專利。但因主要動力電池成本極高，無法成功的營運，達文波特因此破產。相繼一些發明家繼續發展應用馬達，但都遇到了同樣電池發電成本的問題。

英國物理學家惠斯頓（Wheatstone）在 1845 年，用線性馬達的概念，申請了專利，但此原理於 1960 年代才被重視，其所設計的線性馬達被實用化後，已成了目前工業上廣泛應用的馬達。

比利時電機工程師 Zenobe Theophile Gamme 在 1870 年代初期，成了世界上最早將馬達商品化的人。美國著名發明家尼古拉·特斯拉也在 1888 年發明交流馬達，是應用法拉第的電磁感應原理，即為感應馬達。

瑞典工程師丹尼爾森在 1902 年，發明了同步馬達是利用特斯拉感應馬達的旋轉磁場觀念。蘇格蘭人 James Weir French 也在，1923 年發明三相可變磁阻型（Variable reluctance）步進馬達。

霍爾元件在 1962 年問世後，直流無刷馬達也能被實體化。到了 1980 年代，超音波馬達也被發明出來[4]。

馬達是一種將電能轉機械能且透過機械能產生動能，來驅動許多機電設備。馬達的分類中，較為基礎的，就是同步性的定義。意指相同的頻率、速度。即馬達中的同步即為與輸入電能同步的意思；馬達輸出轉速與輸入電能頻率一致，即為同步；反之則否。圖 2.1 與 2.2 說明同步與非同步馬達的分類。

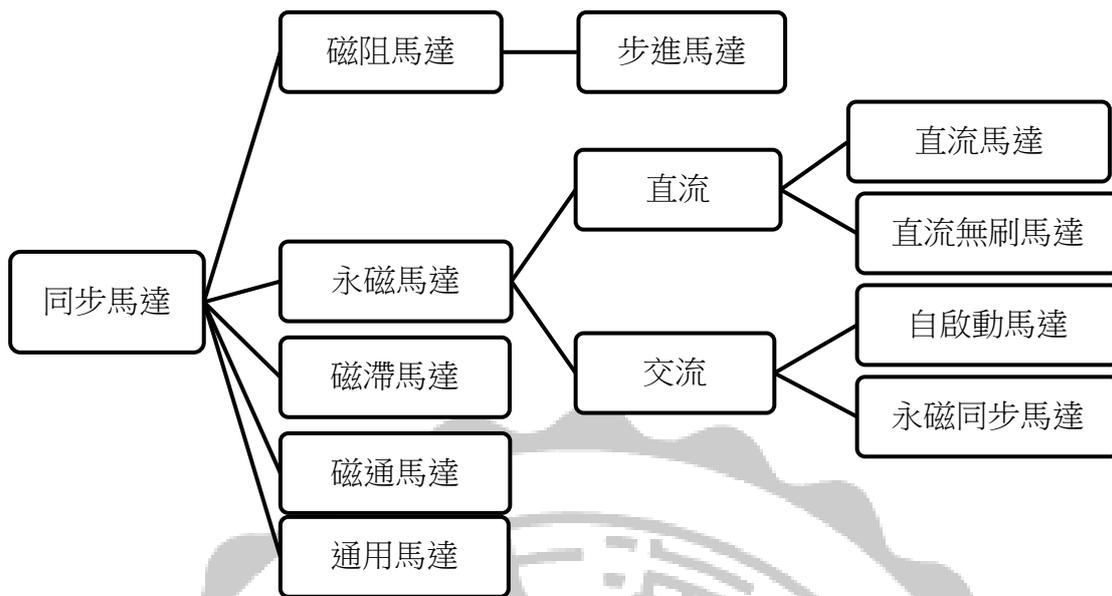


圖 2.1: 同步馬達類型區分

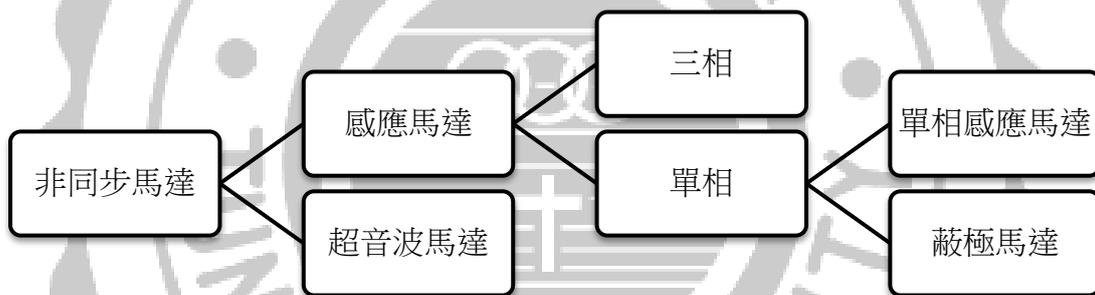


圖 2.2: 非同步馬達類型區分

直流無刷馬達由傳統的直流有刷馬達發展而來的，除了延續有刷馬達的優點之外，並且去除了原有的缺點。直流馬達在操作範圍、轉速及轉矩控制上具有良好的響應，在控制上，直流馬達的效能要比交流馬達來的好。而直流有刷馬達的最大缺點是使用了電刷和整流子組成的機械整流裝置，以至電刷的磨耗、整流造成火花及後續維修的麻煩等問題陸續出現，這成了直流有刷馬達的極大缺點。

為了保留直流有刷馬達高效率、與簡單的構造與裝配的容易和高精密度等的優點外，並且隨著電力電子技術的進步，可以利用半導體元件作為開關及霍爾感測元件的電子式換向設備取代原來的電刷電樞，便去除了原本直流有刷馬達的缺點需要不停的更換電刷的問題，由於使用三相、兩相或四相電樞線圈作為定子，用永久磁鐵作為轉子的同步無刷馬達，及偵測轉子磁極位置的霍爾元件，與使用金屬半氧化電晶體作為換相開關的驅動器所構成。

一般來說，直流無刷的定子繞組通常為三個相位，也就是所謂三相激磁，各相之間的相位角度相差 120 度，除了三相激磁之外，也有兩相、四相等。相數

愈多時，產生的轉矩愈平滑，磁力矩愈小，但相對的馬達的成本以及控制上的複雜性也隨之提高。

因此，可歸納出直流無刷馬達有以下幾點特徵：

- (1) 扭力和電流的大小成正比。
- (2) 低噪音，因為無電刷，所以不會有火花產生也不會有雜音。
- (3) 壽命長，同樣沒有電刷，馬達不需要保養碳刷，只需保護軸承，大致可在 5000 小時以上，都可以不需保養。
- (4) 馬達無法靠輸入電壓來單獨運轉，一定要有控制器。[5]



2.2 討論直流無刷馬達的元件介紹

以下為直流無刷馬達的流程圖。MCU 的英文全名為 Microcontroller Unit，中文又稱微處理器；MOSFET 的英文全名為 Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor，中文為金屬氧化物半導體場效電晶體，又簡稱金氧半場效電晶體；AC/DC converter 為交流轉直流的變壓器；Hall sensor 為霍爾感測器。圖 2.3 為直流無刷馬達的流程圖。交流電到 AC/DC converter 轉直流電到開關閘的 MOSFET，再經由 MCU 送訊號到 PWM 訊號到 Gate Driver 再到 MOSFET 啟動開關將電送入馬達，馬達轉動時，Hall sensor 測得位置送訊號回 MCU 以判斷改變 MOSFET 的開關順序，依此類推。

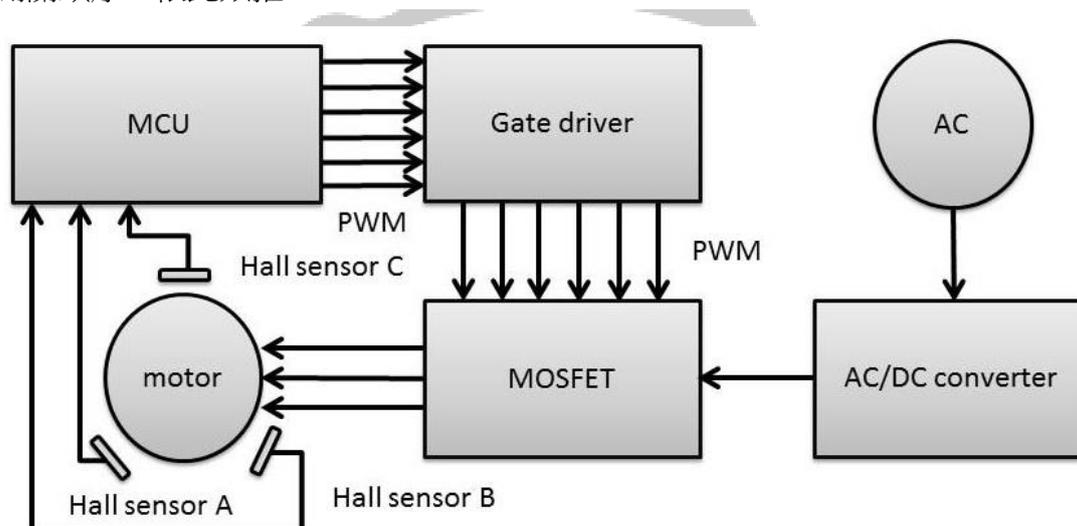


圖 2.3: 直流無刷馬達的流程圖

(一) 脈衝頻寬驅動器

馬達的驅動器大多使用所謂脈衝頻寬調變的方式，俗稱 PWM (Pulse Width Modulation)。主要為一種緩慢變化的控制訊號，調變成不同脈波波寬開關訊號的波形調變方法。由於切換的頻率遠高於控制訊號頻率，所以對於馬達而言，其控制效果相同，但對驅動馬達的功率晶體而言，可以在最有效率的區域工作，節省能量並減少熱量的產生。

PWM 的控制波形就是產生一組平均值為指定電壓的波形，也就是控制所謂的工作週期 (duty-cycle)，其定義如下：

$$\text{平均電壓} = \text{工作週期} \times \text{電源電壓} = \frac{T_{\text{on}}}{T_{\text{on}} + T_{\text{off}}} \times \text{電源電壓}$$

馬達的控制訊號與載波的 PWM 的增益過後，得到不同的脈波訊號輸出。由於切換的時間夠快，因此仍保有控制訊號的基本波形。其中載波可以是三角波，鋸齒波，或正弦波。所謂調變的訊號可以是直流電壓，亦或是頻率變化較低的訊號。此外，載波頻率必須遠大於原本訊號的頻率，以避免訊號的失真。一般載波

的頻率，依馬達的轉動情形而有所調整，大多選用的範圍多落在 6 kHz~20 kHz 之間。經過 PWM 的調變後的控制波形，再予以輸入功率放大器中，以驅使馬達的轉動速度可以得到改變。

(二)MOSFET 金氧半場效電晶體

六個金氧半場效電晶體組成的功率放大器，在直流無刷馬達中做開關閘使用，其定子的繞組通常為三相，則功率放大器應使用三組共六個功率放大晶體，為 Q_1 到 Q_6 。各組功率放大晶體，負責單相線圈繞組的正反向運轉，如圖 2.4 所示。PWM 的控制訊號，則視轉子旋轉磁場所在的位置，配合驅動不同的功率晶體組，如圖 2.5 所示，歸納如表 2.1 所示。

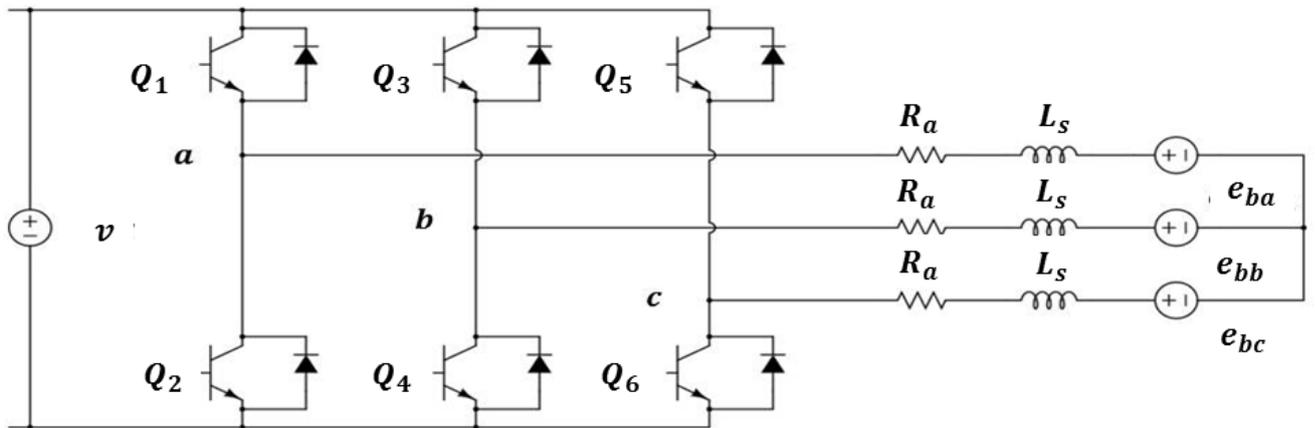


圖2.4: 金氧半場效電晶體與馬達接線圖

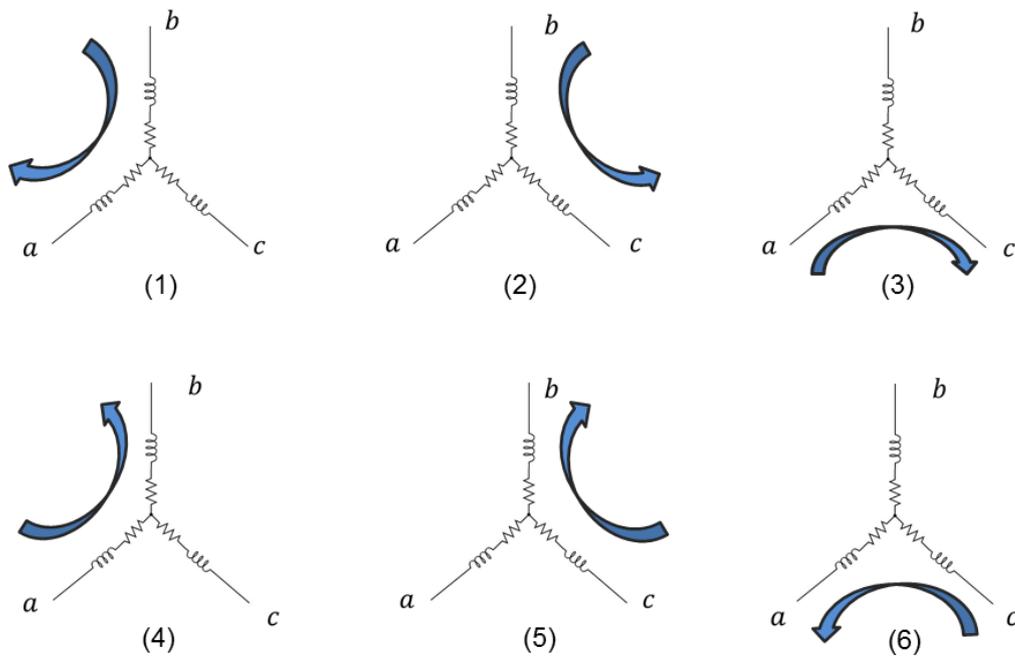


圖2.5: 六步方波換相圖

狀態	導通電流向方	電氣角
一	$b \rightarrow a$	[0,60]
二	$b \rightarrow c$	[60,120]
三	$a \rightarrow c$	[120,180]
四	$a \rightarrow b$	[180,240]
五	$c \rightarrow b$	[240,300]
六	$c \rightarrow a$	[300,360]
電流切換點 0, 60, 120, 180, 240, 300, 360		

表 2.1: 六步方波換相時間表

(三) 回授感測器

要將電動馬達應用成速度或位置控制，必須搭配感測器對訊號加以量測並回授，使成為伺服控制迴路，如霍爾元件。霍爾元件 (Hall Effect Sensor) 是利用磁場的改變，產生不同的電壓輸出，因此可用以檢測馬達旋轉磁場所在的位置，配合 PWM 的控制訊號，驅動相對的功率晶體組，達到控制的目的，如圖 2.5 所示。

