

東海大學
應用數學系
碩士論文

路思義教堂之 3D 曲面模型
建立與模擬

**3D Surface Modeling and Simulation of
Luce Chapel**

研究生: 王世銘

指導教授: 黃皇男

中華民國 105 年 7 月

東 海 大 學

應用數學系

碩士學位口試委員審定書

本系碩士班 王世銘 君

所提論文 3D SURFACE MODELING AND SIMULATION OF LUCE
CHAPEL

(路思義教堂之 3D 曲面模型建立與模擬)

合於碩士班資格水準，業經本委員會評審通過，特此證明。

口試委員：

曾旭堯

陳淑芬

羅時璋

陳碩聰

指導教授：

黃景男

所 長：

楊知雄

中 華 民 國 一〇五 年 七 月 六 日

摘要

本研究的目的是在於嘗試計算本校著名地標路思義教堂的數學模型，作為精確 3D 模型的建立依據。路思義教堂由係由四片（單側兩片）曲面所組成，每片曲面為由前後兩組曲線所構成，即教堂的外型取決於四組曲線而定。研究首先以不同的二次（圓錐）曲線匹配教堂 CAD 檔案數據的四組曲線，並估算每組的對應誤差。再以此成果為基礎，進一步將曲線方程回溯到架構四片曲面所對應的圓錐曲面，並利用教堂 CAD 檔案提供的正向厚度，以建立含厚度在內的真正曲面以及架構出教堂曲面的數位結構。最後將教堂曲面的數位結構轉為 3D CAD/CAM 檔案，進而使用 3D 列印機製作路思義教堂準確的 3D 實體模型。

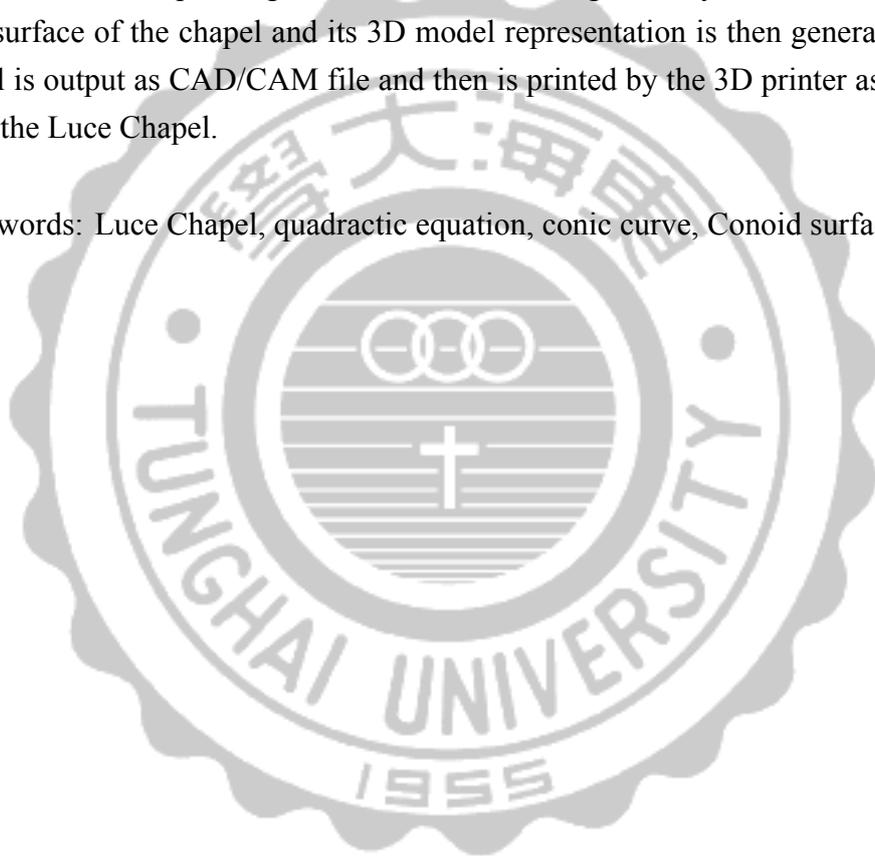
關鍵字：路思義教堂、二次曲線、圓錐曲線、Conoid 曲面、CAD/CAM、3D 模型



Abstract

The purpose of this study is to find the mathematical model of Luce Chapel in Tunghai University for establishing its accurate 3D model. The Luce Chapel consists of four surfaces in symmetry about the longitudinal plane and there are four curves in representing two surfaces in each side. Firstly, quadratic equations (conic curves) are generated to interpolate these four different curves based on the numerical data provided by the corresponding CAD file and the associated errors during interpolation are also estimated. Based on the knowledge of these four equations, we generate the data for two separate surfaces with the indicated normal thickness from the CAD file. Furthermore, the corresponding conoid surfaces are regressively obtained to represent the front and rear surface of the chapel and its 3D model representation is then generated. In the last, the 3D model is output as CAD/CAM file and then is printed by the 3D printer as a real accurate 3D model of the Luce Chapel.

Keywords: Luce Chapel, quadratic equation, conic curve, conoid surface, CAD/CAM, 3D model



目錄

1	緒論	7
1.1	簡介	7
1.2	研究背景與動機	8
1.3	研究目的	9
1.4	研究探討	9
2	數學結構	10
2.1	數學預備知識	10
2.2	曲面模型	16
2.3	曲面方程	20
3	3D 模型呈現	25
3.1	模型的呈現方式	25
3.2	數位模型的建立	26
4	曲面模型的建構想法探討	30
4.1	線性近似	30
4.2	Conoid 的想法	32
5	結論	44
A	教堂數據	46

圖目錄

1.1	路思義教堂位置圖,圖中標示 39 位置即為路思義教堂	7
1.2	路思義教堂橫切面利用直線在橢圓上移動軌跡所構成的曲面	8
2.1	圓錐曲線	11
2.2	路思義教堂定義座標系統	16
2.3	教堂 AutoCAD 上視圖顯示外觀上的四個主要曲線形狀以及厚度	17
2.4	曲線 AB ($y = 0$)、曲線 CD ($y = 1800$)	17
2.5	曲線 AB 與曲線 CD	18
2.6	牆面厚度數據	19
2.7	斜率計算示意圖	19
2.8	曲線 EF ($y = 1700$)、曲線 GH ($y = 2700$)	21
2.9	曲線 EF 與曲線 GH	21
2.10	利用 MATLAB 所建構出的曲面架構	22
2.11	曲線 AB 與 CD 曲線擬合結果	23
2.12	曲線 EF 與 GH 曲線擬合結果	23
2.13	曲線 AB, CD, EF, GH 對應橢圓之中心點與長短軸	24
3.1	古老木建築的結構圖,則是利用線透視的方法所繪。	27
3.2	CAD 模型	28
3.3	不同軟體的加厚	28
3.4	增厚的牆面與未增厚的牆面	28
3.5	教堂 ABCD 曲面	29
3.6	教堂曲面模型	29
4.1	曲面 ABCD 及 EFGH 之二次多項式擬合的比較	32
4.2	定義函數的方程式	33
4.3	教堂曲線方程式模擬	34
4.4	$y=1800$ 處前後,窗口曲線的示意圖	35
4.5	圓弧拉線測試,粉色線長與圓弧與圓弧半徑相等	36
4.6	圓弧拉線測試並做切面	37

4.7	使用 Geogebra 實際觀察圖形	38
4.8	想法	39
4.9	想法	39
4.10	使用 Geogebra 實際觀察圖形	40
4.11	橢圓旋轉路徑示意圖	41
4.12	橢圓路徑模擬	41
4.13	教堂前方曲面-無厚度	42
4.14	教堂後方曲面-無厚度	42
4.15	教堂前方曲面-加厚	43
4.16	教堂後方曲面-加厚	43



表目錄

2.1	曲線 AB, CD, EF 及 GH 之擬合的 $RMSE$ 誤差	24
2.2	曲線 AB, CD, EF 及 GH 之中心與長短軸	24
3.1	3D 模型的比較	25
4.1	曲面 $ABCD$ 及 $EFGH$ 之二次多項式擬合的 $RMSE$ 誤差	32
A.1	曲線 AB, CD, EF 及 GH 之座標資料	46
A.2	曲面 $ABCD$ 之對應 $y = 0$ 到 $y = 1800$ 之厚度資料	47
A.3	曲面 $EFGH$ 之對應 $y = 1700$ 到 $y = 2700$ 之厚度資料	48

第一章 緒論

1.1 簡介

本論文主要為探討路思義教堂的數學模型。路思義教堂坐落於台中西屯區東海大學之內，建於 1962 年於 1963 年 11 月 2 日完工，為陳其寬與貝律銘之作，而早期的東海大學將校園劃分四個區塊：教學區、男宿、女宿、教職員宿舍，路思義教堂考慮到各個位置的距離，選擇了文理大道之下。然而早期所有的宮殿建築皆建立於所有主幹道之上意味著統治、專權，但東海大學是學校而非教會，故將建築位置偏離了文理大道中軸之上，展現了學校與教會的各自獨立與包容之美。

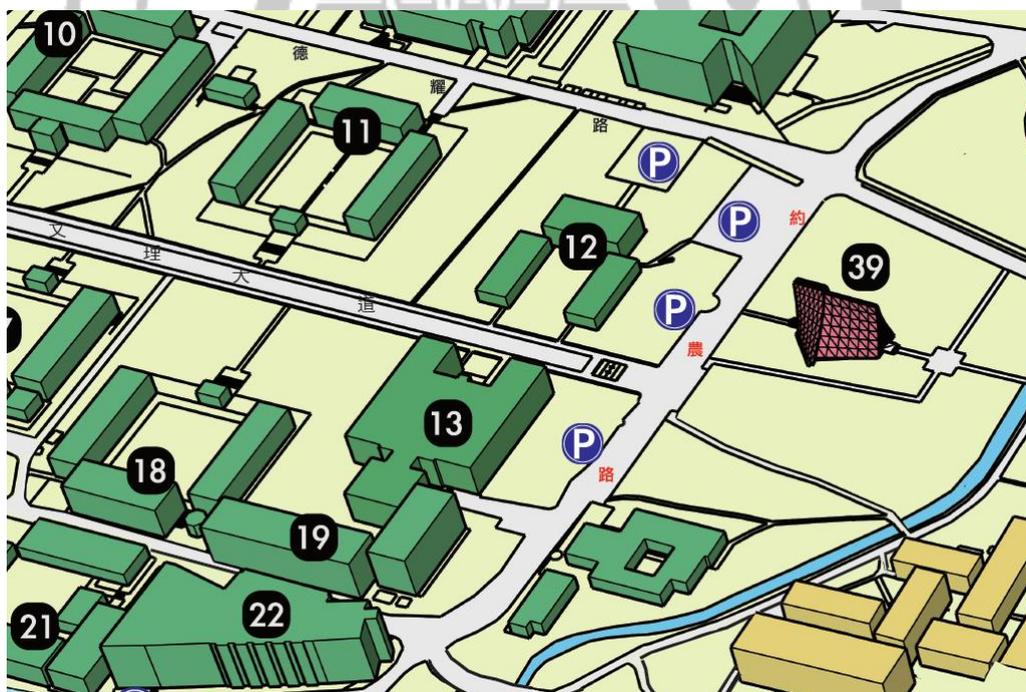


圖 1.1: 路思義教堂位置圖，圖中標示 39 位置即為路思義教堂

路思義教堂採用薄殼圓錐 (Conoid) 的設計，此方法使其結構不需很厚就能夠支撐整個教堂的重量，而圓錐 (Conoid) 利用一條直線沿著一條曲線上做移動，而位移的路徑將其連線起來則成為一個新的曲面。而教堂則是利用這樣的方式建構出四個曲面進而構成的一個空間，再者此四片曲面因為過於龐大，欲將四片曲面完全無縫接上實在是不太可能，畢竟所

有的製作都有誤差，所以選擇了將邊緣接縫處都使用玻璃設計，可以讓光線進入使得教堂內部更為明亮，教堂頂部中間亦如此，故有一線天之說。另外教堂在從內部與外部觀看時，有一個位置會看到既凸且凹的部分，這則是數學的雙曲亦是研究的一部分。

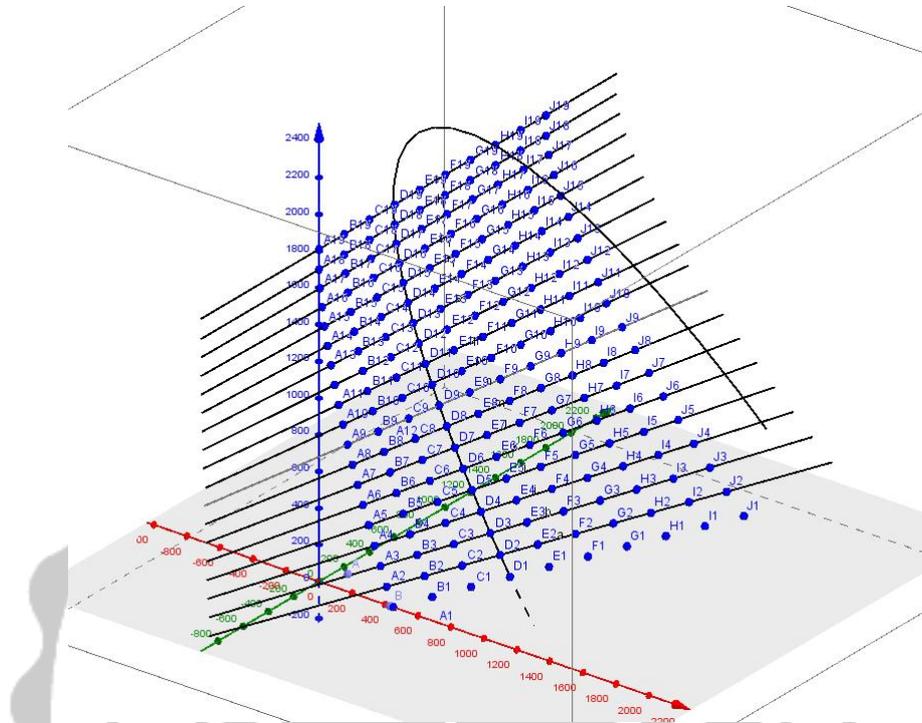


圖 1.2: 路思義教堂橫切面利用直線在橢圓上移動軌跡所構成的曲面

1.2 研究背景與動機

起初只為了提供學校製作簡易的 3D 體模型以供學校教堂維修之用，計算其底部面積以估計修繕之費用，在計算期間也順便計算了其方程式，後才發現可能與原來大多文獻上所述的雙曲拋物面有出入，進而探討其曲線方程式，且近年來 3D 列印的日益興起，其設計原理亦是利用三度空間座標移動而建立的，故最後才考慮使用數學軟體進行曲線的模擬並使用 3D 列印機將所設計之數位模型進而建構成 3D 實體模型，無論是在三度空間思維，或是三維模型的建立都能有一定的幫助。另外伴隨著大量的熱熔式 (FDM) 3D 列印機的產生，加上各種材料的使用，使得原有的使用原料不再只有 ABS 塑膠料，而且以往都需要開模製造成本都需要上百萬，現在因技術的到期，使得我們可以利用原來數位 3D 模型進一步的設計進而使用 3D 列印機將其真實呈現，且可針對實體模型的原始 3D 檔案加以修改進行列印修繕，並利用方程式的改變了解圖形的變化 (包含隱含數、參數式、多項式) 與係數的影響。

