東海大學統計學系碩士班

碩士論文

指導教授：黃連成 博士

多維常態分佈的貝氏序列估計之模擬比較

Simulation Study on Bayes Sequential Estimation of Multivariate Normal Distribution

研究生：劉自仁

中華民國 107 年 1 月

致謝詞

在研究所的日子一晃眼就要結束了，回想起剛進來的時候面對研究所課程有點不太適應，到後來漸漸對這個領域有更多的瞭解，相關技能也更加熟練，這段求學經歷讓我成長許多。首先我要感謝我的指導教授黃連成老師，不論是修課還是論文方面在我遇到疑惑時總是耐心教導，謝謝老師付出的時間、精神以及這段時間對我的訓練與指導。再來我要感謝沈葆聖老師，在作研究的空檔願意幫助我參考文獻的英文閱讀，讓我對整個文章的瞭解更加完整，在平時對我的關心以及各個領域的知識分享讓我受益良多。謝謝口試委員劉正夫老師，在口試時給予我許多意見，讓論文更加完善。再來，謝謝所有統計系教授以及助教們，給我課程上的協助。

最後，感謝我的家人，謝謝你們讓我能沒有後顧之憂的學習，不用為其他事情煩惱，也謝謝你們一路上的包容與關懷。

摘要

貝氏序列估計目的在於找尋一個最佳序列法則（optimal sequential procedure），其中包含了最佳停止時間（optimal stopping time）與貝氏估計量（Bayes estimator），但是給出明確的最佳停止時間的形式經常是不容易的，所以 Bickel and Yahav（1967，1968）提出大樣本近似的漸近點最優（asymptotically pointwise optimal）法則，來近似最佳停止時間。

本文主要探討在多維常態分佈下使用加權平方誤差損失加上抽樣成本的貝氏序列估計問題，這裡討論 Hwang（2017）的穩健（robust）序列法則，以及使用 Bickel and Yahav（1967, 1968）的大樣本漸近點最優法則，以上兩種方法都具備漸近最佳性質，我們想討論比較在使用不同先驗分佈及參數設定下所得到的結果。

透過模擬本文在給定先驗分佈以及參數組合下，比較穩健型序列法則和漸進點最優序列法則之間的數值結果並進行討論，結果顯示在先驗分佈參數設定錯誤時，因為穩健型序列法則不受先驗分佈影響，而有較好的貝氏風險估計值。

目　錄

第一章 緒論

在一般的統計問題中，樣本數是先確定好然後再進行資料蒐集，決策結果精確程度與樣本數量有關。然而在有限的資源下必須考量如何節省蒐集資料的成本以及有時樣本的取得並不容易，所以發展出了序列分析（sequential analysis）的方法。它是隨著實驗進行，透過取樣過程判斷是否達到所設定的條件或精確度，當滿足條件則停止取樣。一般而言，使用序列方法可以比實驗開始前先固定樣本數更有效率的節省資源並且達到所設定的目的。

貝氏序列估計是要找尋一個最佳序列法則（optimal sequential procedure），其中包含了最佳停止時間（optimal stopping time）與貝氏估計量（Bayes estimator）。Chow，Robins and Siegmund（1971）證明最佳停止法則在某些條件下是存在的，但是給出明確的最佳停止法則的形式是很艱難的工作。在 Blackwell and Girshick (1949)，Wald (1950)，Bickel and Yahav（1967，1968）等探討了在文獻上已有諸多方法的漸近最佳停止法則，和本文相關的研究可參考下列兩本書 Ghosh and Sen (1991)，Ghosh，Sen and Mukhopadhyay（1997）。

當先驗分佈是帶有未知參數的共軛先驗分佈時，Martinsek（1987）利用先前觀察值及輔助資料提出在常態與指數分佈下的經驗貝氏法則。當先驗分佈是未知且之前輔助資料無法使用時，Bickel and Yahav（1968）提出有先驗分佈的貝氏序列估計法則具有漸近最佳性質，亦即使用先驗分佈的貝氏序列法則和最佳序列法則的貝氏風險兩者漸近等價。Hwang（1999）提出序列法則，該法則與資料分佈無關且類似於 Chow and Yu（1981）古典非貝氏序列估計。因此 Hwang（1999）在平方損失函數誤差下連結貝氏與古典非貝氏的估計問題。