霍爾元件在轉子的配置上有 120° 或 60° 的間隔配置，如圖 2.6 所示，就 2 極之 (a) 與 (b) 而言，其邏輯訊號上很明顯有差異，可是不管是那一方式，每逢轉子轉動 60° ，再 3 個元件中之任何一個產生變化，因在 1 個循環 (有 6 次切換) 內不會出現同一信號，依據各種情形，將可產生轉換信號之邏輯電路，加以裝配。而本文是利用光學編碼器的訊號來加以輔助，以提高位置的解析度。

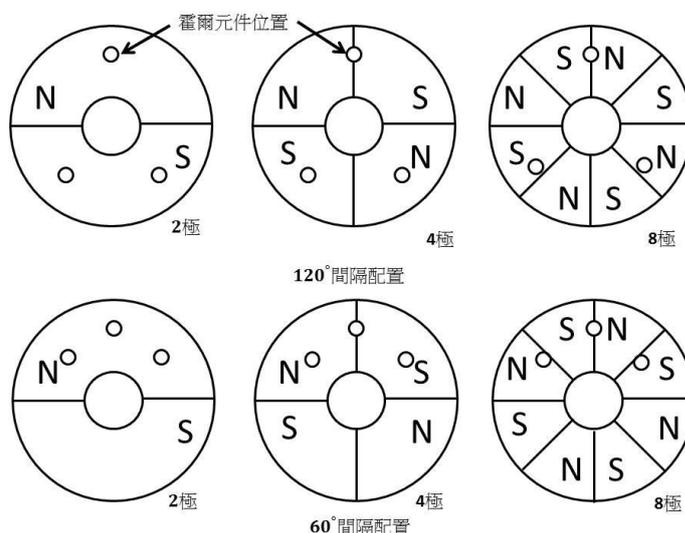


圖2.6: 霍爾元件配置圖

2.3 馬達驅動原理

直流無刷馬達的設計，除了要使其擁有與直流有刷馬達相同的響應之外，同時也要能解決直流馬達的電刷與換相器的維護問題。基本操作上是和直流有刷馬達相同，皆是以磁鐵所產生磁場與線圈電流交互作用而產生作用力，隨著轉子的轉動，必須改變磁場方向使馬達維持同方向運轉；直流有刷馬達，一般也可稱之為永磁式的直流馬達，是以機械式的電刷及電樞改變電流方向使得電磁感應力維持同一方向，而直流無刷馬達是以及感測器（如 Hall-effect sensor，霍爾感測器）或位置感測器（如 encoder）及半導體功率轉換器來取代電刷及整流子。因此，其基本原理及特性是相同的。

由於沒有電刷，直流無刷馬達必須藉由一組換流器（inverter）切換三相驅動線圈，一般來說，直流無刷馬達的轉子（rotor）是幾個成對的永久磁鐵，定子（stator）是由 a、b、c 三相線圈所組成，透過控制定子線圈通電感應而生的磁極，和轉子上的永久磁鐵的磁極不斷產生同極相斥的現象，帶動轉子達到持續不斷的轉動，而這三相線圈的電壓則是透過一組換流器來供應，換流器最主要的目的是把直流電壓切換成三相的交流電壓，切換的頻率則隨著馬達的轉速而改變，切換時機則依據馬達的轉子位置。

機械角和電氣角關係：

$$\omega_r = \frac{P}{2} \times \omega_\theta$$

其中 P 為轉子上永久磁鐵的磁極數， ω_r 為電氣角，且 ω_θ 為機械角。電氣角為訊號完成一次週期的波形，機械角因為受控於無刷馬達極數的問題，並滿足此關係式，電氣角=馬達極數 x 機械角/2。

每一相反應電動勢通過正零交越點時，延遲 60 度後對應該相之上臂開關導通，反之，反電動勢通過負零交越點時，延遲 60 度後對應的相之下臂開關導通，由表 2.4 所示，先開啟上臂的 Q_3 與下臂的 Q_2 使電流從 b 極往 a 極流入，機械角轉動 60 度後，上臂 Q_3 持續導通，下臂的 Q_2 關閉，開啟下臂的 Q_6 使電流從 b 極流到 c 極，然後，依此類推。而 S_1 到 S_6 是則為時序的表達情形。可對照表 2.2 看到反電動勢和時序的關係。

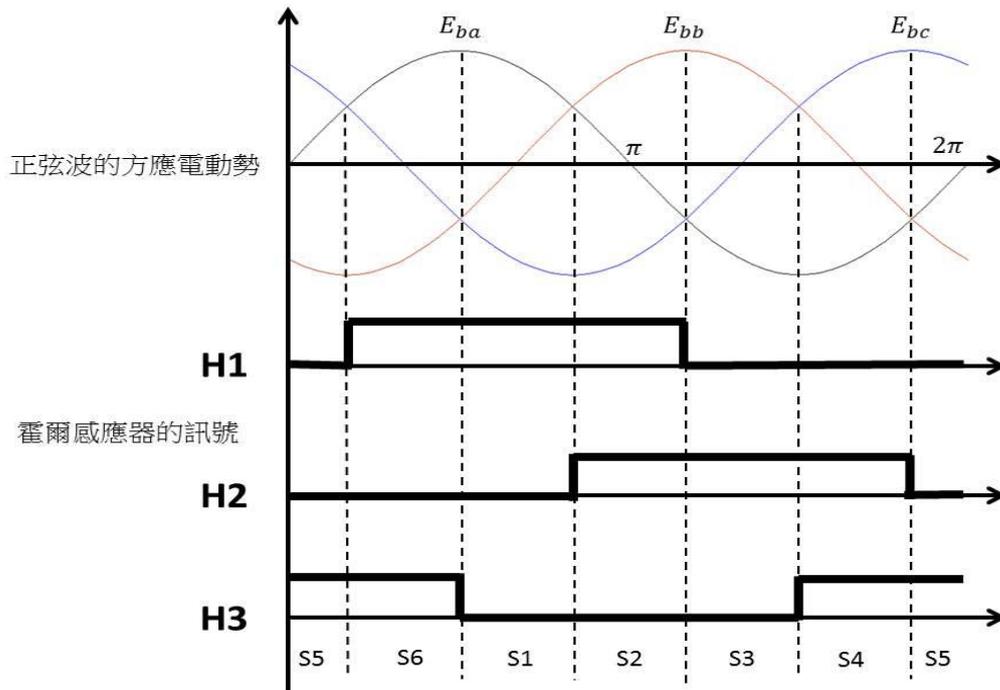


圖 2.7: 反應電動勢對外換開關訊號的時序圖

	H1	H2	H3	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	MA	MB	MC
S1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	-v	+v	x
S2	1	1	0	0	0	1	0	0	1	x	+v	-v
S3	0	1	0	1	0	0	0	0	1	+v	x	-v
S4	0	1	1	1	0	0	1	0	0	+v	-v	x
S5	0	0	1	0	0	0	1	1	0	x	-v	+v
S6	1	0	1	0	1	0	0	1	0	-v	x	+v
	0	0	0	不存在								
	1	1	1	不存在								

表 2.2: 180 度的方波驅動之換相真值表

根據表 2.2，以霍爾輸出訊號，來成為驅動器切換的判斷，讓馬達在 180 度模式下驅動旋轉，特別注意這個直值表是對霍爾元件所感測的位置而得，因感測位置不同，所建立的換相直值表也有所差異。至於電流與電壓驅動，其不同也在於驅動電路製作方式不同，在此就不額外區別。

第三章

控制器模擬設計

3.1 馬達數學系統方程式

直流馬達電路簡圖如下：

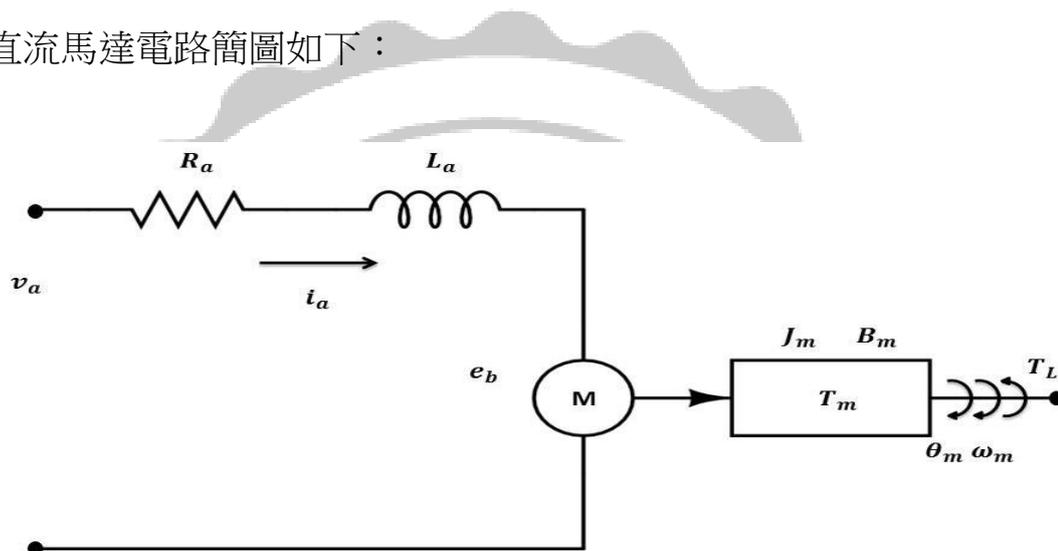


圖 3.1: 直流馬達電路圖

圖 3.1 中的符號意義說明如下：

$v_a(t)$ ：電樞電壓，

$i_a(t)$ ：電樞電流，

R_a ：電樞電阻，

L_a ：電樞電感，

J_m ：轉動慣量，

B_m ：摩擦係數，

$e_b(t)$ ：反電動勢。

$T_m(t)$ ：轉矩，

K_b ：反電動勢常數，

K_t ：轉矩常數，

$\omega_m(t)$ ：角速度，

$T_L(t)$ ：負載轉矩，

$\theta_m(t)$ ：角位移，

圖 3.1 對應的方程式為有下列兩種，分別為

1. 電氣方程式：

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e_b(t)$$

2. 機械方程式：

$$T_m(t) = J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + B_m \omega_m(t) - T_L(t)$$

而機電轉換方程式則是

$$T_m(t) = K_t i_a(t)$$

對應的反應電動勢正比於轉速

$$e_b(t) = K_b \omega_m(t)$$

在無負載(free loading, $T_L = 0$)的狀況下，經拉氏變換(Laplace Transform)後，可得電壓對馬達轉速的轉移函數

$$\frac{\omega(s)}{v_a(s)} = \frac{K_t}{(J_m s + B_m)(R_a + sL_a) + K_t K_b}$$

再積分得轉角隨電壓的轉移函數

$$\frac{\theta_m(s)}{v_a(s)} = \frac{K_t}{(J_m s + B_m)(R_a + sL_a)s + K_t K_b s}$$

而當負載時，可得機械方程式之拉氏變換為：

$$\left[\frac{K_t}{(R_a + sL_a)} - 1 \right] [v_a(s)] = \left[\frac{K_t K_b}{(R_a + sL_a)} + (J_m s + B_m) \right] \omega_m(s)$$

即

$$\omega_m(s) = \left[\frac{K_t}{K_t K_b + (R_a + sL_a)(J_m s + B_m)} - \frac{(R_a + sL_a)}{K_t K_b + (R_a + sL_a)(J_m s + B_m)} \right] \begin{bmatrix} v_a(s) \\ T_L(s) \end{bmatrix}$$

因此反應電動勢則是

$$e_b(s) = \left[\frac{K_t}{K_t K_b + (R_a + sL_a)(J_m s + B_m)} - \frac{(R_a + sL_a)}{K_t K_b + (R_a + sL_a)(J_m s + B_m)} \right] \begin{bmatrix} v_a(s) \\ T_L(s) \end{bmatrix}$$

電流則為

$$i_a(s) = \frac{v_a(s) - e_b(s)}{(R_a + sL_a)} \left[\frac{(J_m s + B_m)}{K_t K_b + (R_a + sL_a)(J_m s + B_m)} - \frac{K_b}{K_t K_b + (R_a + sL_a)(J_m s + B_m)} \right] \begin{bmatrix} v_a(s) \\ T_L(s) \end{bmatrix}$$

整理可得馬達系統方塊如圖 3.2 所示。

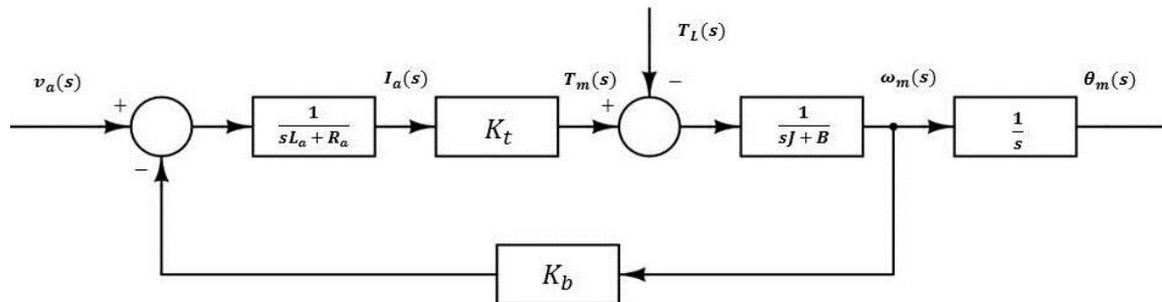


圖 3.2: 直流馬達的 Laplace Transform 的馬達系統方塊圖

3.2 三相直流無刷馬達數學系統方程式

公式推導的基本原理與基本概念

由永久的磁鐵所組成的 BLDC Motor 的轉子，必需由定子的磁場與相對位置產生同極相斥才能使馬達轉子轉動，而再經由輸入不同的電流方向於定子線圈使馬達內部產生電磁場改變而生成轉矩，此時定子固定將會生成反作用力推動轉子，馬達便開始轉動。馬達在旋轉中要有最大效率，一般採用六步方波驅動，而根據佛萊明左手定律，可得內部的電磁力：

$$F = N \cdot I \cdot L \times B$$

其中， F 為施力， I 定為流經線圈的電流， L 定為線圈上受磁場感應的有效長度， B 定為磁通密度， N 定為假設匝數。

而馬達輸出扭矩與電流的關係式為：

$$T = F \cdot r = N \cdot I \cdot L \times B \cdot r = K_t \cdot I$$

其中參數的意義為 P 為轉子上永久磁鐵的磁極數， $B = B(\theta_k, \theta_m) = B_{\max} \sin[P(\theta_k - \theta_m)/2]$ 為磁通密度， r 定為力臂， K_t 定義為扭矩常數， θ_k 為轉子上對定子中點的角度差， θ_m 為定子上某一點對定子中點的角度差。

六步方波驅動法依照三相線圈導通方式的不同，可分為 120 度和 180 度的導通方式。180 度六步方波驅動法為驅動馬達時任意導通馬達的三相中兩相，使其電流流入，另一端流出，而第三相保持為浮接狀態。本文採用 180 度的六步方波驅動法。

圖 3.3 為三相直流無刷馬達的簡圖，對應的方程式為

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{ba} \\ e_{bb} \\ e_{bc} \end{bmatrix}$$

此式為三相無刷馬達的電氣方程式，主要由克西荷夫電壓的定律推導而至， v_{as} 、 v_{bs} 、 v_{cs} 為 a、b、c 三相的相電壓， i_a 、 i_b 、 i_c 為 a、b、c 三相的相電流， R_a 為電樞電阻又可為相電阻， L 為馬達相自感， M 為馬達相互感， $L_s = L - M$ ， e_{ba} 、 e_{bb} 、 e_{bc} 為三相的反電動勢。 ω_m 為馬達的轉速(以電氣角表示)， K_b 為反電動勢常數， P 為馬達極數， θ_m 為馬達轉子角位移(以電氣角表示)。