1.3 研究目的

本研究的目的是希望讓自己對空間的概念更了解，試圖利用不同的方式去建構 3D 數學模型曲面，無論是在數學方程式的使用，或是未來在設計商品、設計建築都可以加入更多的數學元素，不再只有單一個設計概念，未來更結合 3D 列印機製作實際的商品。在研究中也順便學習 3D 列印的使用、維修以及數學模型的设计與修改可增加與未來就業的連結。

1.4 研究探討

本研究在探討直線在不同路徑軌跡上所形成的不同軌跡，移動軌跡所形成的曲面則為我們主要探討的部分，主題以東海路思義教堂的三維結構做深入的研究，其中會使用到曲線擬合以及矩陣的旋轉與平移並利用多變數函數，例 $z = f(x, y)$ 來表示三維空間中的座標系統並利用方程式的斜率進行插值繪圖，最後計算其面積與模擬空間上的曲面。



第二章 數學結構

2.1 數學預備知識

本節說明本章所需的數學預備知識，內容主要從參考文獻 [1] 中整理而得，以保持本論文的完整性。

定義 2.1. 一個圓錐體是由於直線的移動所產生的面，它是平面上的一個圓以及許多切線與平面外的一個固定點 V 所圍成的一個形體。而每一條切線我們都稱為是這個圓錐體的元素。而固定點 V 我們稱為圓錐的頂點，頂點將此錐體分為兩個圓錐，每一個圓錐都是由一半的線段生成。如果接合的圓錐體給定圓錐的中心頂點是垂直於平面中心則此圓錐體我們稱為正圓錐，否則我們稱為斜圓錐。

拋物線、橢圓、雙曲線這些圓錐曲線是由阿波羅尼奧斯所命名，它是由調查一些正圓錐與斜圓錐中某些平面所發現的。這些曲線是由平面與圓錐體的交叉，指的是截面，若這些切面沒有經過圓錐的頂點，我們則稱它為常態的二次曲線。

定義 2.2. 拋物線是一個常態二次曲線且它的面平行於一個圓錐的元素。橢圓亦是一個常態二次曲線且它的平面切過圓錐上所有的元素。雙曲線亦同，但它的切面通過上下層的兩個圓錐。

一個圓有中心點 $C(a, b)$ 與半徑 r 。 $Q(x, y)$ 是圓周上的任意點。 \overline{CQ} 的距離為 r 。在平面上我們可將兩點之間的長度表示為下列式子

$$\overline{CQ}^2 = r^2$$

等同於

$$(x - a)^2 - (y - b)^2 = r^2. \quad (2.1)$$

同樣的，我們可以總結圓、橢圓、拋物線的標準形式如下

定理 2.1. 平面上，圓的中心點為 (a, b) 半徑為 r

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

橢圓的標準式子我們可以表示如下：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 此時 } a \geq b > 0, b^2 = a^2(1 - e^2), 0 \leq e < 1.$$

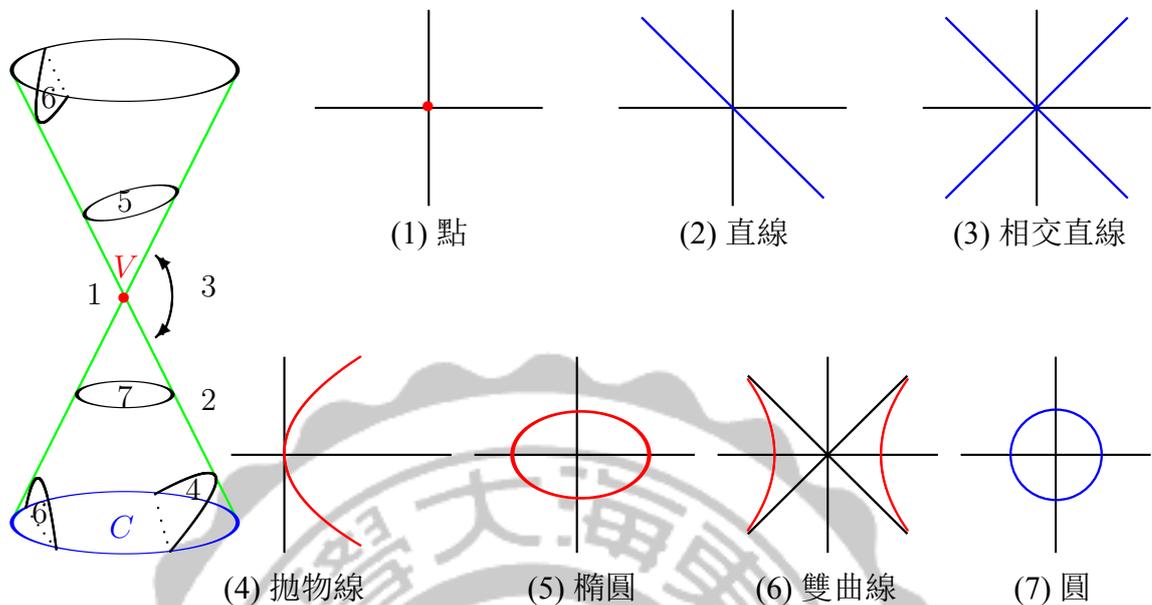


圖 2.1: 圓錐曲線

雙曲線的標準式子我們可以表示如下:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 此時 } b^2 = a^2(1 - e^2), e > 1.$$

拋物線的標準式子我們可以表示如下:

$$y^2 = 4ax, \text{ 此時 } a > 0.$$

現在我們將 (2.1) 式子展開, 並且經過整理可得方程式

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

接著為了縮短式子, 我們令 $F = -2a, G = -2b, H = a^2 + b^2 - r^2$

$$x^2 + y^2 + Fx + Gy + H = 0. \quad (2.2)$$

事實證明方程式 (2.1) 比 (2.2) 更適合用來描述一個圓的特徵。另一方面方程式 (2.2) 可更容易得知二次曲線的關係。

範例. 定義圓方程式中的 F, G 和 H 並使其通過原點

$$x^2 + y^2 + Fx + Gy + H = 0$$

解代數座標原點 $O(0, 0)$ 代入方程式, 則方程式變為

$$0^2 + 0^2 + F \cdot 0 + G \cdot 0 + H = H = 0$$

我們可以利用定理來描述圓錐曲線的一般式

定理 2.2. 任何圓錐曲線方程有以下形式

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0, \quad (2.3)$$

如果給定一個圓錐曲線的一般式

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0,$$

此方程表達哪種圓錐曲線的種類呢? 我們可以透過旋轉

$$(x, y) \mapsto (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

及平移

$$(x, y) \mapsto (x - a, y - b)$$

將其轉換成標準的形式進而進行判斷。旋轉矩陣 P 的形式為

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

它是透過一個逆時針旋轉的 θ 角來表示

定理 2.3. 一個 2×2 矩陣 P 在 \mathbb{R}^2 上圍繞原點旋轉它必須滿足下列兩個條件

- (a) P 是正交
- (b) $\det P = 1$

令 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{pmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$ 且 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. 然

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Ax + \frac{1}{2}By & \frac{1}{2}Bx + Cy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= Ax^2 + Bxy + Cy^2 \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^T \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= Fx + Gy. \end{aligned}$$

因此, 我們可將方程式寫成 (2.3) 的形式

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{J}^T \mathbf{x} + H = 0 \quad (2.4)$$

範例. 證明圓錐曲線方程 E 是一個雙曲線, 並定義出它的中心、貫軸與共軛軸:

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 14x - 2y + 3 = 0$$

解可將方程式 E 寫成矩陣的形式 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{J}^T \mathbf{x} + H = 0$, 當 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 14 \\ -2 \end{pmatrix}$, $H = 3$ 和 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, 換句話說,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3 = 0.$$

因為

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$$

所以

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^T$$

當

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

令 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}'$ and

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix},$$

根據形式轉換成方程式如下

$$(\mathbf{P} \mathbf{x}')^T \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{x}' + \mathbf{J}^T \mathbf{P} \mathbf{x}' + H = 0$$

或

$$\mathbf{x}'^T \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{x}' + \mathbf{J}^T \mathbf{P} \mathbf{x}' + H = 0.$$

因為 $\det(P) = 1$ 以及定理 2.3, P 被標記為從 \mathbf{x}' 旋轉 $-\frac{\pi}{4}$ 到 \mathbf{x} 的矩陣, 換句話說, 從 \mathbf{x} 旋轉到 \mathbf{x}' 需要旋轉 $\frac{\pi}{4}$. 因此

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & -8\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 3 = 0$$

等價於

$$-2x'^2 + 8y'^2 + 6\sqrt{2}x' - 8\sqrt{2}y' + 3 = 0.$$

完成配方, 我們得出

$$-2(x'^2 - 3\sqrt{2}x') + 8(y'^2 - \sqrt{2}y') + 3 = 0$$

所以

$$-2(x' - 3/\sqrt{2})^2 + 8(y' - 1/\sqrt{2})^2 + 9 - 4 + 3 = 0$$

我們可寫成

$$-2(x' - 3/\sqrt{2})^2 + 8(y' - 1/\sqrt{2})^2 = -8$$

或等價於

$$\frac{(x' - 3/\sqrt{2})^2}{2^2} - \frac{(y' - 1/\sqrt{2})^2}{1} = 1. \quad (2.5)$$

這是一個雙曲線，貫軸為 $y' - 1/\sqrt{2} = 0$ 或 $y' = 1/\sqrt{2}$ ，而共軛軸是 $x' = 3/\sqrt{2}$ 。

從 $\mathbf{x}' = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$ 我們可計算出

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

寫成一對方程式

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y. \end{aligned}$$

根據貫軸以及共軛軸方程 $y' = 1/\sqrt{2}$ 及 $x' = 3/\sqrt{2}$ ，然後分別給出下列式子

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (2.7)$$

或

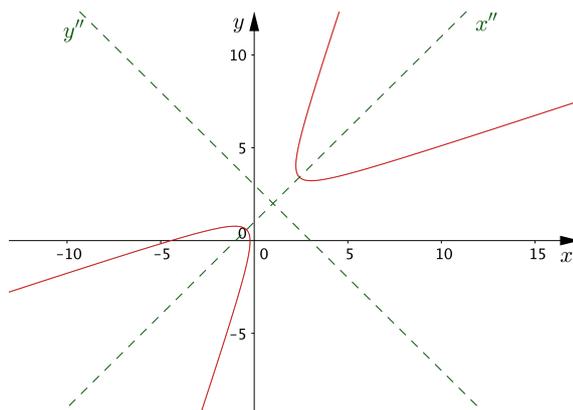
$$-x + y = 1 \quad (2.8)$$

$$x + y = 3 \quad (2.9)$$

如果我們進一步定義 $x'' = x' - 3/\sqrt{2}$ 與 $y'' = y' - 1/\sqrt{2}$ ，雙曲方程則變為標準式。

$$\frac{x''^2}{2^2} - \frac{y''^2}{1} = 1$$

關係圖如下



上述問題說明了確定圓錐曲線的二次方程式算法

算法圓錐曲線的公式分類

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0,$$

根據下列的步驟:

1. 將方程式寫成矩陣形式 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{J}^T \mathbf{x} + H = 0$.
2. 定義一個正交矩陣 \mathbf{P} , 行列式值 = 1, 對角化矩陣為 \mathbf{A} .
3. 變換座標系統 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}'$. 圓錐曲線方程式則變為

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + fx' + gy' + h = 0,$$

當 λ_1 與 λ_2 都是 \mathbf{A} 的特徵值.

4. 完成平方和接著重寫方程式, 給一個新的 (x'', y'') 圓錐曲線座標系統的一般式.
5. 使用此方程定義中心點與貫軸、共軛軸。

事實上, 從上述算法我們可以證明下面的定理

定理 2.4. 非退化型圓錐曲線方程式

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0,$$

與相關的 \mathbf{A} 矩陣可以被分類如下

- (a) 如果 $\det \mathbf{A} > 0$, 方程式為橢圓.
- (b) 如果 $\det \mathbf{A} = 0$, 方程式為拋物線.
- (c) 如果 $\det \mathbf{A} < 0$, 方程式為雙曲線.