所有上述參考文獻的觀察數據和估計函數是單一維度的情況。Ghosh，Sinha and Mukhopadhyay（1976）和 Takada and Nagao（2004）分別探討了加權平方誤差損失和線性指數誤差損失下用於估計多維常態分佈的平均值向量的古典非貝氏序列估計，在貝氏模型的框架內，當共變異數矩陣未知時，對於估計多維常態分佈的問題，Ghosh and Hoekstra（1989）利用兩階段先驗分佈提出了具有 Bickel and Yahav（1967）的漸近最佳性質的法則。

本研究我們討論多維常態分佈下，使用加權平方誤差損失加上抽樣成本的貝氏序列估計平均值向量問題，文章總共分四個章節，第一章為緒論包含研究背景、動機及目的，介紹貝氏序列法則及文獻探討，第二章在多維常態分佈下的貝氏序列估計問題，給出 Hwang（2017）所提出的穩健型（robust）序列法則和漸進點最優 (asymptotically pointwise optimal)序列法則。第三章為在均勻先驗分佈及常態先驗分佈下，模擬比較兩個序列法則的停止時間及貝氏風險（Bayes risk）等，第四章為結論。

第二章 多維常態分佈的貝氏序列估計

令 $X, X_1, X_2, \cdots$ 互相獨立且具 p 維常態分佈的隨機向量，我們假設觀察 $X_1, \ldots, X_n$ 時，$\delta_n(X_1, \ldots, X_n)$ 估計平均值向量 $E_\theta X$ 的損失函數定為

$$\left(\delta_n(X_1, \ldots, X_n) - E_\theta X\right) A \left(\delta_n(X_1, \ldots, X_n) - E_\theta X\right)' + \mathrm{cn}, \ \mathrm{c} > 0,$$

θ是未知參數的向量，A 是一個已知的 $p \times p$ 的正定（positive definite）矩陣而 c 是每個抽樣單位成本，也假設 $A - I$ 是非負定（nonnegative definite）矩陣。

令 $\bar{X}_n$ 代表觀察值 $X_1, \ldots, X_n$ 的樣本平均數作為我們的估計值，因此給定樣本數 n 下的貝氏風險為

$$\begin{aligned} R_n &= E\{(\bar{X}_n - E_\theta X) A (\bar{X}_n - E_\theta X)' + cn\} \\ &= \frac{1}{n} tr\{AE(Cov_\theta X)\} + cn, \end{aligned}$$

其中 $Cov_\theta X$ 為 X 的共變異數矩陣，在最佳樣本數 n_0 下 R_n 達到最小化，滿足下列式子

$$\left[\left(\frac{tr\{AE(Cov_\theta X)\}}{c}\right)^{1/2}\right] \leq n_0 \leq \left[\left(\frac{tr\{AE(Cov_\theta X)\}}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + 1,$$

其中 $[x]$ 表示 x 的整數部分。因此最佳固定樣本數 n_0 下的貝氏風險為

$$R_{n_0} \cong 2\sqrt{c}\left(tr\{AE(Cov_\theta X)\}\right)^{1/2} 。$$

這裡θ的值代表來自於先驗分佈的單一觀察值，因此若無之前輔助資料我們將無法確認先驗分佈。當給定先驗分佈的假設錯誤或未知時，則無法獲得最佳的樣本數，因此也無法獲得最好的 R_{n_0}，因此我們希望發展一個序列法則不需要用到先前資料而且可以使得漸近貝氏風險不會超過 R_{n_0}。

令停止時間

$$N_c = inf\{n \geq n_c：\mathrm{tr}(AS_n) < cn^2\},$$

其中$S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)'(X_i - \bar{X}_n)$是 n 個資料的樣本變異數，我們將用$\bar{X}_{N_c}$估計$E_\theta X$。而$R_{Nc}$表示序列估計法則$\left(N_c，\bar{X}_{Nc}\right)$的貝氏風險，這個法則和先驗分佈無關，所以是穩健（robust）的序列法則。由 Hwang（2017）可得知在適當條件下，$R_{Nc} = 2\sqrt{c}E(\,tr\{A(Cov_\theta X)\})^{1/2} + \mathrm{o}（\sqrt{c}）$，因此當 c 小時，$R_{Nc}$小於或等於$R_{n_0}$，亦即序列法則$\left(N_c，\bar{X}_{Nc}\right)$優於最佳固定樣本數法則$\left(n_0，\bar{X}_{n_0}\right)$。