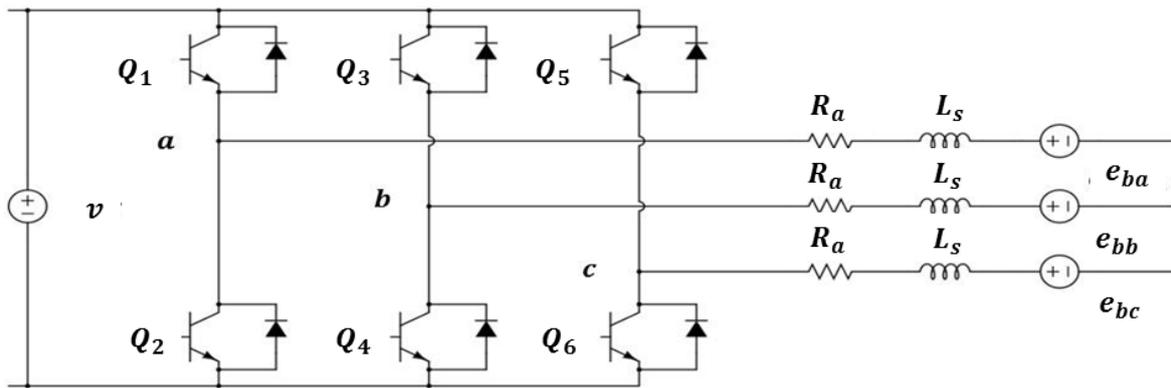


圖 3.3: 三相直流無刷馬達的簡圖

電氣方程式簡化為此：

$$\begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as}(t) \\ i_{bs}(t) \\ i_{cs}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{ba} \\ e_{bb} \\ e_{bc} \end{bmatrix}$$

當輸入電壓為正弦波的反應電動勢（如圖 3.4 所示）：

$$\begin{bmatrix} e_{ba} \\ e_{bb} \\ e_{bc} \end{bmatrix} = K_E \omega_m(t) \begin{bmatrix} -\sin(\theta_r) \\ \sin(\theta_r + 2\pi/3) \\ \sin(\theta_r - 2\pi/3) \end{bmatrix}$$

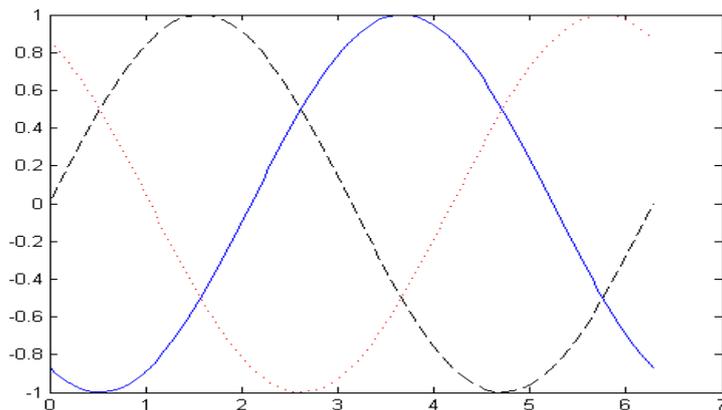


圖 3.4: 三相正弦波的反應電動勢

輸入電壓為六步方波的反應電動勢為[7]，可見圖 3.5。

$$\begin{bmatrix} e_{ba} \\ e_{bb} \\ e_{bc} \end{bmatrix} = K_E \omega_m(t) \begin{bmatrix} f(\theta_r) \\ f(\theta_r + 2\pi/3) \\ f(\theta_r - 2\pi/3) \end{bmatrix},$$

$$\text{其中，} f(\theta_r) = \begin{cases} \left(\frac{6}{\pi}\right)\theta_r, & \left(0 < \theta_r < \frac{\pi}{6}\right), \\ 1, & \left(\frac{\pi}{6} < \theta_r < \frac{5\pi}{6}\right), \\ \left(-\frac{6}{\pi}\right)\theta_r + 6, & \left(\frac{5\pi}{6} < \theta_r < \frac{7\pi}{6}\right), \\ -1, & \left(\frac{7\pi}{6} < \theta_r < \frac{11\pi}{6}\right), \\ \left(\frac{6}{\pi}\right)\theta_r - 12, & \left(\frac{11\pi}{6} < \theta_r < 2\pi\right). \end{cases}$$

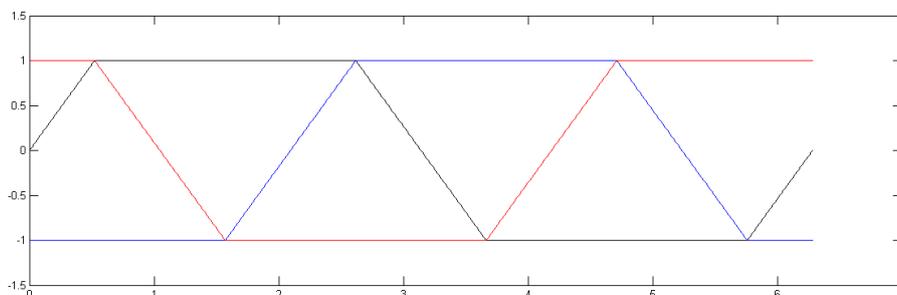


圖 3.5: 三相梯形波的反應電動勢

而馬達機械方程式為下：

$$\begin{aligned} T_m(t) &= \frac{2}{P} J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \frac{2}{P} B_m \omega_m(t) + T_L \\ &= \frac{P (e_{ba} i_a(t) + e_{bb} i_b(t) + e_{bc} i_c(t))}{2 \omega_m(t)} \end{aligned}$$

此式由牛頓運動定律推導而來，式中 K_t 為馬達的扭矩常數， T_m 為馬達的轉矩力矩， J_m 為馬達的轉動慣量， B_m 為馬達的阻尼係數， T_L 為負載轉矩，且在*m. k. s.*制下， $K_t = K_b$ 。

以下為三相直流無刷馬達的方塊圖：

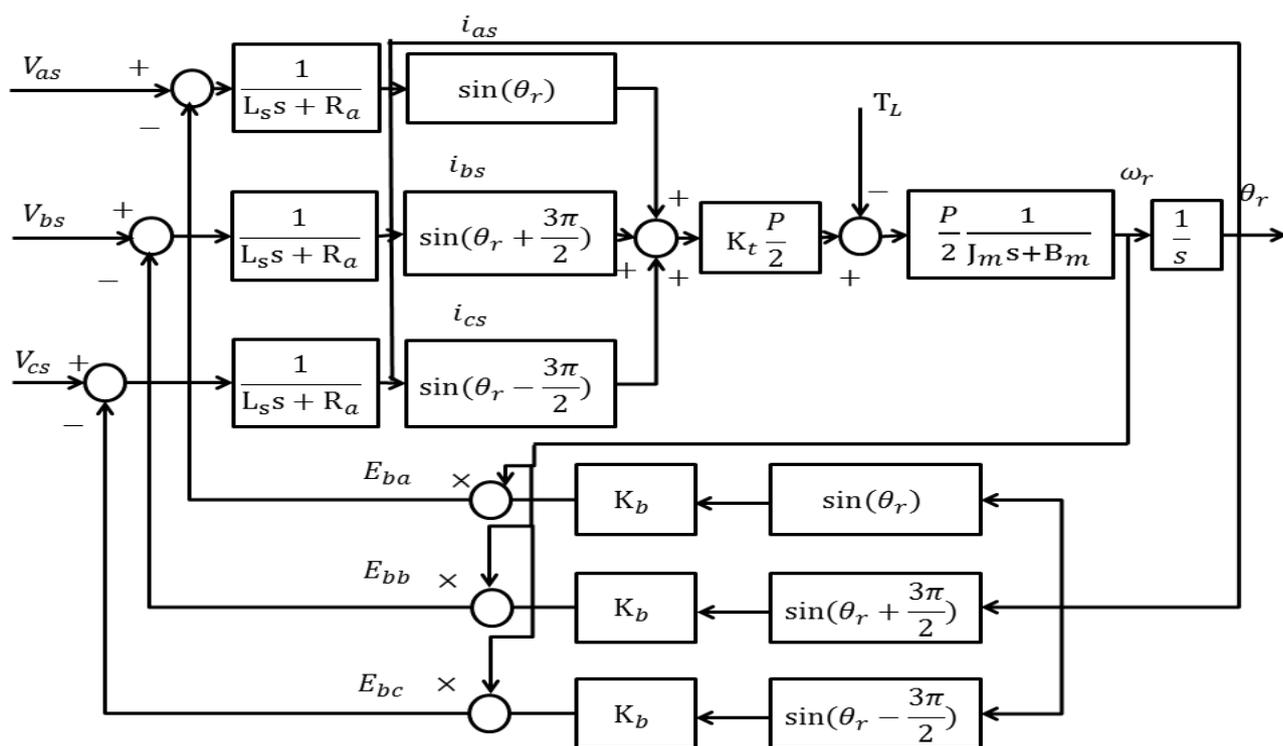


圖 3.6: 三相直流無刷馬達的方塊圖

三相電壓為伏特和 PWM 的積訊號，與判斷霍爾感測器測得的位置訊號，來改變三相的電壓。

第四章

模擬結果與討論

4.1 直流馬達 Simulink 的參數設定與結果

所使用的直流馬達系統圖為下：

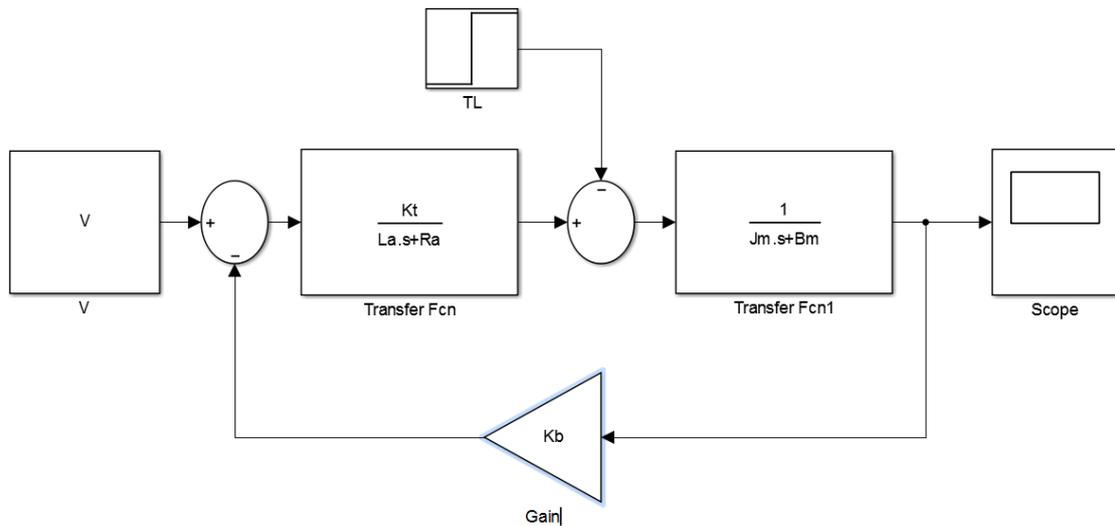


圖 4.1: 直流馬達 Simulink 模擬 I

而數學公式計算而得的公式，將其實現的方塊圖如下：

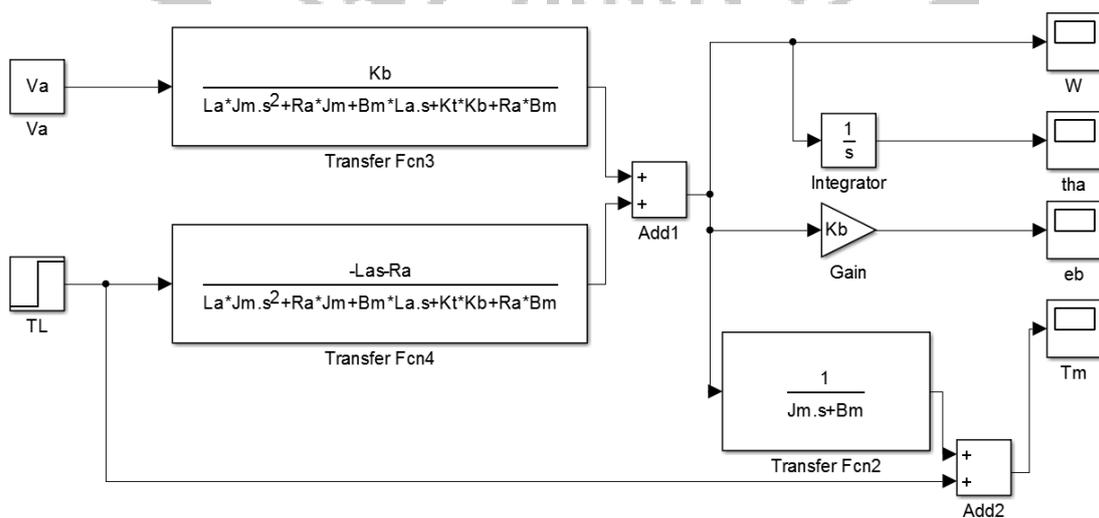


圖 4.2: 直流馬達 Simulink 模擬 II

以下為直流馬達公式解的Simulink圖，並用以下的馬達參數，負載的延遲時間為15秒，總共時間為100秒。

- Ra=2 % 2Ohms
- La=0.0005 % Henrys
- Kt=10 % torque constant
- Jm=2 % 0.0001 kg m^2
- Kb=0.1 % back emf constant
- Bm=0.5 % 0.5N/rad/s
- TL = 3.3; % 3.3N
- V = 20; % V

將數據給 simulink 的直流馬達，就能得到角位移、角速度、反應電動勢、和力矩。所得到的結果如下，兩個結果是一致的，以下為圖為角速度，在時間 15 秒時，負載使轉速下降。

