

東海大學應用數學系

碩士論文

On the Deficiency Problems of
Antimagic Labeling for Regular Graphs

關於正則圖上反魔方標號

缺數問題之研究



指導教授: 王道明博士

研究生: 王奕璿

民國 105 年 6 月

東海大學

應用數學系

碩士學位口試委員審定書

本系碩士班 王奕璿 君

所提論文 ON THE DEFICIENCY PROBLEMS OF ANTIMAGIC LABELING FOR REGULAR GRAPHS

(關於正則圖上反魔方標號缺數問題之研究)

合於碩士班資格水準，業經本委員會評審通過，特此證明。

口試委員：

洪春男

滕元翔

指導教授：

王奕珊

所長：

楊志煌

中華民國 一〇五 年 六 月 二十三日

致謝

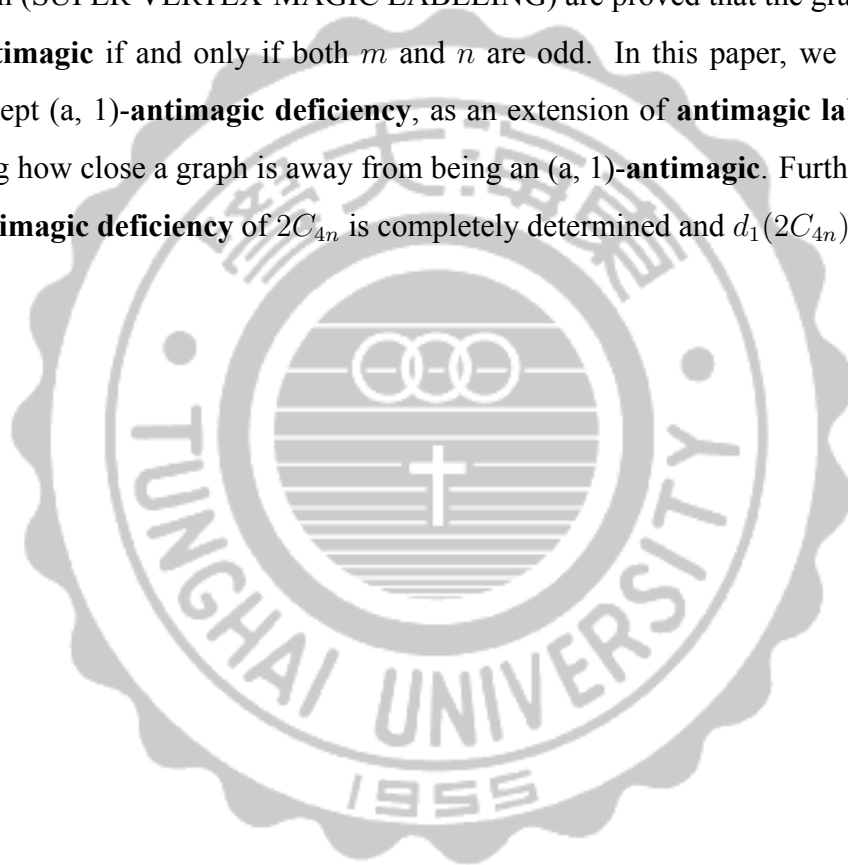
本論文得以完成，首先要感謝指導教授王道明老師。感謝老師這三年為學生在論文指導上所花費的精力與時間，謝謝您孜孜不倦的教導，也給予很多鼓勵，使我有動力繼續往前邁進，至此之後，也會繼續努力的遵循和實踐老師所給予的教誨。感謝口試委員洪春男老師與滕元翔老師特地撥冗於論文口試時給予指正與建議，使本論文能夠更加完善，同時也給我許多啟發與收穫，也感謝老師們對學生論文的肯定，學生於此衷心感謝。

另外感謝淑媛姊與文伶助教，有妳們兩位處理繁忙的所務，應數所的學生們很幸福。感謝育祥、正鴻、秉諺、世銘、銘郎在我讀研究所時能互相照應、幫助以及互相學習，感謝各位同學們一路上的相伴。感謝東海 Mother 滷味 fater 與 mother，從大一認識至今對我的照顧讓我在東海也能有家的感覺，感謝德邦、竣翔、小炳、健群在研究所的過程中有你們陪伴與給出非常多建議。

最後感謝我的家人，爸爸、媽媽不斷的給予我鼓勵，兩位姐姐也是不斷的 support 我，姿儀更是一直陪在我身邊不斷的給予我正向的意見與關心，如果沒有你們我無法達成自己的目標。因為有你們，研究生活才得以充滿活力，在寫論文的夜裡才得以不孤單寂寞，由衷感謝一路上陪伴的人們。最後，僅將此論文與各位分享。

Abstract

In 1993, R. Bodendiek and G. Walther introduced the concept of an (a, d) -**antimagic labeling**. Let $G = (V, E)$ be a finite simple graph without any isolated vertex, with p vertices and q edges. An (a, d) -**antimagic labeling** is a bijection $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$, such that the induced vertex sums $f^+ : V \rightarrow \mathbb{N}$ given by $f^+(u) = \sum\{f(uv) : uv \in E(G)\}$ are a sequence with initial term a and common difference d . A graph G is called (a, d) -**antimagic** if it admits an (a, d) -**antimagic labeling**. In 2003, V. Swaminathan and P. Jeyanthi (SUPER VERTEX-MAGIC LABELING) are proved that the graph mC_n is $(a, 1)$ -**antimagic** if and only if both m and n are odd. In this paper, we defined a new concept $(a, 1)$ -**antimagic deficiency**, as an extension of **antimagic labeling**, for measuring how close a graph is away from being an $(a, 1)$ -**antimagic**. Furthermore the $(a, 1)$ -**antimagic deficiency** of $2C_{4n}$ is completely determined and $d_1(2C_{4n}) = 1$.



中文摘要

R. Bodendiek 與 G. Walther 於 1993 年提出了 (a, d) -**antimagic labeling** 的概念，令 $G = (V, E)$ 為一個有 p 個點和 q 個邊且沒有孤立點的有限簡單圖，定義一個 bijection 的函數 $f: E \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ ，將邊做 $1 \sim q$ 的編號，則導出頂點所有入射邊的編號和 $f^+(u) = \sum\{f(uv) : uv \in E(G)\}$ ，使得 $f^+ : V \rightarrow \mathbb{N}$ ，且形成一首項為 a 、公差為 d 的等差數列，則我們稱其為 (a, d) -**antimagic labeling**。如果圖 G 有 (a, d) -**antimagic labeling**，則我們稱 G 是 (a, d) -**antimagic**。V. Swaminathan 與 P. Jeyanthi (SUPER VERTEX-MAGIC LABELING) 於 2003 年證實了 mC_n 是 $(a, 1)$ -**antimagic**，若且唯若 m 與 n 皆為奇數。在此篇文章中我們提出並定義了 $(a, 1)$ -**antimagic deficiency**(缺數) 的概念，放寬了 (a, d) -**antimagic labeling** 並推測如何使其在最小放寬程度能成為 $(a, 1)$ -**antimagic**。此外也證實了 $2C_{4n}$ 缺數為 1 時是 $(a, 1)$ -**antimagic**。



Contents

1	Introduction to Graph Labeling of Antimagic Type	1
1.1	Antimagic Labeling	1
1.2	(a, d)-Antimagic Labeling	4
1.3	(a, 1)-Antimagic Labeling	5
1.3.1	Adding Arbitrary 2-Factor	7
1.3.2	Super/E-Super Vertex Magic Total Labeling	9
2	Results of (a,1)-Antimagic Labeling and Deficiency Problems	18
2.1	(a, 1)-Antimagic Labeling and Deficiency for Odd Regular Graphs	18
2.1.1	Quasi-Prism of Type I and Type II	19
2.1.2	(a, 1)-Antimagic Deficiency for K_4	26
2.2	(a, 1)-Antimagic Deficiency for Even Regular Graphs	28
3	Concluding Remarks	34
3.1	Further Studies for Odd Regular Graphs	34
3.2	Further Studies for Even Regular Graphs	35
	Reference	37

List of Figures

1.1	Example of antimagic labeling	2
1.2	Mini-Survey on Antimagic Labeling from Gallian[21]	3
1.3	C_3 & C_7 is (a, 1)-antimagic	5
1.4	C_5 加入 2-factor 變成為 K_5	8
1.5	Mini-Survey on VMTL(vertex magic total labeling)from Gallian[21]	11
1.6	Mini-Survey on Super VMTL from Gallian[21]	11
1.7	$CR_{20}(1,7,19)$ & $CR_{12}(1,3,11)$	13
1.8	$CR_{20}(1,9,19)$ & $CR_{12}(1,5,11)$	14
1.9	$CR_{12}(1,3,19) \cup CR_{12}(1,5,11)$	15
2.1	A Quasi-Prism Graph	19
2.2	Examples of generalized Petersen graphs	20
2.3	Example of Quasi-Prism of Type I	22
2.4	Example of Quasi-Prism of Type II	24
2.5	$H_{3,8}$ & $H_{3,16}$	25
2.6	C_3, C_5 is (a, 1)-antimagic	28
2.7	C_8 (the missing value $x = 3, 7$)	29
2.8	Example for (a,1)-antimagic of $5C_3$	29

2.9	(a,1)-antimagic deficiency of $2C_8$ $n = 2$,missing value: $2n+1 = 5$ & $6n+1 = 13$	33
2.10	(a,1)-antimagic deficiency of $2C_{12}$ $n = 3$,missing value: $2n + 1 = 7$ & $6n + 1 = 19$	33
3.1	Labeling of $CIR_{12}(1, 6)$	34
3.2	Labeling of $2C_6$ and $2C_{10}$	36



Chapter 1

Introduction to Graph Labeling of Antimagic Type

1.1 Antimagic Labeling

在這份報告中，我們的討論無向有限的 simple graph。以下為 Ringel 和 Hartsfield[16] 於 1990 年關於 antimagic labeling 研究的概念：

Definition 1.1.1. G 為一有 q 個邊的圖。定義一個一對一的函數，將邊做 $1 \sim q$ 的編號 $f: E(G) \rightarrow \{1, \dots, q\}$ ，再將點所有相鄰的邊的編號相加，如果總合盡不相同，則我們稱其為 **antimagic labeling of G** 。(見 *Figure 1.1*)

其中他們證明了以下的圖有 antimagic: P_n ($n > 3$), cycles, wheels, and K_n ($n > 3$)。Wang, T. M.[42] 展示了 toroidal grids $C_{n_1} \times C_{n_2} \times \dots \times C_{n_k}$ 是 antimagic，更一般性的如果 G 是一個 $r > 1$ 的 r -regular antimagic graph，則 $G \times C_n$ 有 antimagic。Cheng[9] 證明了所有 positive degree 的 Cartesian products 或兩個或更多 regular graphs 為 antimagic 以及 $G \times H$ 為 antimagic 如果 G 為 j -regular 而 H 的 degree 介於 1 至 k 且滿足 j 為奇數時 $j^2 - j \geq 2k$ 或 j 為偶數時 $j^2 \geq 2k$ 。Wang, T. M. 與 Hsiao[43] 證明了以下圖形有 antimagic: $G \times P_n$ ($n > 1$, G 是 regular), $G \times K_{1,n}$ (G 是 regular), compositions $G[H]$ (H 是 d -regular 且 $d > 1$) 以及 Cartesian product of any double star and a regular graph。在 Cheng[10] 證明了 $P_{n_1} \times P_{n_2} \times \dots \times P_{n_t}$ ($t > 2$) 與 $C_m \times P_n$ 是 antimagic。於 Solairaju and Arockiasamy[33] 中，證明了部

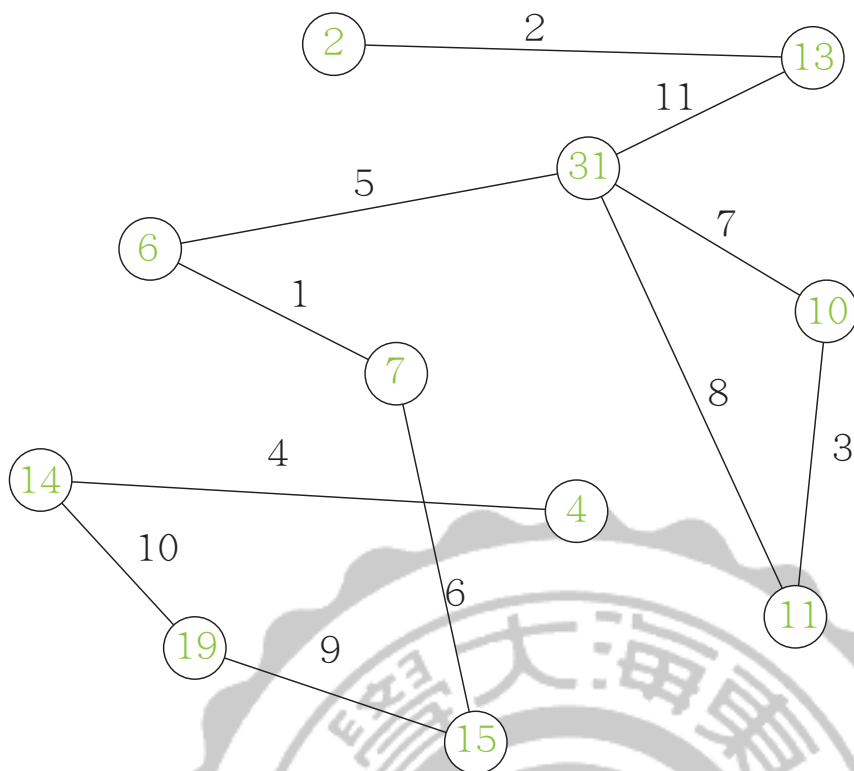


Figure 1.1: Example of antimagic labeling

分 $P_m \times P_n$ 族系的子圖是 antimagic。Liang and Zhu[26] 證明了如果 G 是 k -regular ($k > 2$)，則 H 只要滿足 $|E(H)| \geq |V(H)| - 1 \geq 1$ 那 Cartesian product $H \times G$ 會是 antimagic。他們也發現了如果 $|E(H)| \geq |V(H)| - 1$ 且 H 的每個連接點有 odd degree 或 H 至少有 $2|V(H)| - 2$ 個邊，則 prism of H 是 antimagic。Shang[34] 表示了所有的 spiders 是 antimagic。Lee, Lin, Tsai[27] 證明了 C_n^2 是 antimagic 且 n 是奇數時頂點鄰近邊標號和為連續整數。

更一般性的，人們討論其相關優化的問題在 antimagic labeling 上，如早先 W.Brown 於 2008 年定義 [1] 的：

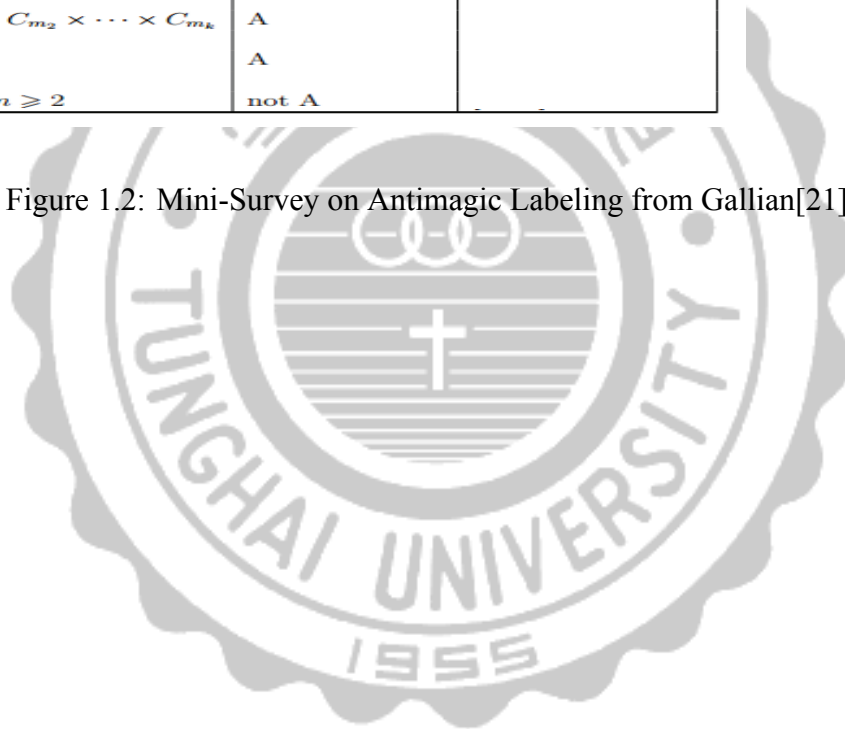
Definition 1.1.2. G 為一有 q 個邊的圖。定義一個一對一的函數，將邊做編號 $f : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$ ，再將點所有相鄰的邊的編號相加，如果總合盡不相同，則我們稱其為 **partially antimagic labeling** G 。此外我們定義 **antimagic strength** $\sigma(G) = \min \max f(E)$ 在所有可能的 antimagic labelings f of G 。