另一方面我們將利用 Bickel and Yahav（1967，1968）的方法，提出一個序列法則，亦即給出停止時間及其對應的估計量。

令$F_n = \sigma\left(X_1，\cdots，X_n\right)$，$\forall n \geq 1$，若給定停止時間 t 和一個$F_t$的可估計函數$\delta_t$，則此序列法則$\left(t，\delta_t\right)$的貝氏風險表示如下：

$$E\{(\delta_t - E_\theta X)A(E(\delta_t - E_\theta X) - E_\theta X)' + ct\}$$

$$= E\{(E_\theta(X|F_t) - E_\theta X)A(E_\theta(X|F_t) - E_\theta X)' + ct\}$$

$$+E\left\{\left(\delta_t - E(E_\theta X|F_t)\right)A\left(\delta_t - E(E_\theta X|F_t)\right)'\right\}$$

$$+2E\{\,\left(\delta_t - E(E_\theta X|F_t)\right)A(E_\theta(X|F_t) - E_\theta X)'\}。$$

上述方程式最後一項取條件期望值為 0，因此$\delta_t = \mathrm{E}(E_\theta X|F_t)$時，貝氏風險$\mathrm{E}\{(\delta_t - E_\theta X)A(\delta_t - E_\theta X)' + ct\}$達到最小，也就是給定任何停止時間 t 在這損失函數下，$E_\theta X$的貝氏估計值為$E_\theta(E_\theta X|F_t)$。利用 A 是正定矩陣，故存在非奇異（nonsingular）矩陣B使得$\mathrm{A} = \mathrm{BB}'$，並且令 $\mathrm{Y} = \mathrm{XB}$，及$\mathrm{Y} = \left(Y_1，\ldots，Y_p\right)$，所以序列法則$\left(t, E(E_\theta X|F_t)\right)$貝氏風險可表示為

$$\mathrm{R}(t) = E\{(E(E_\theta X|F_t) - E_\theta X)A(E(E_\theta X|F_t) - E_\theta X)' + ct\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{p}\left(E\left((E_\theta(Y_i)|F_t) - E_\theta(Y_i)\right)^2 + ct\right)\right\}$$

$$= \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{p} Var(E_\theta(Y_i)|F_t) + ct\right\},$$

因此這個問題的最佳序列法則等價於在Z_n序列下找最佳停止時間，此處

$$Z_n = \sum_{i=1}^{p} Var(E_\theta(Y_i)|F_n) + cn \text{ 。}$$

我們由 Bickel and Yahav（1967，1968），當 n→ ∞時，可以得到

$$\mathrm{n}\sum_{i=1}^{p} Var(E_\theta(Y_i)|F_n) \to tr(ACov_\theta X),$$

由 Bickel and Yahav（1967，1968）我們可以得到漸近點最優（asymtotically pointwise optimal）停止時間法則如下

$$T_c = inf\left\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{p} Var(E_\theta(Y_i)|F_n) \leq cn\right\},\ \ \mathrm{c} > 0$$

並且漸進點最優的序列法則$\left(T_c，E(E_\theta|F_{Tc})\right)$是具有漸近最佳（asymtotically optimal）性質，亦即它的貝氏風險可表示成

$$\mathrm{R}(T_c) = 2\sqrt{c}E(tr\{ACov_\theta X\})^{\frac{1}{2}} + \mathrm{o}\left(\sqrt{c}\right) = \inf_s R(s) + \mathrm{o}（\sqrt{c}）,$$

此處 s 為任意停止時間，所以穩健序列法則$\left(N_c，\bar{X}_{Nc}\right)$也具有漸近最佳性質。

第三章 模擬分析及結果

以下的數值模擬主要是討論在三維常態分佈下的貝氏風險估計與停止時間的估計，分別在穩健型法則（robust）和漸進點最優（APO）法則的結果。在給定不同正定矩陣

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix},$$

與抽樣成本 c，以及在均勻分佈及常態分佈兩種先驗分佈，設定不同參數模擬比較兩序列法則的結果。

我們的模擬先假設未知參數θ的先驗分佈為均勻分佈還有常態分佈給定這兩種先驗分佈。

均勻先驗分佈：

$$X|\theta\sim N\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right),\theta\sim\text{uniform}[-a,a]^3$$