我們需要建造法線方程式用來增加路思義教堂四塊曲面厚度, 下面的定理用圓錐曲線的標準式來說明這些方程。

定義. P 點法向量垂直曲面 C 指的是一條線通過 P 點且與 C 的斜率垂直

定理 2.5. 切線與法向量在點 (x_1, y_1) 的圓錐曲線標準式如下

圓錐曲線	方程式	切線方程	法線方程
橢圓	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$	$\frac{y}{y_1} - 1 = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{x}{x_1} - 1 \right)$
雙曲線	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$	$\frac{y}{y_1} - 1 = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{x}{x_1} - 1 \right)$
拋物線	$y^2 = 4ax$	$yy_1 = 2a(x + x_1)$	$\frac{y}{y_1} - 1 = -\frac{x_1}{2a} \left(\frac{x}{x_1} - 1 \right)$

2.2 曲面模型

本小節先利用學校教堂的建築原始圖形資料，進行曲面的三維空間模型，，首先需要先定義好正確的 X、Y、Z 軸方位，依據教堂建築的 AutoCAD 圖形上的數據所示，比例 1:100，單位為公分，設立座標系如圖 2.3 所示，因此圖形上只顯示出當 $y = 0$ (曲線 AB), $y = 1800$ (曲線 CD), $y = 1700$ (曲線 EF), $y = 2700$ (曲線 GH)，對應的詳細圖形則顯示在圖 2.3 內。此外，在圖 2.3 的右上角羅列了教堂的曲面上的正向 (normal direction) 厚度 (教堂是對稱的，因此四片曲面，其實是由前後兩片曲面對 yz 平面鏡射而得)。因此從圖 2.3 所給的正向厚度要計算曲面上任何一點的厚度，則需要先使用內插法將對應到不同 y 位置的曲線找出來，再計算此曲線每一點的正向，再來加入厚度，才能建立完整的曲面。

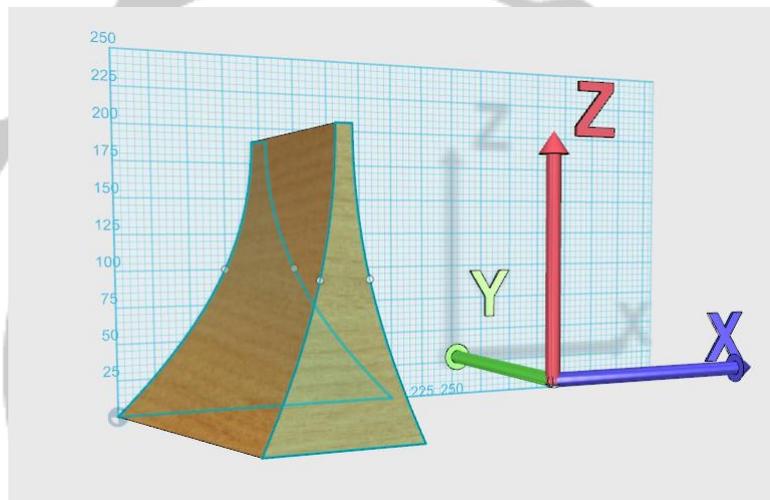


圖 2.2: 路思義教堂定義座標系統

完整曲面的建立過程說明如下：

1. 利用圖 2.4 先讀取曲線部分的 x 座標，接著再利用圖上的直線，讀取不同高度點的 z 座標，配對形成 19 組 (x, z) 座標，數據資料如附錄所示。
2. 有序對 (x, z) ，其中 $x = f(z)$ ，表示在笛卡兒平面坐標系上的圖形座標，如圖 2.5 所顯示的曲線，紅線表示曲線 AB 藍線表示曲線 CD。
3. 接著從圖 2.3 右上角的圖中，詳如圖 2.6 所示，表示教堂的牆面厚度的數據，數據資料放在附錄。圖形正方形下方有許多的 200 表示數據取樣的間格 (相當於教堂的深度)，我們可由此定義出 10 個 y 座標的點 (由 0 ~ 1800)，但端點為 AB 與 CD 兩條曲線，因此可以不用計算，故中間剩下 8 個對應到 y 座標點的 x 座標需要計算。
4. 從圖 2.7 可以看出起始點為 $(450, 0, 0)$ 終點為 $(1200, 1800, 0)$ ，其中高度 z 值不受 x, y 的變動影響，故將其看成以直線連接 AB 與 CD 兩條曲線以形成區面，以從 $(450, 0, 0)$

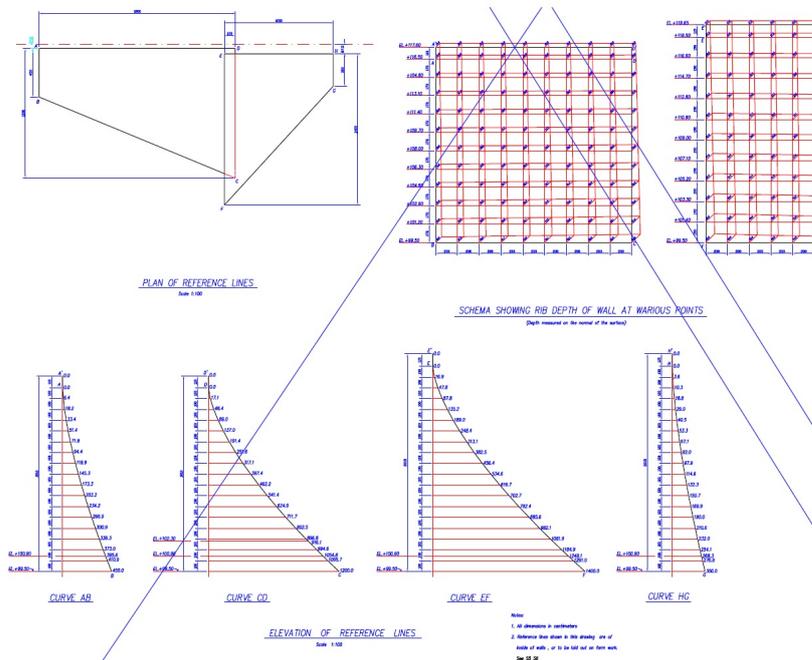


圖 2.3: 教堂 AutoCAD 上視圖顯示外觀上的四個主要曲線形狀以及厚度

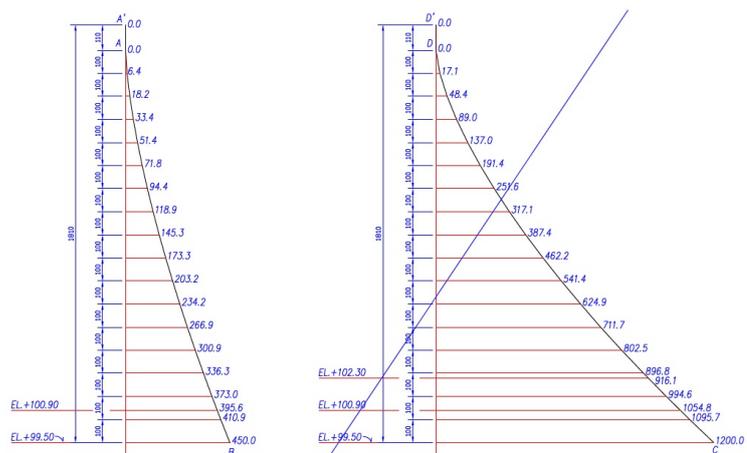


圖 2.4: 曲線 AB ($y = 0$)、曲線 CD ($y = 1800$)

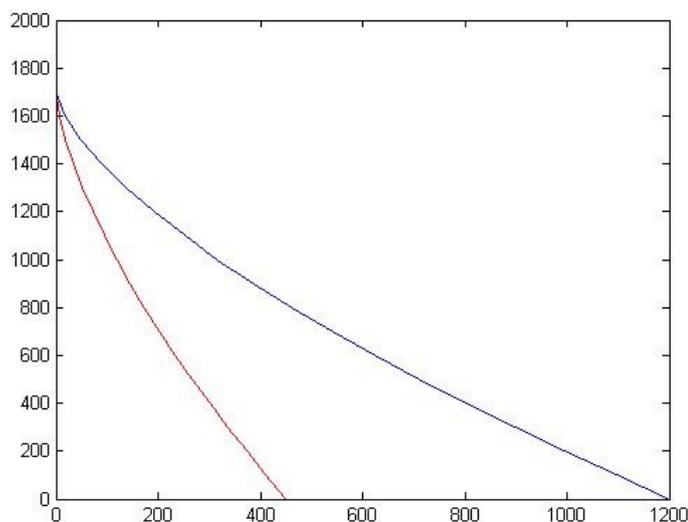


圖 2.5: 曲線 AB 與曲線 CD

至 (1200, 1800, 0) 為例, 在等高面 $z = 0$ 上其直線的斜率則為

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1800 - 0}{1200 - 450} = \frac{12}{5} = 2.4$$

對應的直線方程式為

$$y = 2.4x, \text{ or } x = \frac{5}{12}y,$$

因為 y 的間格變化量為 200, 故隨之 x 座標的增加量約為 $200/2.4 = 250/3 \approx 83.3$ 接著便可以計算出最底部所有的 x 座標。

5. AB 與 CD 曲線頂端 (高度為 1700) 的連線方程式為 $x = 0$, 即全部的 x 座標為零。
6. 利用線性內插法, 求出 AB 與 CD 間的不同高度所對應的 x 座標, 插值公式如下: 令 $x = f_{AB}(z)$ 與 $x = f_{CD}(z)$ 分別表示 AB 與 CD 之曲線方程, 則不同高度對應的斜率不同, 即 $m = m_{ABCD}(z)$ 為

$$m_{ABCD}(z) = \frac{1800}{f_{CD}(z) - f_{AB}(z)}$$

$$x = \frac{1}{m_{ABCD}(z)}y + f_{AB}(z) = \frac{f_{CD}(z) - f_{AB}(z)}{1800}y + f_{AB}(z),$$

或

$$x = \left(1 - \frac{y}{1800}\right) f_{AB}(z) + \frac{y}{1800} f_{CD}(z),$$

帶入對應的 (y_i, z_j) 座標, 可計算出對應的 x_{ij} 座標, 其中 $i = 1, \dots, 10$ 對應 y 的變動, 而 $j = 1, \dots, 18$ 對應高度的變化, 第 19 層的 x 座標同第 18 層均為零。上述方程式,

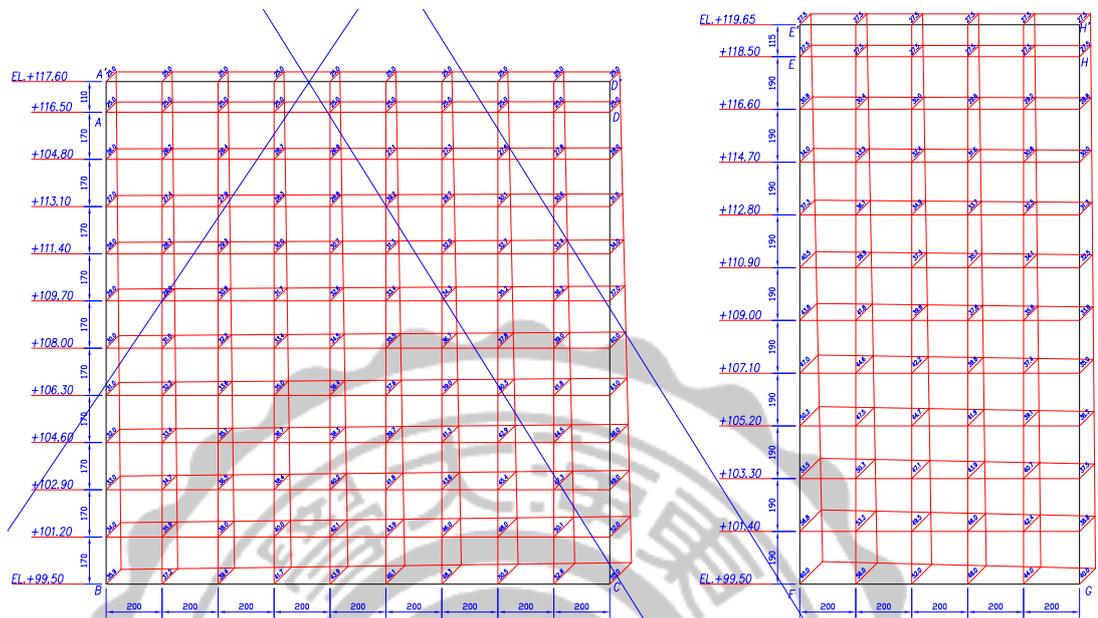
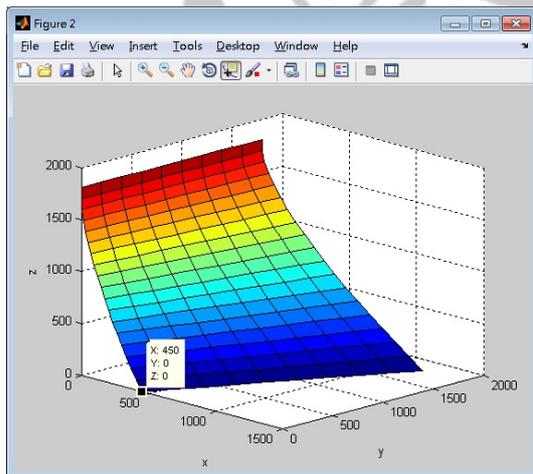
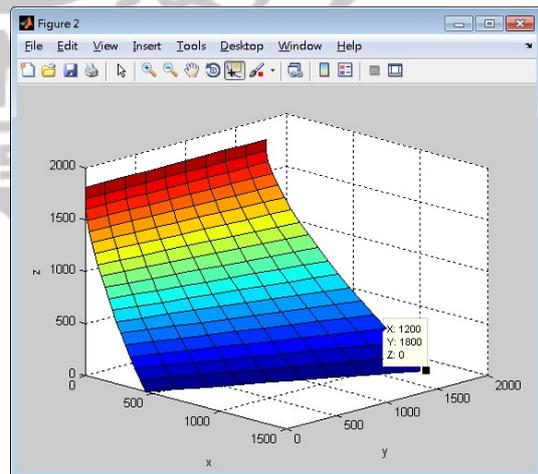


圖 2.6: 牆面厚度數據



(a) 斜率計算起始座標點



(b) 斜率計算終點

圖 2.7: 斜率計算示意圖

可改寫成常見的函數形式

$$x = F_1(y, z) = \left(1 - \frac{y}{1800}\right) f_{AB}(z) + \frac{y}{1800} f_{CD}(z)$$

其中 $y \in [0, 1800]$ 而且 $z \in [0, 1700]$ 。

7. 使用 Matlab 來計算上述數據，最後呈現出如圖 2.7 所顯示的整片 $ABCD$ 曲面。
8. 針對 $EFGH$ 曲面，重覆上述過程應用在如 AutoCAD 的圖檔如圖 2.8 所顯示之曲線，則步驟 4 所對應的底端連線之直線方程式為

$$y = 1700 - \frac{10}{11}(x - 1400), \text{ or } x = 1400 - \frac{11}{10}(y - 1700) = 3270 - \frac{11}{10}y,$$

當高度不同時，設令 $x = f_{EF}(z)$ 與 $x = f_{GH}(z)$ 分別表示 EF 與 GH 之曲線方程（如圖 2.9 所示），則不同高度對應的斜率不同，即 $m = m_{EFGH}(z)$ 為

$$m_{EFGH}(z) = \frac{1000}{f_{GH}(z) - f_{EF}(z)}$$

則插值公式為

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{m_{EFGH}(z)}(y - 1700) + f_{EF}(z) \\ &= \frac{f_{GH}(z) - f_{EF}(z)}{1000}(y - 1700) + f_{EF}(z), \end{aligned}$$

或

$$x = \left(1 - \frac{y - 1700}{1000}\right) f_{EF}(z) + \frac{y - 1700}{1000} f_{GH}(z),$$

帶入對應的 (y_i, z_j) 座標，可計算出對應的 x_{ij} 座標，其中 $i = 1, \dots, 6$ 對應 y 的變動，而 $j = 1, \dots, 20$ 對應高度的變化，第 21 層的 x 座標同第 20 層均為零。上述方程式，可改寫成常見的函數形式

$$x = F_2(y, z) = \left(1 - \frac{y - 1700}{1000}\right) f_{EF}(z) + \frac{y - 1700}{1000} f_{GH}(z)$$