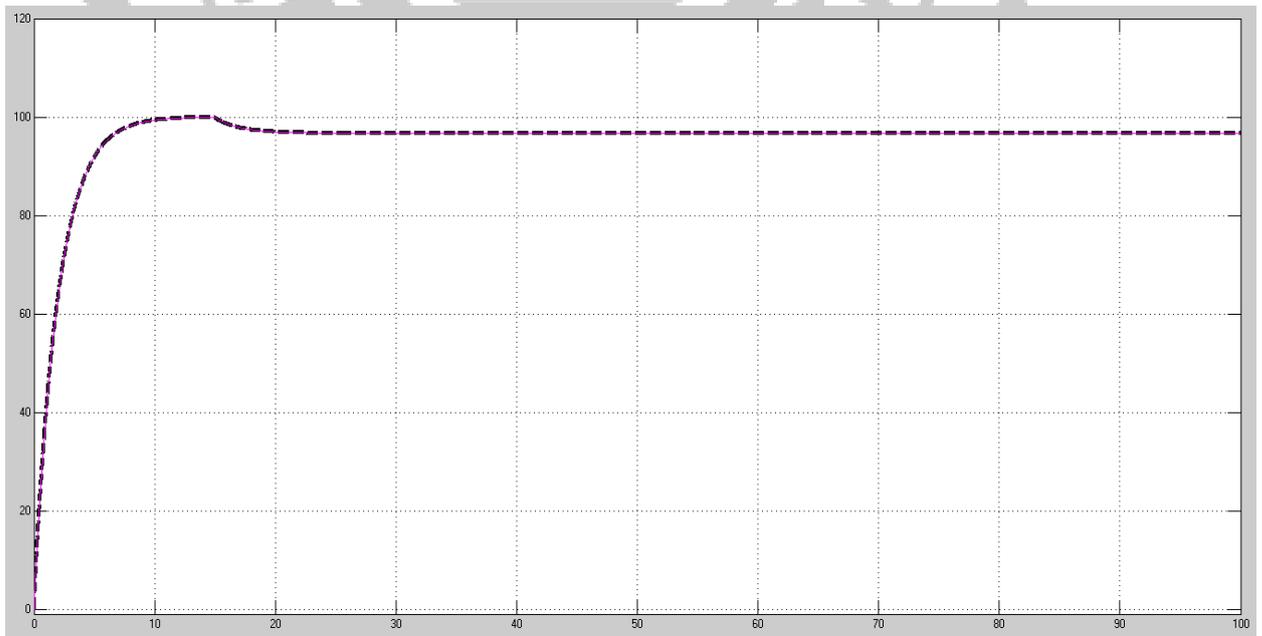


圖 4.3: 直流馬達 Simulink 模擬得的角速度

以下為電流反應情況，在一開始電流到了最大值，馬達開始運轉，反電動勢回授回來時，電流開始下降，當負載進來時，電流又會上昇。

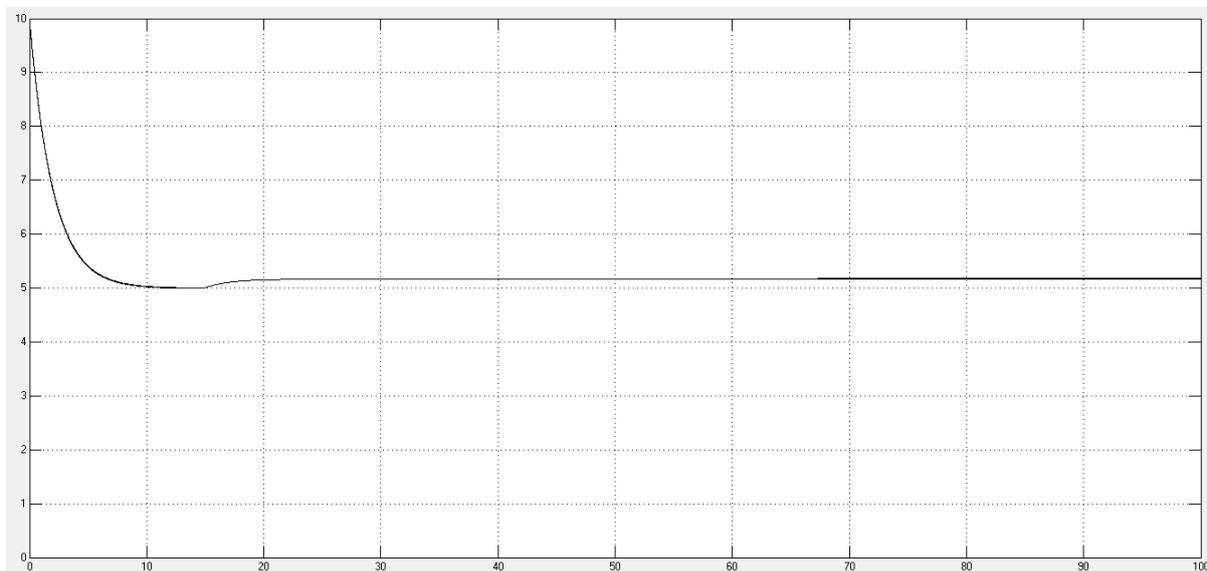


圖 4.4: 直流馬達 Simulink 模擬得的電流



4.2 三相直流無刷馬達 Simulink 的參數設定與結果

由於三相無刷馬達的公式推導完成，簡單來說，就如同傳統馬達，但不同的地方，是有接腳的問題。而三相無刷馬達需有三相電壓、三相電流輸入到同一個馬達的系統，但又需新測得新的反應電動勢，所

以得到的 Brushless DC Motor 的 Simulink 圖如下：

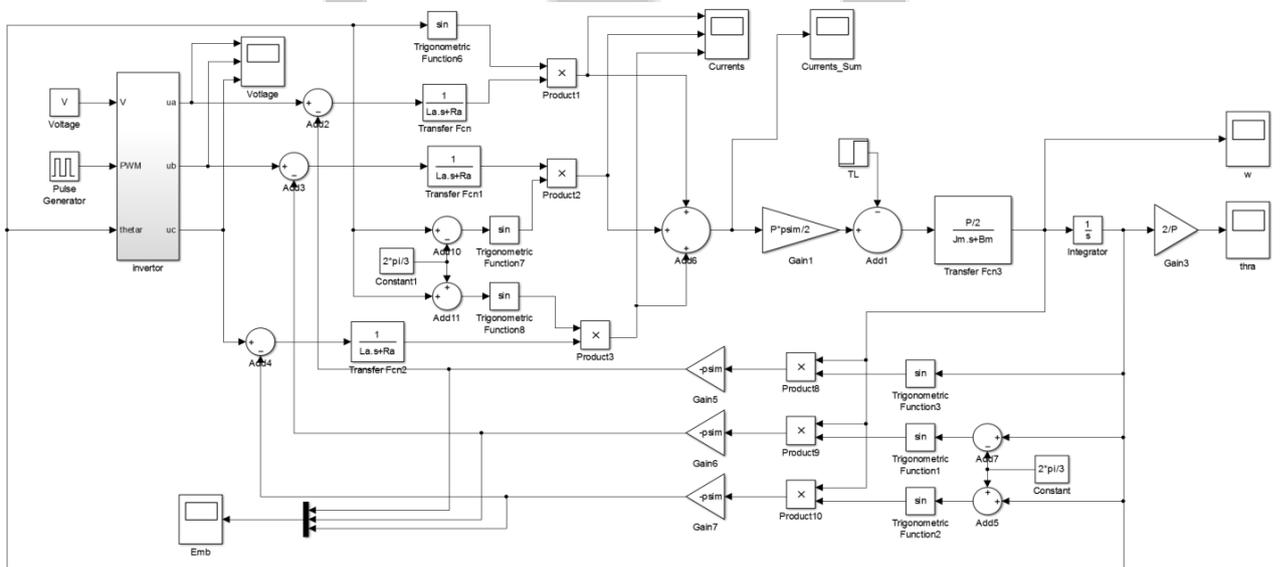


圖 4.5: Brushless DC Motor 的 Simulink 模擬

在三相無刷直流馬達系統中，Invertor 裡的系統圖如下：

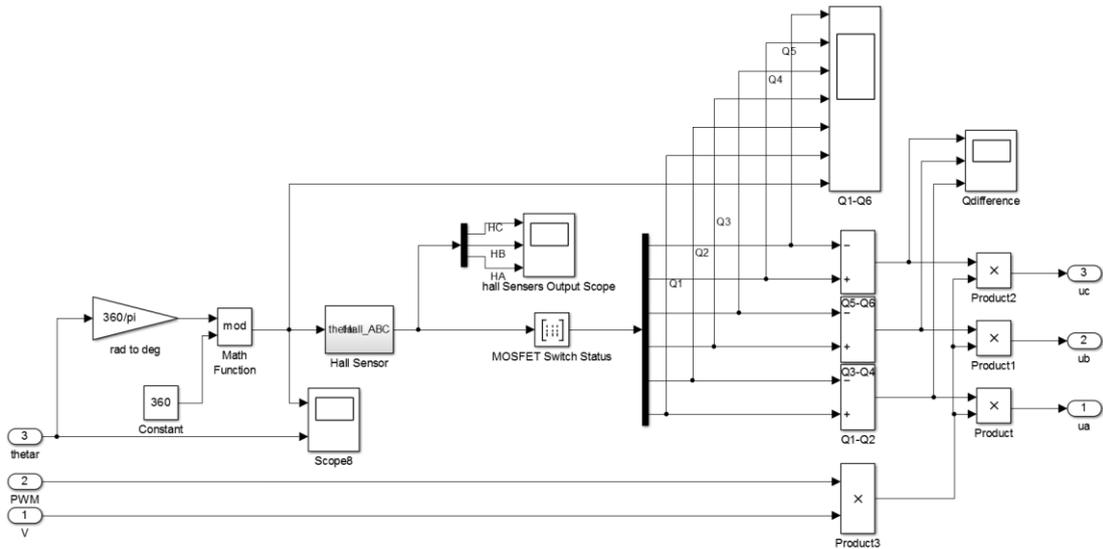


圖 4.6: Brushless DC Motor 的 Invertor 模擬

而此系統所用的 Simulink 中的 Model Configuration Parameters 的 solve option 中，solve 選定為 ode23 (Bogacki-Shampine)，反應時間設為 0.8 秒，負載輸入時間延遲 0.4 秒，反應電動勢為正弦波。此為極數 6 的馬達。

而參數的輸入部分，是用 MATLAB 的 m.file，圖如下：

```

Editor - C:\Users\user\Desktop\論文資料\黃老師\BLDC_Motor_parameters...
BLDC_Motor_parameters... x.m
30 % From paper:
31 % Gencer and Gedikpinar, Modeling and Simulation of BLDCM Using
32 % MATLAB/SIMULINK, Journal of Applied Sciences 6(3): 688-691, 2006
33 P=6; % No. of pole pairs
34 Ra = 11.05; % 11.05ohms
35 L = 0.0215; % 0.0215Henri
36 M = 0.002; % Henri
37 La = L-M; % Henrys
38 psim = 0.11; % 0.11Weber
39 Kt = -psim*P/2; % torque constant
40 Ke = -psim; % back emf constant
41 Bm = 0.001; % 0.001M/rad/s
42 Jm = 0.0001; % 0.0001 kg m^2
43 TL = 0.1; % 0.1N
44 V = 20/pi; % V
script Ln 32 Col 67

```

圖 4.7: Brushless DC Motor 的參數在 m.file 檔裡

在 Invertor 裡的 Hall Sensor 所偵測到的結果：

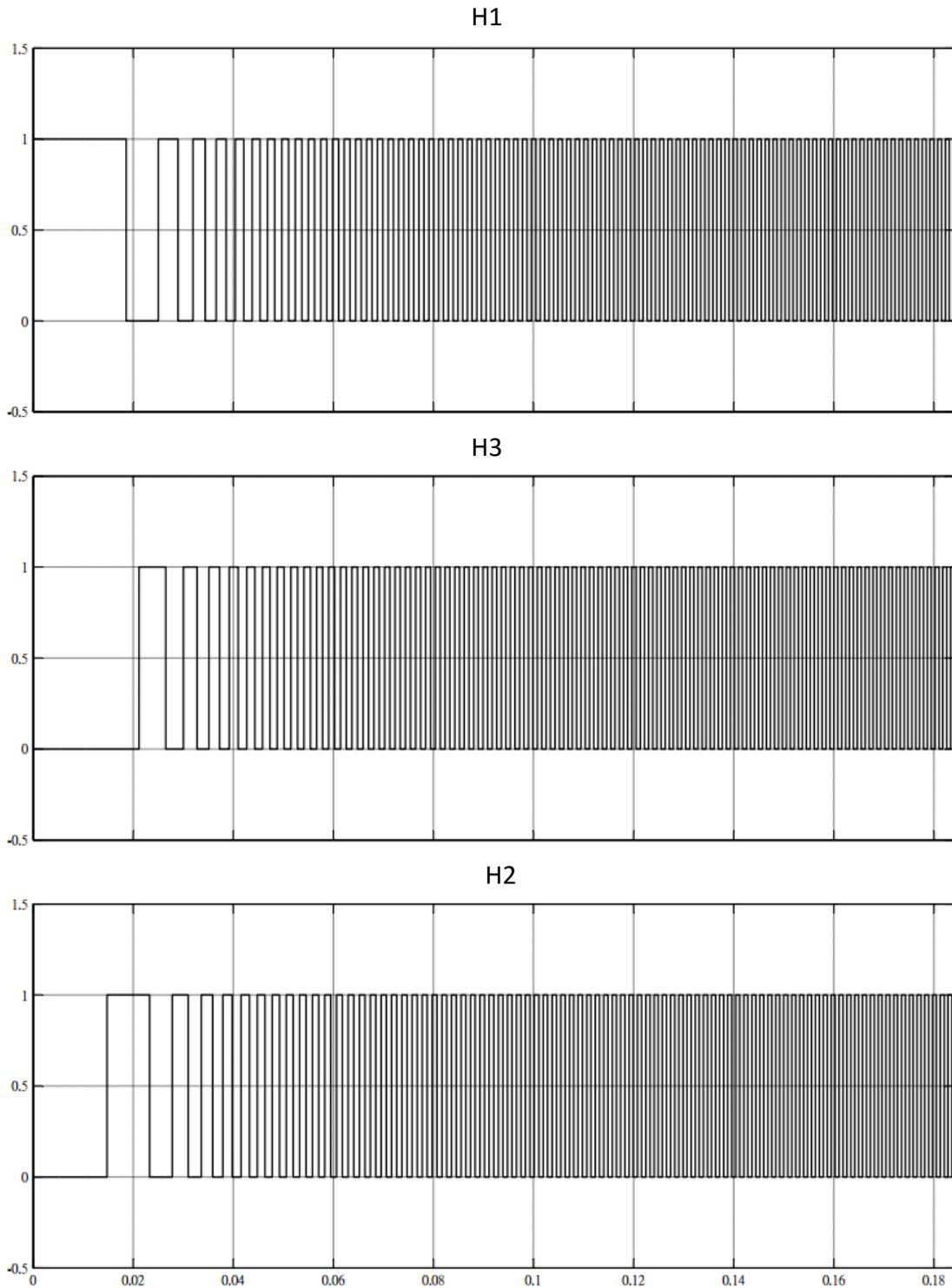
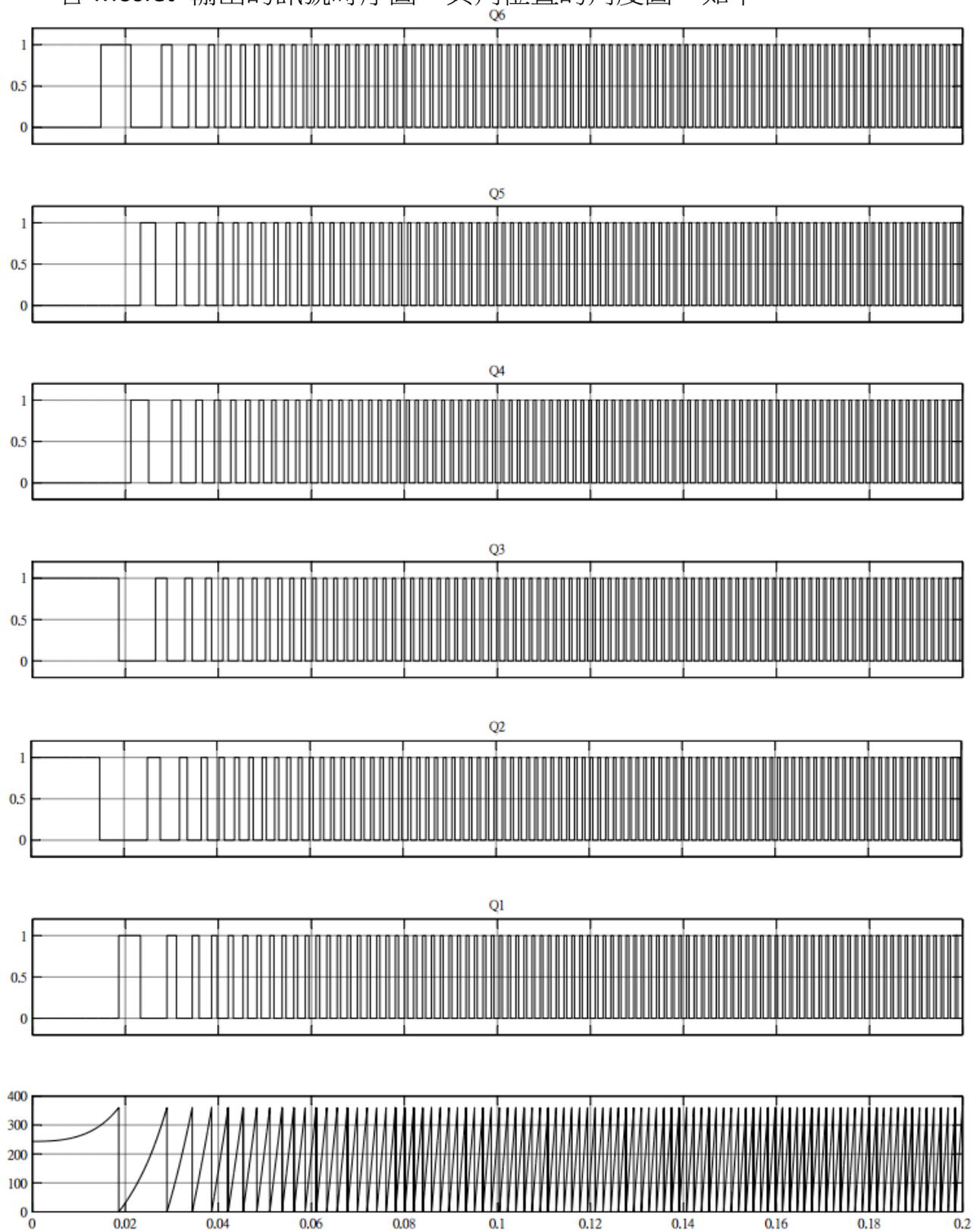