討論兩種參數正確及兩種錯誤設定的情況，當先驗分佈為均勻分佈且參數正確時，設定參數$a=1,5$，當先驗分佈設定參數錯誤時$a=0.8，0.5$ 及 $4.8，4.5$。

常態先驗分佈：

$$X|\theta\sim N\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right),\theta\sim N\left((\mu_1,\mu_2,\mu_3),\begin{pmatrix}\tau_1^2&0&0\\0&\tau_2^2&0\\0&0&\tau_3^2\end{pmatrix}\right)$$

討論一種參數正確，兩種錯誤參數設定的情況，當先驗分佈為常態分佈且參數正確時，設定參數

$$\mu_1=\mu_2=\mu_3=0，\tau_1^2=\tau_2^2=\tau_3^2=1$$

當先驗分佈設定參數錯誤時，設定參數

$$\mu_1 = 1，\mu_2 = \mu_3 = 0，\tau_1^2 = 2，\tau_2^2 = \tau_3^2 = 1$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1，\tau_1^2 = 2，\tau_2^2 = 0.5，\tau_3^2 = 2，$$

透過以上給定的參數以及假設進行模擬程序。

步驟一：在給定兩種事前分佈，分別為均勻分佈和常態分佈下，生成 1000 組θ值 $\theta \equiv (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$。

步驟二：在給定θ值下分別對每一組θ各生成 1000 組隨機變數 X 的序列。

步驟三：每一組隨機變數 $X \equiv (X_1, X_2, X_3)$的序列，分別透過穩健法則和漸進點最佳法則找到各自停止時間N_c及T_c。

步驟四：找到停止時間以及對應的損失後，可以得到估計停止時間N_c、T_c及貝氏風險R_{Nc} 、R_{T_c}。

步驟五：以貝氏風險的模擬值計算相對風險，定R_1 是最佳貝氏風險展開式的第一項，即

$$R_1 = 2\sqrt{c}E(\,tr\{ACov_\theta X\})^{1/2},$$

相對風險分別為

$$\Delta_{R_{Nc}} = \frac{R_{Nc} - R_1}{R_1}，\ \Delta_{R_{Tc}} = \frac{R_{Tc} - R_1}{R_1}\ 。$$

在本文中模擬了均勻分佈及常態分佈兩種先驗分佈，分別給定兩種 A 矩陣，正確和錯誤的參數設定，及設定抽樣成本 $c = (0.5,0.1,0.05,0.01,0.005,0.001,0.0005,0.0001)$。從表中可以發現相對風險$\Delta_{R_{Nc}}$和$\Delta_{R_{Tc}}$隨著 c 值逐漸下降會逐漸往 0 靠近，$N_c$和$T_c$隨著 c 值變大其值會愈大，在常態先驗分佈設定下，停止時間T_c在設定不同參數時並沒有

明顯變動，但均勻先驗分佈為時，停止時間T_c隨著 c 值在不同參數設定下有較大差異。而參數設定錯誤越嚴重時，可以在 c 值設定逐漸遞減的過程中越早看出穩健法則的風險估計R_{Nc}較漸進點最佳法則的R_{Tc}小，而在參數設定正確時，漸進點最佳法則的貝氏風險估計和停止時間都比較小。只在表 5-2 時參數設定錯誤時R_{Tc}的估計反而比R_{Nc}好，唯有此種情況恰巧看不出穩健法則的優點。

第四章 結論

本文討論多維常態分佈的貝氏估計問題，利用與先驗分佈無關的穩健序列法則和 Bickel and Yahav（1967，1968）提出的漸進點最優法則，同樣具有漸進最佳性質，再經過上一章的模擬步驟我們可以分別得到漸進點最優法則的停止時間T_c與穩健序列法則的N_c，貝氏風險R_{Tc}、R_{Nc}與相對風險$\Delta_{R_{Tc}}$、$\Delta_{R_{Nc}}$，由模擬結果得知，當單位成本 c 較小時，兩種序列法則的停止時間T_c與N_c增加且貝氏風險R_{Tc}、R_{Nc}會減少，另外當 c 漸小至接近 0 時，穩健序列法則的相對風險也會接近 0，而漸進點最佳法則的相對風險在參數正確時，會呈現和穩健序列法則一樣接近 0 的 趨勢，但是在參數錯誤時並沒有如此趨勢，而在給定常態先驗分佈的情況下相對風險則是有逐漸增加的結果。由表得知當固定 c 時，參數正確時漸進點最優法則的貝氏風險R_{Tc}會小於穩健序列法則的R_{Nc}，而參數設定錯誤時穩健序列法則的R_{Nc}會小於漸進點最優法則的R_{Tc}，由此結果得知在參數設定錯誤時穩健序列法則在單位成本 c 逐漸減少會有較好結果，而參數設定正確時則沒有明顯表現穩健型的優點。