其中 $y \in [1700, 2700]$ 而且 $z \in [0, 1900]$ 。

最後，補入正門、後門、側面與頂部的一線天等資料，建構出如圖 2.9 所顯示的 3D 模型。

2.3 曲面方程

上節的模型建立，需要事先知道四個曲線 AB, CD, EF, GH 之函數關係式 $x = f(z)$ 其中 $z \in [0, 1700]$ 或 $z \in [0, 1900]$ ，討論如下。利用 Matlab 進行曲線擬合計算，可以估算對應的二次曲線。

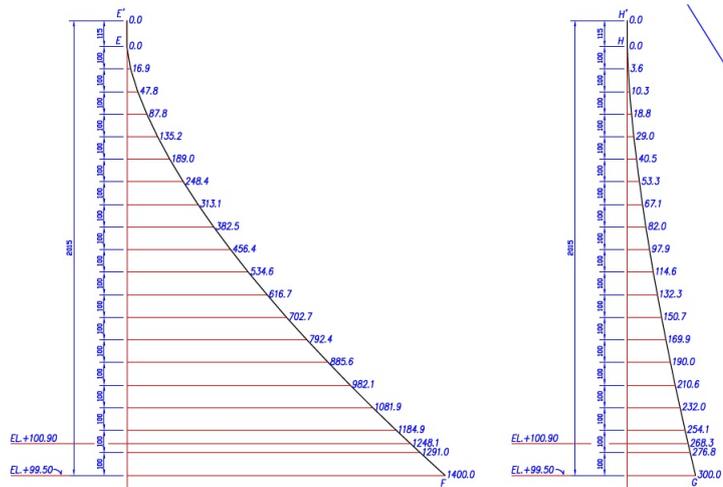


圖 2.8: 曲線 EF ($y = 1700$)、曲線 GH ($y = 2700$)

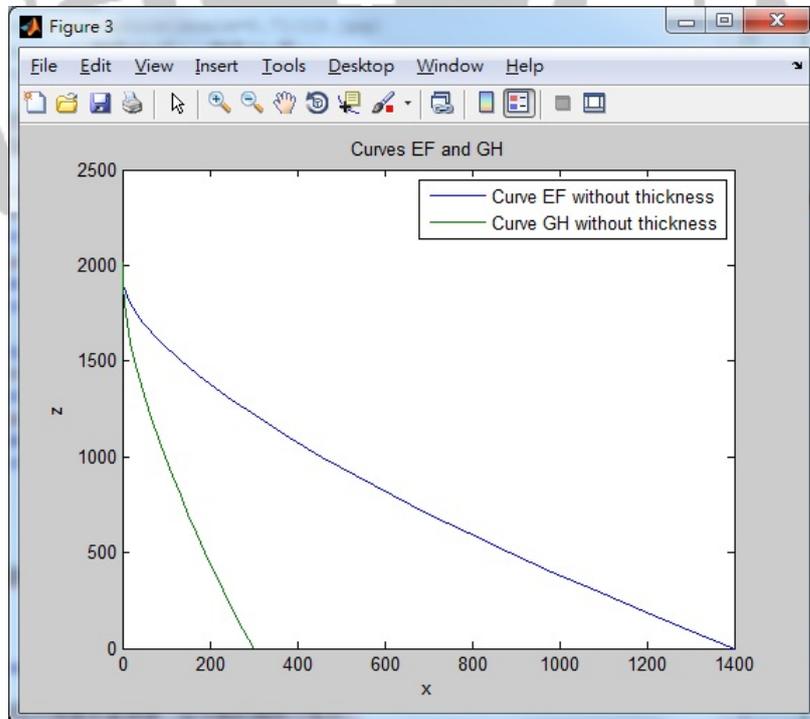


圖 2.9: 曲線 EF 與曲線 GH

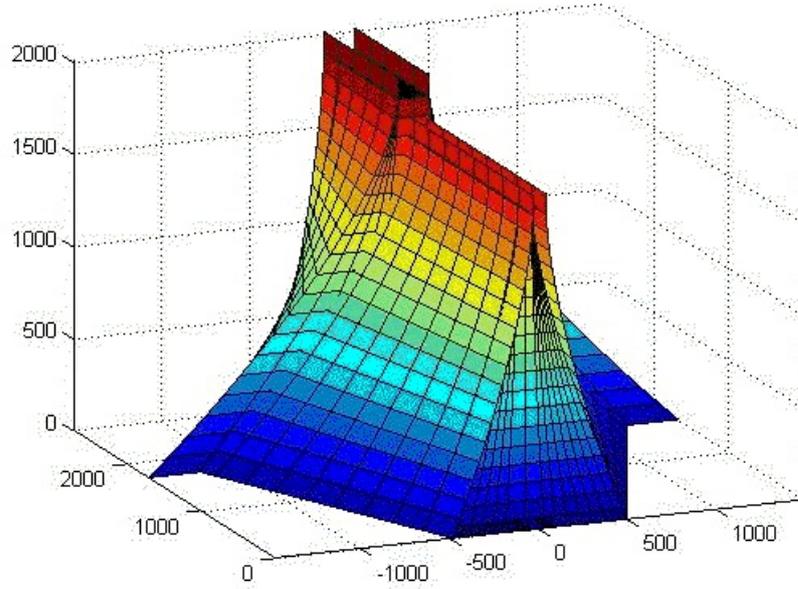


圖 2.10: 利用 MATLAB 所建構出的曲面架構

圖 2.11 所顯示的為曲線 AB 和 CD 的結果, 明顯的曲線均為橢圓上的一部分, 亦即設 (x, z) 為曲線上的點, 則曲線 AB 和 CD 對應的方程式分別為

$$1.5263 \cdot 10^{-6}x^2 + 1.1617 \cdot 10^{-6}xz + 3.2207 \cdot 10^{-7}z^2 - 0.0029086x - 0.0011359z + 1 = 0 \quad (2.10)$$

與

$$2.1329 \cdot 10^{-7}x^2 + 4.3446 \cdot 10^{-7}xz + 3.2212 \cdot 10^{-7}z^2 - 0.0010891x - 0.001136z + 1 = 0 \quad (2.11)$$

圖 2.12 所顯示的為曲線 EF 和 GH 的結果, 明顯的這兩個曲線均為橢圓上的一部分, 亦即設 (x, z) 為曲線上的點, 則曲線 EF 和 GH 對應的方程式分別為

$$1.5637 \cdot 10^{-7}x^2 + 3.3256 \cdot 10^{-7}xz + 2.5772 \cdot 10^{-7}z^2 - 0.00093306x - 0.0010161z + 1 = 0 \quad (2.12)$$

與

$$3.189 \cdot 10^{-6}x^2 + 1.5011 \cdot 10^{-6}xz + 2.5681 \cdot 10^{-7}z^2 - 0.004289x - 0.0010144z + 1 = 0 \quad (2.13)$$

曲線擬合的誤差採用為均方根誤差 (root mean square error, RMSE): 設正確的數據為 w_i , 其估算值為 $\hat{w}_i, i = 1, 2, \dots, n$, 則對應的 $RMSE$ 為

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_i - \hat{w}_i)^2}.$$

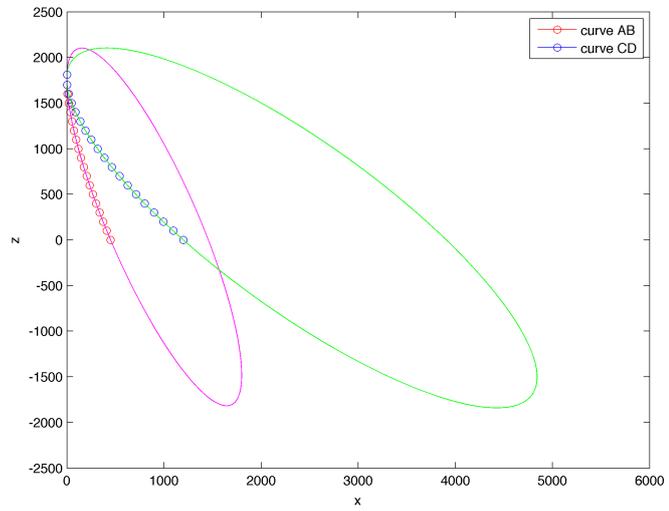


圖 2.11: 曲線 AB 與 CD 曲線擬合結果

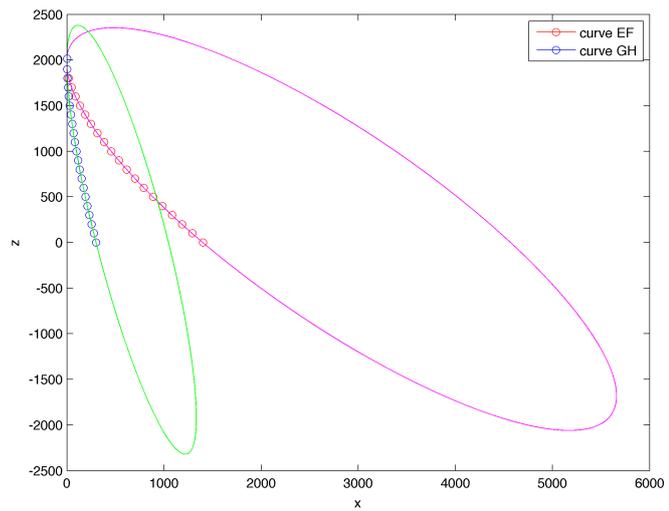


圖 2.12: 曲線 EF 與 GH 曲線擬合結果

於本文應用時，欲量測估算曲線 AB 的方程式 (2.10) 之正確性，則將此曲線的座標 (x_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, 18$ 代入方程式的左邊，若是為零，則此方程式完全正確；反之，得到的數值稱為留數 (residual)，表示誤差的大小。因此我們將曲線 AB 的所有點的留數計算出來，記為 \hat{w}_i , $i = 1, 2, \dots, 18$ ，其理論值應該為零，即 $w_i = 0$ ，故對應的 $RMSE$ 為 $\sqrt{\frac{1}{18} \sum_{i=1}^{18} \hat{w}_i^2}$ 。如此針對上述四條方程式進行計算得到如表 2.1 的誤差，應該是非常小的，表示這個曲線擬合是相當的正確。

表 2.1: 曲線 AB, CD, EF 及 GH 之擬合的 $RMSE$ 誤差

曲線	$RMSE$
AB	0.00017385
CD	0.00016515
EF	0.00016401
GH	0.00020361

運用第 2.1 節的方法可以得到的到這四個橢圓的中心點與長短軸資料如表 2.2 所示，圖形關係如圖 2.13 所示。

表 2.2: 曲線 AB, CD, EF 及 GH 之中心與長短軸

曲線	中心點	長軸	短軸
AB	(898.1955, 143.5174)	$y = -2.4770x + 2368.3489$	$y = 0.4037x - 219.0967$
CD	(2418.4033, 132.3392)	$y = -0.7804x + 2019.6820$	$y = 1.2814x - 2996.5543$
EF	(2826.0991, 147.9465)	$y = -0.7407x + 2241.1489$	$y = 1.3501x - 3667.6597$
GH	(665.1125, 31.1885)	$y = -4.1479x + 2790.0043$	$y = 0.2411x - 129.1609$

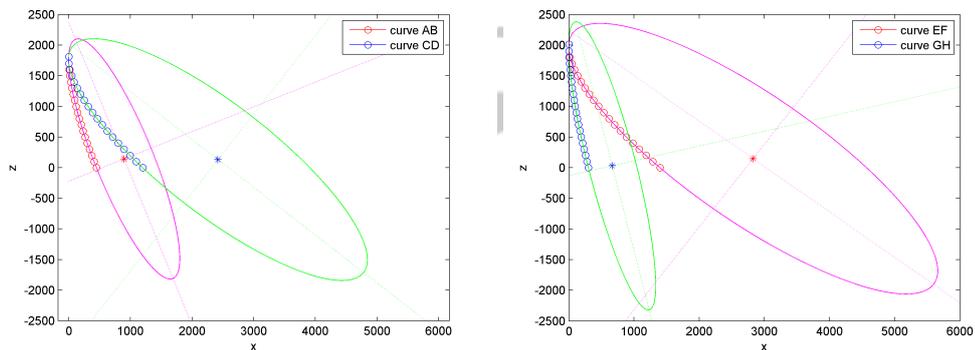


圖 2.13: 曲線 AB, CD, EF, GH 對應橢圓之中心點與長短軸

第三章 3D 模型呈現

3.1 模型的呈現方式

3D 的呈現方式有許多種,大致上可分為三種

1. 3D 平面圖 (透視法): 平時大家所看到的則正確名稱為線透視,線透視乃是一種將三度空間的圖像展現在平面上的一種繪圖方法,讓我們觀看時感受到深度感,此則利用 3D 中的平行線將其延伸到一個消逝點,而後原本在空間平行線不再平行,而是維持著一個比例逐漸的縮小至消逝點。另外一種平面透視法則是利用顏色深淺,將物體畫成 2D 的形式然後利用塗料的深淺明亮將 3D 圖形表示出來,離視線較近的顏色較鮮明,較遠的則失去原來的顏色。
2. 3D 實體模型: 此次我們最後所要做的則是利用此法進行路思義教堂的實體模型製作;然而以往的實體模型起始是由雕刻而來,利用大自然一體成形的天然素材進行構圖、切削、打磨、後製上色,後來才衍生出 CNC(Computerized Numerical Control) 數位控制機具以及現在的 3D 印表機,而我們作品的製作則是使用 3D 印表機利用層層堆疊的方式將實體模型印製出來,並且進行後製加工。
3. 3D 數位模型: 此統稱為電腦繪圖 CAD(Computer Aided Design) 利用電腦的繪圖軟體建構 3D 數位模型,以點、線、面的連結、布林代數的運用以及鏡射和向量形式進行圖形的繪製,在調整上及修改上較前兩種方法省時且方便許多且無須另外耗費成本。

表 3.1: 3D 模型的比較

種類 比較	3D 平面圖	3D 實體模型	3D 數位模型
視角	唯一	外圍視角	全視角
變更度	低	中	高
成本	中	高	低
精緻度	低	中	高
耗時	較短	長	中
實用性	低	高	高

3.2 數位模型的建立

本篇論文所選擇的呈現方式為實體模型，利用 Matlab 所繪製的 3D 數位模型匯出 STL 檔案使用 3D 列印機進行列印，但並非所有的 STL 檔案都能使用 3D 列印機列印出來，因為 3D 列印機有最小列印精度，然數學模型在匯出 STL 的過程中並無厚度，所以需要利用兩種方法做修正：

1. 將 STL 檔案自行設計成封閉的物件。2. 將檔案利用其他軟體程式利用法線 (normal) 增加厚度。不同軟體在加厚數學模型時可能會因為內部程式碼計算方式不同所增加的座標點不同，進而造成破面問題，以致無法列印。需要另作修復功能。最後在列印時需要再確認任何一面都需要大於列印的最小精度，否則無法成功列印