圖 4.8: Brushless DC Motor 的 Hall sensor 偵測的訊號

Time offset: 0

各 Mosfet 輸出的訊號時序圖，與角位置的角度圖，如下：



Time offset: 0 圖 4.9: Brushless DC Motor 的 Mosfet 輸出的訊號與角位置時序圖

圖的 Q1 至 Q6 時序圖，而得三相電壓如圖 4.9，又三相電壓乘 PWM

的 33%的結果，見圖 4.10。

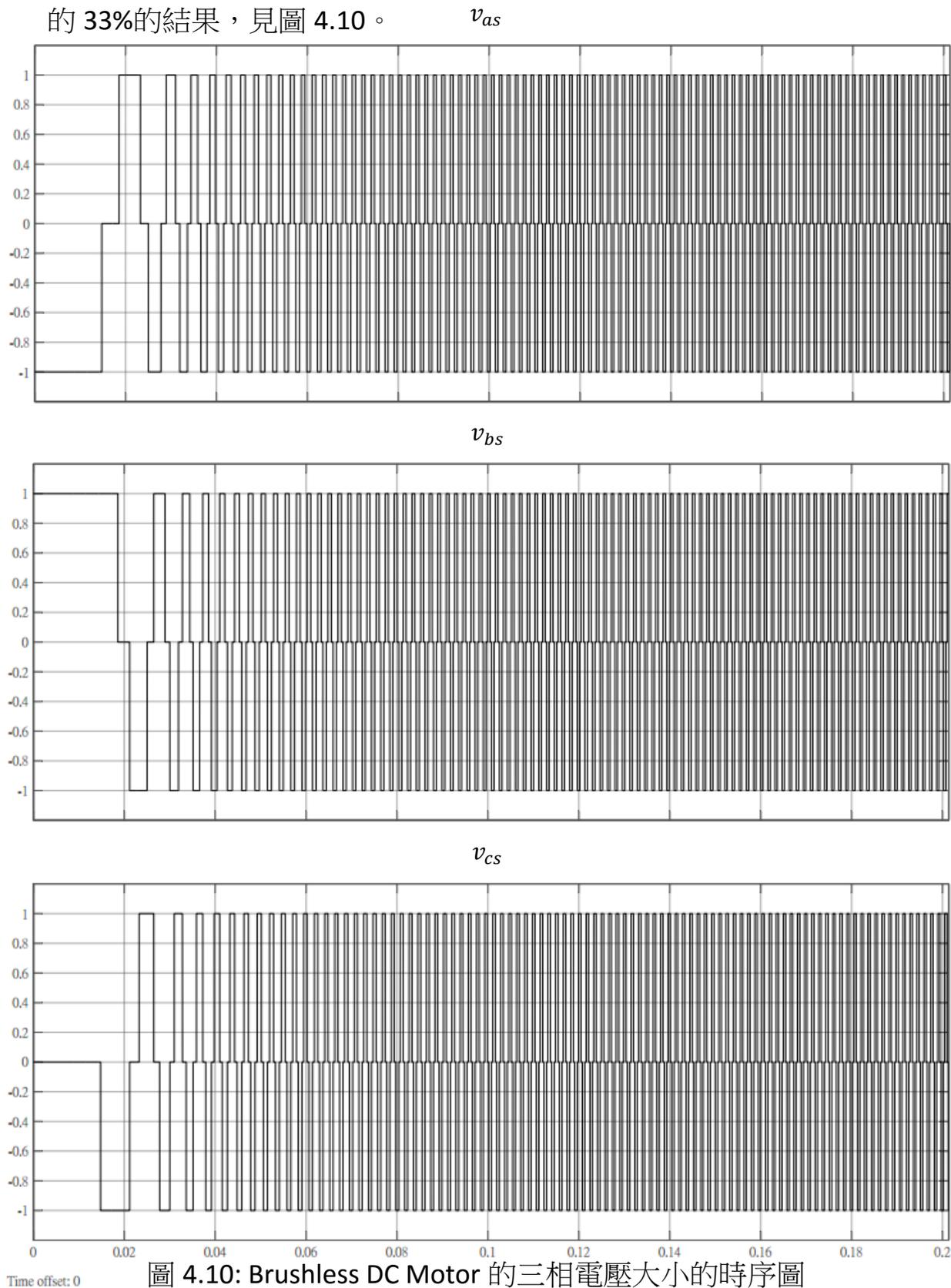


圖 4.10: Brushless DC Motor 的三相電壓大小的時序圖

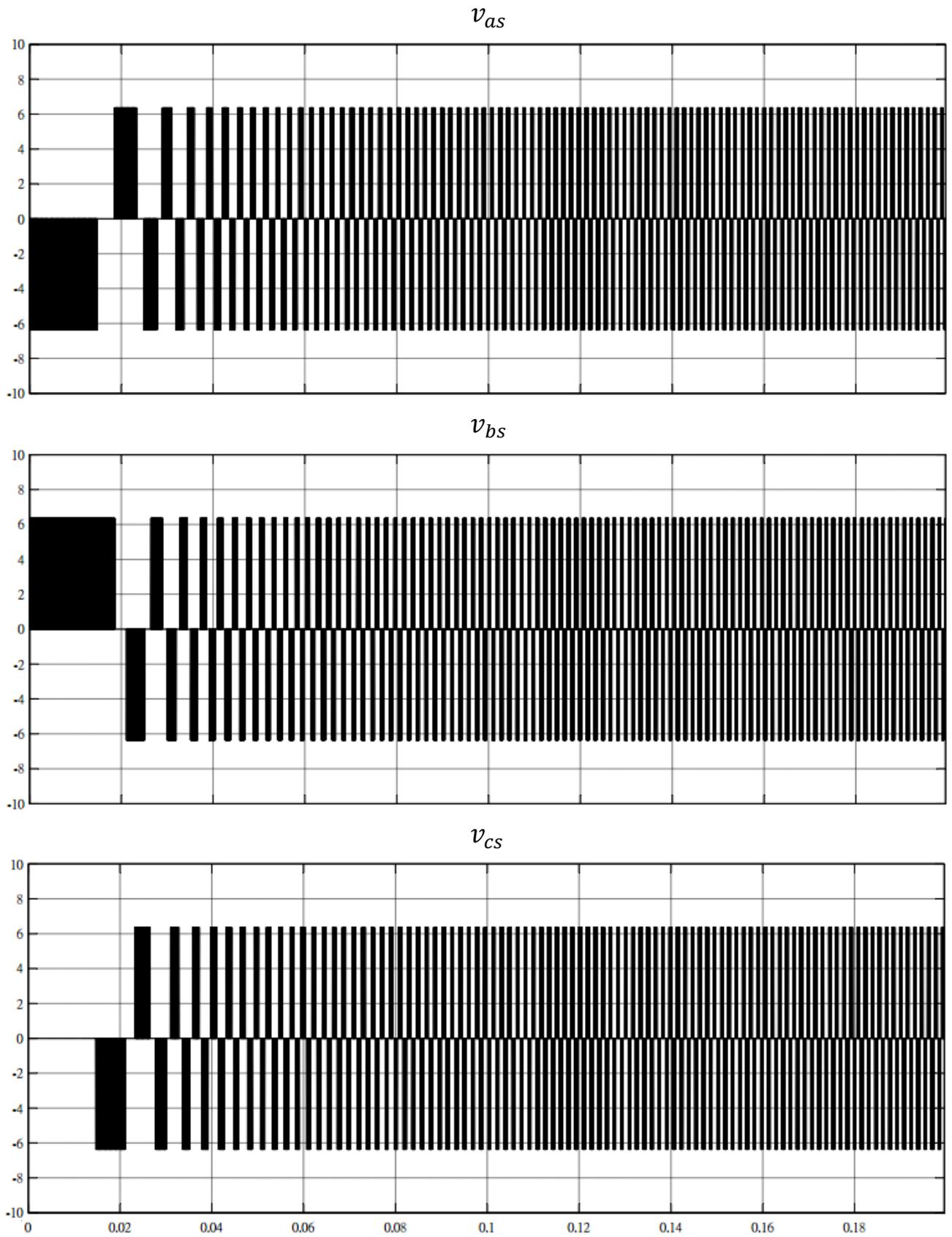
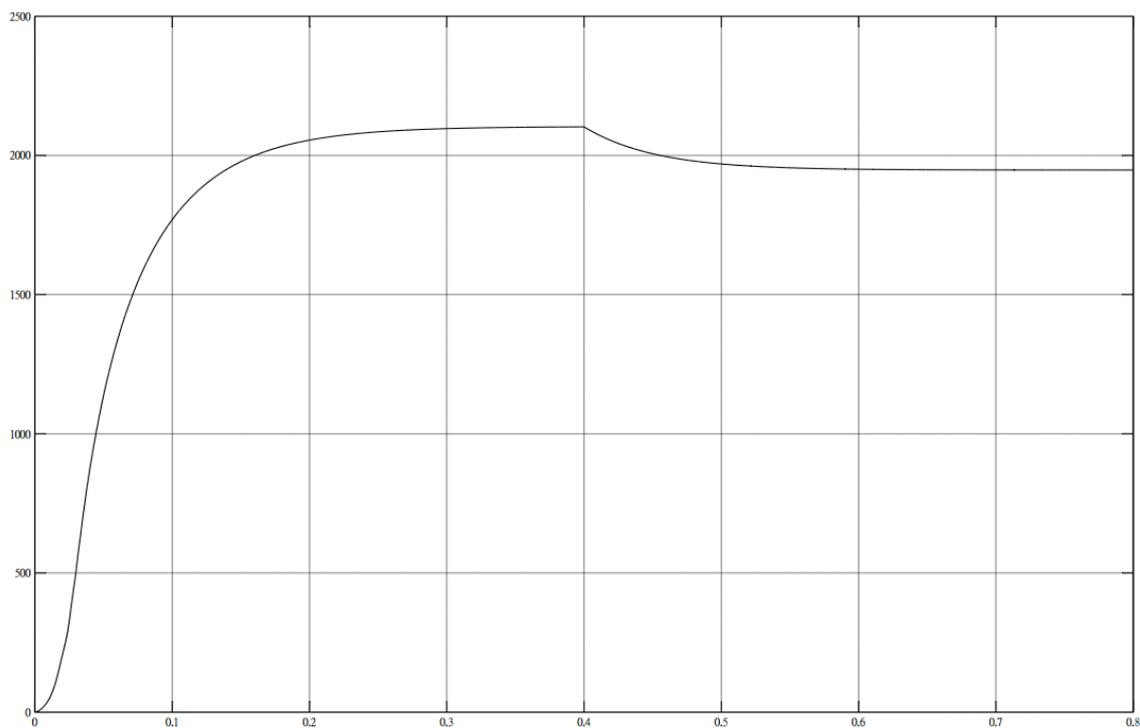