由模擬結果得知多變量常態貝氏序列估計在先驗分佈參數正確時，漸進點最佳法則的貝氏風險會有較好的結果，而先驗分佈參數設定錯誤時，穩健序列法則因為不受先驗分佈影響，所以有較好的表現。

表 1-1 A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $X|\theta\sim N\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$，先驗分佈$\theta\sim \text{uniform}[-1, 1]^3$為正確時

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	2	2.44949	2.512485	0.025718	2	2.44949	1.586617	-0.35227
0.1	5	1.095445	1.217103	0.111058	5	1.095445	0.832102	-0.2404
0.05	7	0.774597	0.804462	0.038557	7	0.774597	0.620841	-0.1985
0.01	17	0.34641	0.348873	0.007109	16	0.34641	0.301148	-0.13066
0.005	24	0.244949	0.245628	0.002771	22	0.244949	0.219048	-0.10574
0.001	55	0.109545	0.109858	0.002866	51	0.109545	0.101709	-0.07153
0.0005	77	0.07746	0.077423	0.000467	74	0.07746	0.07281	-0.06002
0.0001	173	0.034641	0.034669	0.000794	167	0.034641	0.033226	-0.04015

表 1-2 先驗分佈錯誤，定$\theta\sim \text{uniform}[-0.8, 0.8]^3$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	2	2.44949	2.512485	0.025718	2	2.44949	1.512004	-0.38273
0.1	5	1.095445	1.217103	0.111058	4	1.095445	0.83275	-0.23981
0.05	7	0.774597	0.804462	0.038557	6	0.774597	0.633434	-0.18224
0.01	17	0.34641	0.348873	0.007109	14	0.34641	0.319077	-0.0789
0.005	24	0.244949	0.245628	0.002771	20	0.244949	0.235216	-0.03973
0.001	55	0.109545	0.109858	0.002866	47	0.109545	0.115537	0.054704
0.0005	77	0.07746	0.077423	0.000467	67	0.07746	0.085571	0.104723
0.0001	173	0.034641	0.034669	0.000794	152	0.034641	0.043878	0.266662

表 1-3 先驗分佈錯誤，定$\theta\sim \text{uniform}[-0.5, 0.5]^3$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	2	2.44949	2.512485	0.025718	1	2.44949	1.25038	-0.48953
0.1	5	1.095445	1.217103	0.111058	3	1.095445	0.887455	-0.18987
0.05	7	0.774597	0.804462	0.038557	4	0.774597	0.786029	0.014759
0.01	17	0.34641	0.348873	0.007109	11	0.34641	0.493171	0.423661
0.005	24	0.244949	0.245628	0.002771	16	0.244949	0.379674	0.55
0.001	55	0.109545	0.109858	0.002866	36	0.109545	0.24572	1.24311
0.0005	77	0.07746	0.077423	0.000467	50	0.07746	0.208411	1.690575
0.0001	173	0.034641	0.034669	0.000794	118	0.034641	0.163254	3.712726

表 2-1 A= $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， $X|\theta \sim N\left(\theta, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$，先驗分佈$\theta \sim \text{uniform}[-5, 5]^3$為正確時

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	2	2.44949	2.512485	0.025718	3	2.44949	2.395471	-0.02205
0.1	5	1.095445	1.217103	0.111058	6	1.095445	1.067667	-0.02536
0.05	7	0.774597	0.804462	0.038557	8	0.774597	0.754829	-0.02552
0.01	17	0.34641	0.348873	0.007109	18	0.34641	0.337711	-0.02511
0.005	24	0.244949	0.245628	0.002771	25	0.244949	0.239705	-0.02141
0.001	55	0.109545	0.109858	0.002866	54	0.109545	0.10804	-0.01373
0.0005	77	0.07746	0.077423	0.000467	77	0.07746	0.076577	-0.01139
0.0001	173	0.034641	0.034669	0.000794	173	0.034641	0.034366	-0.00795