首先將教堂 CAD 圖形進行重建，利用多點繪圖連成曲線將 CAD 檔案的曲線 AB 與曲線 CD 建構出來，接著在每一個不同高度建立直線將直線內插多點進去，

利用 Figure3.4 我們可以將曲面進行加厚利用 Matlab 匯出以後會變成兩層的曲面，再將曲面進行連結如圖圖 2.10 使其變成封閉面，則可匯出 STL 檔案轉成 G-code 使用 3D 列印機列印實體模型。

進而利用曲線 AB 與曲線 CD 製作出 ABCD 曲面，接著使用相同方法將其餘三個面使用相同方式依序造出，另外因為教堂呈現對稱狀，故我們只需要製作同一側的兩塊曲面即可。

接著利用圖 2.3 所給的厚度在開始的曲面上建立法向量用以增厚。

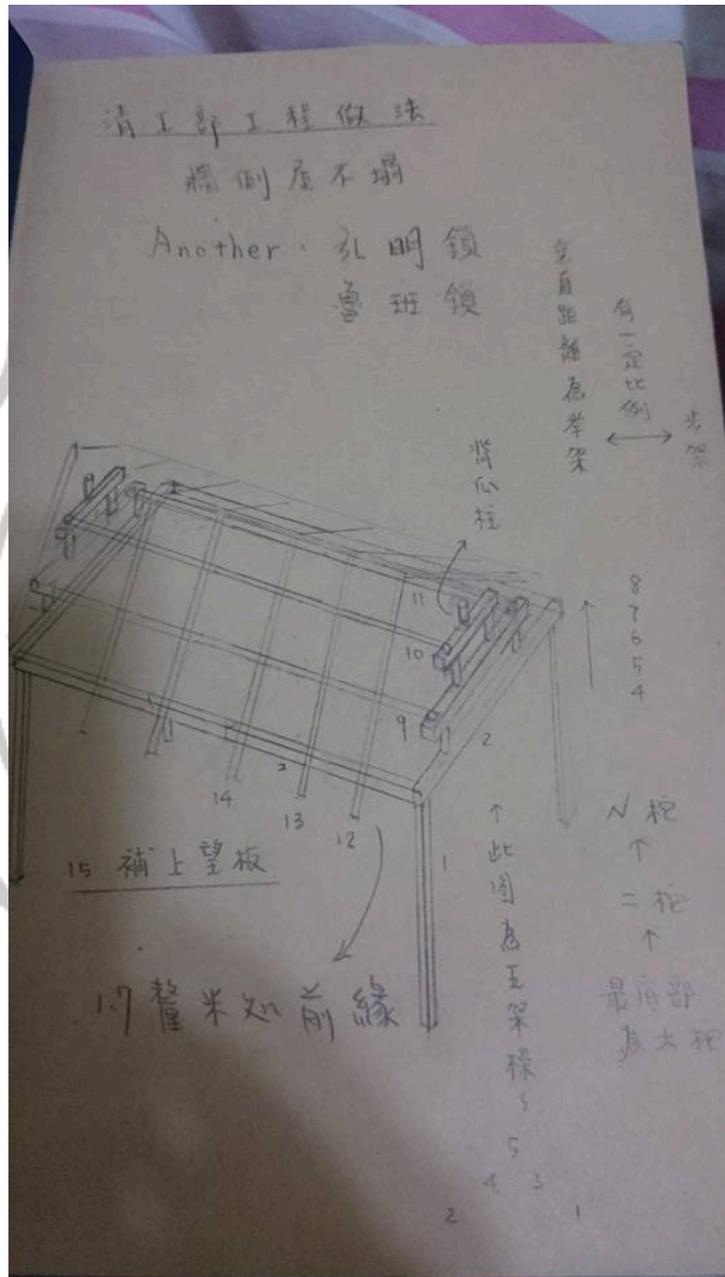
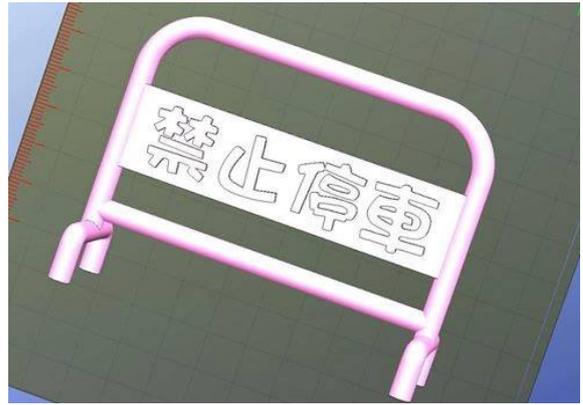


圖 3.1: 古老木建築的結構圖，則是利用線透視的方法所繪。

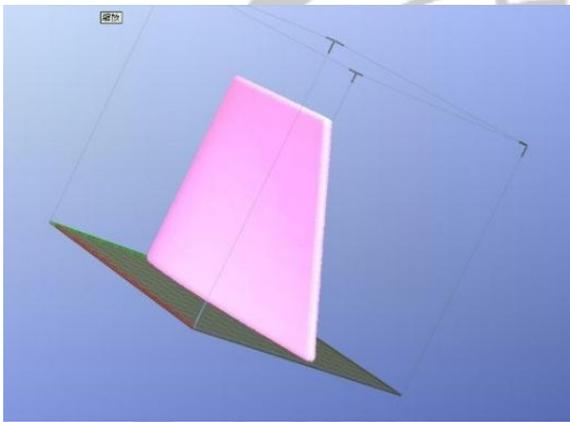


(a) Mathmod

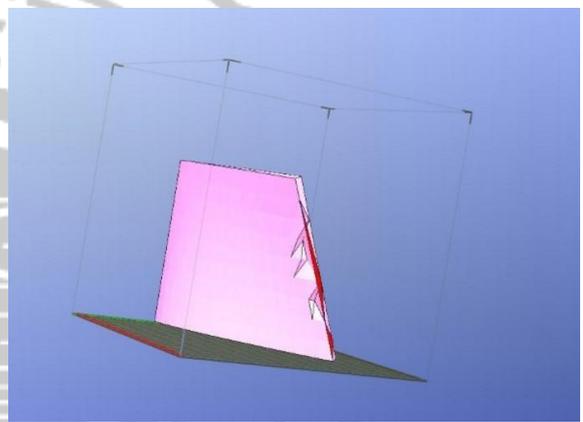


(b) 123D design

圖 3.2: CAD 模型



(a) Meshmixer



(b) blender 加厚產生破面

圖 3.3: 不同軟體的加厚

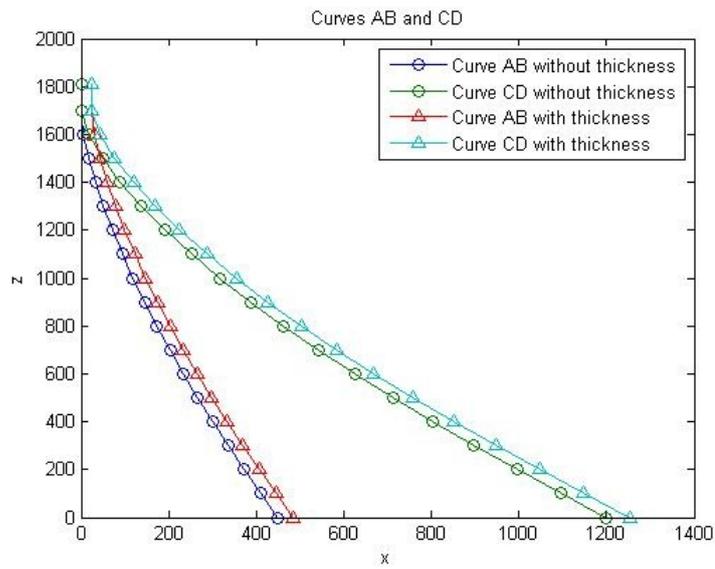


圖 3.4: 增厚的牆面與未增厚的牆面

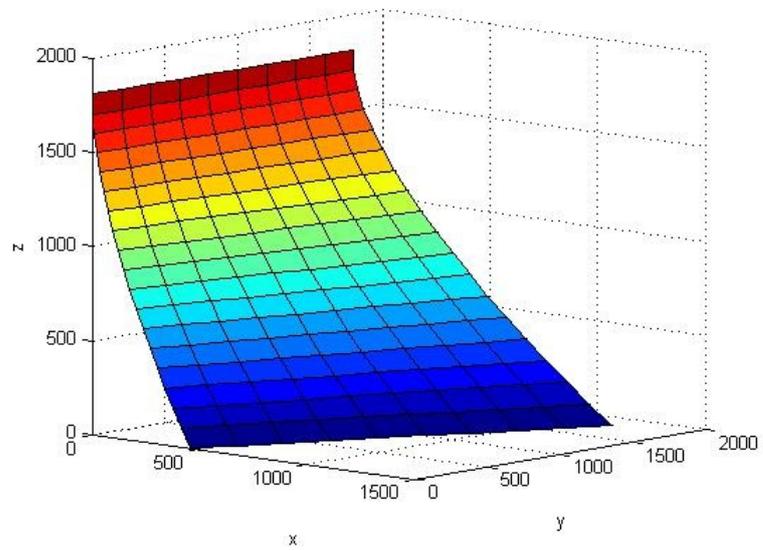


圖 3.5: 教堂 ABCD 曲面

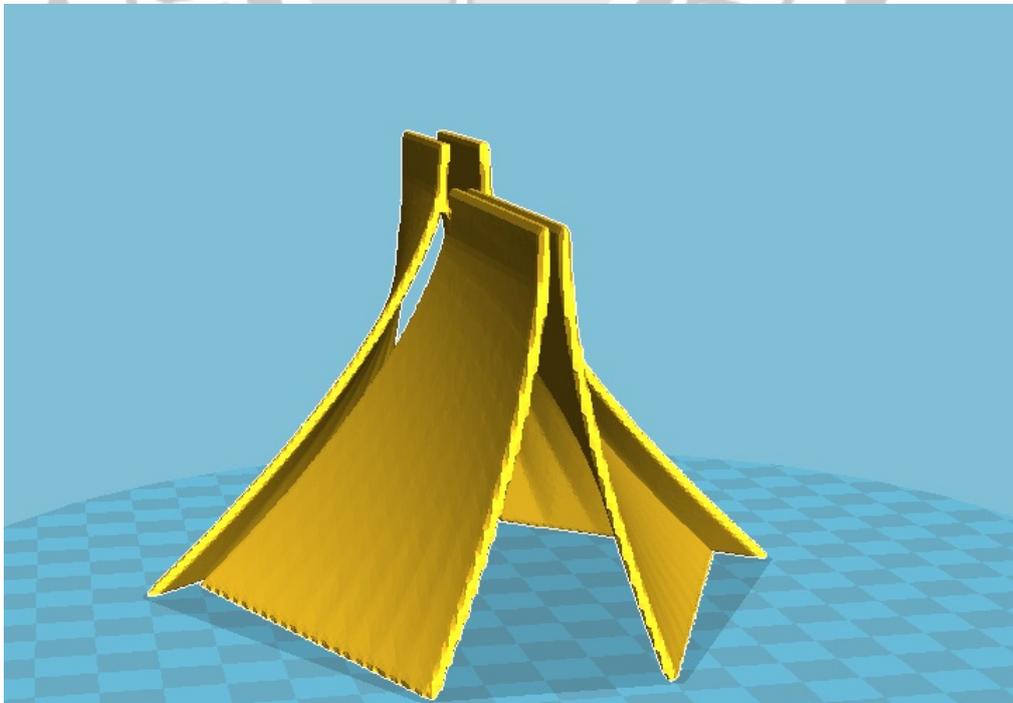


圖 3.6: 教堂曲面模型

第四章 曲面模型的建構想法探討

本章我們討論一些形成教堂曲面可能的數學方法，並對曲面模型的建構進行探討。這部份的訊息來源是東海大學創藝學院的羅院長時緯提到的 conoid 的造法。

4.1 線性近似

線性近似的作法，從第二章第二節曲面模型的建立過程當中，需要使用 $f_{AB}(\cdot)$ 、 $f_{CD}(\cdot)$ 、 $f_{EF}(\cdot)$ 等四個函數，才能進行分析，為了簡化分析的過程，假設函數 $f_{AB}(\cdot)$ 、 $f_{CD}(\cdot)$ 、 $f_{EF}(\cdot)$ 以及 $f_{GH}(\cdot)$ 為線性函數，則整個插值函數 $F_1(y, z)$ 與 $F_2(y, z)$ 可以完全寫下來，並進行分析。先討論曲面 $ABCD$ 的部分。設

$$\begin{aligned}f_{AB}(z) &= 450 \left(1 - \frac{z}{1700}\right) \\f_{CD}(z) &= 1200 \left(1 - \frac{z}{1700}\right)\end{aligned}$$

則曲面之 x 座標可以計算如下，

$$\begin{aligned}x = F_1(y, z) &= \left(1 - \frac{y}{1800}\right) f_{AB}(z) + \frac{y}{1800} f_{CD}(z) \\&= \left[\left(1 - \frac{y}{1800}\right) 450 + \frac{y}{1800} 1200\right] \left(1 - \frac{z}{1700}\right) \\&= \left(450 + \frac{5}{12}y\right) \left(1 - \frac{z}{1700}\right) \\&= 450 + \frac{5}{12}y - \frac{450}{1700}z - \frac{1}{4080}yz\end{aligned}$$

其中 $y \in [0, 1800]$ 且 $z \in [0, 1700]$ ，帶入對應的 (y_i, z_j) 座標，可計算出對應的 x_{ij} 座標，其中 $i = 1, \dots, 10$ 對應深度 y 的變動，而 $j = 1, \dots, 18$ ，對應高度 z 的變化，第 19 層的 x 座標同第 18 層均為零。明顯地對於 $x = k$ 的平面，由定理 2.4 知這是一個雙曲線。針對對角線而言，即連接 $(0, 0, 1700)$ 與 $(1200, 1800, 0)$ 兩點（即是曲面 $ABCD$ 和平面 $x - \frac{2}{3}y = 0$ 之交線），或是 $(450, 0, 0)$ 與 $(0, 1800, 1700)$ 兩點（即是曲面 $ABCD$ 和平面 $x + \frac{1}{4}y - 450 = 0$ 之交線），則由定理 2.4 亦可知均是雙曲線。

同理可得，曲面 $EFGH$ 對應於步驟 6 之插值公式如下：設

$$\begin{aligned}f_{EF}(z) &= 1400 \left(1 - \frac{z}{1900}\right) \\f_{GH}(z) &= 300 \left(1 - \frac{z}{1900}\right)\end{aligned}$$