Definition 1.1.3. G 為一有 q 個邊的圖。定義一個函數，將邊做編號 $f : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}^+$ ，再將點所有相鄰的邊的編號相加，如果總合盡不相同，則我們稱其為 **weakly antimagic labeling** G 。此外我們定義 **weakly antimagic strength** $\sigma'(G) = \min \max f(E)$ 在所有可能的 antimagic labelings f of G 。

一些有關 (a,d)-antimagic labeling 的研究可以見 Figure 1.2 。

<i>Graph</i>	<i>Labeling</i>	<i>Notes</i>
P_n	A	for $n \geq 3$
C_n	A	
W_n	A	
K_n	A	for $n \geq 3$
every tree except K_2	A?	
regular graphs	A	
every connected graph except K_2	A?	
$n \geq 4$ vertices $\Delta(G) \geq n - 2$	A	
all complete partite graphs except K_2	A	
$C_m \times P_n$	A	
$P_{m_1} \times P_{m_2} \times \dots \times P_{m_k}$	A	
$C_{m_1} \times C_{m_2} \times \dots \times C_{m_k}$	A	
C_n^2	A	
mP_3 $m \geq 2$	not A	

Figure 1.2: Mini-Survey on Antimagic Labeling from Gallian[21]



1.2 (a, d)-Antimagic Labeling

1993 年由 Bodendiek 與 Walther[4] 提出了 (a,d)-antimagic labeling 的觀念:

Definition 1.2.1. 令 $G = (V, E)$ 為一個有 p 個點和 q 個邊且沒有孤立點的有限簡單圖，定義一個 *bijection* 的函數 $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ ，將邊做 $1 \sim q$ 的編號，則導出頂點所有入射邊的編號和 $f^+(u) = \sum\{f(uv) : uv \in E(G)\}$ ，使得 $f^+ : V \rightarrow \mathbb{N}$ ，且形成一首項為 a 、公差為 d 的等差數列，則我們稱其為 (a, d) -antimagic labeling。如果圖 G 有 (a, d) -antimagic labeling，則我們稱 G 是 (a, d) -antimagic。(Lin, Miller, Simanjuntak, Slamim[28] 稱其 (a, d) -vertex-antimagic edge labeling)。

Bodendick 和 Walther[5][6] 證明了 Herschel graph 不是 (a, d) -antimagic 並獲得了數種不同的 (a, d) -antimagic labeling 圖正面與負面的結果，稱為 parachutes $P_{g,p}$ 。Bača 與 Holländer[3] 提出了 $C_n \times P_2$ 為 antimagic labeling 的必要條件: 當 n 是偶數 $d = 1, a = (7n + 4)/2$ 或 $d = 3, a = (3n + 6)/2$ ，當 n 是奇數 $d = 2, a = (5n + 5)/2$ 或 $d = 4, a = (n + 7)/2$ 。Bodendiek 與 Walthe[7]，猜想當 n 是偶數 $C_n \times P_2 (n > 3)$ 是 $((7n + 4)/2, 1)$ -antimagic，當 n 是奇數時 $C_n \times P_2 (n > 3)$ 是 $((5n + 5)/2, 2)$ -antimagic。而這些猜想被驗證於 Bača 與 Holländer[3]，更進一步的證明出，當 n 是偶數 $C_n \times P_2 (n > 3)$ 是 $((3n + 6)/2, 3)$ -antimagic。Bača 與 Holländer[3]，猜想當 n 是最小為 7 的奇數時， $C_n \times P_2$ 是 $((n + 7)/2, 4)$ -antimagic。Bodendiek 與 Walthe[7] 也猜測 $C_n \times P_2 (n > 7)$ 是 $((n + 7)/2, 4)$ -antimagic。Miller 與 Bača [30]，證明 generalized Petersen graph $P(n, 2)$ 是 $((3n + 6)/2, 3)$ -antimagic 對於 $n \equiv 0 \pmod{4}, n > 8$ ，以及猜想 $P(n, k)$ 是 $((3n + 6)/2, 3)$ -antimagic 對所有的 n 為偶數，且 $2 \leq k \leq n/2 - 1$ 。對於這個猜想，於 Xu, Yang, Xi, Li[44] 證明出 $k = 3$ 。Jirimutu 與 Wang 證明了 $P(n, 2)$ 是 $((5n + 5)/2, 2)$ -antimagic 對於 $n \equiv 3 \pmod{4}, n > 7$ 。Xu, Xu, Lü, Baosheng, Nan[45] 證明了 $P(n, 2)$ 是 $((3n + 6)/2, 2)$ -antimagic 對於 $n \equiv 2 \pmod{4}, n > 10$ 。Xu, Yang, Xi, Li[44] 表示 $P(n, 3)$ 是 $((3n + 6)/2, 3)$ -antimagic 對所有偶數 $n > 10$ ，此外也提出了 $P(n, 3)$ 是 $(3n + 6/2, 3)$ -antimagic 對於 $n \equiv 0 \pmod{4}, n > 8$ 。在 Lingqi, Linna, Yuan[46] 證實了 generalized Petersen graph $P(n, 3)$ 是 $(5n + 5/2, 2)$ -antimagic 對所有奇數 $n > 7$ 。

Lemma 1.2.2. (*Parity Checking Lemma*)， G 是一個 (a, d) -antimagic graph 則會有有幾個必要條件:

- 如果 a 是偶數且 d 是偶數，則所有的點標號都是偶數。
- 如果 a 是偶數且 d 是奇數，則點的標號一半是偶數一半是奇數。
- 如果 a 是奇數且 d 是奇數，則所有的點標號都是奇數。
- 如果 a 是奇數且 d 是偶數，則點的標號一半是偶數一半是奇數。

1.3 (a, 1)-Antimagic Labeling

接下來我們會討論在不同圖形中的 (a, 1)-antimagic labeling，並找出其一般性。

Definition 1.3.1. 圖 $G = (V, E)$ ，定義一個一對一的函數，將邊做標號 $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, |E|\}$ ，可繪製出另一函數，將所有點相鄰的邊的標號相加， $f^+(v) = \sum\{f(uv) \mid uv \in E(G)\}$ ，且 $f^+(V) = \{a, a+1, a+2, \dots, a+(|V|-1)\}$ ，則我們稱其為 (a, 1)-antimagic labeling。(見 Figure 1.3)

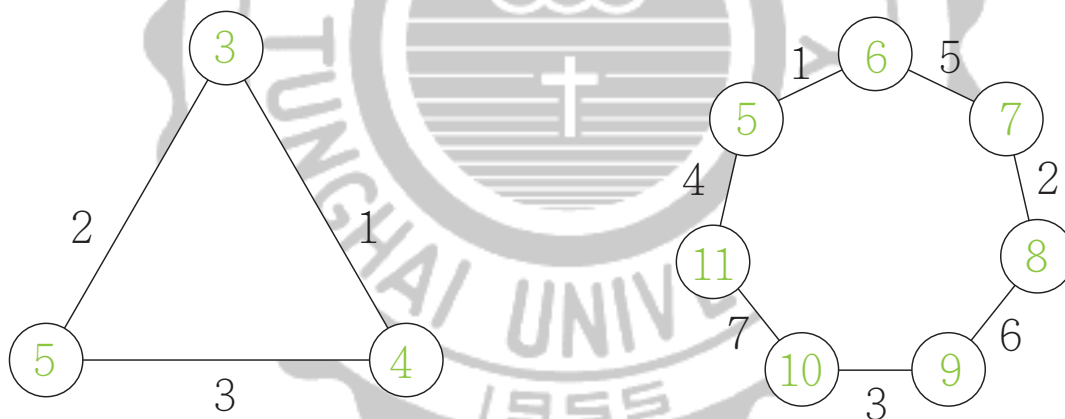


Figure 1.3: $C_3 \& C_7$ is (a, 1)-antimagic

如果一圖是 (a, 1)-antimagic，則其必也是 antimagic。

Bodendie 與 Walther[8]，證明了 P_{2k+1} 是 $(k, 1)$ -antimagic; C_{2k+1} 是 $(k+2, 1)$ -antimagic; 奇數點的 tree(頂點為 $2k+1, k > 1$) 是 $(k, 1)$ -antimagic。J. Ivančo, A. Semaničová[19] 提出了一個 2-regular graph 如果是 super edge-magic，則若且唯若也會是 (a, 1)-antimagic。做為一個推論我們有以下這些圖為 (a, 1)-antimagic: 最少為 3 的奇數 n ， kC_n ; 最少為 6 的偶數 n ， $k(C_3 \cup C_n)$; 最少為 5 的奇數 n

， $k(C_4 \cup C_n)$; 最少為 4 的偶數 n ， $k(C_5 \cup C_n)$; 最少為 6 的偶數 m 及大於等於 $m/2+2$ 的奇數 n ， $k(C_m \cup C_n)$ 。延續 Kovář 想法，他們證明了如果 H 是從一個 $(a, 1)$ -antimagic G 任意增加 $2k$ -factor 而成，則 H 也是 $(a, 1)$ -antimagic。做為推論他們觀察到以下的圖是 $(a, 1)$ -antimagic: 奇數頂點的 circulant graphs; 奇數頂點的 $2r$ -regular Hamiltonian graphs; 奇數頂點 n 且小於 $4r$ 的 $2r$ -regular graphs。他們進一步的表示，如果 G 是一個有奇數頂點 n 且 $n-r-1$ 整除 $a+n(1+r-(n+1)/2)$ 的 $(a, 1)$ -antimagic r -regular graph，則 $G \oplus K_1$ 是 supermagic。做為這一結果的推論，如果 G 是一個 $(n-3)$ -regular 對於 n 為大於 7 的奇數或是 G 是一個 $(n-7)$ -regular 對於 n 為大於 15 的奇數，則 $G \oplus K_1$ 是 supermagic。Vilfred 與 Florida[38]，證實了 the one-sided infinite path 是 $(1, 2)$ -antimagic; 對任意 a 與 d ， P_{2n} 不是 (a, d) -antimagic; P_{2n+1} 是 $(n, 1)$ -antimagic; C_{2n+1} 有 $(n+2, 1)$ -antimagic labeling; 一個 2 -regular graph G 是 (a, d) -antimagic，則若且唯若 $|V(G)| = 2n+1$ 且 $(a, d) = (n+2, 1)$ 。Javaid, Ismail, and Salman[20]，證明了 Cordal Rings $CR_n(1, 3, 7)$ 和 $CR_n(1, 5, n-1)$ 有 (a, d) -antimagic labelings，對於 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 。他們也推測對於奇整數 Δ ， $3 \leq \Delta \leq n-3$ 且 $n \equiv 0 \pmod{4}$ ， $CR_n(1, \Delta, n-1)$ 有 $((7n+8)/4, 1)$ -antimagic labeling。

我們稱呼一 p 個點 q 個邊的圖為 (p, q) -graph。

Lemma 1.3.2. 如果一個 (p, q) -graph 為 $(a, 1)$ -antimagic labeling，則 $q(q+1) = pa + \frac{(p-1)p}{2}$ 。

Proof. $2(1+2+\cdots+q) = a + (a+1) + \cdots + (a+p-1)$

$$\Rightarrow q(q+1) = pa + \frac{(p-1)p}{2}。 \quad \square$$

Corollary 1.3.3. 一個 (p, q) -graph 是一個 $(a, 1)$ -antimagic labeling，且 $p = q$ ，則 p 必然是奇數。

Lemma 1.3.4. G 為一個 p 個點 q 個邊的 regular graph 且有 $(a, 1)$ -antimagic labeling。若 G 是 odd regular 則 $p \equiv 0 \pmod{4}$ ，反之 G 是 even regular 則 $p \equiv 1 \pmod{2}$ 。

1.3.1 Adding Arbitrary 2-Factor

圖 G 的 k -factor，即指 G 的一個 k -regular 生成子圖。

由 J. Ivančo, A. Semaničová, 2006[19] 我們確認 $(a, 1)$ -antimagic 加上任意偶數 factor 還是 $(a, 1)$ -antimagic:

Lemma 1.3.5. (*J. Ivančo, A. Semaničová, 2006*)

G 是一個 (p, q) -graph， H 是由 G 任意加上 $2k$ -factor 所形成的圖，如果 G 是 $(a, 1)$ -antimagic，則 H 必也是 $(a, 1)$ -antimagic。

Proof. 我們將圖 G 的邊做編號 $1, 2, \dots, q$ ，不失一般性的我們可以知道 $(a, 1)$ -antimagic 圖 G 其每個點的總和為 $a < a + 1 < \dots < a + p - 1$ ，並將其命名 v_1, v_2, \dots, v_p ，用數學歸納法我們只需要驗證，加入 2-factor F 到一個 $(a, 1)$ -antimagic 圖 G 。我們分配方向給 2-factor F 使其每個連接部位流動的方向，不是順時針就是逆時針。根據給定的方向，令傳出點 w 的邊標號為 $f^{out}(w)$ 傳入點 w 的邊標號為 $f^{in}(w)$ ，

$$f^{out}(v_i) = a + p + q - (a + i - 1), \quad 1 \leq i \leq p$$

藉由 $f^{out}(w)$ 的定義，我們可以看出點的總和為

$$(a + i - 1) + f^{out}(v_i) + f^{in}(v_i) = a + p + q + f^{in}(v_i), \quad 1 \leq i \leq p$$

因傳出邊的標號是一對一對應傳入邊的標號，所以點總和是連續的整數。也證明了其為 $(a, 1)$ -antimagic。(見 Figure 1.4) □

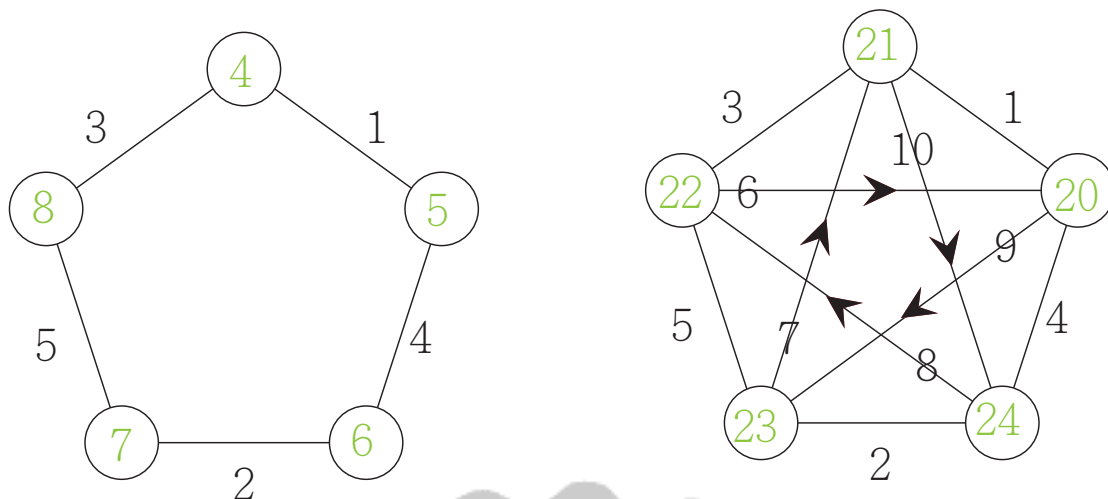


Figure 1.4: C_5 加入 2-factor 變成為 K_5

一個圖形有 Hamiltonian cycle 則我們稱圖形為 Hamiltonian。我們在這節表示了偶數 regular 的 Hamiltonian 圖，都是 antimagic。首先我由 [19] 知道有奇數個點的偶數 regular 的 Hamiltonian 圖都是 $(a, 1)$ -antimagic。