表 2-2 先驗分佈錯誤，定$\theta \sim \text{uniform}[-4.8, 4.8]^3$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	2	2.44949	2.512485	0.025718	3	2.44949	2.385578	-0.02609
0.1	5	1.095445	1.217103	0.111058	6	1.095445	1.064053	-0.02866
0.05	7	0.774597	0.804462	0.038557	8	0.774597	0.753701	-0.02698
0.01	17	0.34641	0.348873	0.007109	18	0.34641	0.342124	-0.01237
0.005	24	0.244949	0.245628	0.002771	24	0.244949	0.243109	-0.00751
0.001	55	0.109545	0.109858	0.002866	54	0.109545	0.109972	0.0039
0.0005	77	0.07746	0.077423	0.000467	77	0.07746	0.078038	0.007465
0.0001	173	0.034641	0.034669	0.000794	172	0.034641	0.035507	0.024988

表 2-3 先驗分佈錯誤，定$\theta \sim \text{uniform}[-4.5, 4.5]^3$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	2	2.44949	2.512485	0.025718	3	2.44949	2.430675	-0.00768
0.1	5	1.095445	1.217103	0.111058	6	1.095445	1.079081	-0.01494
0.05	7	0.774597	0.804462	0.038557	8	0.774597	0.771838	-0.00356
0.01	17	0.34641	0.348873	0.007109	17	0.34641	0.355884	0.027348
0.005	24	0.244949	0.245628	0.002771	24	0.244949	0.257683	0.051984
0.001	55	0.109545	0.109858	0.002866	53	0.109545	0.122195	0.115483
0.0005	77	0.07746	0.077423	0.000467	76	0.07746	0.090902	0.173544
0.0001	173	0.034641	0.034669	0.000794	169	0.034641	0.048279	0.393706

表 3-1 A=$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, $X|\theta\sim N\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$，先驗分佈$\theta\sim\text{uniform}[-1,1]^3$為正確時

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	3	3.464102	3.760051	0.085433	2	3.464102	2.169877	-0.37361
0.1	7	1.549193	1.745215	0.126531	5	1.549193	1.205919	-0.22158
0.05	10	1.095445	1.133544	0.034779	7	1.095445	0.909668	-0.16959
0.01	24	0.489898	0.494125	0.008629	16	0.489898	0.450756	-0.0799
0.005	34	0.34641	0.348218	0.005219	23	0.34641	0.327657	-0.05414
0.001	77	0.154919	0.155196	0.001785	52	0.154919	0.153111	-0.01167
0.0005	109	0.109545	0.109847	0.002765	74	0.109545	0.109431	-0.00104
0.0001	245	0.04899	0.049076	0.001759	168	0.04899	0.049977	0.020147

表 3-2 先驗分佈錯誤，定$\theta\sim\text{uniform}[-0.8,0.8]^3$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	3	3.464102	3.760051	0.085433	2	3.464102	2.150826	-0.37911
0.1	7	1.549193	1.745215	0.126531	4	1.549193	1.264625	-0.18369
0.05	10	1.095445	1.133544	0.034779	6	1.095445	0.969384	-0.11508
0.01	24	0.489898	0.494125	0.008629	14	0.489898	0.49646	0.013396
0.005	34	0.34641	0.348218	0.005219	20	0.34641	0.367068	0.059633
0.001	77	0.154919	0.155196	0.001785	47	0.154919	0.182377	0.17724
0.0005	109	0.109545	0.109847	0.002765	67	0.109545	0.135767	0.239375
0.0001	245	0.04899	0.049076	0.001759	153	0.04899	0.071081	0.450925

表 3-3 先驗分佈錯誤，定$\theta\sim\text{uniform}[-0.5,0.5]^3$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	3	3.464102	3.760051	0.085433	1	3.464102	2.149838	-0.3794
0.1	7	1.549193	1.745215	0.126531	3	1.549193	1.610721	0.039716
0.05	10	1.095445	1.133544	0.034779	4	1.095445	1.366087	0.247061
0.01	24	0.489898	0.494125	0.008629	11	0.489898	0.843392	0.721566
0.005	34	0.34641	0.348218	0.005219	16	0.34641	0.684392	0.975669
0.001	77	0.154919	0.155196	0.001785	38	0.154919	0.452504	1.9209
0.0005	109	0.109545	0.109847	0.002765	54	0.109545	0.391305	2.57211
0.0001	245	0.04899	0.049076	0.001759	122	0.04899	0.30394	5.204159