圖 4.11: Brushless DC Motor 的三相電壓大小與 PWM 總合的時序圖

Time offset: 0

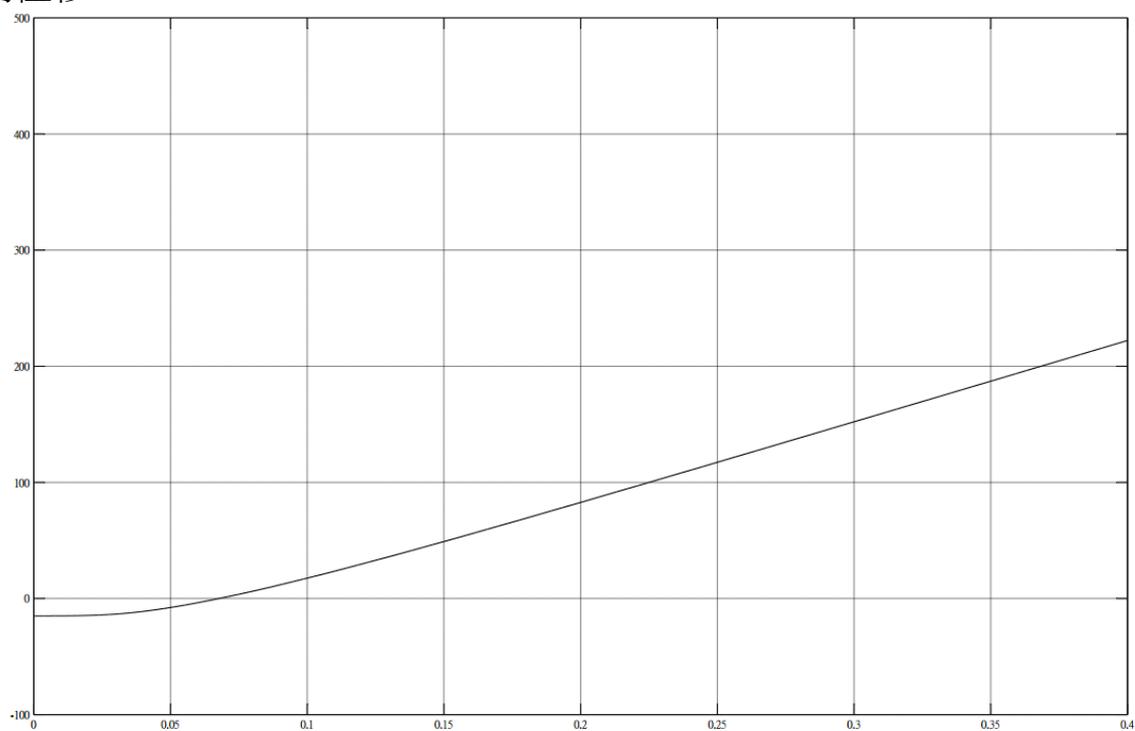
所得到的角速度結果如下圖 4.11。



Time offset: 0

圖 4.12: Brushless DC Motor in Simulink 模擬的角速度

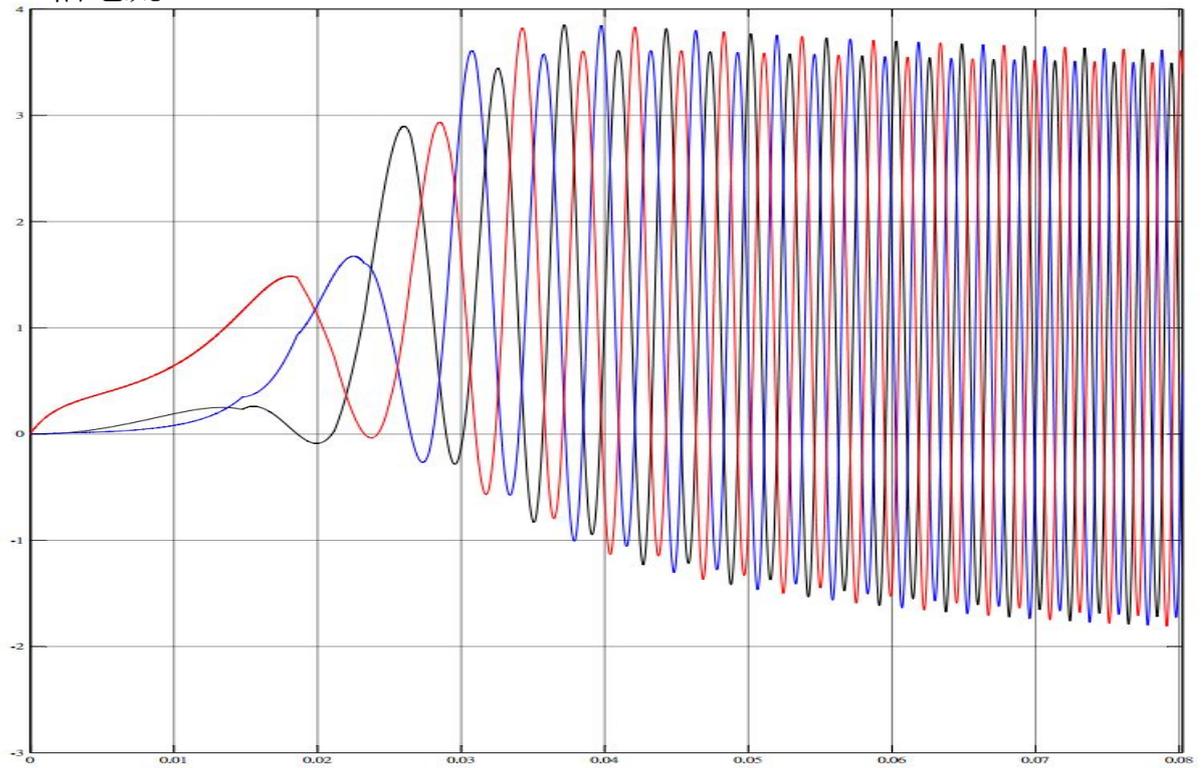
角位移：



Time offset: 0

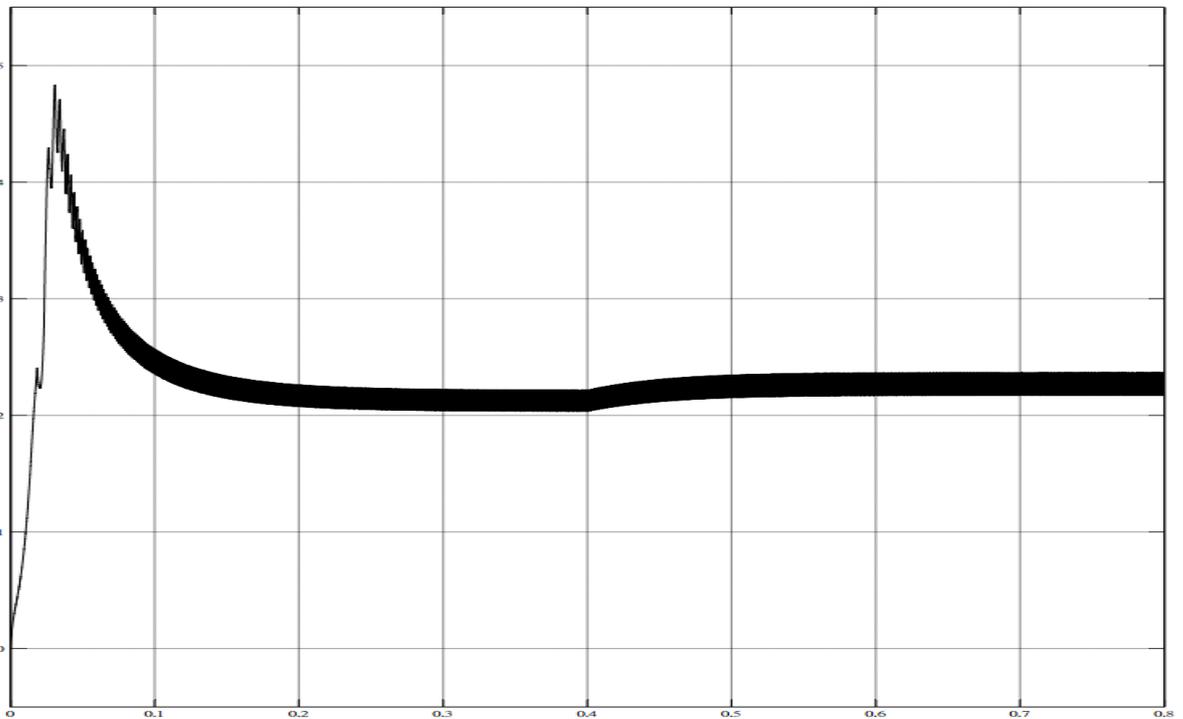
圖 4.13: Brushless DC Motor in Simulink 模擬的角位移

三相電流：



Time offset: 0 圖 4.14: Brushless DC Motor in Simulink 模擬的三相電流

電流總合：



Time offset: 0 圖 4.15: Brushless DC Motor in Simulink 模擬的電流總合

三相正弦波的反應電動勢：

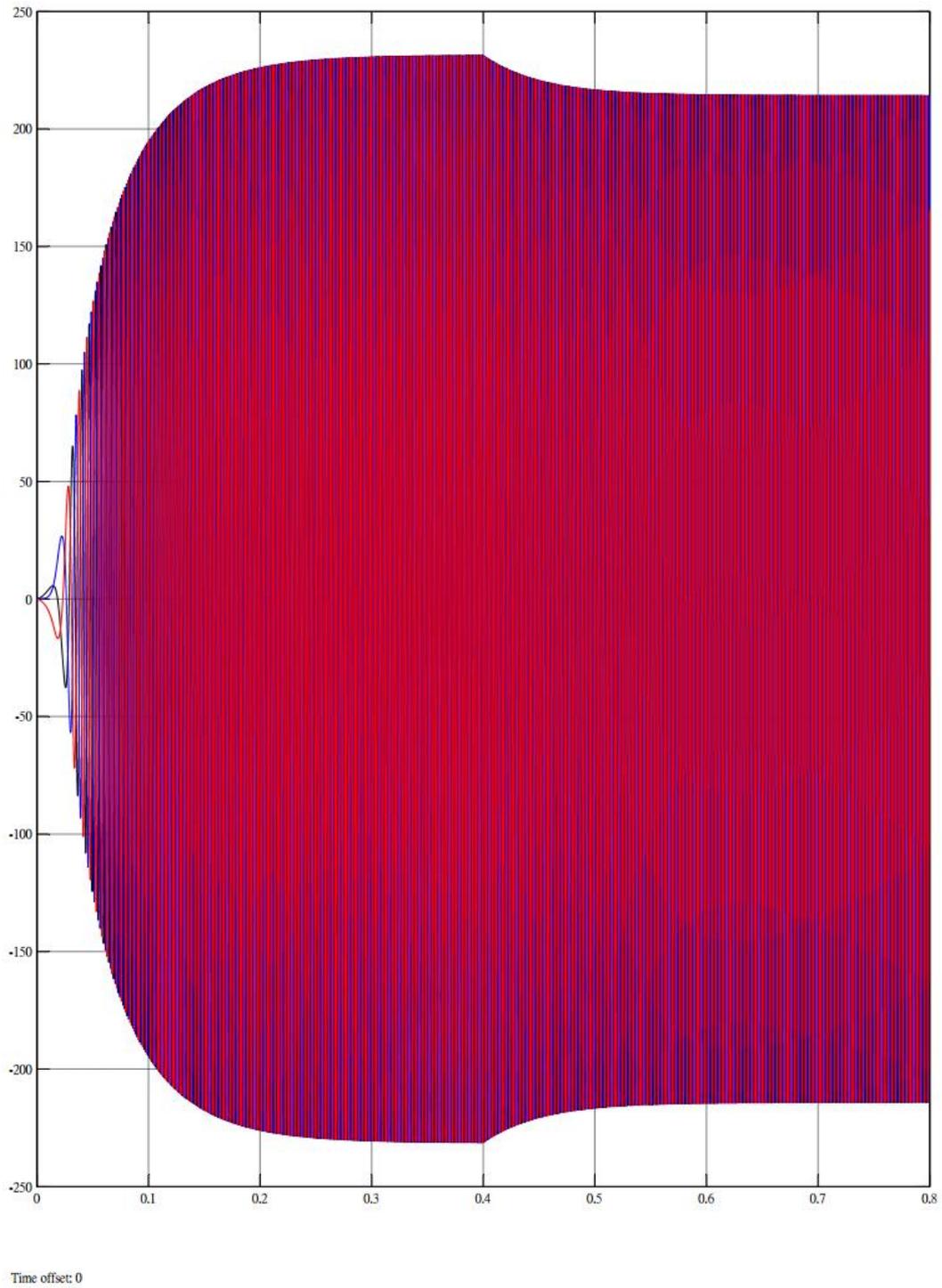


圖 4.16: Brushless DC Motor in Simulink 模擬的正弦波反應電動勢

在上述的圖 4.11 裡，可以清楚看到角速度於 0.2 秒時速度接近最高值，負載在 0.4 時輸入，角速度開始下降於 0.5 秒時速度到 1900 轉。圖 4.13 三相電流也依弦波差 120 度的方式，有延遲訊號出現，圖 4.14 總電流很快達到電流接近 5，在時間 0.2 秒時，已趨向穩定來到 2.2 左右的振盪，在負載 0.4 秒進到系統時，總電流有些微的上昇。圖 4.15 的正弦波反電動勢中，負載進入後，反電動勢的值也開始縮小。



第五章

未來展望

在這項研究中，Matlab / Simulink 建模與仿真的無刷直流的呈現。給該模型提供的 BLDC 的調查建模的方式。這種模式有一個靈活的結構，使得用戶可以很容易地改變電機參數。並在未來還需再加入控制器，使得馬達的轉速、電流可以被監控，進而實現馬達時，可以避免馬達因電流過大而損壞。

從架構來看，我們要有一個訊號輸入到馬達系統與模擬的系統中，並在此兩個系統的輸出訊號來計算誤差，從而回授回模擬的系統，來改變模擬系統裡的參數，使誤差減少有好的補償，使之達到良好的控制，如下圖 5.1。

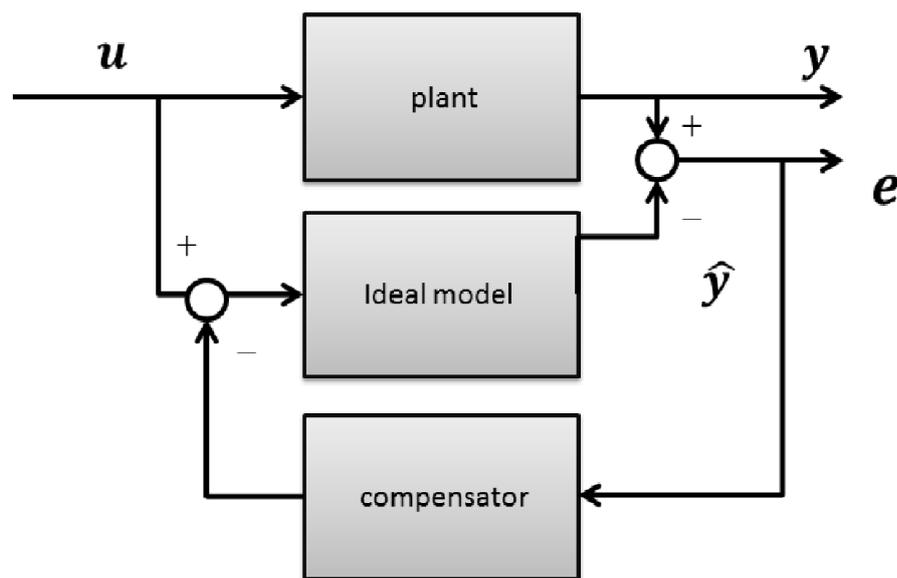


圖 5.1：理想馬達模擬系統

參考文獻

- [1] P. Pillay and R. Krishnan (1989) "Modeling, Simulation, and Analysis of Permanent-Magnet Motor Drives, Part I: The Permanent-Magnet Synchronous Motor Drive," *IEEE Transaction on Industry Applications* 25(2): 265-273.
- [2] P. Pillay and R. Krishnan (1989) "Modeling, Simulation, and Analysis of Permanent-Magnet Motor Drives, Part II: The brushless DC motor drive," *IEEE Transaction on Industry Applications* 25(2): 274-279.
- [3] C. Gencer and M. Gedikpinar (2006) "Modeling and Simulation of BLDCM Using MATLAB/SIMULINK," *Journal of Applied Sciences* 6(3): 688-691.
- [4] <https://zh.wikipedia.org/wiki/電動機>
- [5] 陳愈仁, "直流無刷馬達模型參考模糊位置控制", 中原大學電機工程碩士論文, 92年6月。
- [6] M. Cunkas and O. Aydogu (2010) "Realization of Fuzzy Logic Controlled Brushless DC Motor Drives Using MATLAB/SIMULINK," *Mathematical and Computational Applications* 15(2): 218-229.
- [7] L. N. Elevich (2005) "3-Phase BLDC Motor Control with Hall Sensors Using 56800/E Digital Signal Controllers," Freecase Semiconductor Application Note, AN1916, Rev. 2.0

附錄一

Simulink 簡介

本篇論文所使用的是 MATLAB_2013a 的版本，而 Simulink 呼叫方式為下圖：



圖 a.1: Matlab 操作界面圖

展開後，

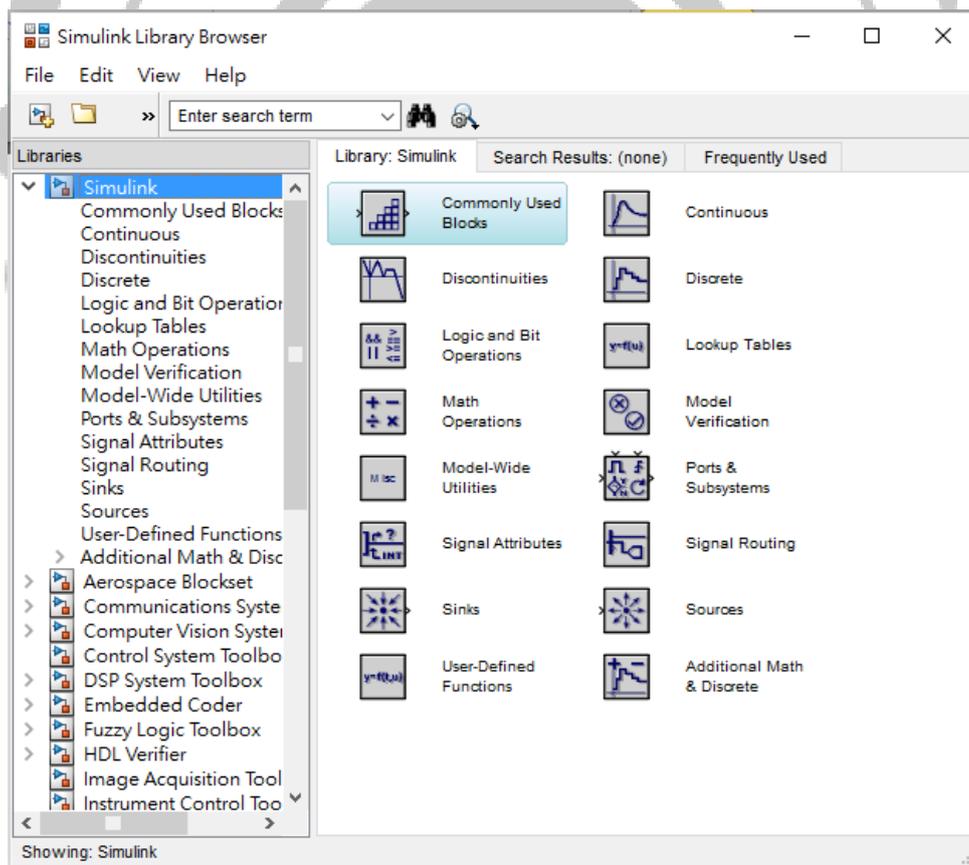


圖 a.2: Matlab/Simulink 的操作界面

並可以開啟新的檔。

以下簡單介紹 simulink 的有使用到的元件：

Add Block：



功能，可以做簡單的訊號加減。也能在 List of signs 裡設定多個訊號的加減運算，其中“|”的符號表示輸出位置。

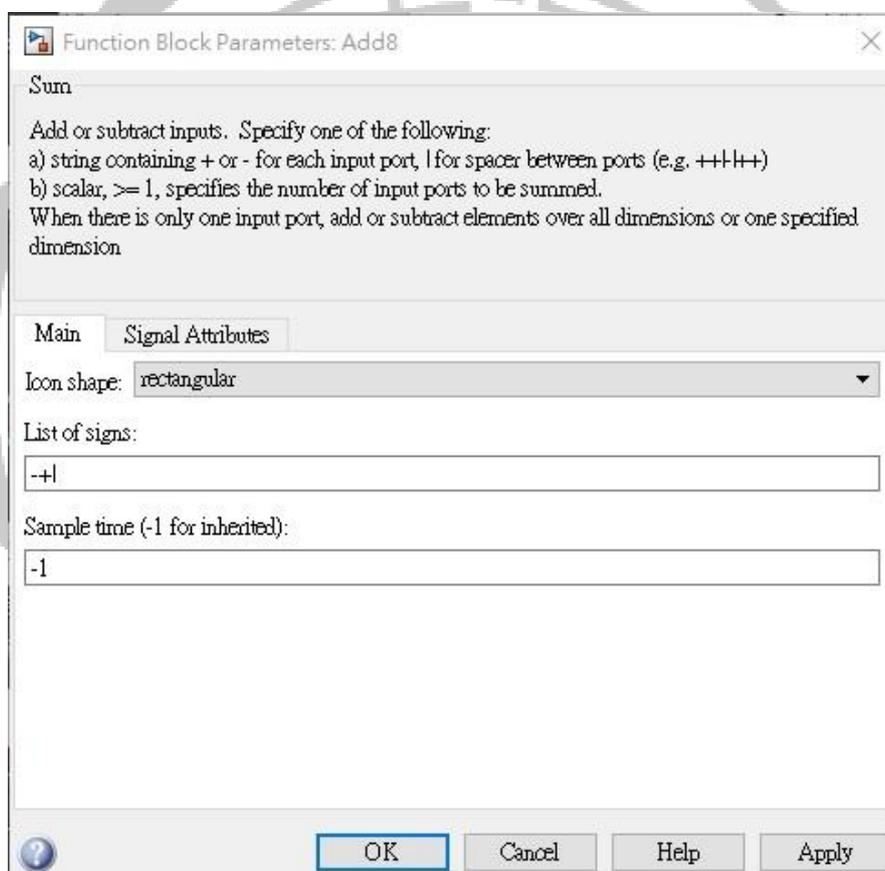


圖 a.3: Matlab/Simulink Add Block

Mux Block :