Theorem 1.3.6. 如果 G 是一個 $2k$ -regular, $k \geq 2$ 且有奇數個點個的 Hamiltonian 圖，則 G 是 $(a, 1)$ -antimagic。

Theorem 1.3.7. 如果 G 是一個 $2k$ -regular, $k \geq 2$ 且有偶數個點個的 Hamiltonian 圖，則 G 是 antimagic。

Proof. G 是一個 $2k$ -regular, $k \geq 2$, 且有偶數個點個的 Hamiltonian, F_i 是 2-factor, $1 \leq i \leq k$, 令 $G = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \cdots \oplus F_k$, 不失一般性的我們假設 F_1 是一個 G 內的 Hamiltonian cycle。編號標法如之前，在 Hamiltonian cycle F_1 ，我們令 $f(v_i v_{i+1}) = \frac{i+1}{2}$ 如果 i 是奇數，反之 i 是偶數我們令 $f(v_i v_{i+1}) = \frac{i}{2} + \frac{n}{2}$ ，注意這種標法有唯一一對點的和具有矛盾， $f^+(v_1) = f^+(v_{\frac{n}{2}+1}) = n+1$ 。而我們將 $f^+(v_1)$ 額外加上 $\frac{n}{2}$ 使其成為公差為一的等差數列來解決這問題。我們定義 fake 的點和為 \widehat{f}^+ 。

然後像以前一樣，我們可以遞迴地標記 G ，並獲得通用等差級數算出頂點的總和為 $\frac{(2k^2-1)n}{2} + r + i, i = 1, 2, \dots, n$ ，則 $\widehat{f}^+(v_1) = \frac{(2k^2-1)n}{2} + k + 1 = f^+(v_1) + \frac{n}{2}$ 。接下來我們可以分為兩種情況：

Case 1 : $\frac{(2k^2-1)n}{2} + k + 1 \leq \widehat{f}^+(v_1) < \frac{(2k^2-1)n}{2} + k + 1 + \frac{n}{2}$ ，則 $f^+(v_1) < \frac{(2k^2-1)n}{2} + k + 1$ 與其他點的和一起來看可以得知 f 是 antimagic。

Casx 2 : $\frac{(2k^2-1)n}{2} + k + 1 + \frac{n}{2} \leq \widehat{f^+}(v_1) < \frac{(2k^2-1)n}{2} + k + 1 + n$, 則 $\frac{(2k^2-1)n}{2} + k + 1 \leq f^+(v_1) < \frac{(2k^2-1)n}{2} + k + 1 + \frac{n}{2}$, 會在某些點發生矛盾, $f(v_1) = f(v_r)$, 我們將 v_1v_2 的邊標號與 F_2 的 v_av_b 邊標號做交換, 這會有兩個可能:

sub-case 2.1 : $v_2 \neq v_r$, 在這個情況下 v_1v_2 與 v_av_b 互斥, 首先要注意讓 $f(v_av_b) \geq n + 1$, 而 $f^+(v_1)$ 和 $f^+(v_2)$ 最少同時增加 n , 這樣使 $f^+(v_1)$ 和 $f^+(v_2)$ 都不相同, 且都大於 $\frac{(2k^2-1)n}{2} + k + n$ 。令一方面, $f^+(v_a)$ 和 $f^+(v_b)$ 最少同時減少 n . 使其不相同且 $< \frac{(2k^2-1)n}{2} + k + 1$. 因此使其具有 antimagic 的特性.

sub-case 2.2 : $v_2 = v_r$, 則我們直接交換 v_1v_2 的邊標號與 v_av_b 的邊標號, 在這情況下 $v_2 = v_a$ 或 v_b , 這裡暫且說 $v_2 = v_a$, 可以得知 $f^+(v_2)$ 保持不變。 $f^+(v_1) > \frac{(2k^2-1)n}{2} + k + n$ 且 $f^+(v_b) < \frac{(2k^2-1)n}{2} + k + 1$, 則標號形成了 antimagic 。

□

1.3.2 Super/E-Super Vertex Magic Total Labeling

1963 年, Sedláček [31] 提出了 magic labeling 的概念。 G 是一個有 q 個邊的圖, 如果我們將編做 $\{1, 2, 3, \dots, q\}$, 使點所接觸的所有邊的數字和為一定值, 則我們稱 G 是 magic 。 1990 年 MacDougall, Miller, Slamin, Wallis[22] , 提出了 vertex magic total labeling 的概念, 研究了 vertex magic graphs 的基本性質, 並提出了一些擁有 vertex magic total labeling 的圖:

Definition 1.3.8. G 是一個有 p 個點 ($=|V(G)|$)、 q 個邊 ($=|E(G)|$) 的有限 simple graph , 令一個 bijection 的函數 $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow 1, 2, 3, \dots, p + q$, $\forall u \in V(G)$, 使 $f(u) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv) = k$, k 為一常數定值, 則我們稱其為 vertex magic total labeling , 並且我們稱 k 為 magic constant 。 此外, 如果 $f(V) = 1, 2, 3, \dots, p$, 則我們稱為 super vertex magic total labeling , G 則稱呼為 (super) vertex-magic 。

McQuillan[11] 提供了許多 vertex-magic total labelings 於 cycles C_{nk} ($k \leq 3$, 奇數 $n \leq 3$) 使用給定的 vertex-magic labelings 於 C_k 。 Gray, MacDougall, Wallis[12] , 之後簡單的證明了所有的完全圖 (complete graphs) 是 vertex-magic total 。 Kothapalli,

Venkaiah[25]，以另一方法證明所有的完全圖 (complete graphs) 是 vertex-magic total。

自有了這樣的概念後，已有好幾個特定的圖有了 vertex magic total labeling 的研究結果。例如 MacDougall et al[22] 證實， $n \geq 3$ 的 C_n 、 $n \geq 2$ 的 P_n 以及奇數點的 K_n ，和 $n > 1$ 的 $K_{n,n}$ ，都有 vertex magic total labeling，也證實了 $n > m + 1$ ， $K_{m,n}$ 沒有 vertex magic total labeling。他們猜想對所有 m ， $K_{m,m+1}$ 與 $n \leq 3$ 的 K_n 有 vertex magic total labeling。Bača, Miller 與 Slamin[2] 證實了所有 $n \geq 3$ 且 $1 \leq m \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 的 generalized Petersen graph $P(n, m)$ 有 vertex magic total labeling，並算出常數 $k = 9n + 2, 10n + 2$ 及 $11n + 2$ 。於 2007 年 Gray[17] 研究這種標記在 regular graphs。

這些研究完成已知的有 vertex magic total labeling 的圖，我們可以參考 [21][17][15][32][29] 大部分的研究研究都是在連通圖上，關於不連通的圖，Wallis 證實了以下定理： G 是一個 degree 為 r 的 regular graph， G 有 vertex magic total labeling。(i) 如果 r 是偶數， t 為奇正數，則 tG 有 vertex magic total labeling。(ii) 如果 r 是奇數， t 為任意正整數，則 tG 有 vertex magic total labeling。

MacDougall, Miller, Sugeng[23]，定義了 super vertex-magic total labeling: $G(V, E)$ 有一 vertex-magic total labeling f 且 $f(V) = \{1, 2, \dots, |V|\}$ $f(E) = \{|V| + 1, |V| + 2, \dots, |V| + |E|\}$ 。他們表明了一個 (p, q) -graph 有 magic constant k 的 super vertex-magic total labeling 滿足以下條件： $k = (p + q)(p + q + 1)/v - (v + 1)/2$ ； $k > (41p + 21)/18$ ；如果 G 是 connected, $k > (7p - 5)/2$ ；如果 p 為奇數 p 除 $q(q + 1)$ ，反之 p 為偶數則除 $2q(q + 1)$ ；如果 G 有偶數個點則 $p \equiv 0 \pmod{8}$ 且 $q \equiv 0$ 或 $3 \pmod{4}$ 抑或是 $p \equiv 4 \pmod{8}$ 且 $q \equiv 1$ 或 $2 \pmod{4}$ 。他們也表示奇數圈 C_n 有 super vertex-magic total labeling，degree 為 1 的 no wheel, ladder, fan, friendship graph, complete bipartite graph or graph 有 super vertex-magic total labeling。

關於 VMTL 與 super VMTL 的一些圖形調查可看 Figure 1.5、1.6。

Graph	Labeling	Note	Graph	Labeling	Note	Graph	Labeling	Note
C_n	VMT		Prisms $C_n \times P_2$	VMT		nG	VMT	n odd, G regular of even degree, VMT. G is regular of odd degree, VMT, but not κ_1
P_n	VMT	$n > 2$	W_n	VMT	iff $n \leq 11$			
$K_{m,n}-e$	VMT	$m > 2$	F_n	VMT	iff $n \leq 10$	Unions of stars	VMT	
$K_{m,n}$	VMT	iff $ m-n \leq 1$	Friendship graphs	VMT	iff # of triangles ≤ 3	$C_n \times C_{2m+1}$	VMT	
K_n	VMT	For n odd, $n \equiv 2 \pmod{4}$	$G+H$	VMT	$ V(G) - V(H) $	$K_5 \times C_{2m+1}$	VMT	
nK_3	VMT	iff $n \neq 2$				$G \times C_{2n}$	VMT	G 2+1 regular VMT
mK_n	VMT	$m \geq 1, n \geq 4$	tree with n internal vertices and more than $2n$ leaves	Not VMT		$G \times K_5$	VMT	G 2+1 regular VMT
Petersen $P(n,k)$	VMT					$G \times H$	VMT	G -regular VMT, r odd or even and $ r $ odd, H 2-regular supermagic

Figure 1.5: Mini-Survey on VMTL(vertex magic total labeling)from Gallian[21]

Graph	Labeling	Notes
P_n	SVMT	iff $n > 1$ is odd
C_n	SVMT	iff n is odd
$K_{1,n}$	SVMT	iff $n = 1$
mC_n	SVMT	iff m and n are odd
W_n	not SVMT	
ladders	not SVMT	
friendship graphs	not SVMT	
$K_{m,n}$	not SVMT	
dragons (see §2.2)	SVMT	iff order is even
Knödel graphs $W_{3,n}$	SVMT	$n \equiv 0 \pmod{4}$
graphs with minimum degree 1	not SVMT	
K_{4n}	SVMT	$n > 1$

Figure 1.6: Mini-Survey on Super VMTL from Gallian[21]

2006年，Slamin et al.[32] 研究部分不連通的圖。2012年，Marimuthu et al.[15] 研究 E-super vertex magic labeling，和 Harary graphs $H_{m,n}$ 。Wang, T. M.[39] 研究偶數 regular graphs 含 particular 2-factors 的 E-super vertex magic labeling。也於 2013年 [40]，研究 disjoint union of sun graphs 的 super vertex magic labeling。Tao-Ming Wang, Chun-Nan Hung, Ming-I Chia, Guang-Hui Zhang[47] 研究了 Chordal Rings $CR_n(1, \Delta, n-1)$ 是 super vertex magic total labeling 只要符合條件 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $3 \leq \Delta \leq n-3$:

Definition 1.3.9. n 為一個偶正數且 $n \geq 3$, a, b, c 是 3 個相異得正整數, n 個點的 Chordal Rings $CR_n(a, b, c)$ 表示所有的偶數點 i 與 $i+a, i+b, i+c$ 做相連, $I \in \mathbb{Z}_n$ 。

Theorem 1.3.10. Chordal Rings $CR_n(1, \Delta, n-1)$ 是 *super vertex magic total labeling* 且 *magic constant* 為 $\frac{23n}{4} + 2$ ，只要 Δ 符合 $3 \leq \Delta \leq n-3$ 且為奇數和 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 。

Proof. 我們令 $CR_n(1, \Delta, n-1)$ 的點集合為 $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ 邊集合為 $\{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+\Delta} : 1 \leq i \leq n, n \equiv 0 \pmod{2}\}$ ，是圓外側上的邊聯集團內的弦。我們對點做編號 $\{1, 2, 3, \dots, 4m\}$ ，相對的邊做編號 $\{4m+1, 4m+2, \dots, 6m\}$ ，這個證明我們可分成兩種情況，分別為 $\Delta \equiv 3 \pmod{4}$ 和 $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$

Case 1 $\Delta \equiv 3 \pmod{4}$

我們先對圓外側上的邊做編號如下：

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 8m + \frac{3+i}{4} \in [8m+1, 9m], & 1 \equiv 1 \pmod{4} \\ 6m + \frac{2-i}{4} \in [5m+1, 6m], & 1 \equiv 2 \pmod{4} \\ 5m + \frac{3-i}{4} \in [4m+1, 5m], & 1 \equiv 3 \pmod{4} \\ 6m + \frac{i}{4} \in [6m+1, 7m], & 1 \equiv 4 \pmod{4} \end{cases}$$

再對圓內的弦作編號：

$$f(v_i v_{i+\Delta}) = \begin{cases} 15m + 1 - f(v_{i+\Delta-1} v_{i+\Delta}) \in [9m+1, 10m], & 1 \equiv 0 \pmod{4} \\ 14m + 1 - f(v_{i+\Delta-1} v_{i+\Delta}) \in [7m+1, 8m], & 1 \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

接著令 $wt(v)$ 為所有與 v 相連的邊標號總和， $\Sigma\{f(uv), u \in N(v)\}$ ，經過簡單的計算我們可得：

$$\begin{aligned} \{wt(v_i) : 1 \leq i \leq n, n \equiv 1 \pmod{4}\} &= [22m+2, 23m+1] \\ \{wt(v_i) : 1 \leq i \leq n, n \equiv 2 \pmod{4}\} &= [21m+2, 22m+1] \\ \{wt(v_i) : 1 \leq i \leq n, n \equiv 3 \pmod{4}\} &= [19m+2, 20m+1] \\ \{wt(v_i) : 1 \leq i \leq n, n \equiv 0 \pmod{4}\} &= [20m+2, 21m+1] \end{aligned}$$

則我們可以得知 $\{wt(v) : 1 \leq i \leq n\} = [19m+2, 23m+1]$ 。(見 Figure 1.7)

Case 2 $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$

我們先對圓外側上的邊做編號如下：

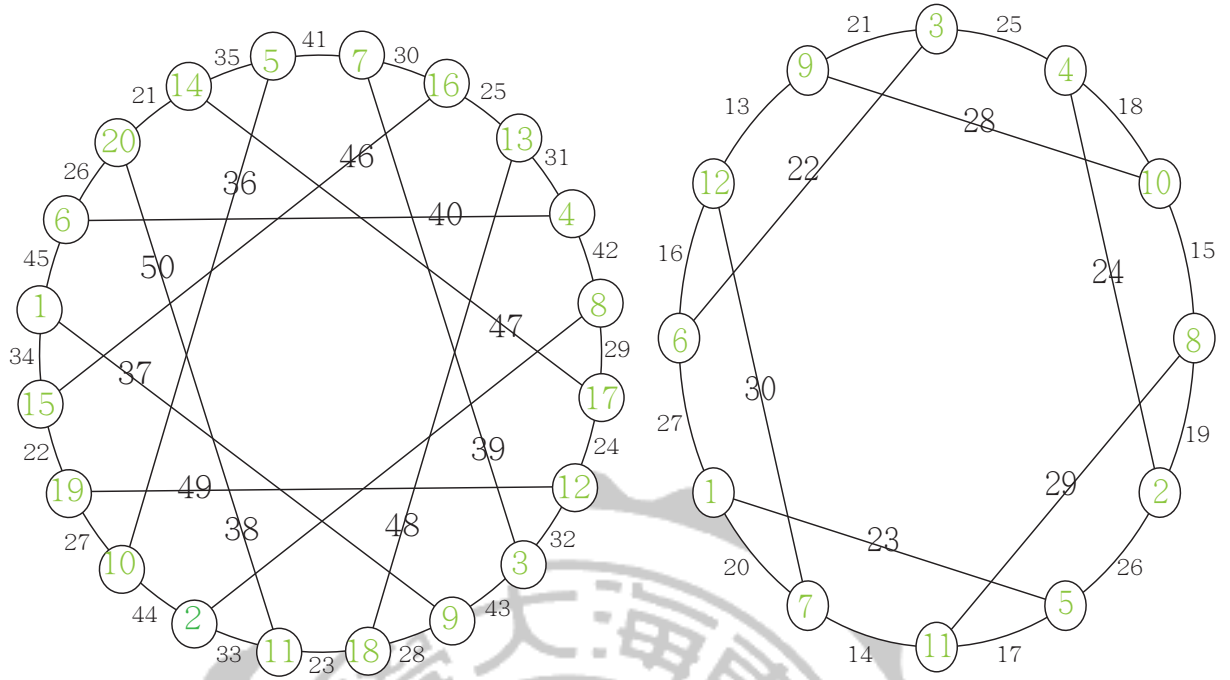


Figure 1.7: $CR_{20}(1,7,19)$ & $CR_{12}(1,3,11)$

$$f(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 6m + \frac{3+i}{4} \in [6m+1, 7m], & 1 \equiv 1 \pmod{4} \\ 5m + \frac{2-i}{4} \in [4m+1, 5m], & 1 \equiv 2 \pmod{4} \\ 6m + \frac{3-i}{4} \in [5m+1, 6m], & 1 \equiv 3 \pmod{4} \\ 8m + \frac{i}{4} \in [8m+1, 9m], & 1 \equiv 4 \pmod{4} \end{cases}$$