表 4-1 A=$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$X|\theta\sim N\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$，先驗分佈$\theta\sim\text{uniform}[-5,5]^3$為正確時

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	3	3.464102	3.760051	0.085433	3	3.464102	3.295878	-0.04856
0.1	7	1.549193	1.745215	0.126531	6	1.549193	1.53929	-0.00639
0.05	10	1.095445	1.133544	0.034779	8	1.095445	1.111603	0.01475
0.01	24	0.489898	0.494125	0.008629	18	0.489898	0.500997	0.022656
0.005	34	0.34641	0.348218	0.005219	25	0.34641	0.357369	0.031635
0.001	77	0.154919	0.155196	0.001785	54	0.154919	0.161697	0.043748
0.0005	109	0.109545	0.109847	0.002765	77	0.109545	0.114826	0.048213
0.0001	245	0.04899	0.049076	0.001759	173	0.04899	0.05154	0.052062

表 4-2 先驗分佈錯誤，定$\theta\sim\text{uniform}[-4.8,4.8]^3$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	3	3.464102	3.760051	0.085433	3	3.464102	3.310118	-0.04445
0.1	7	1.549193	1.745215	0.126531	6	1.549193	1.5531	0.002522
0.05	10	1.095445	1.133544	0.034779	8	1.095445	1.121999	0.02424
0.01	24	0.489898	0.494125	0.008629	17	0.489898	0.512399	0.045929
0.005	34	0.34641	0.348218	0.005219	24	0.34641	0.36702	0.059495
0.001	77	0.154919	0.155196	0.001785	54	0.154919	0.168119	0.085202
0.0005	109	0.109545	0.109847	0.002765	76	0.109545	0.119807	0.093686
0.0001	245	0.04899	0.049076	0.001759	171	0.04899	0.055551	0.133928

表 4-3 先驗分佈錯誤，定$\theta\sim\text{uniform}[-4.5,4.5]^3$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	3	3.464102	3.760051	0.085433	3	3.464102	3.413148	-0.01471
0.1	7	1.549193	1.745215	0.126531	6	1.549193	1.636669	0.056465
0.05	10	1.095445	1.133544	0.034779	8	1.095445	1.19617	0.091949
0.01	24	0.489898	0.494125	0.008629	17	0.489898	0.572243	0.168086
0.005	34	0.34641	0.348218	0.005219	24	0.34641	0.421616	0.2171
0.001	77	0.154919	0.155196	0.001785	52	0.154919	0.21526	0.389499
0.0005	109	0.109545	0.109847	0.002765	74	0.109545	0.165063	0.506815
0.0001	245	0.04899	0.049076	0.001759	165	0.04899	0.097973	0.999865

表 5-1 A= $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $X|\theta \sim N\left(\theta, \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$, 先驗分佈 $\theta \sim N\left((\mu_1,\mu_2,\mu_3), \begin{pmatrix}\tau_1^2&0&0\\0&\tau_2^2&0\\0&0&\tau_3^2\end{pmatrix}\right)$

為正確時，$\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$，$\tau_1^2=\tau_2^2=\tau_3^2=1$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	2	2.44949	2.512485	0.025718	2	2.44949	2.005974	-0.18106
0.1	5	1.095445	1.217103	0.111058	5	1.095445	1.000892	-0.08632
0.05	7	0.774597	0.804462	0.038557	8	0.774597	0.73256	-0.05427
0.01	17	0.34641	0.348873	0.007109	17	0.34641	0.336426	-0.02882
0.005	24	0.244949	0.245628	0.002771	24	0.244949	0.239777	-0.02111
0.001	55	0.109545	0.109858	0.002866	55	0.109545	0.108677	-0.00792
0.0005	77	0.07746	0.077423	0.000467	77	0.07746	0.076861	-0.00773
0.0001	173	0.034641	0.034669	0.000794	173	0.034641	0.034467	-0.00503