功能：用來將訊號線路整合，使畫面更簡潔。能在 Number of inputs 裡設定多個訊號的整合。

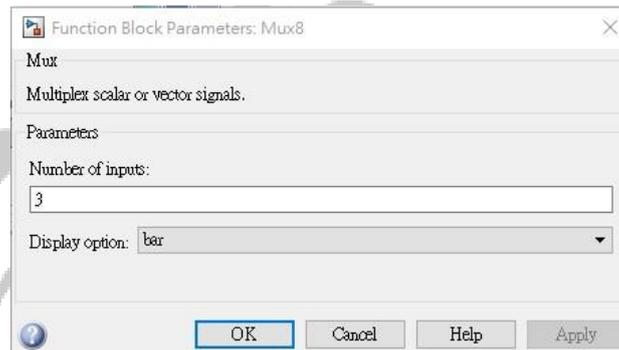


圖 a.4: Matlab/Simulink Mux Block

Gain Block :



功能：將輸入訊號在系統中的 Gain 中改變參數作放大或是縮小來使用。

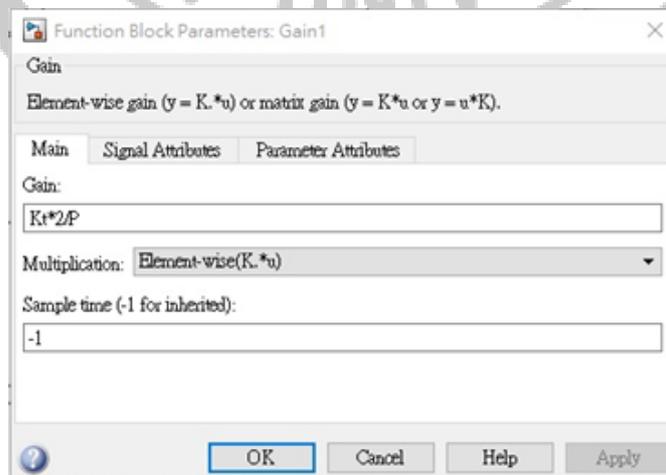


圖 a.5: Matlab/Simulink Gain Block

Product Block :



功能：將訊號作乘法運算。能在 Number of inputs 設定多個訊號的乘法運算。

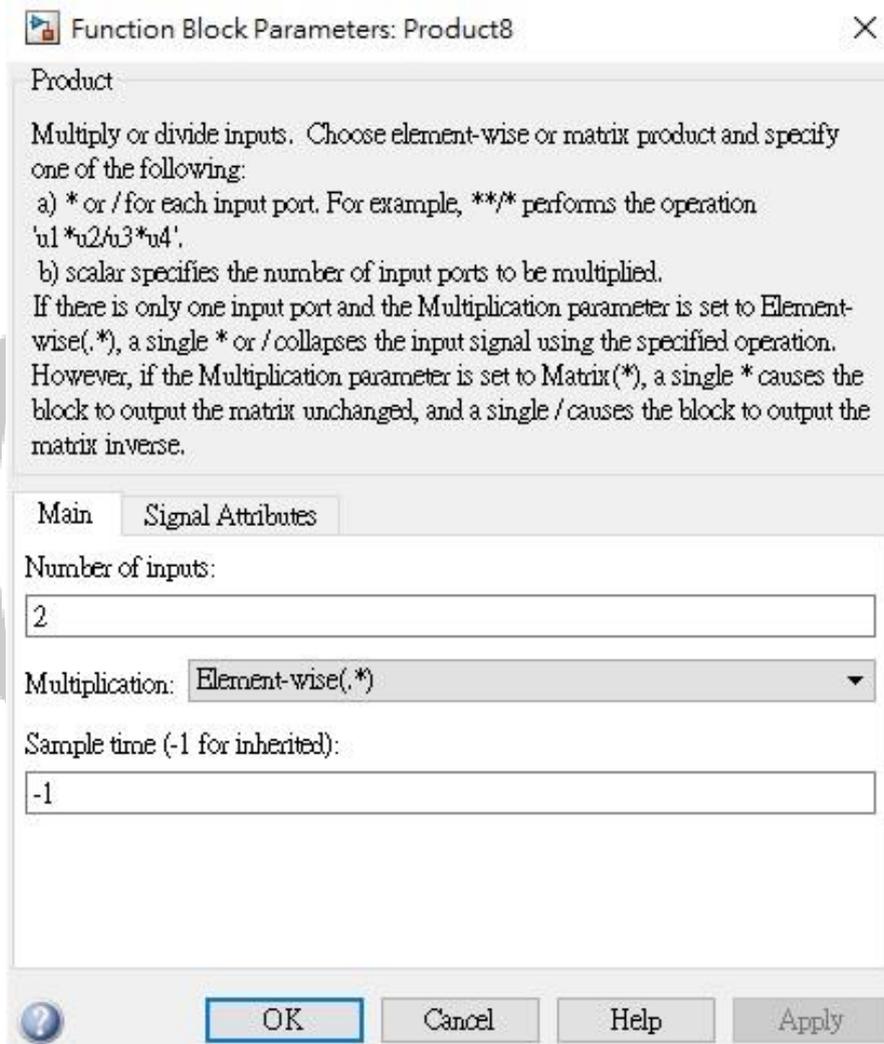


圖 a.6: Matlab/Simulink Product Block

Trigonometric Function Block :



功能：將訊號作三角函數的運算，並可以在 **Function** 中選擇任何三角函數。

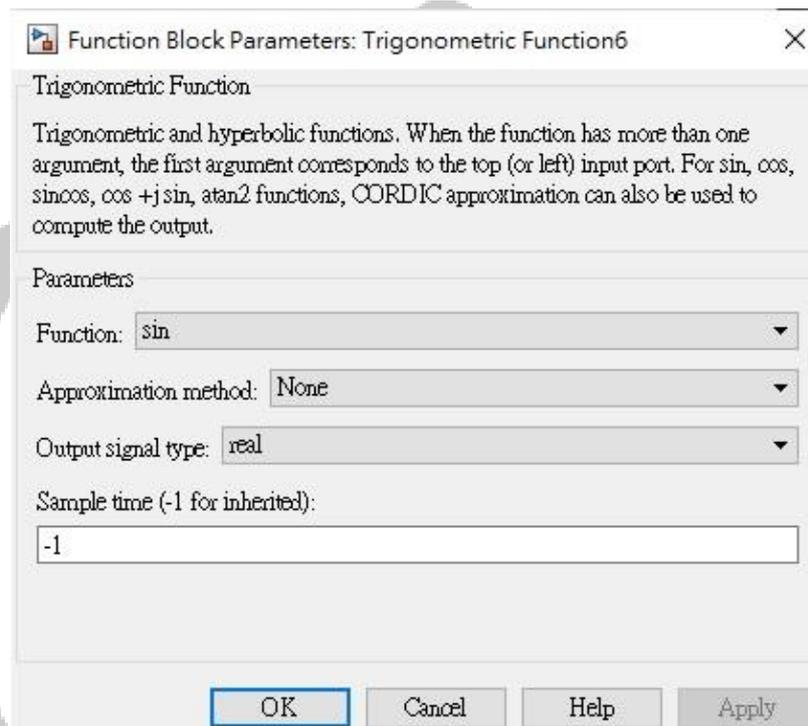


圖 a.7: Matlab/Simulink Trigonometric Function Block

Scope Block :



功能：顯示訊號的增益結果圖。也能將多個訊號在同一個結果的範圍圖中。

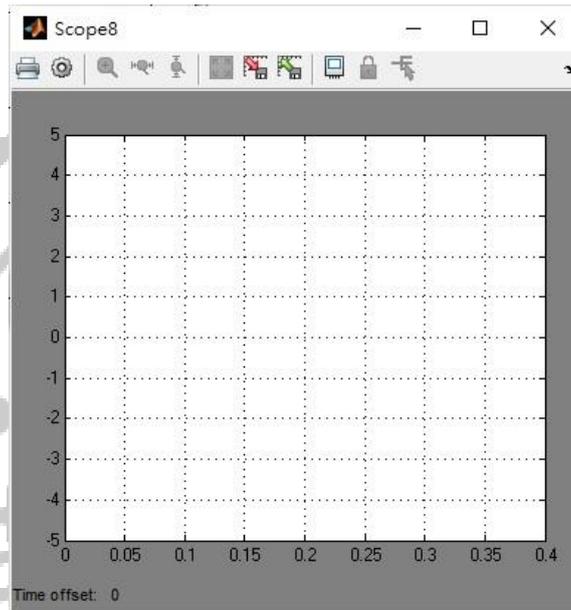


圖 a.8: Matlab/Simulink Scope Block

在 Number of axes 裡可以改變數字，增加收集訊號的數量。

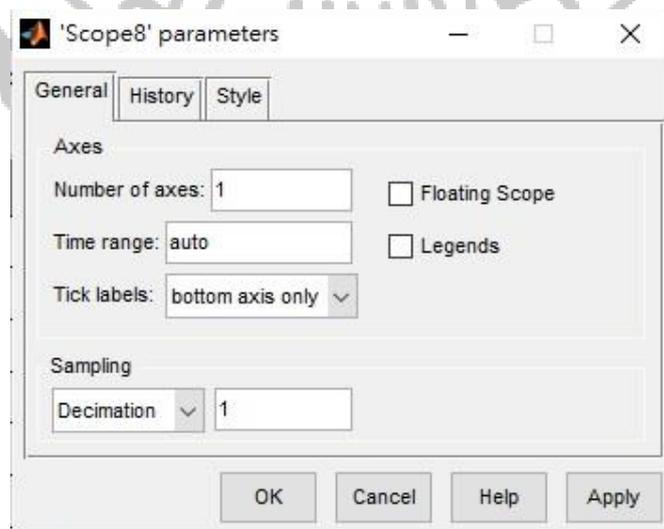


圖 a.9: Matlab/Simulink Scope Block of Number of axes

在 History 裡，可以在 Limit data points to last 選擇收集數據中最後的幾筆資料，又或是勾選 save data to workspace 收集所有資料量。

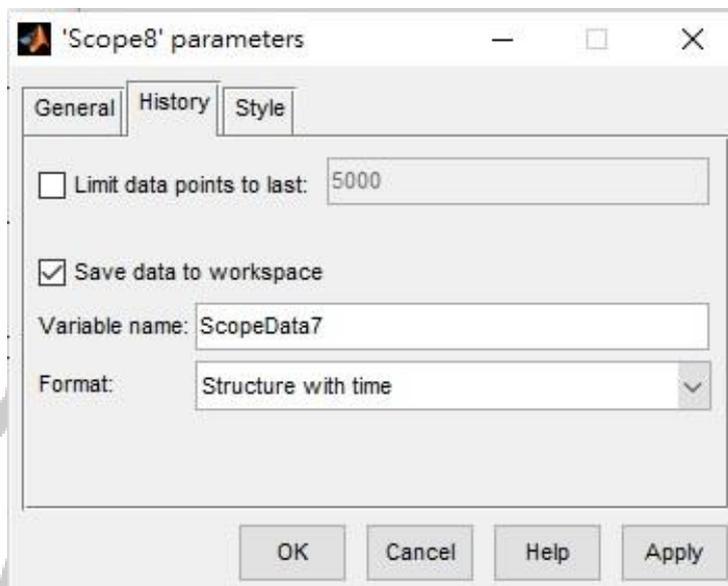


圖 a.10: Matlab/Simulink Scope Block of History

在 Scope 裡的 Style 中，可以用 Axes colors 來改變函數圖形的底色，與 Line 中可以改變訊號輸出的顏色。

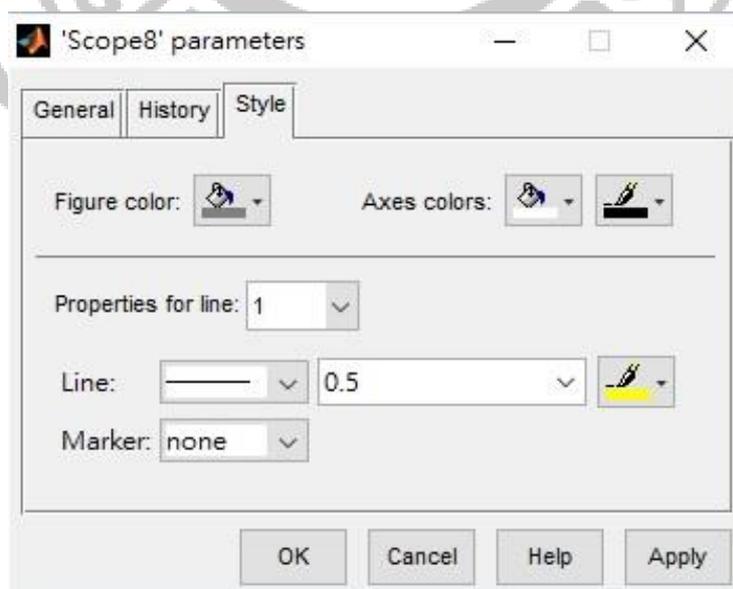


圖 a.11: Matlab/Simulink Scope Block of Style

Pulse Generator Block :



功能：能送出 PWM 訊號來完成測試，其中可以週期、頻率、和延遲。

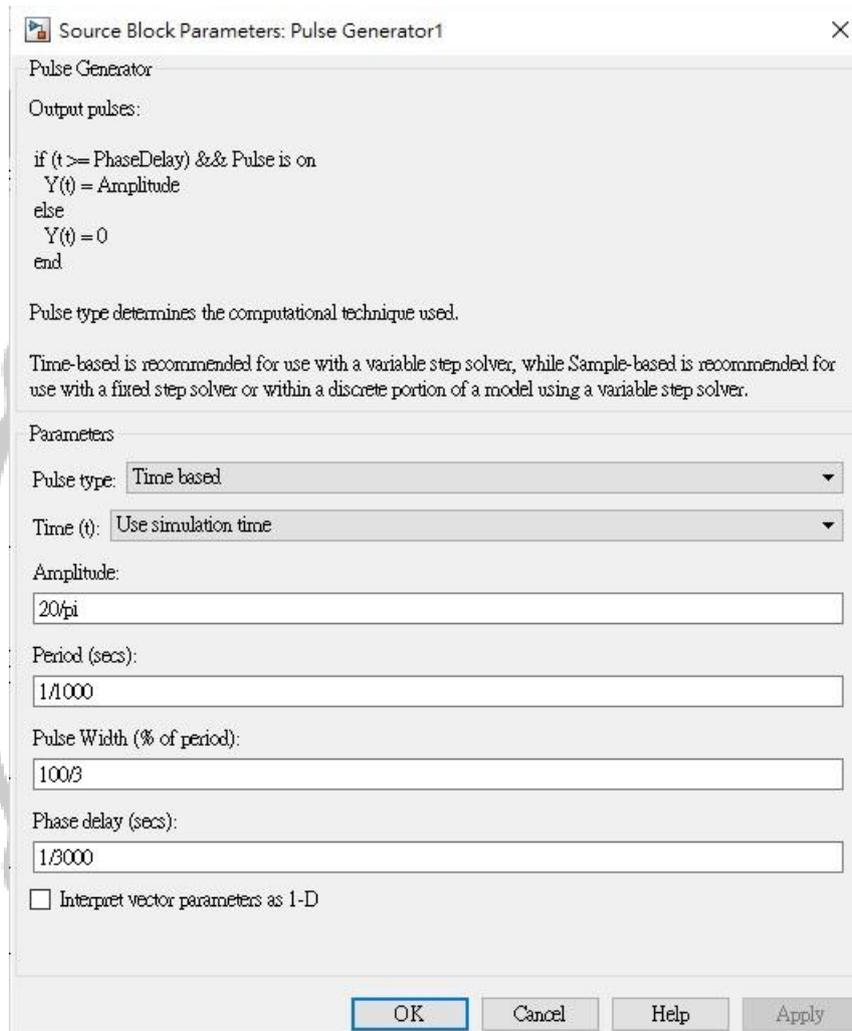


圖 a.12: Matlab/Simulink Scope Block of Pulse Generator Block

Sin Wave Block :