再對圓內的弦作編號:

$$f(v_i v_{i+\Delta}) = \begin{cases} 14m + 1 - f(v_{i+\Delta} v_{i+\Delta+1}) \in [7m+1, 8m], & 1 \equiv 0 \pmod{4} \\ 15m + 1 - f(v_{i+\Delta} v_{i+\Delta+1}) \in [9m+1, 10m], & 1 \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

方法一樣，我們可以得 $wt(v)$:

$$\begin{aligned} \{wt(v_i) : 1 \leq i \leq n, n \equiv 1 \pmod{4}\} &= [22m+2, 23m+1] \\ \{wt(v_i) : 1 \leq i \leq n, n \equiv 2 \pmod{4}\} &= [20m+2, 21m+1] \\ \{wt(v_i) : 1 \leq i \leq n, n \equiv 3 \pmod{4}\} &= [19m+2, 20m+1] \\ \{wt(v_i) : 1 \leq i \leq n, n \equiv 0 \pmod{4}\} &= [21m+2, 22m+1] \end{aligned}$$

則我們可以得知 $\{wt(v) : 1 \leq i \leq n\} = [19m+2, 23m+1]$

最後，由這兩個 Case 我們都得到: $1 \leq i \leq 4m, f(v_i) = 23m+2 - wt(v_i)$

由此我們可以很清楚的知道 f 是 super vertex magic total labeling，且 magic constant 為 $\frac{23n}{4} + 2$ 。(見 Figure1.8)

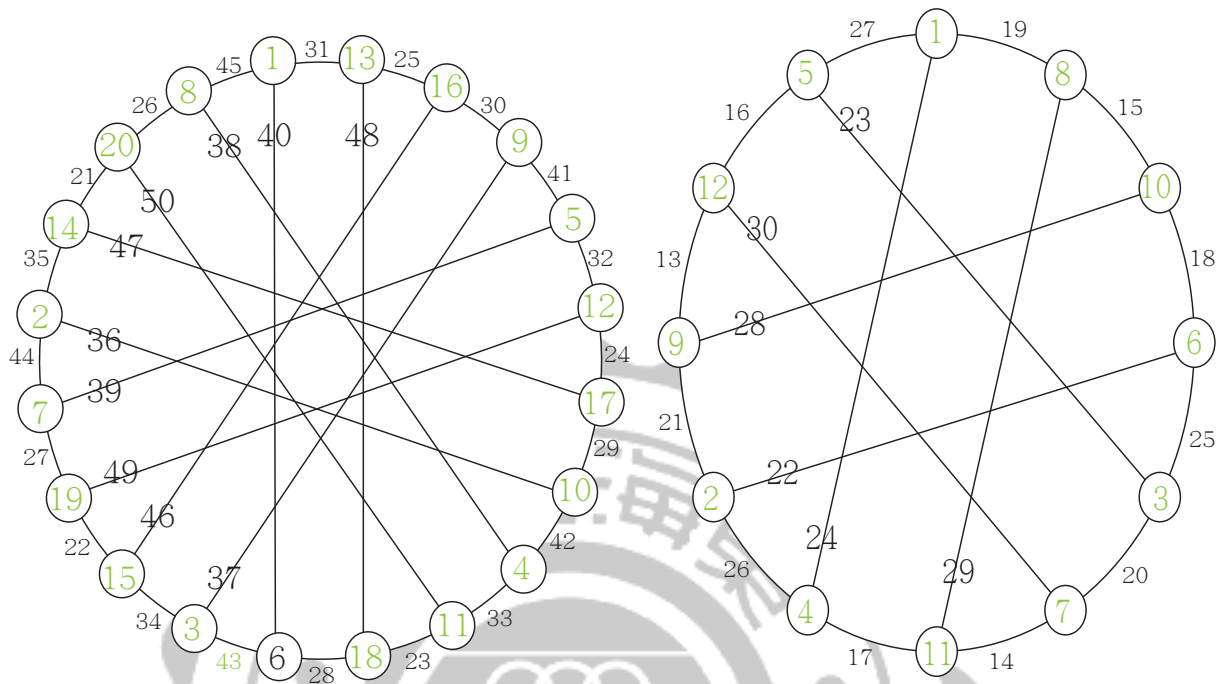


Figure 1.8: $CR_{20}(1,9,19) \& CR_{12}(1,5,11)$

□

Conjecture. t 個不交集的 chordal rings $CR_{n_1}(1, \Delta_1, n_1 - 1) \cup CR_{n_2}(1, \Delta_2, n_2 - 1) \cup \dots \cup CR_{n_t}(1, \Delta_t, n_t - 1)$, $3 \leq \Delta_i \leq n_i - 3$, Δ_i 為奇數且 $n_i \equiv 0 \pmod{4}$, $1 \leq t \leq t$, 是否為 super vertex magic total labeling.

我們有以下例子的猜想:

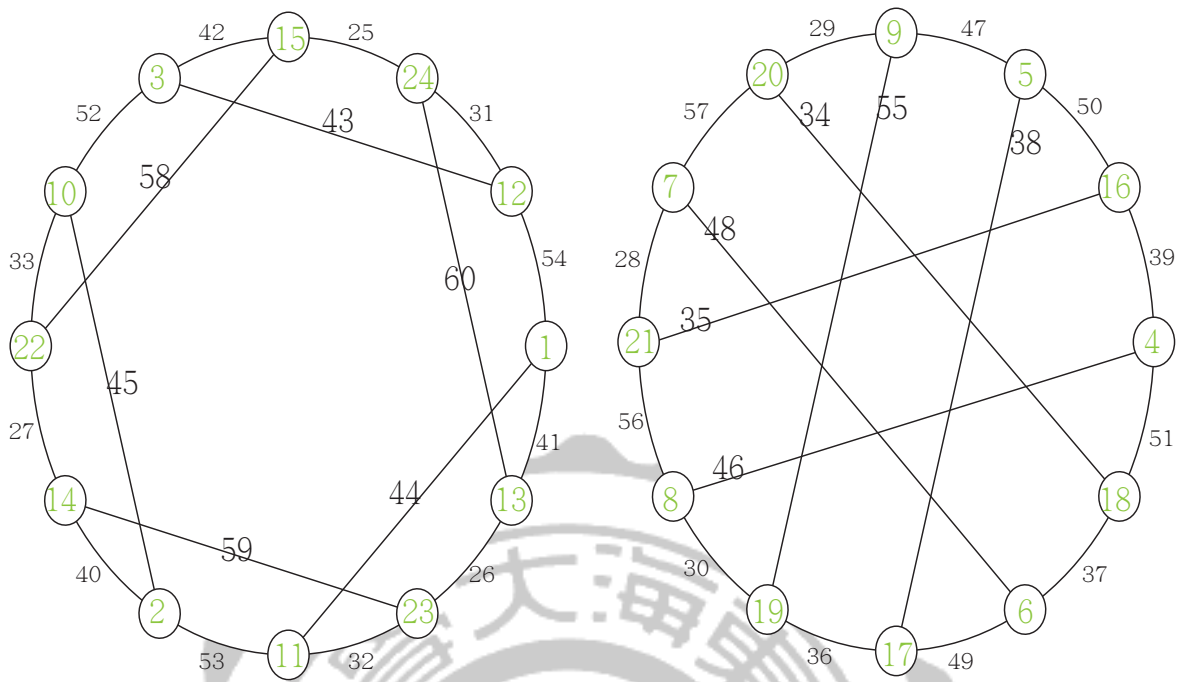


Figure 1.9: $CR_{12}(1,3,19) \cup CR_{12}(1,5,11)$

近期來的一些關於標號的研究如 Marimuthu et al.[15][14] 及 Wang, T. M.[41]，研究了 E-super vertex magic labeling 的一些基本性質與部分擁有 E-super vertex magic labeling 的圖形。已下我們正式定義它：

Definition 1.3.11. G 是一個有 p 個點 ($=|V(G)|$)、 q 個邊 ($=|E(G)|$) 的有限 simple graph，令一個 bijection 的函數 $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow 1, 2, 3, \dots, p+q$ ， $\forall u \in V(G)$ ，使 $f(u) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv) = k$ ， k 為一常數定值，則我們稱其為 **vertex magic total labeling**，並且我們稱 k 為 **magic constant**。此外，如果 $f(E(G)) = 1, 2, 3, \dots, q$ ，則我們稱為 **E-super vertex magic total labeling**， G 則稱呼為 **E-super vertex-magic**。

The cocktail party graph, $H_{m,n}$ ($m, n > 2$)，將點集合 $V: \{v_1, v_2, \dots, v_{mn}\}$ 均分成大小為 m 的 n 個獨立集合 $V: \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ 這樣對所有的 $i, j \in \{1, 2, \dots, mn\}$ $i \in I_p, j \in I_q, p \neq q$ ， $v_i v_j \in E$ 。該圖 H_{mn} 是是階梯圖的補體和超立方體的對偶圖。Marimuthu 與 Balakrishnan [15] 定義了這種標號的一些基本性質，並證明了 H_{mn} 是 E-super vertex magic。Wang, T. M.[41] 表示了：奇數個頂點數的偶數 regular Hamiltonian graphs 是 E-super magic；由奇數個相同大小的奇圈組成含有

2-factor 奇數頂點的偶數 regular graphs 是 E-super vertex magic; 一個圖可分成兩個 spanning graphs 的和, 且其中一個為 E-super magic 而另一個為 regular of even degree 則有 E-super vertex magic; 奇數個頂點的 circulant graphs 是 E-super vertex magic。Swaminathan 與 Jeyanthi[37] 證明了奇數個奇圈 mC_n 是 E-super vertex magic。

Theorem 1.3.12. [37] $G = (V, E)$ 是一個有 p 個點 ($=|V(G)|$)、 q 個邊 ($=|E(G)|$) 的圖。若 G 存在個 E-super vertex magic labeling f , 則若且唯若存在一個一對一的 edge labeling $g : E \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$, 這樣頂點和的集合 $\{w(v) = \sum_{v \in N(u)} g(uv) : u \in V\}$ 會是連續整數。

Proof. 如果 f 是一個 E-super vertex magic labeling, 則 $f(E) = \{1, 2, \dots, q\}$ 且對任意 $u \in V$, $f(u) + \sum_{v \in N(u)} f(uv)$ 為常數 k 。很明顯的對任意 $uv \in E$ $g(uv) = f(uv)$, 由於 $f(V) = \{q+1, q+2, q+3, \dots, q+p\}$, 頂點和的集合為 $\{k - (q+1), k - (q+2), k - (q+3), \dots, k - (q+p)\}$ 是連續整數。反過來說, 如果 G 符合 edge labeling $g : E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, q\}$ 使得 $\{w(v) = \sum_{v \in N(u)} g(uv) : u \in V\}$, 則頂點和的集合為連續整數 $\{a, a+1, a+2, \dots, a+p-1\}$, 我們可以擴展 g 到 E-super vertex magic labeling f 以已下規則, 對任意 $e \in E$ $f(e) = g(e)$, 接著分配對任意 $u \in V$ $f(u) = p+q+a - \sum_{v \in N(u)} g(uv)$, 得到 $f(V) = \{q+1, q+2, q+3, \dots, q+p\}$, $f(u) + \sum_{v \in N(u)} f(uv)$ 為一常數, 因此 f 是一個 E-super vertex magic labeling。

□

由上述定理可以得知 E-super vertex magic 等價 (a,1)-antimagic。

Theorem 1.3.13. 對任意 regular graph G , 若符合以下其中一項則其他也會符合

- G 是 super vertex magic。
- G 是 (a,1)-antimagic。
- G 是 E-super vertex magic。

Proof. 令 $G = (V, E)$ 唯一個有 p 個點 q 個邊的 n -regular 圖, 我們可為兩個情況:

Case 1 如果 f 是一個 super vertex magic labeling，則 $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p+q\}$ ， $\forall u \in V(G)$ ，使 $f(u) + \sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ 為常數 k ，且 $f(V) = \{1, 2, \dots, p\}$ ， $\sum_{uv \in E(G)} f(uv)$ 所以我們知道頂點所有鄰近邊的和集合為 $\{k-1, k-2, \dots, k-p\}$ ，我們令一函數 g 將邊標號全部平移減 p ，則 $g(E) = \{1, 2, \dots, q\}$ 而頂點所有鄰近邊的和集合為 $\{k-1-np, k-2-np, \dots, k-p-np\}$ 的連續整數。可看出 g 為 $(a, 1)$ -antimagic labeling。

Case 2 G 為 $(a, 1)$ -antimagic 不失一般性的我們將邊標號 $\{1, 2, \dots, q\}$ ，而頂點鄰境的邊標號總和為連續整數 $\{a, a+1, \dots, a+p-1\}$ ，如果我們令一函數 g 將邊標號全部平移加上 p ，則 $g(E) = \{p+1, p+2, \dots, p+q\}$ 而頂點和為連續整數 $\{a+np, a+1+np, \dots, a+p-1+np\}$ ，我們可以擴展 g 到 super vertex magic labeling f ，對任意 $e \in E$ $f(e) = g(e)$ ，接著分配對任意 $u \in V$ $f(u) = p+np+a - \sum_{v \in N(u)} g(uv)$ ，得到 $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ ， $f(u) + \sum_{v \in N(u)} f(uv)$ 為一常數，因此 f 是一個 super vertex magic labeling。

由 **Case1****Case2** 可知 regular graph G 是 super vertex magic，則 G 也會是 $(a, 1)$ -antimagic 再藉由 Theorem 1.3.12 G 也會是 E-super vertex magic。□

Lemma 1.3.14. [37] 如果一個擁有 p 個點 q 個邊的圖 G 是為一個 E-super vertex magic total labeling 則 magic constant $k = q + \frac{p+1}{2} + \frac{q(q+1)}{p}$ 。

Theorem 1.3.15. [41] G 是一個 E-super vertex magic total labeling 且 H 為 $V(G)$ 上任意 2-factor，則 $G \cup H$ 仍然是 E-super vertex magic total labeling。

Chapter 2

Results of (a,1)-Antimagic Labeling and Deficiency Problems

2.1 (a, 1)-Antimagic Labeling and Deficiency for Odd Regular Graphs

基於 Petersen's Theorem，任意 even regular graph 可由 2-factors 組成。

Theorem 2.1.1. (*J. Petersen, 1891[24]*) 任意 $2r$ -regular graph 有 $2k$ -factor 對任意正整數 k , $0 < k < r$ 。

以及 I. D. Gray[18] 提出了猜想: 奇數點的 2-regular graph 有 (a, 1)-antimagic labeling 除了 $C_3 \cup C_4$, $3C_3 \cup C_4$, $2C_3 \cup C_5$ 。再根據之前結果 (a, 1)-antimagic graph 加上任意 2-factors 還是 (a, 1)-antimagic，所以我們特別研究的在 2-regular 和 3-regular 的 (a, 1) -antimagic 標號問題。