則曲面之 x 座標可以計算如下，

$$\begin{aligned}
 x = F_2(y, z) &= \left(1 - \frac{y - 1700}{1000}\right) f_{EF}(z) + \frac{y - 1700}{1000} f_{GH}(z) \\
 &= \left[\left(1 - \frac{y - 1700}{1000}\right) 1400 + \frac{y - 1700}{1000} 300 \right] \left(1 - \frac{z}{1900}\right) \\
 &= \left(3270 - \frac{11}{10}y\right) \left(1 - \frac{z}{1900}\right) \\
 &= 3270 - \frac{11}{10}y - \frac{327}{190}z + \frac{11}{19000}yz
 \end{aligned}$$

其中 $y \in [1700, 2700]$ 且 $z \in [0, 1900]$ ，帶入對應的 (y_i, z_j) 座標，可計算出對應的 x_{ij} 座標，其中 $i = 1, \dots, 6$ 對應深度 y 的變動，而 $j = 1, \dots, 20$ ，對應高度 z 的變化，第 21 層的 x 座標同第 20 層均為零。明顯地對於 $x = k$ 的平面，由定理 2.4 知這是一個雙曲線。針對對角線而言，即連接 $(0, 1700, 1900)$ 與 $(300, 2700, 0)$ 兩點 (即是曲面 $ABCD$ 和平面 $x - \frac{3}{10}y + 5.1 = 0$ 之交線)，或是 $(1400, 1700, 0)$ 與 $(0, 2700, 1900)$ 兩點 (即是曲面 $ABCD$ 和平面 $x + \frac{7}{5}y - 3780 = 0$ 之交線)，則由定理 2.4 亦可知均是雙曲線。

若仔細觀察圖 2.4(或圖 2.5) 以及圖 2.8(或圖 2.9)，可以看出，當高度低 (即 z 小時)，曲線 AB, CD, EF, GH 之圖形近似直線；或是曲線 AB, CD, EF, GH 可以視為數段線性函數的組合；因此上述分析對於曲面 $ABCD$ 或是 $EFGH$ 是合理。再者，曲面 $ABCD$ 或是 $EFGH$ 之是近似函數分別為

$$x = F_1(y, z) = 450 + \frac{5}{12}y - \frac{450}{1700}z - \frac{1}{4080}yz, \quad (4.1)$$

$$x = F_2(y, z) = 3270 - \frac{11}{10}y - \frac{327}{190}z + \frac{11}{19000}yz \quad (4.2)$$

等號的右邊是雙曲線，找出這兩組雙曲線的長短軸，再透過座標旋轉 (如第二章第一節範例的作法)，可以將這兩組雙曲線的型態轉換成

$$x = F_1(y'_1, z'_1) = \frac{(y'_1 - c_{y_1})^2}{A_1^2} - \frac{(z'_1 - c_{z_1})^2}{C_1^2} + H_1, \quad (4.3)$$

$$x = F_2(y'_2, z'_2) = \frac{(y'_2 - c_{y_2})^2}{A_2^2} - \frac{(z'_2 - c_{z_2})^2}{C_2^2} + H_2 \quad (4.4)$$

其中 $A_1, C_1, H_1, A_2, C_2, H_2, c_{y_1}, c_{z_1}, c_{y_2}, c_{z_2} \in \mathbb{R}$ ，且 (y'_1, z'_1) 與 (y'_2, z'_2) 均是由 (y, z) 平面繞 x -軸旋轉以及在該平面上的平移而來，這兩組近似方程 $x = F(y, z)$ 明顯就是雙曲拋物面。

另一個驗證的方法就是利用 Matlab 軟體的內建的 `fit` 函數進行數據擬合，將第二章第二節所得到的模型數據送入，選定擬合模型為 y 和 z 的二次多項式曲線，針對於曲面 $ABCD$ 或是 $EFGH$ 可分別得到以下的結果：

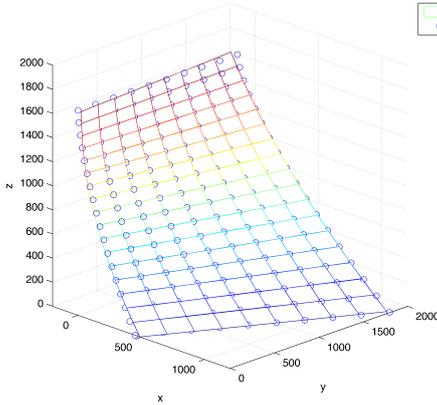
$$x = F_1(y'_1, z'_1) = -0.0002509yz + 0.0001654z^2 + 0.3824y - 0.5521z + 488 \quad (4.5)$$

$$x = F_2(y'_2, z'_2) = -0.0005928yz + 0.0001362z^2 - 1.0089y - 2.0212z + 3077 \quad (4.6)$$

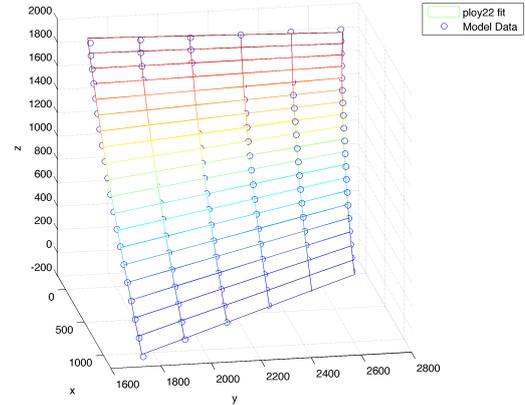
而擬合的 $RMSE$ 誤差以及函數效益比較圖形如表 4.1 與圖 4.1 所示，從擬合的結果來看，明顯就是雙曲拋物面。因此上面的兩種論述，鸞鸞義教堂造型常被稱為雙曲拋物面是合理的。

表 4.1: 曲面 $ABCD$ 及 $EFGH$ 之二次多項式擬合的 $RMSE$ 誤差

曲面	$RMSE$ 誤差
$ABCD$	12.5846
$EFGH$	18.6614



(a) 曲面 $ABCD$



(b) 曲面 $EFGH$

圖 4.1: 曲面 $ABCD$ 及 $EFGH$ 之二次多項式擬合的比較

4.2 Conoid 的想法

接著我們模擬多種不同的匹配方法:

首先我們需要先定義教堂曲線的方程式,
令紅色線段的方程式為

$$x = f_1(z), y = k_1$$

綠色線段方程式為

$$x = f_2(z), y = k_2$$

曲面的函數則寫為

$$x = f(y, z) = \frac{y - k_2}{k_1 - k_2} f_1(z) + \frac{y - k_1}{k_2 - k_1} f_2(z)$$

現在我令兩條線段的方程式分別為 k_1 與 k_2

$$y = k_1 : a_{11}z^2 + a_{12}zx + a_{13}x^2 + a_{14}z + a_{15}x + a_{16} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{13} \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ = 0? \\ < \end{matrix}$$

$$y = k_2 : a_{21}z^2 + a_{22}zx + a_{23}x^2 + a_{24}z + a_{25}x + a_{26} = 0$$

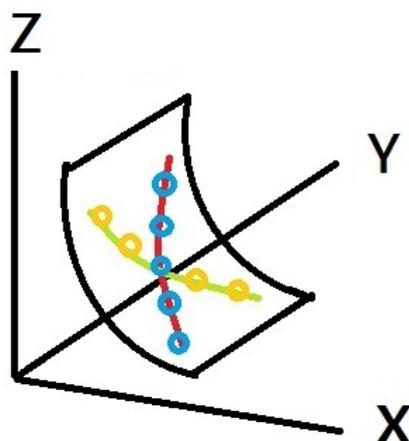


圖 4.2: 定義函數的方程式

$$\begin{bmatrix} a_{21} & \frac{a_{22}}{2} \\ \frac{a_{22}}{2} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ = 0? \\ < \end{matrix}$$

接著解 [Q]: 方程式 $z = f(y, x)$ 是否滿足雙曲方程?

$$\text{i.e } \exists a_1y^2 + a_2z^2 + a_3x^2 + a_4yz + a_5zx + a_6xy + a_7y + a_8z + a_9x + a_{10} = 0$$

經由模擬我們可從圖 4.3 看出教堂面為紅線 (雙曲), 紫線及黑線 (橢圓) 方程所構成, 另外我們從羅院長口中得知教堂在某一位置觀看時可看出既凹且凸的曲面, 我們則可看到圖黑色橢圓為凹, 紅色與紫色為凸, 兒所交織的地方是我們可看到既凹且凸之所在, 此建築方法更可將上方重力平均分散至各處, 以防坍塌, 我們並可由此發現教堂的方程式除了雙曲線、亦包含橢圓。

另外羅院長亦提到在教堂一線天旁的窗口大小皆相等, 我們亦進行了測試利用教堂前方加厚之曲面與後方未加厚度之曲面 (亦即 $y=1800$) 處, 將端點連結並計算其距離從底部 85 到中間 116 至頂部 87 公分, 大約 30 公分的誤差與 3600 公分相較下來其實不多, 在一定遠處做觀看並且與教堂如此龐大的物體作比較其實是看不太出來誤差的, 故在肉眼觀察之下會覺得旁邊的窗口大小皆相等, 我們亦可從圖 4.4 觀察其相關位置。

最後我們則利用一些方法來探討曲面之形成:

方法一: 探討圓弧移動到直線 (與弦線等長) 所形成的軌跡方程
首先定義 Figure 4.3 中的黑色弧線方程式

$$z^2 + x^2 = r^2$$

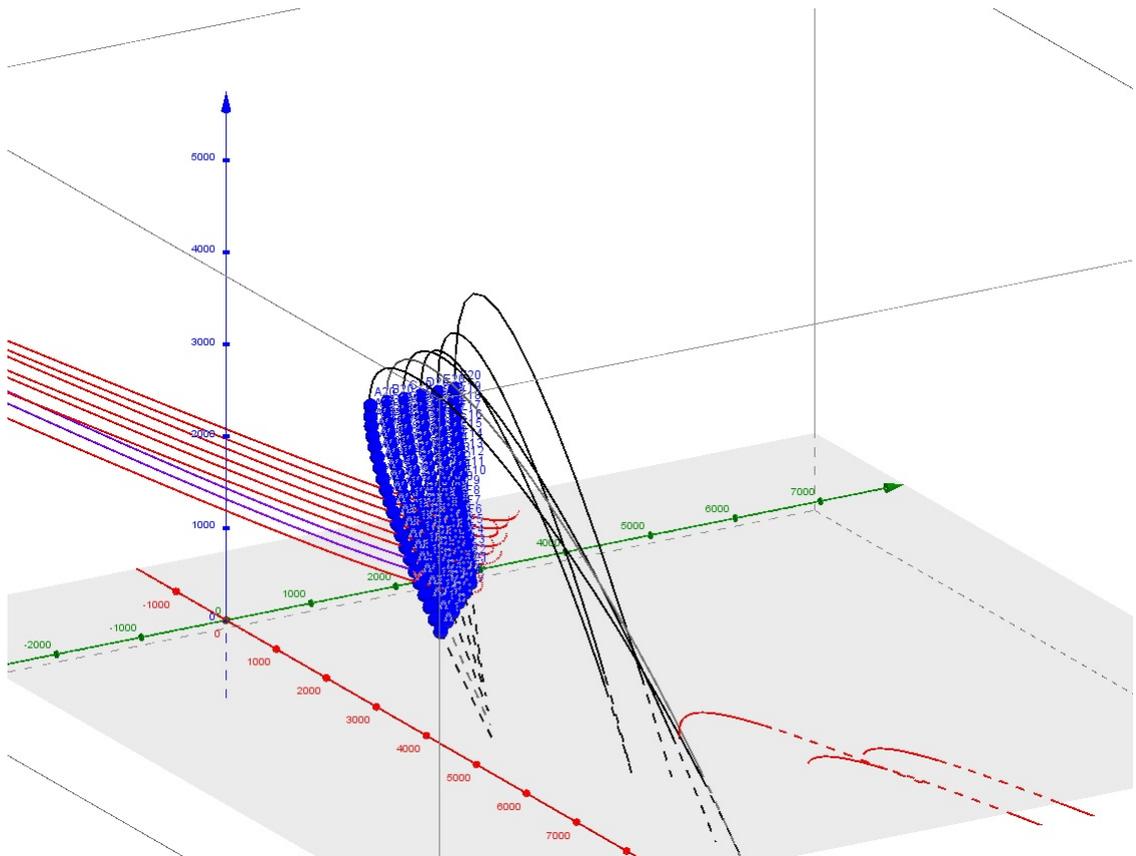


圖 4.3: 教堂曲線方程式模擬

可利用參數形式寫成

$$z = r \sin \theta$$

$$x = r \cos \theta$$

at $y = k$

再定義粉紅色的線段位置 $y = l$ 最後將弧線與直線相連形成一個曲面，接著我們在曲面上取 $y = k_1, y = k_2$ 做一個切面，

$$z = \left(1 - \frac{y}{l}\right) r \sin \theta$$

$$x = r \cos \theta$$

解得方程式為

$$\frac{z^2}{\left(1 - \frac{y}{l}\right)^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1$$