功能：可以調整弦波的峰值、頻率、週期、振幅。



圖 a.14: Matlab/Simulink Sin Wave Block

Step Block :



功能：可以調整初始的值、延遲的輸出時間、並最後的值。

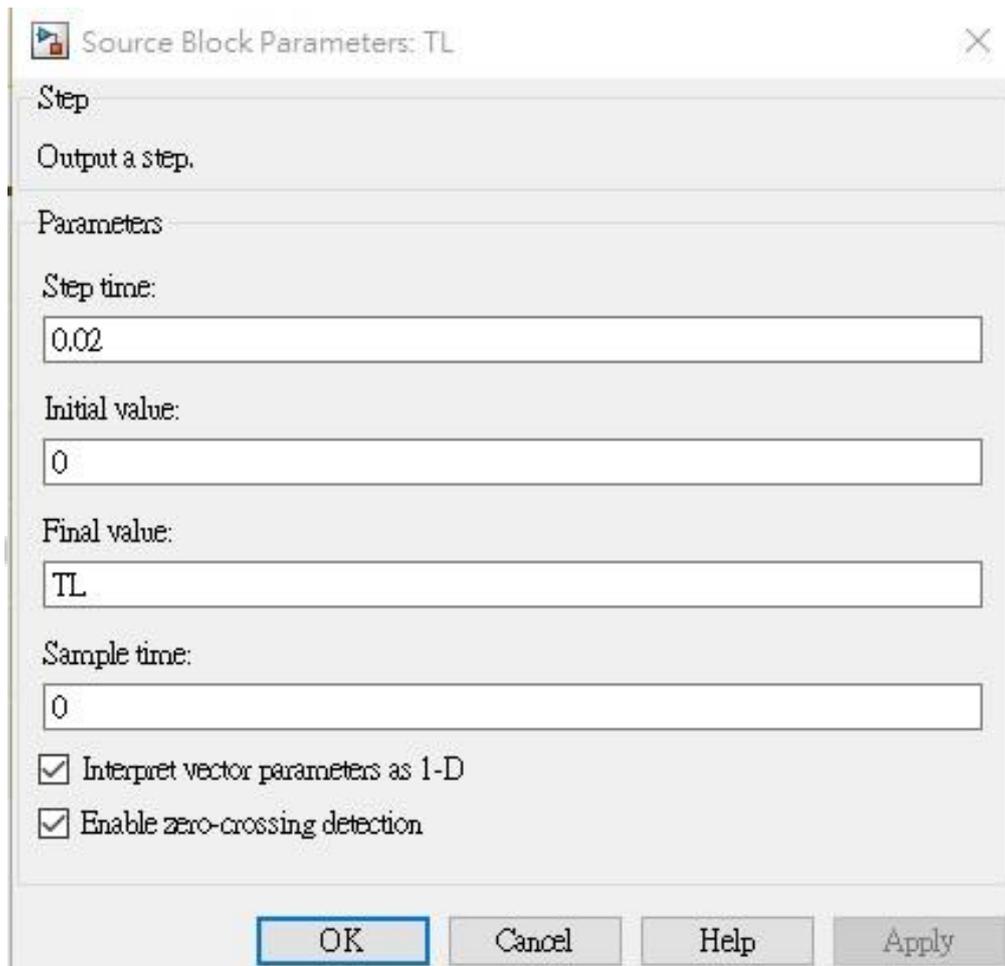


圖 a.15: Matlab/Simulink Step Block

Transfer Fcn Block :



功能：可以改變此函數的每一個的次方係數。

例如：要造出 $\frac{x^2+2}{x^3+5x-1}$ ，

就在 Numerator coefficients 中輸入每一項的係數值，設為[1 0 2]，

並在 Denominator coefficients 中也輸入每一項的係數值為[1 0 5 -1]。

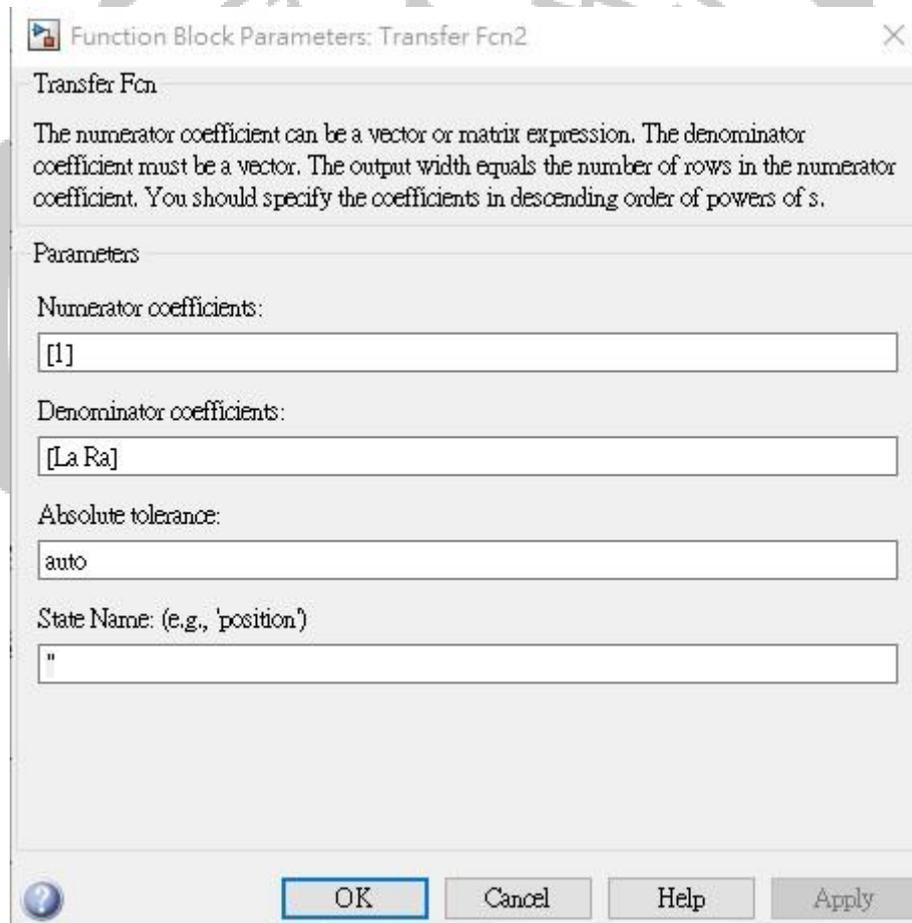


圖 a.16: Matlab/Simulink Transfer Fcn Block

Combinatorial Logic Block :



功能：將訊號分割成數個訊號，並用矩陣表示。

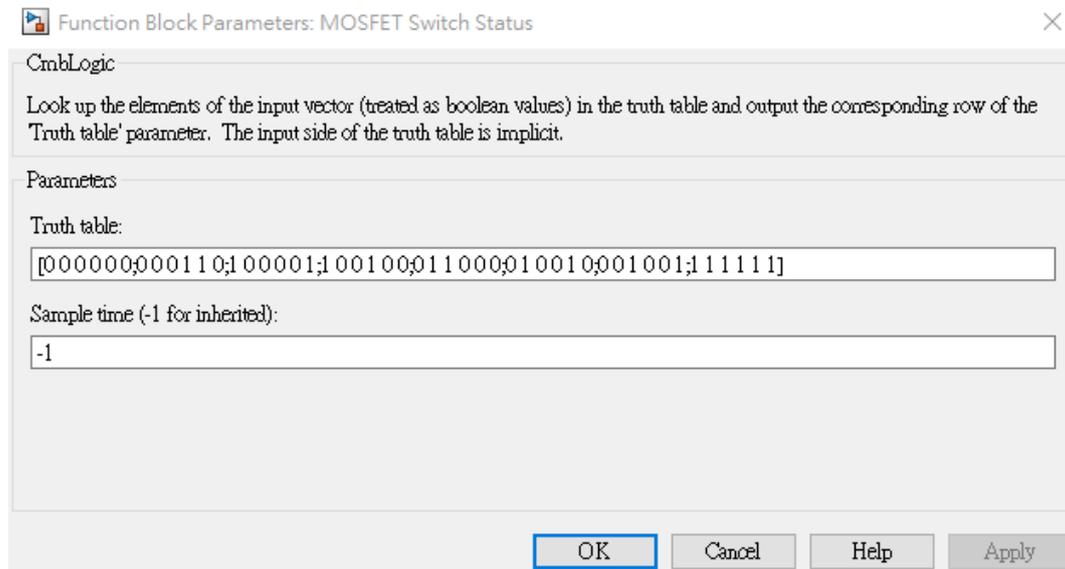


圖 a.17: Matlab/Simulink Combinatorial Logic Block

Interval Test Block :



功能：判斷數值決定上界和下界的訊號。

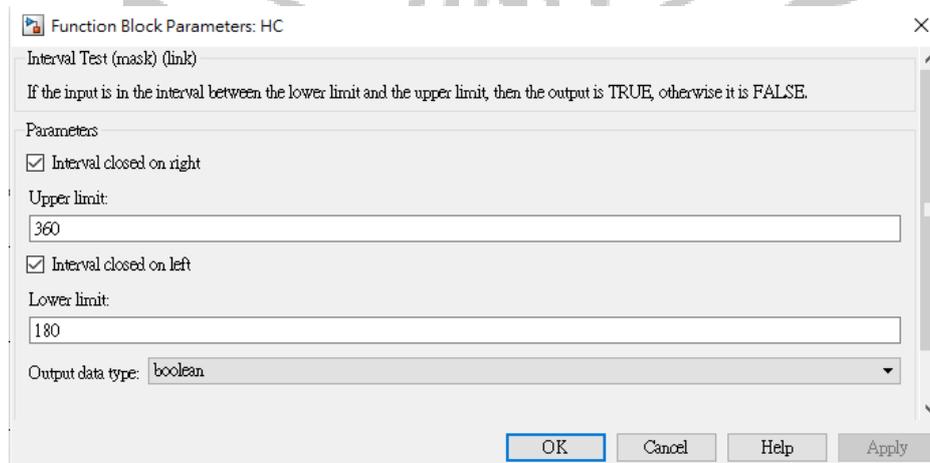


圖 a.18: Matlab/Simulink Interval Test Block

Logical Operator Block :



功能：將訊號整合使用。

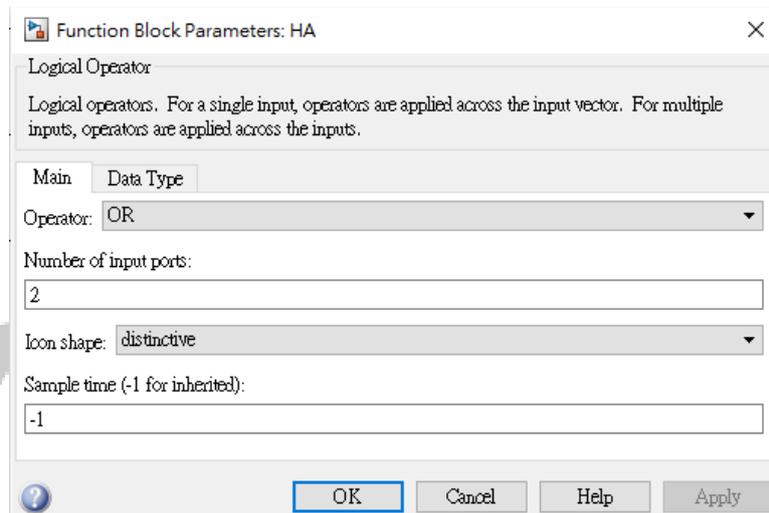


圖 a.19: Matlab/Simulink Logical Operator Block

Math Function Block :



功能：數學的方程式套件組。

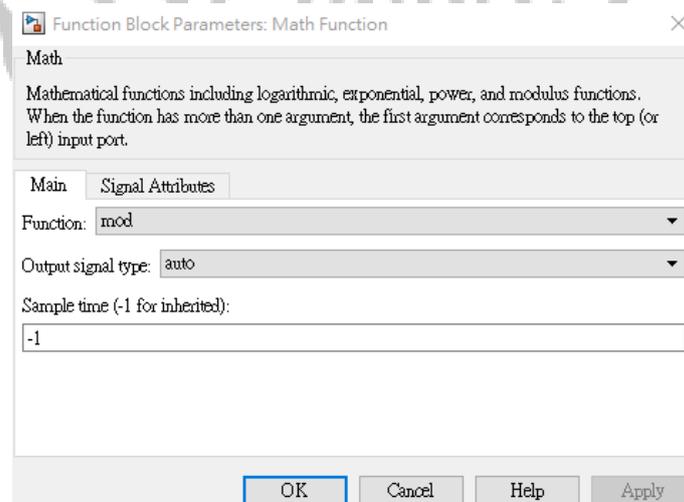


圖 a.20: Matlab/Simulink Math Function Block

而我們可以將上述的方塊圖拉曳到下列 **simulink** 的啟動檔中，圖如下：

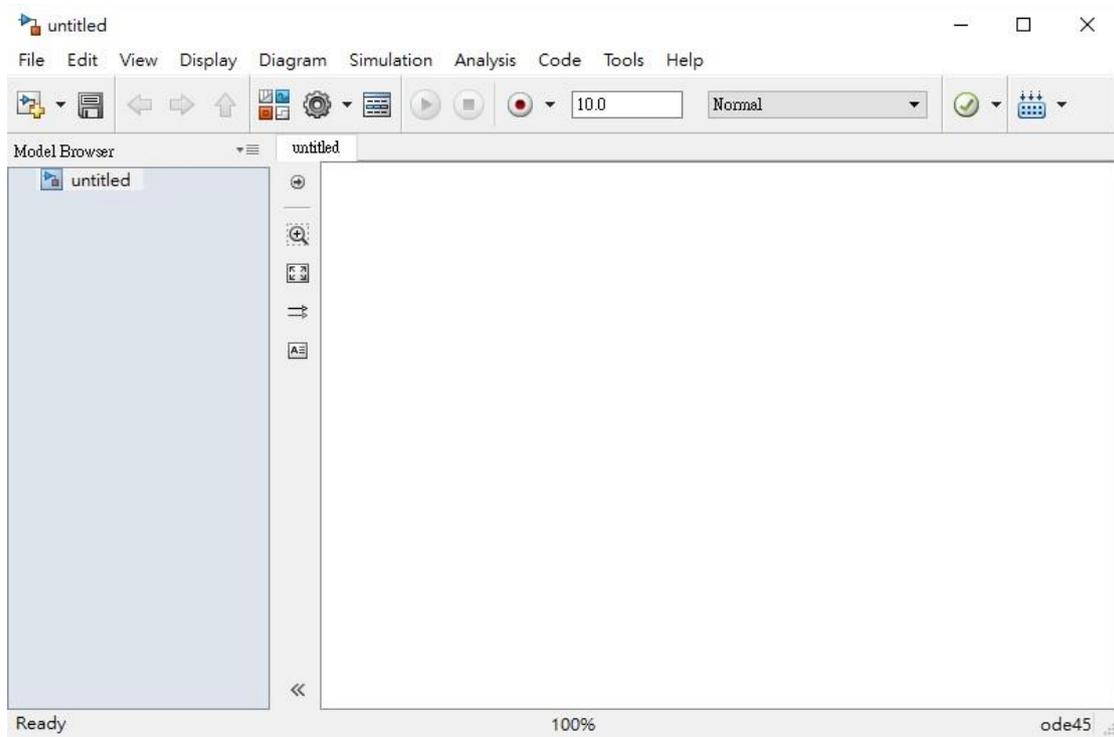


圖 a.21: Matlab/Simulink Model 界面