而在研究過程中，我發現了文章 E-Super Vertex Magic Regular Graphs of Odd Degree[48] 中有出錯在此將其修正。

2.1.1 Quasi-Prism of Type I and Type II

我們知道 3-regular graph 擁有偶數個頂點，我們定義一類特定的 3-regular graph 是由 1-factor 和 2-factor 組成兩個相同大小的 2-regular 子圖，如下：

Definition 2.1.2. quasi-prism $G(U, V)$ 是一個擁有 $2k$ 個點的 3-regular graph，由不相交並聯的 1-factor 和兩個 2-regular 子圖 $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_k\}$ 和 $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_k\}$ 組成。(如 Figure 2.1)

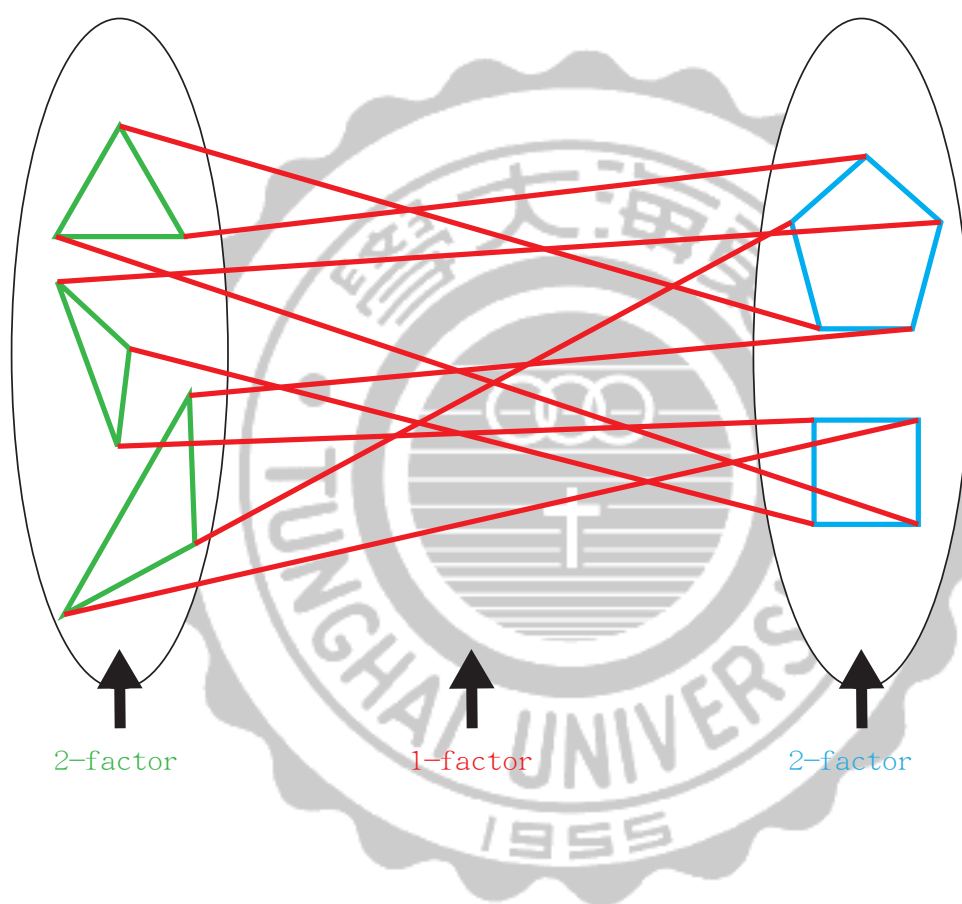


Figure 2.1: A Quasi-Prism Graph

著名的 generalized Petersen graphs $GP(n, k)$ 就是一個由兩個子圖 U 和 V 組成的 quasi-prisms $G(U, V)$ 。

Definition 2.1.3. 令 k 為一個 $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 的整數且 $n \geq 3$ ，**generalized Petersen graph** $GP(n, k)$ 定義 $V(GP(n, k)) = \{u_i, v_i | 1 \leq i \leq n\}$ 和 $E(GP(n, k)) = \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, u_i v_i | 1 \leq i \leq n\}$ ，其中下標取 modulo n 。(Figure 2.2) 我們稱 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_i$ 在 *outer cycle* 上 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_i$ 在 *inner cycle* 上。

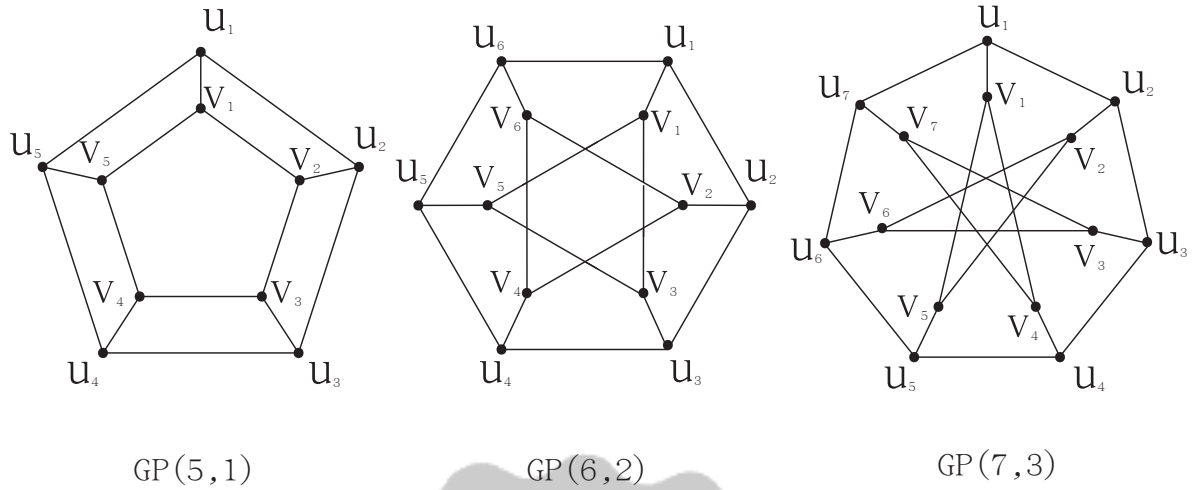


Figure 2.2: Examples of generalized Petersen graphs

首先我們稱呼以下這類 quasi-prisms 有 E-super vertex magic total labeling 為 quasi-prisms of **type I**:

Theorem 2.1.4. G 為一有 $4m$ 個頂點的 quasi-prisms $G(U, V)$ (由頂點集合 $U \cup V$, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{2m}\}$ 和 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2m}\}$ 的 3-regular graph), 如果其中一子圖都是偶數圈組成則 G 是一個 E-super vertex magic total labeling, 我們歸類 G 為 **quasi-prism of type I**。

Proof. G 為一有 $4m$ 個頂點的 quasi-prisms $G(U, V)$, 則 G 擁有 $6m$ 個邊。為使其成為 E-super vertex magic total labeling, 我們將邊編號 $\{1, 2, 3, \dots, 6m\}$ 。不失一般性我們令 G_u 為 t 個偶數圈組成的 bipartite 2-regular graph U (頂點數為 n_1, n_2, \dots, n_t), G_v 是令一個 2-regular graph V , 因此我們命名 G_u 的點為 $\{u_j^i : 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq i \leq t\}$, 表示為第 i 個偶數圈裡的第 j 個頂點, 我們將邊分成 3 個部分, 亦即 perfect matching $E_{mat}(E(G_u) = \{u_j^i u_{j+1}^i : 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq i \leq t\})$, 而我們通過 perfect matching 命名 G_v 的點為 $\{v_j^i : 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq i \leq t\}$ 。此外我們定義對所有 $2 \leq i \leq t$, $\sigma_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} 1$ 且 $\sigma_1 = 0$ 。

Case 1 我們編號 $E(G_u)$ 為 $1, 2, \dots, m \cup 5m + 1, 5m + 2, \dots, 6m$ 如以下公式:

$$1 \leq j \leq n_i, 1 \leq i \leq t$$

$$f(u_j^i u_{j+1}^i) = \begin{cases} 6m + 1 - (\frac{j}{2} + \sigma_i), & j \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{j+1}{2} + \sigma_i, & j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Case 2 我們編號 perfect matching $E_{mat} = \{u_j^i u_{j+1}^i : 1 \leq j \leq n_i, 1 \leq i \leq t\}$ 為 $\{m+1, m+2, \dots, 3m\}$, (v_j^i 是 u_j^i matching 對應的點): $1 \leq j \leq n_i, 1 \leq i \leq t$

$$f(u_j^i v_j^i) = \begin{cases} m + \frac{j}{2} + \sigma_i, & j \equiv 0 \pmod{2} \\ 3m - (\frac{j-1}{2} + \sigma_i), & j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$w(u_j^i)$ 表示為頂點 u_j^i 所有鄰近的邊的編號總和，則 $w(u_j^i) = f(u_j^i v_j^i) + f(u_j^i u_{j+1}^i) + f(u_j^i u_{j-1}^i)$ ，其中下標取 modulo n_i 。則 G_u 的頂點 u_j^i 的頂點和編號為 $\{7m+2, 7m+3, \dots, 9m+1\}$

Case 3 接下來將剩下的 $\{3m+1, 3m+2, \dots, 5m\}$ 編入 $E(G_v)$ 。首先我們先決定編入 G_v 的每個圈的編號方向為順時鐘或逆時鐘。依據設定的方向我們以 $e_{in}(v_j^i)$ 表示為流入點 v_j^i 的邊編號， $e_{out}(v_j^i)$ 表示為流出點 v_j^i 的邊編號 ($v_j^i \in V(G_v)$)，我們依照以下的方法做編號：

$$1 \leq j \leq n_i, 1 \leq i \leq t$$

$$e_{in}(v_j^i) = 6m + 1 - f(u_j^i v_j^i)$$

所有鄰近的邊的編號總和 $w(v_j^i) = f(u_j^i v_j^i) + e_{in}(v_j^i) + e_{out}(v_j^i)$ ，則可以輕易的看出 (G_v) 頂點和標號為 $\{9m+2, 9m+3, \dots, 11m+1\}$ 。綜合所有以上的 Case 得到所有 $w(u_j^i)$ 和 $w(v_j^i)$ 為連續整數 $\{7m+2, 7m+3, \dots, 11m+1\}$ ，藉由 Theorem 1.3.12 我們可以得知 G 是 E-super vertex magic total labeling。(見 Figure 2.3)

□

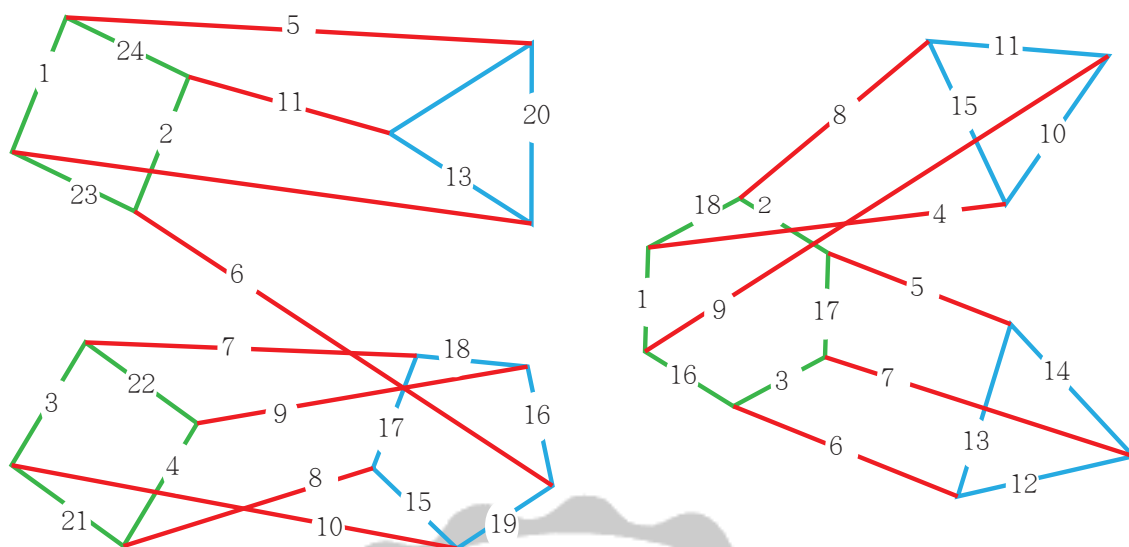


Figure 2.3: Example of Quasi-Prism of Type I

Corollary 2.1.5. t 為正整數 n 為偶數，則 $quasi-prism\ tGP(n, k)$ 屬於 $quasi-prism$ of type I，是 E -super vertex magic total labeling。

Proof. n 偶數的 $quasi-prism\ GP(n, k)$ 明顯的是屬於 $quasi-prism$ of type I，其 outer cycle 為一偶圈。因此 $tGP(n, k)$ 有任意正整數 t 與偶數 n ，會屬於 $quasi-prism$ of type I，且藉由 Theorem 2.1.4 我們知道符合 E -super vertex magic total labeling。□

Theorem 2.1.6. G 是一個由兩個相同點數且不相交的 $quasi-prisms\ G(U_a, V_a)$ and $G(U_b, V_b)$ 組成的 3-regular graph，則 G 為一個 E -super vertex magic total labeling。我們歸類 G 為 **quasi-prism of type II**。

Proof. 令 G 是一個由兩個相同點數且不相交的 $quasi-prisms\ G_a = (U_a, V_a)$ and $G_b = G(U_b, V_b)$ 組成的 3-regular graph， $V(G_a) = U_a \cup V_a$ 且 $U_a = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ 、 $V_a = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ，一樣地 $V(G_b) = U_b \cup V_b$ 且 $U_b = \{u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{2m}\}$ 、 $V_b = \{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{2m}\}$ 。我們分別以 $G[U_a], G[V_a], G[U_b], G[V_b]$ 表示 U_a, V_a, U_b, V_b 這些 2-regular 子圖。因此，可以看出有 $4m$ 個點 $6m$ 個邊，我們將邊編號 $\{1, 2, 3, \dots, 6m\}$ ，並使所有點的鄰近邊編號總和為連數整數，藉由 Theorem 1.3.11 可使其成為 E -super vertex magic total labeling。我們講 G 的邊集合分成幾個部分， $G[U_a], G[V_a], G[U_b], G[V_b]$ 的邊集合以及 G_a 和 G_b 的 perfect matching $E_{mat} = E_{mat}^a \cup E_{mat}^b = \{u_i v_i : 1 \leq i \leq m\} \cup \{u_i v_i : m+1 \leq i \leq 2m\}$ 。

Case 1 先從 G_a 和 G_b 的 perfect matching 開始編號，編入 $\{1, 2, \dots, m\} \cup \{5m + 1, 5m + 2, \dots, 6m\}$ ，方法如下：

$$\text{對於邊 } E_{mat}^a = \{u_i v_i : 1 \leq i \leq m\}$$

$$f(u_i v_i) = i, 1 \leq i \leq m$$

$$\text{對於邊 } E_{mat}^b = \{u_i v_i : m + 1 \leq i \leq 2m\}$$

$$f(u_i v_i) = 4m + i, m + 1 \leq i \leq 2m$$

Case 2 開始對 $G[U_a]$ 和 $G[U_b]$ 編號

首先我們先決定編入 $G[U_a]$ 和 $G[U_b]$ 的每個圈的編號方向為順時鐘或逆時鐘，依據設定的方向我們以 $e_{in}(u_i)$ 表示為流入點 u_i 的邊編號， $e_{out}(u_i)$ 表示為流出點 u_i 的邊編號。

$$\text{For } u_i \in U_a, 1 \leq i \leq m$$

$$e_{in}(u_i) = 5m + 1 - f(u_i v_i)$$

$$\text{For } u_i \in U_b, m + 1 \leq i \leq 2m$$

$$e_{out}(u_i) = 7m + 1 - f(u_i v_i)$$

$w(u_i)$ 表示為頂點 $u_i \in U_a \cup U_b$ 所有鄰近的邊的編號總和，則 $w(u_i) = e_{in}(u_i) + f(u_i v_i) + e_{out}(u_i)$ 。因此我們得到所有頂點 $u_i \in U_a \cup U_b$ 的頂點和編號為 $\{8m + 2, 8m + 3, \dots, 10m + 1\}$ 。