由此方程我們可看出，所截出來的藍色曲面為橢圓弧。

想法：

1. 固定 x ，可得

$$\frac{z}{1 - \frac{y}{l}} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

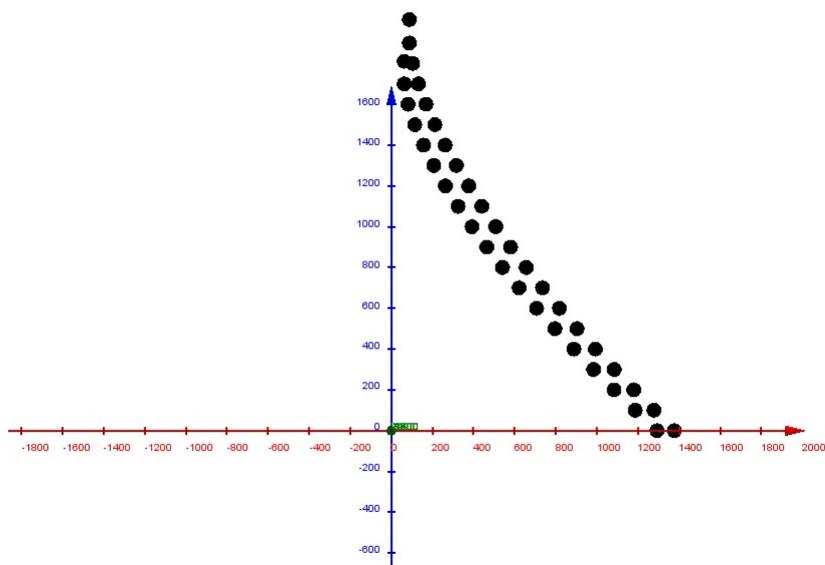


圖 4.4: $y=1800$ 處前後, 窗口曲線的示意圖

2. 固定 y, z vs x 為橢圓, 其長軸 $=r$ 、短軸 $=(1 - \frac{y}{l})r$
3. 固定 z ,

$$r^2 - x^2 = \frac{z^2}{(1 - \frac{y}{l})^2}$$

$$(1 - \frac{y}{l})^2(r^2 - x^2) = z^2$$

$$(l - y)^2(r^2 - x^2) = l^2 z^2$$

$$(1 - y)^2(4 - x)^2 = 4^2 0.8^2 = 3.2^2$$

此方程式繪圖出來結果不是二次曲線, 與實際的關係不符。

方法二: 探討圓弧移動到直線 (與圓弧等長) 所形成的軌跡方程
 利用圓弧與拉線等長做測試, 可觀察 Figure4.8(a) 綠色圓半徑為 r 故半圓周長度為 πr 所對應的綠色直線長度等同於半圓周長, 接著將圓的部分改寫為極座標形式, 紅色部分為移動角度 θ (見 Figure4.8(b)), Figure4.9(c) 則為側面示意圖紅色部份表示下方線段長度 $r \cos \theta$ 綠色部分表示上方長度 $(\frac{\pi}{2} - \theta)r$, Figure4.9(d) 紅色弧度 $=r \sin \theta$ 綠色位置為 l 。利用上述的定義與關係可將參數式改寫成

$$y = t$$

$$z = (1 - \frac{t}{l})r \cos \theta$$

$$x = (1 - \frac{t}{l})r \sin \theta + \frac{t}{l}(\frac{\pi}{2} - \theta)r$$

$$t \in [0, l], \theta \in [0, \pi]$$

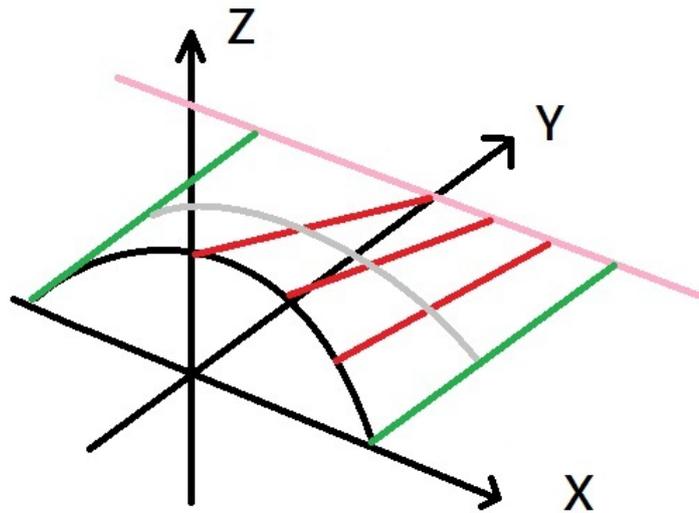


圖 4.5: 圓弧拉線測試, 粉色線長與圓弧與圓弧半徑相等

方法三: 探討橢圓旋轉所形成的軌跡方程

接著我們考慮橢圓的路徑所形成的軌跡曲面, 先定義 Figure 4.11 左邊橢圓方程 $\frac{z^2}{a_1^2} + \frac{x^2}{b_1^2} = 1$, 右邊較小的為旋轉過後的橢圓 $\frac{z^2}{a_2^2} + \frac{x^2}{b_2^2} = 1$, 所有的方程式可以定義為

$$\frac{z^2}{a(y)^2} + \frac{x^2}{b(y)^2} = 1$$

$$a(y) = \left(1 - \frac{y}{l}\right)a_1 + \frac{y}{l}a_2$$

$$b(y) = \left(1 - \frac{y}{l}\right)b_1 + \frac{y}{l}b_2$$

此時 $a(y), b(y)$ 固定在 z, x 的方向

實驗結果缺點: 當 $y=k$ 移動時所截出來的橢圓高度不同
曲面方程式為

$$\frac{z^2}{\left(a_1\left(1 - \frac{y}{l}\right) + a_2\frac{y}{l}\right)^2} + \frac{x^2}{\left(b_1\left(1 - \frac{y}{l}\right) + b_2\frac{y}{l}\right)^2} = 1$$

曲面參數式為

$$y = t$$

$$z = \left(a_1\left(1 - \frac{t}{l}\right) + a_2\frac{t}{l}\right) \cos \theta$$

$$x = \left(b_1\left(1 - \frac{t}{l}\right) + b_2\frac{t}{l}\right) \cos \theta \quad t \in [0, l] \theta \in [0, 2\pi]$$

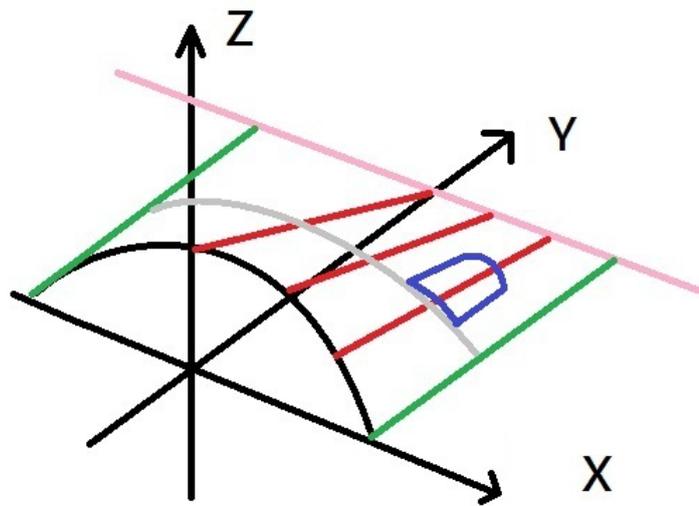


圖 4.6: 圓弧拉線測試並做切面

最後將橢圓固定長短軸做旋轉

$$\begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{x} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \phi) \\ \sin(\alpha + \phi) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi \\ \sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} r \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

座標轉換

$$\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

或是

$$\begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$$

方程式則可寫為

$$\hat{z}^2 = (\cos \phi z + \sin \phi x)^2 = \cos^2 \phi z^2 + 2 \cos \phi \sin \phi zx + \sin^2 \phi x^2$$

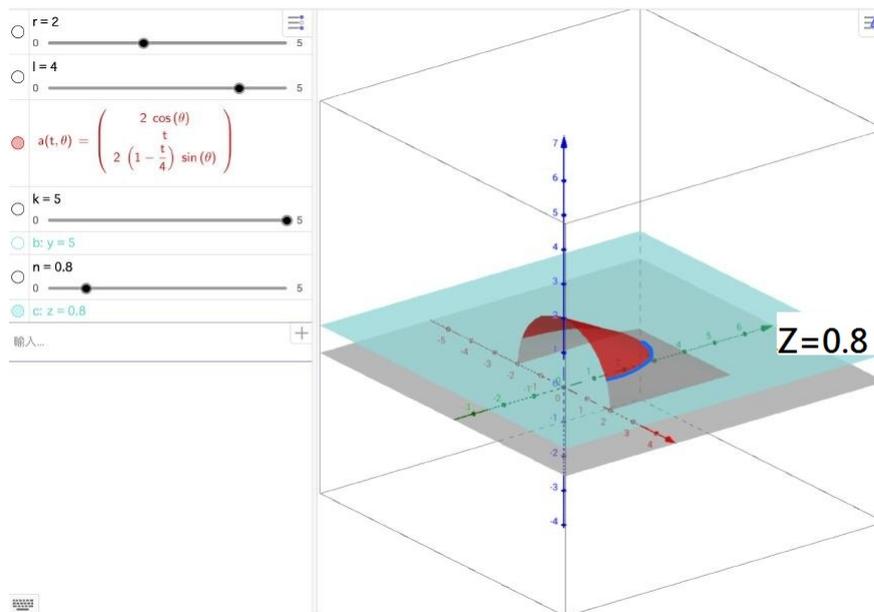


圖 4.7: 使用 Geogebra 實際觀察圖形

$$\hat{x}^2 = (-\sin \phi z + \cos \phi x)^2 = \sin^2 \phi z^2 + 2 \cos \phi \sin \phi z x + \cos^2 \phi x^2$$

$$\left[\frac{\cos^2 \phi}{a(y)^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b(y)^2} \right] z^2 + \left[\frac{1}{a(y)^2} - \frac{1}{b(y)^2} \right] \sin 2\phi z x + \left[\frac{\sin^2 \phi}{a(y)^2} + \frac{\cos^2 \phi}{b(y)^2} \right] x^2 = 1$$

參數式為

$$\hat{z} = a(y) \cos \phi, \hat{x} = b(y) \sin \phi$$

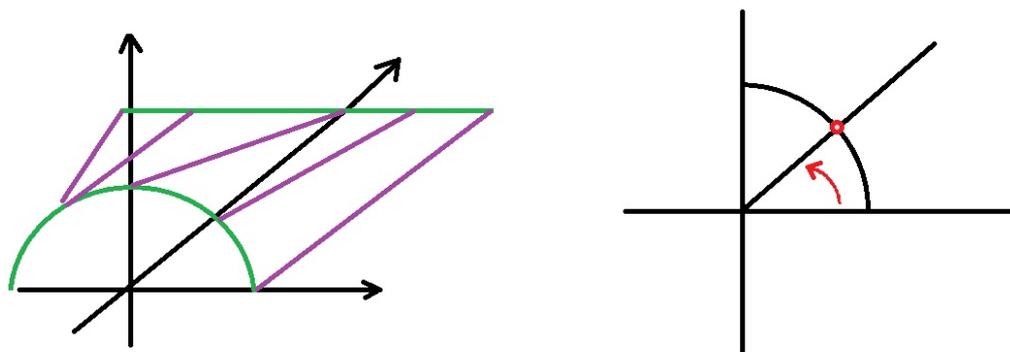
$$\begin{cases} y = t & t \in [0, l] \\ z = a(x) \cos \theta \cos \phi - b(y) \sin \theta \sin \phi & \theta \in [0, 2\pi] \\ x = a(x) \cos \theta \sin \phi - b(y) \sin \theta \cos \phi & \phi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

經過計算我們可以得到教堂前方曲面 (無厚度) 最前方橢圓參數式為

$$\begin{cases} x = 1501.96 + (1327.51 \cos t - 715.07 \sin t) \\ y = 0 \\ z = -413.73 + (-2727.03 \cos t - 348.09 \sin t) \end{cases}$$

最後方橢圓參數式為

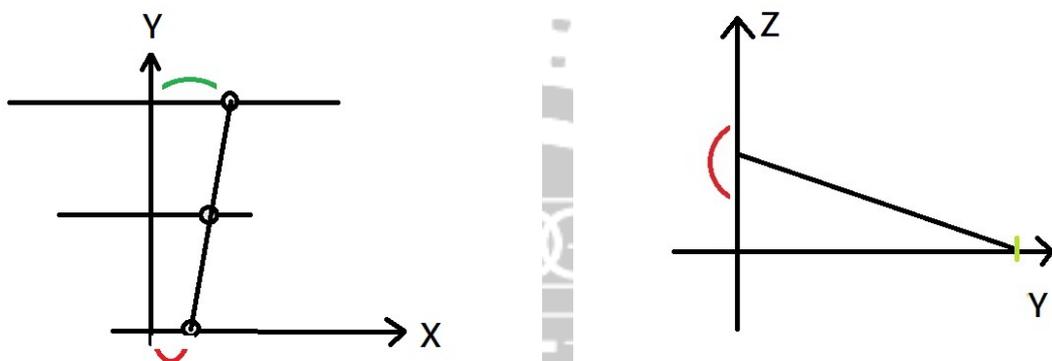
$$\begin{cases} x = 3466.97 + (3402.14 \cos t - 734.63 \sin t) \\ y = 1600 \\ z = -314.66 + (-2404.21 \cos t - 1039.55 \sin t) \end{cases}$$



(a) 圓弧與直線等長示意圖

(b) 極座標示意圖

圖 4.8: 想法



(c) 側面拉線圖

(d) 極座標與平面座標之轉換對照

圖 4.9: 想法

其餘模擬出來的曲線方程式也都為橢圓(可從圖 4.13 黑色弧線看出)。

然對角的部分所模擬出來的方程式則為雙曲線

圖 4.13 紅色曲線由上到下的方程式為

$$\begin{cases} x_1 = -2702.91 + (\mp 2957.66 \cosh t - 1202.42 \sinh t) \\ y_1 = 2114.78 + (\pm 904.87 \cosh t - 3144.12 \sinh t) \\ z_1 = 542.62 + (\mp 452.45 \cosh t - 1572.06 \sinh t) \\ x_2 = -2340.09 + (\mp 2635.48 \cos t - 1209.78 \sinh t) \\ y_2 = 1768.95 + (\pm 859.69 \cosh t - 2966.98 \sinh t) \\ z_2 = 415.53 + (\mp 429.85 \cosh t + 1483.49 \sinh t) \end{cases}$$

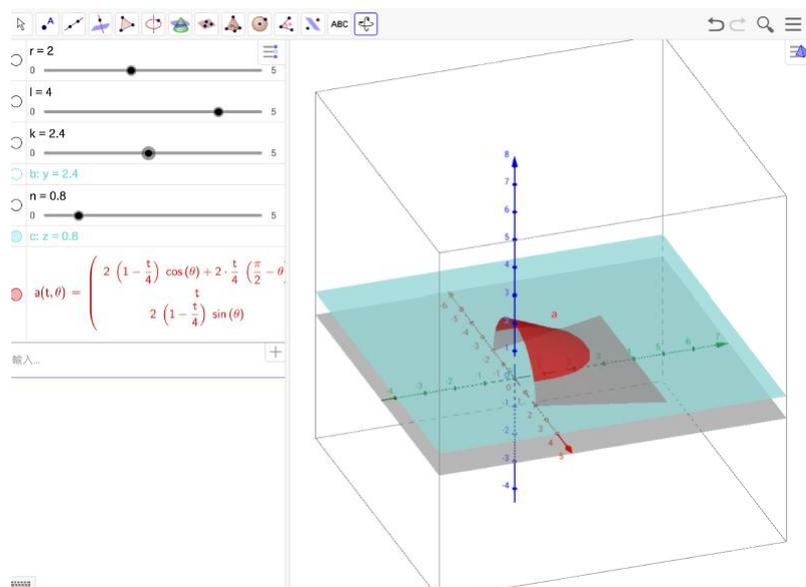


圖 4.10: 使用 Geogebra 實際觀察圖形

$$\begin{cases} x_3 = -8312.97 + (\pm 8577.82 \cosh t + 2065.71 \sinh t) \\ y_3 = 3098.88 + (\mp 2625.37 \cosh t + 5399.4 \sinh t) \\ z_3 = -549.44 + (\pm 1312.69 \cosh t - 2699.7 \sinh t) \end{cases}$$