Case 3 最後對 $G[V_a]$ 和 $G[V_b]$ 編號如同上一步方法我們先決定編入 $G[V_a]$ 和 $G[V_b]$ 的每個圈的編號方向為順時鐘或逆時鐘，依據設定的方向我們以 $e_{in}(v_i)$ 表示為流入點 v_i 的邊編號， $e_{out}(v_i)$ 表示為流出點 v_i 的邊編號。

$$\text{For } v_i \in V_a, 1 \leq i \leq m$$

$$e_{in}(v_i) = 4m + 1 - f(u_i v_i)$$

$$\text{For } v_i \in V_b, m + 1 \leq i \leq 2m$$

$$e_{out}(v_i) = 6m + 1 - f(u_i v_i)$$

$w(v_i)$ 表示為頂點 $v_i \in V_a \cup V_b$ 所有鄰近的邊的編號總和，則 $w(v_i) = e_{in}(v_i) + f(u_i v_i) + e_{out}(v_i)$ 。因此我們得到所有頂點 $v_i \in V_a \cup V_b$ 的頂點和編號為 $\{7m + 2, 8m + 3, \dots, 8m + 1\} \cup \{10m + 2, 10m + 3, \dots, 11m + 1\}$ 。

由 **Case 2 Case 3** 可以得知頂點和為連續整數 $\{7m + 2, 7m + 3, \dots, 11m + 1\}$ ，且藉由 Theorem 1.3.12 我們知道符合 E-super vertex magic total labeling。(見 Figure 2.4) □

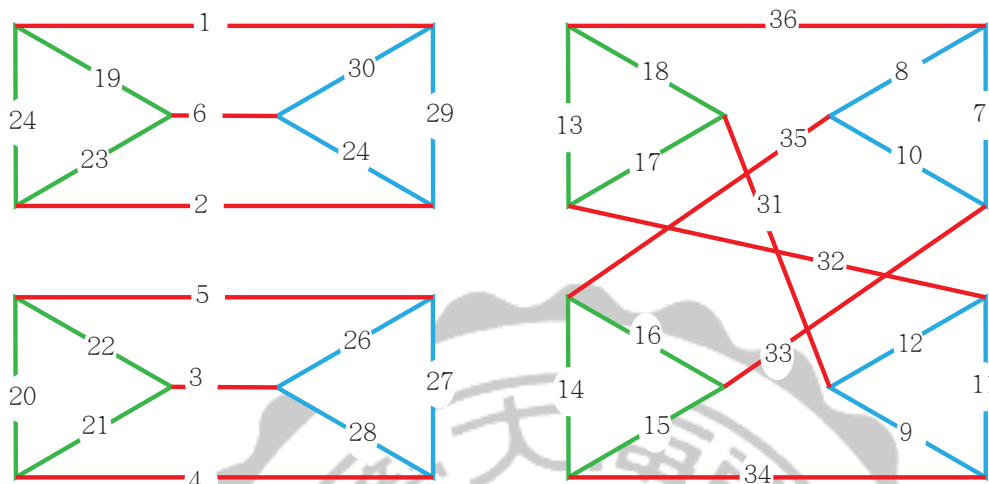


Figure 2.4: Example of Quasi-Prism of Type II

Corollary 2.1.7. G 為偶數個不相交的 *generalized Petersen graphs* $2tGP(2m + 1, 1)$ (t 為正整數且 $m \geq 1$)，則 G 符合 E-super vertex magic total labeling。

Proof. $2GP(2m + 1, 1)$ 屬於 quasi-prism of type II，藉由 Theorem 2.1.6 我們得知，存在任意正整數 t 且 $m \geq 1$ 使得 $G = 2tGP(2m + 1, 1)$ 符合 E-super vertex magic total labeling。 □

Harary graph $H_{m,n}$ 是一個擁有最小邊數， n 個點 m -connected graph 的例子。2012 年，G. Marimuthu 與 M. Balakrishnan [15] 提出了猜想， $H_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling，如果符合 $n > 4$ 且 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 以及 m 是奇數。研究了上述猜想發現 $H_{m,n}$ 有部分符合 type I 和 type II。

Theorem 2.1.8. 我們有以下結果:

- (1) 若奇數 $m \geq 5$ ， $n \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $n > 4$ ，則 $H_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling。
- (2) 若 $m = 3$ ， $n \equiv 0 \pmod{8}$ 且 $n > 4$ ，則 $H_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling。

Proof. (1) 奇數 $m \geq 5$ ， $n \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $n > 4$ 的 $H_{m,n}$ 包含 $H_{5,n}$ ，所以 $H_{4,n}$ 為其子圖，因此 $H_{m,n}$ 包含一個 3-regular spanning subgraph $GP(\frac{n}{2}, 1)$ 且其符合 type

I。再藉由 Theorem 1.3.15 可知 $H_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling。

(2) $m = 3$, $n \equiv 0 \pmod{8}$ 且 $n > 4$, 的 $H_{m,n}$ 包含一個 3-regular spanning subgraph $CIR_n(1, \frac{n}{2})$ (Möbius ladder), 其由 n 個點的 cycle 和對稱點所連的弦組成。我們換個角度來看他, 可以看出有 $\frac{n}{4}$ 個 4-cycles 均勻的分佈其中 (由例子 Figure 2.5 $H_{3,8}$ 和 $H_{3,16}$ 來看, 紅色的邊代表 perfect matching, 而藍色與綠色的邊代表兩個想同個數 4-cycles 的 2-regular 子圖), 因此 3-factor $CIR_n(1, \frac{n}{2})$ 符合 type I, 再藉由 Theorem 1.3.15 可知 $H_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling。(見 Figure 2.5) \square

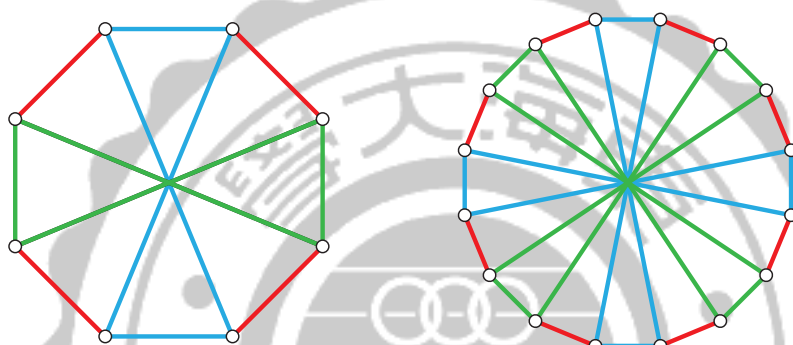


Figure 2.5: $H_{3,8}$ & $H_{3,16}$

此外, 我們有以下的更一般性的情況:

Theorem 2.1.9. 我們有以下結果:

- (1) 若奇數 $m \geq 5$, $n \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $n > 4$, 則 t 個相同的不連通 $H_{m,n}$ 組成 $tH_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling。
- (2) 若 $m = 3$, $n \equiv 0 \pmod{8}$ 且 $n > 4$, 則 t 個相同的不連通 $H_{m,n}$ 組成 $tH_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling。
- (3) 若奇數 $m \geq 5$, $n \equiv 2 \pmod{4}$ 且 $n > 4$, 則 $2t$ 個相同的不連通 $H_{m,n}$ 組成 $2tH_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling。

Proof. (1) 奇數 $m \geq 5$, $n \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $n > 4$, 並由 t 個相同的不連通 $H_{m,n}$ 所組成的 $tH_{m,n}$ 包含一個 spanning 3-regular subgraph (3-factor) $tGP(\frac{n}{2}, 1)$ 符合 type I, 再藉由 Theorem 1.3.15 可知 $tH_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling。

(2) $m = 3$, $n \equiv 0 \pmod{8}$ 且 $n > 4$, 並由 t 個相同的不連通 $H_{m,n}$ 所組成的 $tH_{m,n}$

包含一個 spanning 3-regular subgraph (3-factor) $tCIR_n(1, \frac{n}{2})$ (Möbius ladder) 符合 type I，再藉由 Theorem 1.3.15 可知 $tH_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling。

(3) 若奇數 $m \geq 5$ ， $n \equiv 2 \pmod{4}$ 且 $n > 4$ ，並由 $2t$ 個相同的不連通 $2tH_{m,n}$ 所組成的 $2tH_{m,n}$ 包含一個 spanning 3-regular subgraph (3-factor) $2tGP(\frac{n}{2}, 1)$ ，可視為由兩個相同且不聯通的 quasi-prisms 聯集組成， $2tGP(\frac{n}{2}, 1) = tGP(\frac{n}{2}, 1) \cup tGP(\frac{n}{2}, 1)$ ，而這符合 type II，再藉由 Theorem 1.3.15 可知 $2tH_{m,n}$ 有 E-super vertex magic labeling。

□

Problem 2.1.10. 是否能更一般性的表示 *quasi-prism of type I*，如不用一邊子圖固定為偶數圈，而是只要兩邊為相同偶數 order 的子圖。

2.1.2 (a, 1)-Antimagic Deficiency for K_4

Bodendiek 與 Walther[8] 證實了以下圖形沒有 (a, d)-antimagic: 偶圈; 偶數頂點的 paths; stars; $C_3^{(k)}$; $C_4^{(k)}$; 當 $d=1$ 且最少兩個 layers 的 n -ary trees; the Petersen graph; K_4 ; $K_{3,3}$ 。而面對圖若不是的 (a,d)-antimagic，我們則將邊可編號的連數整數做最小限度的放寬，使其成為 (a,d)-antimagic，而放寬的程度即是 (a, d)-antimagic deficiency(缺數)。

Definition 2.1.11. 存在 G 是一個 (p, q) -graph， (a, s) -antimagic deficiency(缺數)， $d_s(G) = k$ ，被定義成存在最小值 k 滿足放寬可用標號為連續正整數 1 到 $q + k$ ， $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, q + k\}$ ，使其滿足 (a, s) -antimagic labeling 的條件，其中我們沒使用的值稱為 **missing value**。

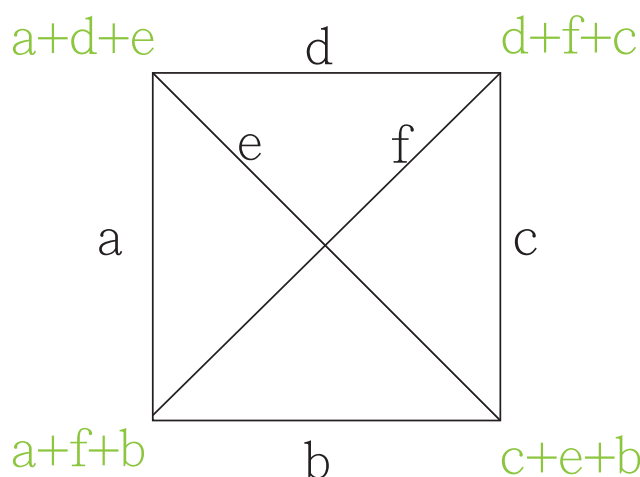
Definition 2.1.12. 存在 G 是一個 (p, q) -graph， $(a, 1)$ -antimagic deficiency(缺數)， $d_1(G) = k$ ，被定義成存在最小值 k 滿足放寬可用標號為連續正整數 1 到 $q + k$ ， $f : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, q + k\}$ ，使其滿足 $(a, 1)$ -antimagic labeling 的條件。

Note 2.1.13. :

$d_1(G) = 0$ ，圖形本身即是 $(a, 1)$ -antimagic

$d_1(G) = \infty$ ，圖形不管如何放寬也不是 $(a, 1)$ -antimagic。

Lemma 2.1.14. K_4 不是 $(a, 1)$ -antimagic



Proof. 假設 K_4 為 $(a, 1)$ -antimagic，不失一般性的我們將邊標入 $1 \sim 6$ 的相異正整數 $\{a, b, c, d, e, f\}$ ，設一個一對一的函數 $f: E(G) \rightarrow \{a, b, \dots, f\}$

$$\Rightarrow 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42$$

令一個一對一的函數 $g: \{9, 10, 11, 12\} \rightarrow \{a+d+e, a+f+b, d+f+c, c+e+b\}$

如果 $a+d+e = 9, a+f+b = 10, d+f+c = 11, c+e+b = 12$ ，則 $a+d+2e+c+b = 21 = a+b+2f+d+c$

$\Rightarrow f = e(\rightarrow\leftarrow) \Rightarrow K_4$ 不是 $(a, 1)$ -antimagic □

同理可證 $d_1(K_4) = \infty$

Lemma 2.1.15. $d_1(K_4) = \infty$

Proof. 假設 $d_1(K_4) = k$ ，不失一般性的我們可以從 $1 \sim K$ 的相異正整數中取 6 個編入邊標號 $\{a, b, c, d, e, f\}$ ，一個一對一的函數 $f: E(G) \rightarrow \{a, b, \dots, f\}$

$$\Rightarrow 2(a + b + c + d + e + f) = 4t + 6$$

令一個一對一的函數 $g: \{t, t+1, t+2, t+3\} \rightarrow \{a+d+e, a+f+b, d+f+c, c+e+b\}$

$$\Rightarrow a + d + e = t$$

$$a + f + b = t + 1$$

$$d + f + c = t + 2$$

$$c + e + b = t + 3$$

則我們可以看出: $a + d + 2e + c + b = 2t + 3 = a + b + 2f + d + c$

$$\Rightarrow f = e(\rightarrow\leftarrow)$$

$\Rightarrow d_1(k_4) = \infty$ □

2.2 (a, 1)-Antimagic Deficiency for Even Regular Graphs

Lemma 2.2.1. (Bodendiek 與 Walther, 1998)

奇數圈 C_{2n+1} 是 $(a, 1)$ -antimagic, $n \geq 1$ ($d_1(G) = 0$)。 (見 Figure 2.6)

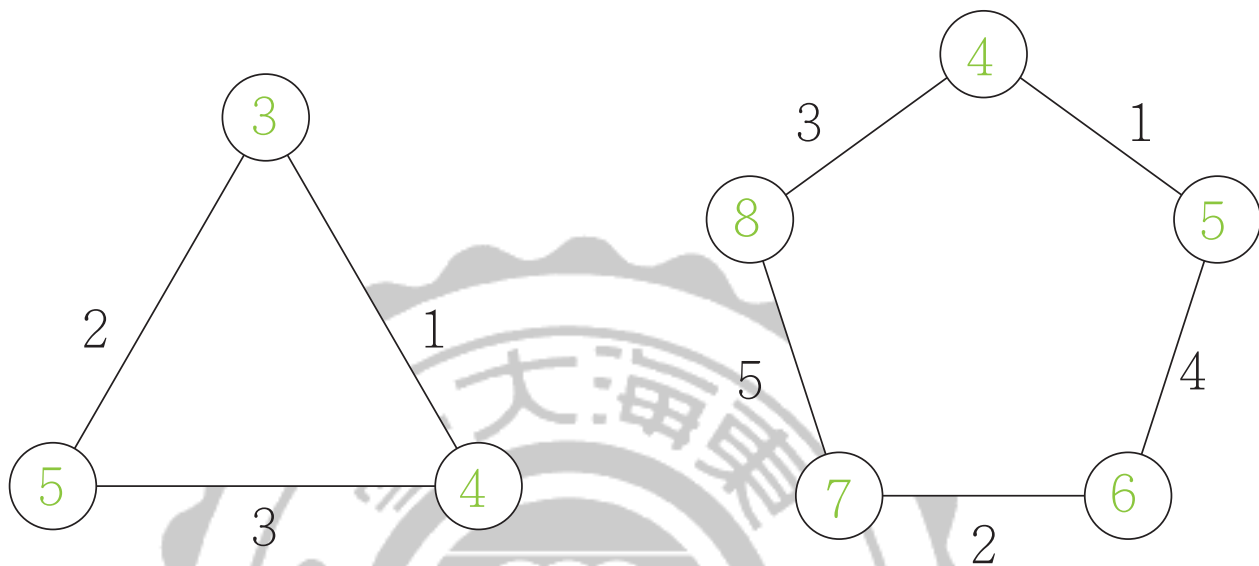


Figure 2.6: C_3, C_5 is $(a, 1)$ -antimagic

Lemma 2.2.2. 如果圖 G 的點個數 $P \equiv 2 \pmod{4}$, 則 $d_1(G) = \infty$ 。

Proof. 我們假設邊標號放寬到 t 時有 $(a, 1)$ -antimagic labeling:

$$2(e_1 + e_2 + \cdots + e_t) = a + (a + 1) + \cdots + (a + 4n + 1)$$

$$= (4n + 2)a + (4n + 1)(2n + 1)$$

$2(e_1 + e_2 + \cdots + e_t)$ 與 $(4n + 2)$ 為偶數, 而 $(4n + 1)(2n + 1)$ 是奇數 ($\rightarrow \leftarrow$)。 \square

Lemma 2.2.3. $d_1(C_{4n}) = 1$

Proof. 存在一 missing value x , 且 $1 \leq x \leq 4n$

$$2(1 + 2 + \cdots + 4n + 1 - x) = a + (a + 1) + \cdots + (a + 4n - 1)$$

$$\Rightarrow (4n + 1)(2n + 1) - x = 2na + n(4n - 1),$$

$$\Rightarrow a = \frac{4n^2 + 7n + 1 - x}{2n} = 2n + 3 + \frac{n + 1 - x}{2n} \in \mathbb{N}$$

假設 $\frac{n + 1 - x}{2n} = k \in \mathbb{Z}$, 則 $x = n + 1 - 2nk$

$\because 1 \leq x \leq 4n, -n \leq -2nk \leq 3n-1,$

則 $k = 0$ or -1 , 而 $x = n + 1$ or $3n + 1$ 。(見 Figure 2.7) □

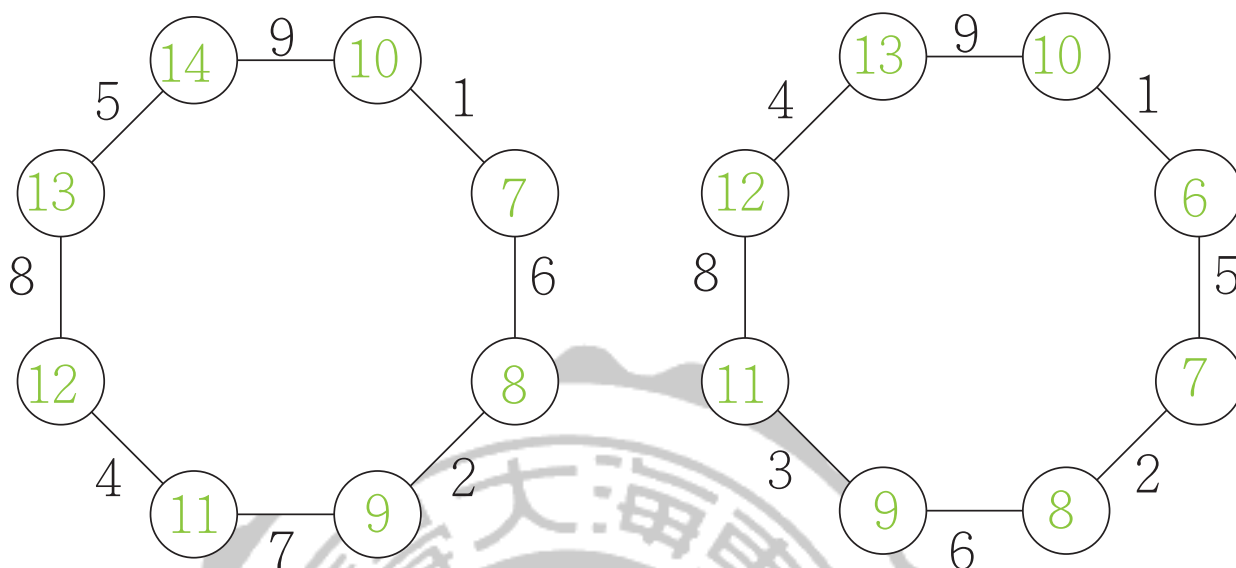


Figure 2.7: C_8 (the missing value $x = 3, 7$)

Theorem 2.2.4. G 是一個 p 個點 $2r$ -regular ($r > 2$) 的 Hamiltonian graph, 則

$$d_1(G) = \begin{cases} 0, & p \equiv 1, 3 \pmod{4} \\ 1, & p \equiv 0 \pmod{4} \\ +\infty, & p \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

Definition 2.2.5. mC_n 是 m 個不相交的 C_n 聯集而成。

Theorem 2.2.6. (Swaminathan, V.[37]) 如果 m 與 n 都是奇數, 則 mC_n 有 $(a, 1)$ -antimagic labeling。(見 Figure 2.8)

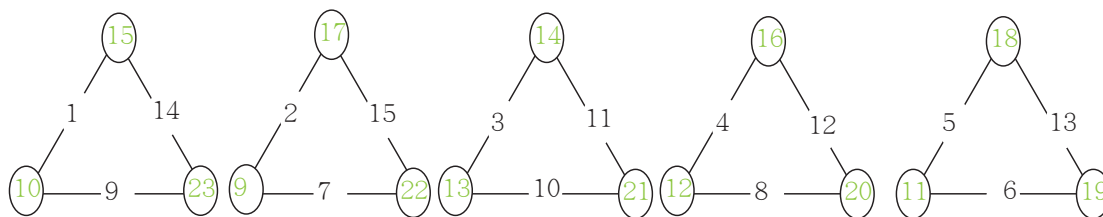


Figure 2.8: Example for $(a, 1)$ -antimagic of $5C_3$

Theorem 2.2.7. (Swaminathan, V.[37]) mC_n 除了 m 與 n 都是奇數，其餘都沒有 $(a, 1)$ -antimagic labeling。

Proof. 令 mC_n 是由 m 個不相交的 C_n 聯集而成

$$2(1 + 2 + 3 + \cdots + mn) = (a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + (a + mn - 1))$$

$$\Rightarrow 2 \frac{(mn+1)mn}{2} = \frac{(2a+mn-1)(mn)}{2}$$

$$\Rightarrow 2(mn + 1) = 2a + mn - 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{mn+3}{2}$$

則 m 與 n 皆為奇數 □

Theorem 2.2.8. 兩個 C_{4n} 的聯集組成 $2C_{4n}$ ， $d_1(2C_{4n}) = 1$ 且 missing value 為 $2n+1$ 或 $6n+1$ 。

Proof. 令 G 為兩個相同的 C_{4n} 聯集組成 $2C_{4n}$ ，擁有 $8n$ 個點、 $8n$ 個邊， $V(G): \{v_j^i: 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 4n\}$ 表示為第 i 個圈第 j 個點， $E(G): \{e_j^i: v_j^i v_{j+1}^i, (j \bmod 4n)\}$ ， $w(v)$ 為所有與 v 相連邊的編號總和 $w(v_j^i) = f(e_j^i) + f(e_{j-1}^i)$ ，假設 $d_1(G) = 1$ ，首先我們先從 missing value 找起：

令 missing value 為 x ，且 $1 \leq x \leq 8n$ ，我們假定 G 邊標號減掉一個 missing value x 會成為 $(a, 1)$ -antimagic，則將邊標號扣除 x 後相加乘 2 會等於頂點和的總和：

$$2(1 + 2 + \cdots + 8n + (8n + 1)) - 2x = a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + (a + 8n - 1)$$

$$\Rightarrow 2 \frac{(1+(8n+1))(8n+1)}{2} - 2x = \frac{(a+(a+8n-1))(8n)}{2}$$

$$\Rightarrow 8an = 32n^2 + 28n + 2 - 2x$$

$$\Rightarrow a = \frac{32n^2+28n+2-2x}{8n} = 4n + \frac{28n+2-2x}{8n} \in \mathbb{N}$$

$$\text{設 } \frac{28n+2-2x}{8n} = k \in \mathbb{Z}, \text{ 則 } x = 14n + 1 - 4nk$$

$$\because 1 \leq x \leq 8n, \therefore -14n \leq -4nk \leq -6n - 1$$

則 $k = 2$ or 3 ，而 $x = 6n + 1$ or $2n + 1$ 。藉此我們可以將其分成 2 個 Case 分別是 missing value 為 $2n + 1$ 且最後點標號為 $\{4n + 3, 4n + 4, \cdots, 12n + 2\}$ 與 missing value 為 $6n + 1$ 且最後點標號為 $\{4n + 2, 4n + 3, \cdots, 12n + 1\}$ ：

Case 1 missing value: $2n + 1$ 我們依照以下的方法：

Subcase 1 $i = 1, 1 \leq j \leq 4n$

$$f(e_j^i) = \begin{cases} \frac{j}{2}, & j \equiv 0 \pmod{2}, 1 \leq j \leq 4n \\ 4n + 1 + \frac{j+1}{2}, & j \equiv 1 \pmod{2}, 1 \leq j \leq 2n \\ 4n + 1 + \frac{j+1}{2} + 1, & j \equiv 1 \pmod{2}, 2n + 1 \leq j \leq 4n \end{cases}$$

這樣我們可以得到 $w(v_j^i)$:

$$w(v_j^i) = \begin{cases} 4n + 1 + j, & 2 \leq j \leq 2n \\ 4n + 2 + j, & 2n + 1 \leq j \leq 4n \\ 6n + 2, & j = 1 \end{cases}$$

可看出 $\{w(v_j^i) : i = 1, 1 \leq j \leq 4n, \} = \{4n + 3, 4n + 4, \dots, 6n + 1\} \cup \{6n + 3, 6n + 4, \dots, 8n + 2\} \cup \{6n + 2\}$

Subcase 2 $i = 2, 1 \leq j \leq 4n$

$$f(e_j^i) = \begin{cases} 2n + 1 + \frac{j+1}{2}, & j \equiv 1 \pmod{2}, 1 \leq j \leq 4n \\ 6n + 2 + \frac{j}{2}, & j \equiv 0 \pmod{2}, 2 \leq j \leq 2n - 1 \\ 4n + 2 + \frac{j}{2}, & j \equiv 0 \pmod{2}, j = 2n \\ 6n + 1 + \frac{j}{2}, & j \equiv 0 \pmod{2}, 2n + 2 \leq j \leq 4n \end{cases}$$

這樣我們可以得到 $w(v_j^i)$:

$$w(v_j^i) = \begin{cases} 8n + 3 + j, & 2 \leq j \leq 2n - 1 \\ 6n + 3 + j, & 2n \leq j \leq 2n + 1 \\ 8n + 2 + j, & 2n + 2 \leq j \leq 4n \\ 10n + 3, & j = 1 \end{cases}$$

可看出 $\{w(v_j^i) : i = 2, 1 \leq j \leq 4n, \} = \{8n + 5, 8n + 6, \dots, 10n + 2\} \cup \{8n + 3, 8n + 4\} \cup \{10n + 4, 10n + 5, \dots, 12n + 2\} \cup \{10n + 3\}$

由 **Subcase 1,2** 可以看出 $\{w(V)\} = \{4n + 3, 4n + 4, \dots, 12n + 2\}$ 可知 missing value 為 $2n + 1$ 時 $d_1(G) = 1$.

Case 2 missing value: $6n + 1$ 我們依照以下的方法:

Subcase 1 $i = 1, 1 \leq j \leq 4n$

$$f(e_j^i) = \begin{cases} 1 + 8n + 1 - \frac{j}{2}, & j \equiv 0 \pmod{2}, 1 \leq j \leq 4n \\ 1 + 8n + 1 - (4n + 1 + \frac{j+1}{2}), & j \equiv 1 \pmod{2}, 1 \leq j \leq 2n \\ 1 + 8n + 1 - (4n + 1 + \frac{j+1}{2} + 1), & j \equiv 1 \pmod{2}, 2n + 1 \leq j \leq 4n \end{cases}$$

這樣我們可以得到 $w(v_j^i)$:

$$w(v_j^i) = \begin{cases} 2(1 + 8n + 1) - (4n + 1 + j), & 2 \leq j \leq 2n \\ 2(1 + 8n + 1) - (4n + 2 + j), & 2n \leq j \leq 4n \\ 2(1 + 8n + 1) - (6n + 2), & j = 1 \end{cases}$$

可看出 $\{w(v_j^i) : i = 1, 1 \leq j \leq 4n, \} = \{8n + 2, 8n + 3, \dots, 12n + 1\}$

Subcase 2 $i = 2, 1 \leq j \leq 4n$

$$f(e_j^i) = \begin{cases} 1 + 8n + 1 - (2n + 1 + \frac{j+1}{2}), & j \equiv 1 \pmod{2}, 1 \leq j \leq 4n \\ 1 + 8n + 1 - (6n + 2 + \frac{j}{2}), & j \equiv 0 \pmod{2}, 2 \leq j \leq 2n - 1 \\ 1 + 8n + 1 - (4n + 2 + \frac{j}{2}), & j \equiv 0 \pmod{2}, j = 2n \\ 1 + 8n + 1 - (6n + 1 + \frac{j}{2}), & j \equiv 0 \pmod{2}, 2n + 2 \leq j \leq 4n \end{cases}$$

這樣我們可以得到 $w(v_j^i)$:

$$w(v_j^i) = \begin{cases} 2(1 + 8n + 1) - (8n + 3 + j), & 2 \leq j \leq 2n - 1 \\ 2(1 + 8n + 1) - (6n + 3 + j), & 2n \leq j \leq 2n + 1 \\ 2(1 + 8n + 1) - (8n + 2 + j), & 2n + 2 \leq j \leq 4n \\ 2(1 + 8n + 1) - (10n + 3), & j = 1 \end{cases}$$

可看出 $\{w(v_j^i) : i = 2, 1 \leq j \leq 4n, \} = \{4n + 2, 4n + 3, \dots, 8n + 1\}$

由 **Subcase 1,2** 可以看出 $\{w(V)\} = \{4n + 2, 4n + 3, \dots, 12n + 1\}$ 可知 missing value 為 $6n + 1$ 時 $d_1(G) = 1$.