由這些結果我們可以得知路思義教堂的四片曲面的構成，推測應為雙曲橢圓曲面，且教堂曲面較可能為橢圓旋轉所形成的路徑軌跡所截的一小部分所構成。

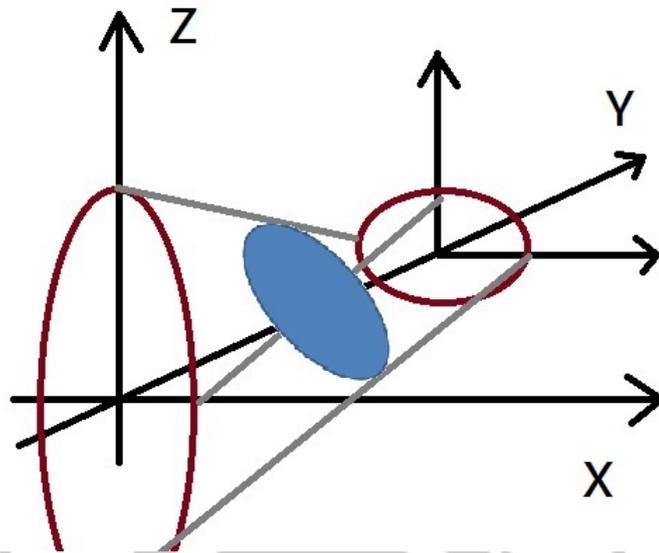
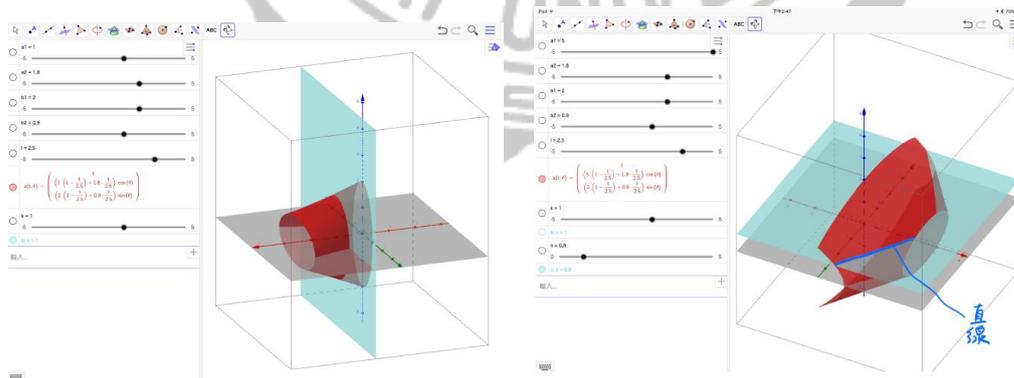


圖 4.11: 橢圓旋轉路徑示意圖



(a) 橢圓旋轉路徑模擬

(b) 橢圓放大路徑模擬

圖 4.12: 橢圓路徑模擬

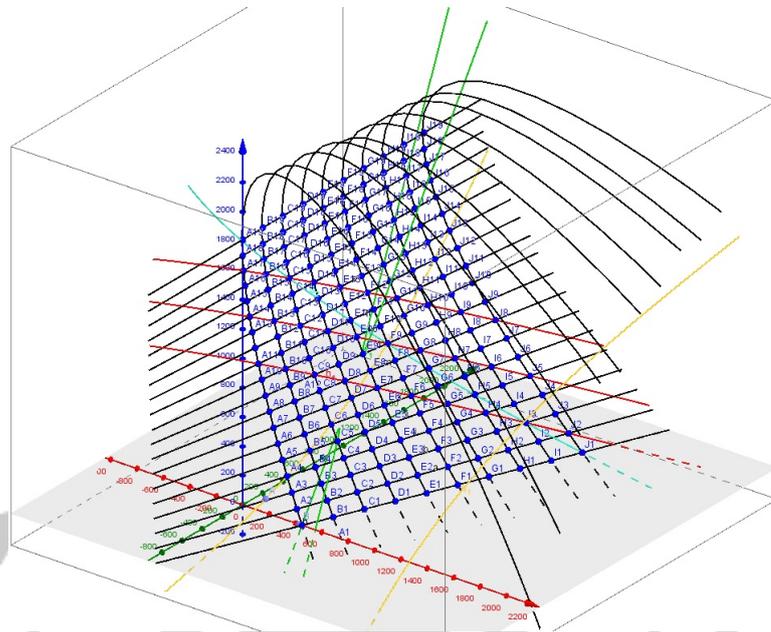


圖 4.13: 教堂前方曲面-無厚度

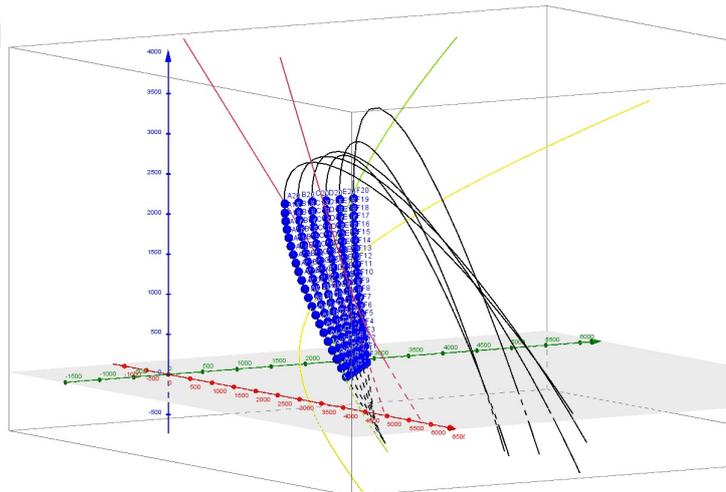


圖 4.14: 教堂後方曲面-無厚度

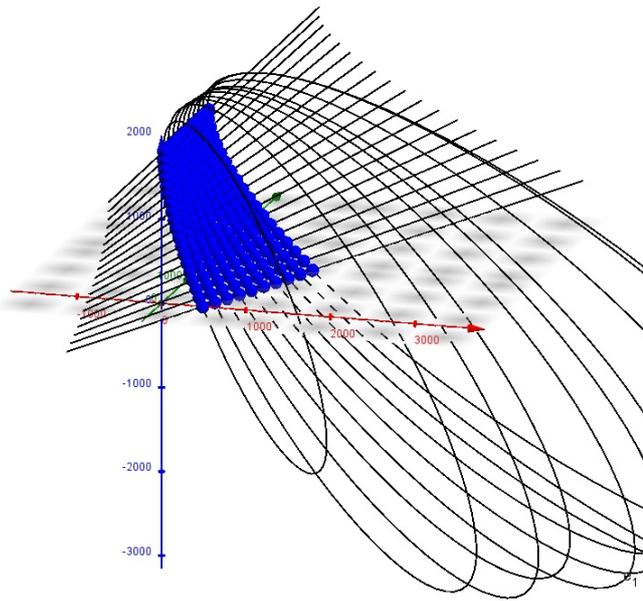


圖 4.15: 教堂前方曲面-加厚

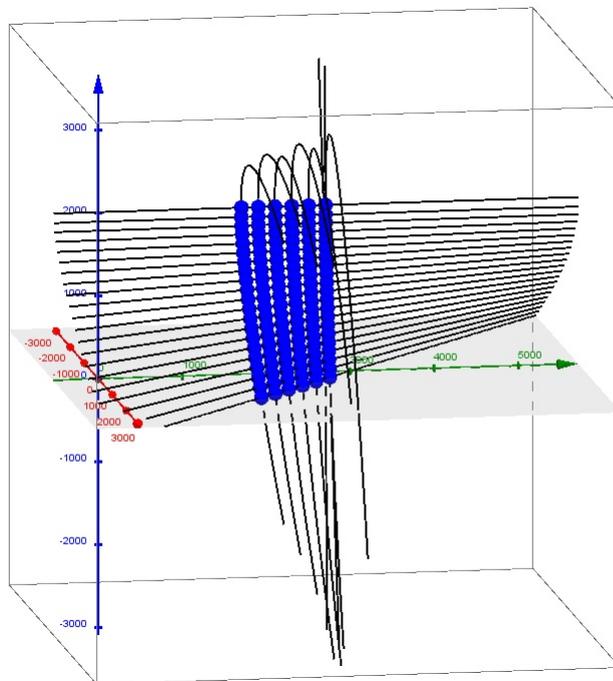


圖 4.16: 教堂後方曲面-加厚

第五章 結論

數學方程式在擬合上都有誤差，但誤差的多寡取決於使用的解決方法，以及所需要使用的目的與接受度。主要運用的軟體有 Matlab, Geogebra 用來計算真正的曲面並加入曲面的厚度，另外也計算了相對應的方程式與判斷曲線類型並使用 Matlab 計算其誤差所得知結果 RMS 誤差也都很小，經多種曲面的模擬，判斷教堂的四片曲面無論稱作雙曲拋物面或是雙曲橢圓面皆可。最後利用 3D 列印機列印實體的 3D 路思義教堂曲面模型。



參考文獻

- [1] David A. Brannan, Matthew F. Esplen, and Jeremy J. Gray, *Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 1999, [Chapter 1].
- [2] 黃業強: 路思義教堂-從設計到使用
- [3] Philip Jodidio 與 Janet Adams Strong 著: 貝律銘全集
- [4] Matlab 轉 STL
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/20922-stlwrite-filename-varargin->
- [5] 國航科技用戶手冊
<http://www.idea-diy.com/support/download/category/3/>
- [6] Cura 切片軟體
<https://ultimaker.com/en/products/cura-software>

附錄 A 教堂數據

enewcommand1 教堂的主要曲線數據收錄於此。0.85°

表 A.1: 曲線 AB , CD , EF 及 GH 之座標資料

高度 (z 座標)	AB 寬度 (x 座標)	CD 寬度 (x 座標)	高度 (z 座標)	EF 寬度 (x 座標)	GH 寬度 (x 座標)
			2015.0	0.0	0.0
			1900.0	0.0	0.0
1810.0	0.0	0.0	1800.0	16.9	3.6
1700.0	0.0	0.0	1700.0	47.8	10.3
1600.0	6.4	17.1	1600.0	87.8	18.8
1500.0	18.2	48.4	1500.0	135.2	29.0
1400.0	33.4	89.0	1400.0	189.0	40.5
1300.0	51.4	137.0	1300.0	248.4	53.3
1200.0	71.8	191.4	1200.0	313.1	67.1
1100.0	94.4	251.6	1100.0	382.5	82.0
1000.0	118.9	317.1	1000.0	456.4	97.9
900.0	145.3	387.4	900.0	534.6	114.6
800.0	173.3	462.2	800.0	616.7	132.3
700.0	203.2	541.4	700.0	702.7	150.7
600.0	234.2	624.9	600.0	792.4	169.9
500.0	266.9	711.7	500.0	885.6	190.0
400.0	300.9	802.5	400.0	982.1	210.6
300.0	336.3	896.8	300.0	1081.9	232.0
200.0	373.0	994.6	200.0	1184.9	254.1
100.0	410.9	1095.7	100.0	1291.0	276.8
0.0	450.0	1200.0	0.0	1400.0	300.0

表 A.2: 曲面 $ABCD$ 之對應 $y = 0$ 到 $y = 1800$ 之厚度資料

0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800
25.0	25.0	25.0	25.0	25.0	25.0	25.0	25.0	25.0	25.0
25.6	25.7	25.8	26.0	26.1	26.2	26.4	26.5	26.6	26.8
26.2	26.4	26.7	27.0	27.2	27.5	27.7	28.0	28.3	28.5
26.8	27.2	27.5	27.9	28.3	28.7	29.1	29.5	29.9	30.3
27.4	27.9	28.4	28.9	29.4	30.0	30.5	31.0	31.5	32.1
27.9	28.6	29.2	29.9	30.6	31.2	31.9	32.5	33.2	33.8
28.5	29.3	30.1	30.9	31.7	32.5	33.2	34.0	34.8	35.6
29.1	30.0	30.9	31.9	32.8	33.7	34.6	35.5	36.4	37.4
29.7	30.8	31.8	32.8	33.9	34.9	36.0	37.0	38.1	39.1
30.3	31.5	32.6	33.8	35.0	36.2	37.4	38.5	39.7	40.9
30.9	32.2	33.5	34.8	36.1	37.4	38.7	40.0	41.3	42.6
31.5	32.9	34.3	35.8	37.2	38.7	40.1	41.5	43.0	44.4
32.1	33.6	35.2	36.8	38.3	39.9	41.5	43.0	44.6	46.2
32.6	34.3	36.0	37.7	39.4	41.1	42.8	44.5	46.2	47.9
33.2	35.1	36.9	38.7	40.6	42.4	44.2	46.0	47.9	49.7
33.8	35.8	37.7	39.7	41.7	43.6	45.6	47.5	49.5	51.5
34.4	36.5	38.6	40.7	42.8	44.9	47.0	49.1	51.1	53.2
35.9	37.2	39.4	41.7	43.9	46.1	48.3	50.5	52.8	55.0

表 A.3: 曲面 $EFGH$ 之對應 $y = 1700$ 到 $y = 2700$ 之厚度資料

1700	1900	2100	2300	2500	2700
27.5	27.5	27.5	27.5	27.5	27.5
27.5	27.5	27.5	27.5	27.5	27.5
29.2	29.0	28.8	28.6	28.4	28.2
30.9	30.5	30.1	29.7	29.2	28.8
32.6	32.0	31.4	30.7	30.1	29.5
34.3	33.5	32.7	31.8	31.0	30.1
36.1	35.0	33.9	32.9	31.8	30.8
37.8	36.5	35.2	34.0	32.7	31.4
39.5	38.0	36.5	35.1	33.6	32.1
41.2	39.5	37.8	36.1	34.4	32.8
42.9	41.0	39.1	37.2	35.3	33.4
44.6	42.5	40.4	38.3	36.2	34.1
46.3	44.0	41.7	39.4	37.1	34.7
48.0	45.5	43.0	40.4	37.9	35.4
49.7	47.0	44.3	41.5	38.8	36.1
51.4	48.5	45.6	42.6	39.7	36.7
53.2	50.0	46.8	43.7	40.5	37.4
54.9	51.5	48.1	44.8	41.4	38.0
56.6	53.0	49.4	45.8	42.3	38.7
58.3	54.5	50.7	46.9	43.1	39.3
60.0	56.0	52.0	48.0	44.0	40.0