由 **Case 1,2** 可得知 missing value 為 $2n + 1$ 或 $6n + 1$ 都是缺數為 1, $d_1(G) = 1$, 並且從中我們可以看出 missing value 為 $2n + 1$ 與 $6n + 1$ 可互相由 $q + 2$ 去減邊標和而得到, 由此得知 missing value 為 $2n + 1$ 與 $6n + 1$ 的圖是互相等價的。(見 Figure 2.9、2.10)

□

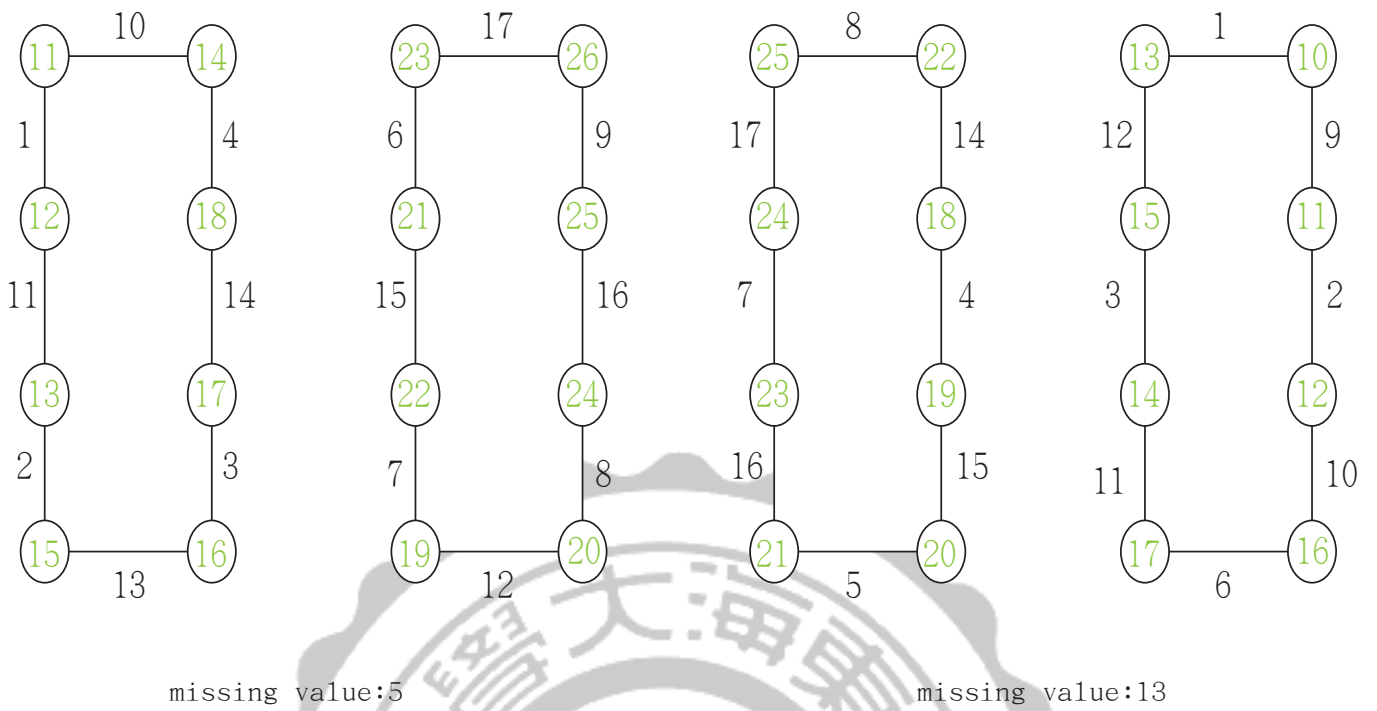


Figure 2.9: (a,1)-antimagic deficiency of $2C_8$ $n = 2$, missing value: $2n + 1 = 5$ & $6n + 1 = 13$

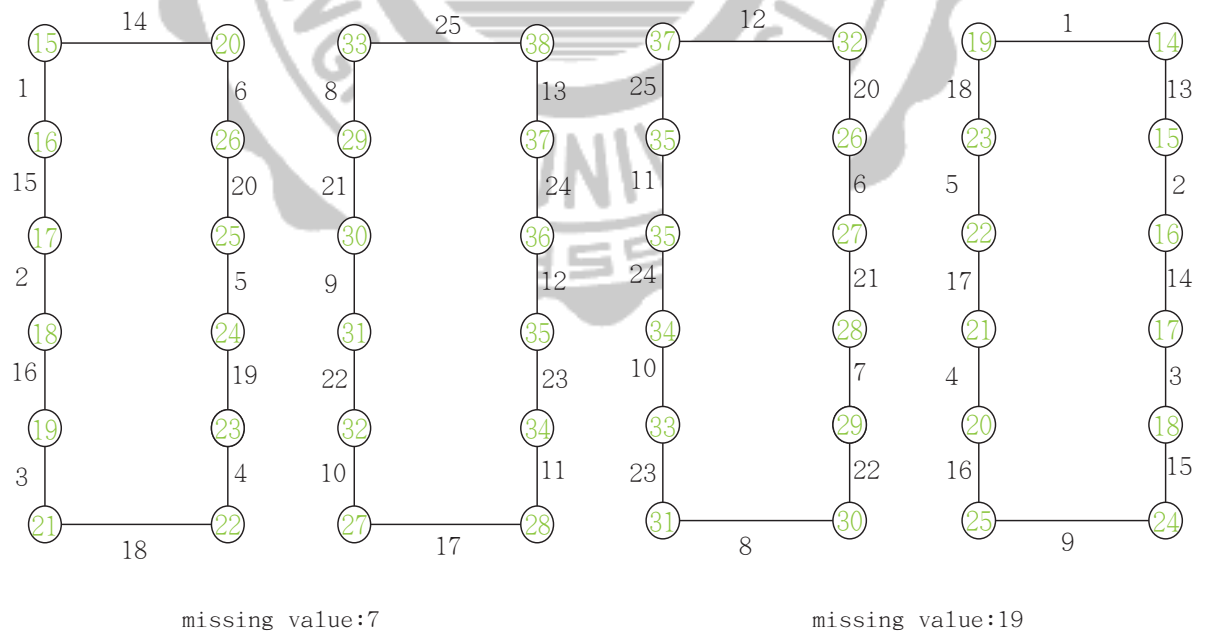


Figure 2.10: (a,1)-antimagic deficiency of $2C_{12}$ $n = 3$, missing value: $2n + 1 = 7$ & $6n + 1 = 19$

Conjecture. 當 $t > 1$ ， t 個相同的 K_4 聯集而成的 $tK_4 (\cong tH_{3,4})$ 有 $(a, 1)$ -antimagic labeling。

以目前的結果，3-regular graph 除了 K_4 還未找到其他沒有 $(a, 1)$ -antimagic 的反例，因此更近一步的去猜測：

Conjecture. 除了 K_4 外，所有滿足 $|V| \equiv 0 \pmod{4}$ 的 3-regular graph $G = (V, E)$ 皆有 $(a, 1)$ -antimagic labeling。

前面內文有提起 3-regular graph 有 $(a, 1)$ -antimagic labeling 的必要條件是頂點個數為 4 的倍數，著名的 generalized Petersen graph $GP(n, k)$ 當 n 為偶數時符合 type I 有 $(a, 1)$ -antimagic labeling，我們提出開放性的問題：

Problem 3.1.1. 判斷 n 為奇數 generalized Petersen graph $GP(n, k)$ 的 $(a, 1)$ -antimagic deficiency。

3.2 Further Studies for Even Regular Graphs

有許多擁有 $(a, 1)$ -antimagic deficiency 的圖形值得探討，於本篇文章中我們證實了 $2C_{4n}$ 的缺數為 1，而我們更往下一步去做猜想，兩個偶數的圈缺數為 1，不僅限於兩個 C_{4n} 。我有 Figure 3.2 的例子，進而去做猜測。

Conjecture. 不相交的兩個且相同的偶圈， $2C_{2n}$ ，將邊標號放寬 l 會是 $(a, 1)$ -antimagic， $d_1(2C_{2n}) = 1$ 。

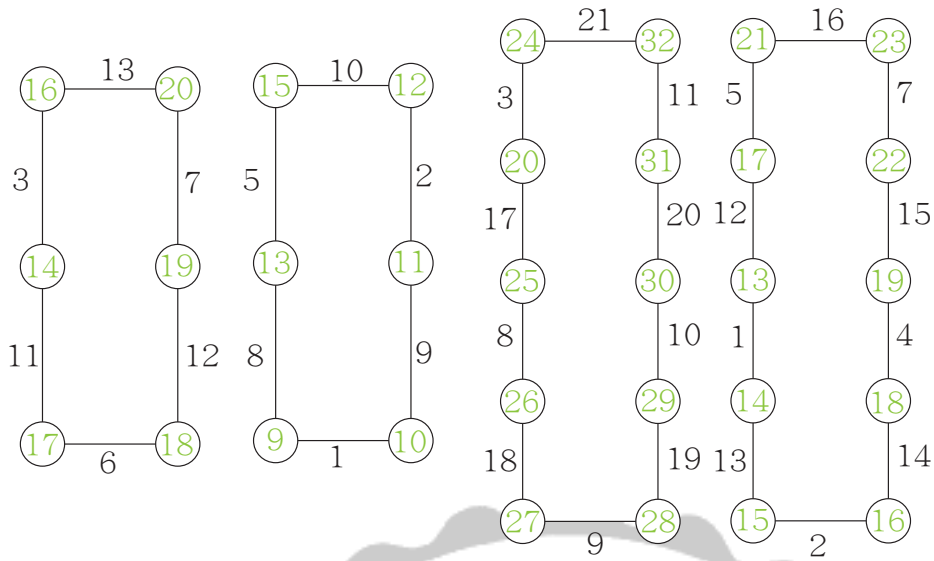


Figure 3.2: Labeling of $2C_6$ and $2C_{10}$

I. D. Gray[18] 提出了猜想: 奇數點的 2-regular graph 有 $(a, 1)$ -antimagic labeling 除了 $C_3 \cup C_4$, $3C_3 \cup C_4$, $2C_3 \cup C_5$ 。因此我們提出個開放性問題探討 $C_3 \cup C_4$, $3C_3 \cup C_4$, $2C_3 \cup C_5$ 與偶數點的 2-regular graph 的缺數問:

Problem 3.2.1. 判斷 $C_3 \cup C_4$, $3C_3 \cup C_4$, $2C_3 \cup C_5$ 與偶數點的 2-regular graph 的 $(a, 1)$ -antimagic deficiency。

Bibliography

- [1] W. Brown, Antimagic Labelings and the Antimagic Strength of Graphs, draft 2008.
- [2] Bača M., Miller M., and Slamin, Vertex-magic total labelings of generalized Petersen graphs, Int. J. of Computer Mathematics 79, Issue 12, (2002) pp.1259-1264.
- [3] M. Bača and I. Holländer, On (a, d) -antimagic prisms, Ars Combin., 48 (1998) 297-306.
- [4] R. Bodendiek and G. Walther, Arithmetisch antimagische Graphen, Graphentheorie III, K. Wagner and R. Bodendiek (eds.), Mannheim, 1993.
- [5] R. Bodendiek and G. Walther, (A, D) -antimagic parachutes, Ars Combin., 42 (1996), 129-149.
- [6] R. Bodendiek and G. Walther, (a, d) -antimagic parachutes II, Ars Combin., 46 (1997), 33-63.
- [7] R. Bodendiek and G. Walther, On number theoretical methods in graph labelings, Res. Exp. Math., 21 (1995) 3-25.
- [8] R. Bodendiek and G. Walther, On arithmetic antimagic edge labelings of graphs, Mitt. Math. Ges. Hamburg, 17 (1998) 85-99.
- [9] Y. Cheng, A new class of antimagic Cartesian product graphs, Discrete Math., 308 (2008) 6441-6448

- [10] Y. Cheng, Lattice grids and prisms are antimagic, *Theoret. Comput. Sci.*, 374 (2007) 66-73
- [11] D. McQuillan, Edge-magic and vertex-magic total labelings of certain cycles, *Ars Combin.*, 90 (2009) 257-266.
- [12] D. Sinha and J. Kaur, Full friendly index set-I, *Discrete Appl. Math.*, 161 (2013), no. 9, 1262-1274.
- [13] W. Feng, X. Hong, Y. Yang, and Jirimutu, On (a, d) -antimagic labelings of generalized Petersen graphs $P(n, 5)$, *Util. Math.* 95 (2014) 349-356.
- [14] Marimuthu, G., and Kumar, G., Solution to some open problems on E-super vertex magic labeling of disconnected graphs, manuscript, 2014
- [15] Marimuthu, G., and Balakrishnan, M., E-super vertex magic labelings of graphs, *Discrete Applied Math.*, 160 (2012) 1766-1774.
- [16] N. Hartsfield and G. Ringel, *Pearls in Graph Theory*, Academic Press, San Diego, 1990.
- [17] Gray, I.D., Vertex-Magic Total Labelings of Regular Graphs, *SIAM Journal on Discrete Math.* Volume 21, Issue 1, (2007) 170-177.
- [18] I. D. Gray, Vertex-magic total labelings of regular graphs, *SIAM J. Discrete Math.* 21 (2007)
- [19] J. Ivančo, A. Semaničová, Some constructions of supermagic graphs using antimagic graphs, *SUT J. Math.*, 42, No. 2 (2006), 177-186.
- [20] I. Javaid, A. Ismail, M. Salman, A. Ahmad, and Slamun, Labeling of chordal rings, *Util. Math.*, 90 (2013) 61-75.
- [21] Gallian, J.A., A dynamic survey of graph labeling, *Electron. J. Combin.* 16 (2013) # DS6.

- [22] MacDougall, J.A., Miller, M., Slamin, Wallis, W.D., Vertex magic total labelings of graphs, *Util. Math.* 61 (2002) 3-21.
- [23] J. A. MacDougall, M. Miller, and K. Sugeng, Super vertex-magic total labelings of graphs, *Proceedings Australasian Workshop Combin. Algorithm 2004*, Balina, NSW (2004) 222-229.
- [24] Petersen, J. , Die Theorie der regularen graphs, *Acta Mathematica* (15) 193-220 (1891)
- [25] H. K. Krishnappa, K. Kopthapalli, and V. C. Venkaiah, Vertex magic total of complete graphs, *AKCE J. Graphs Combin.*, 6 (2009) 143-154.
- [26] Y.-C. Liang and X. Zhu, Anti-magic labelling of Cartesian product of graphs, *Theoret. Comput. Sci.* 477 (2013) 1-5.
- [27] M.-J. Lee, C. Lin, and W.-H. Tsai, On antimagic labeling for power of cycles, *Ars Combin.*, 98 (2011) 161-165.
- [28] Y. Lin, M. Miller, R. Simanjuntak, and Slamin, Magic and antimagic labelings of wheels, preprint,(2000).
- [29] A. M. Marr and W.D. Wallis, *Magic Graph*, Second Edition (2013), Birkhauser, Boston.
- [30] M. Miller and M. Bača: Antimagic valuations of generalized Petersen graphs, *Australas. J. Combin.*, 22 (2000) 135-139.
- [31] Sedláček, J., Problem 27, *Theory of Graphs and its Applications*, Proc. Symposium, 1963, pp. 163-167.
- [32] Slamin, Prihandoko, A.C., Setiawan, T.B., Rosita, F., Shaleh B., Vertex-magic Total Labelings of Disconnected Graphs, *Journal of Prime Research in Mathematics* Vol. 2(2006), 147-156
- [33] A. Solairaju and M. A. Arockiasamy, Gracefulness of k-step staircase graphs, *J. Analysis Computation*, 6 (2010) 109-114.

- [34] J.-L. Shang, Spiders are antimagic, *Ars Combin.*, 118 (2015) 367-372.
- [35] Jeyanthi, P., and V. Swaminathan. "On super vertex-magic labling." *J. Discrete Math. Sci. Cryptography* 8 (2005): 217-224.
- [36] T.H. Tsai, On antimagic labeling of graphs, master thesis, Tatung University, 2008.
- [37] Swaminathan, V., Jeyanthi, P., Super vertex magic labeling, *Indian J. Pure Appl. Math.* 34 (6) (2003) 935-939.
- [38] V. Vilfred and L. M. Florida, Partition technique in the study of (a, d) -antimagic graphs, preprint.
- [39] T. M. Wang and G. H. Zhang, Note on E-super vertex magic graphs, manuscript, 2012.
- [40] T. M. Wang and G. H. Zhang, On vertex magic total labeling of disjoint union of sun graphs. to appear in *Utilitas Mathematica*. (Accepted 2013).
- [41] Wang, T.-M. and Zhang, G.-H., Note on E-super Vertex Magic Graphs, *Discrete Applied Math.*, 178 (2014) 160-162.
- [42] T.-M. Wang, Toroidal grids are anti-magic, *Computing and combinatorics, Lecture Notes in Comput. Sci.*, 3595, Springer, Berlin (2005) 671-679.
- [43] T.-M. Wang and C.-C. Hsiao, On anti-magic labeling for graph products, *Discrete Math.*, 308 (2008) 3624-3633.
- [44] X. Xu, Y. Yang, Y. Xi, and H. Li, On (a, d) -antimagic labelings of generalized Petersen graphs $P(n, 3)$, *Ars Combin.*, 86 (2008) 23-31.
- [45] X. Xu, J.-M. Xu, M. L'u, Z. Baosheng, and C. Nan, On (a, d) -antimagic labelings of generalized Petersen graphs, *Ars Combin.*, 90 (2009) 411-421.

- [46] Z. Lingqi, Z. Linna, R. Yuan, The generalized Petersen graph $P(n, 3)$ is $(5n + 5/2, 2)$ -antimagic, *Util. Math.*, 96 (2015) 17-25.
- [47] Zhang, G. H., Wang, T. M., Chia, M. I., & Hung, C. N. Super Vertex Magic Chordal Rings.
- [48] Zhang, Guang-Hui, and Tao-Ming Wang. "E-Super Vertex Magic Regular Graphs of Odd Degree." *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 48 (2015): 49-56.