表 5-2 先驗分佈錯誤，定$\mu_1=1$，$\mu_2=\mu_3=0$，$\tau_1^2=2$，$\tau_2^2=\tau_3^2=1$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	2	2.44949	2.512485	0.025718	3	2.44949	2.299806	-0.06111
0.1	5	1.095445	1.217103	0.111058	6	1.095445	1.044227	-0.04676
0.05	7	0.774597	0.804462	0.038557	8	0.774597	0.743585	-0.04004
0.01	17	0.34641	0.348873	0.007109	17	0.34641	0.339298	-0.02053
0.005	24	0.244949	0.245628	0.002771	25	0.244949	0.241484	-0.01415
0.001	55	0.109545	0.109858	0.002866	55	0.109545	0.108514	-0.00941
0.0005	77	0.07746	0.077423	0.000467	78	0.07746	0.076787	-0.00868
0.0001	173	0.034641	0.034669	0.000794	173	0.034641	0.034572	-0.00201

表 5-3 先驗分佈錯誤，定$\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$，$\tau_1^2=2$，$\tau_2^2=0.5$，$\tau_3^2=2$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	2	2.44949	2.512485	0.025718	3	2.44949	2.64058	0.078012
0.1	5	1.095445	1.217103	0.111058	5	1.095445	1.227101	0.120185
0.05	7	0.774597	0.804462	0.038557	8	0.774597	0.856683	0.105973
0.01	17	0.34641	0.348873	0.007109	17	0.34641	0.376841	0.087845
0.005	24	0.244949	0.245628	0.002771	24	0.244949	0.262597	0.072046
0.001	55	0.109545	0.109858	0.002866	55	0.109545	0.113917	0.039917
0.0005	77	0.07746	0.077423	0.000467	77	0.07746	0.079624	0.027941
0.0001	173	0.034641	0.034669	0.000794	173	0.034641	0.035037	0.01143

表 6-1 A=$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$,$X|\theta\sim N\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$,先驗分佈$\theta\sim N\left((\mu_1,\mu_2,\mu_3),\ \begin{pmatrix}\tau_1^2&0&0\\0&\tau_2^2&0\\0&0&\tau_3^2\end{pmatrix}\right)$

為正確時，$\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$，$\tau_1^2=\tau_2^2=\tau_3^2=1$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	3	3.464102	3.760051	0.085433	2	3.464102	3.056278	-0.069493
0.1	7	1.549193	1.745215	0.126531	5	1.549193	1.512008	-0.048362
0.05	10	1.095445	1.133544	0.034779	8	1.095445	1.069607	-0.037635
0.01	24	0.489898	0.494125	0.008629	17	0.489898	0.481623	-0.016890
0.005	34	0.34641	0.348218	0.005219	24	0.34641	0.341997	-0.012739
0.001	77	0.154919	0.155196	0.001785	55	0.154919	0.154027	-0.005756
0.0005	109	0.109545	0.109847	0.002765	77	0.109545	0.109035	-0.004648
0.0001	245	0.04899	0.049076	0.001759	173	0.04899	0.048924	-0.001325

表 6-2 先驗分佈錯誤，定$\mu_1=1$，$\mu_2=\mu_3=0$，$\tau_1^2=2$，$\tau_2^2=\tau_3^2=1$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	3	3.464102	3.760051	0.085433	3	3.464102	3.948517	0.139839
0.1	7	1.549193	1.745215	0.126531	5	1.549193	2.035034	0.313609
0.05	10	1.095445	1.133544	0.034779	8	1.095445	1.351996	0.234198
0.01	24	0.489898	0.494125	0.008629	17	0.489898	0.593288	0.211043
0.005	34	0.34641	0.348218	0.005219	24	0.34641	0.410138	0.183966
0.001	77	0.154919	0.155196	0.001785	55	0.154919	0.173446	0.119587
0.0005	109	0.109545	0.109847	0.002765	77	0.109545	0.121385	0.108088
0.0001	245	0.04899	0.049076	0.001759	173	0.04899	0.052851	0.078823

表 6-3 先驗分佈錯誤，定$\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$，$\tau_1^2=2$，$\tau_2^2=0.5$，$\tau_3^2=2$

	Robust				APO			
c	N_c	R_1	R_{Nc}	$\Delta_{R_{Nc}}$	T_c	R_1	R_{Tc}	$\Delta_{R_{Tc}}$
0.5	3	3.464102	3.760051	0.085433	3	3.464102	4.032232	0.164005
0.1	7	1.549193	1.745215	0.126531	5	1.549193	2.07915	0.342085
0.05	10	1.095445	1.133544	0.034779	8	1.095445	1.379897	0.259668
0.01	24	0.489898	0.494125	0.008629	17	0.489898	0.603309	0.2315
0.005	34	0.34641	0.348218	0.005219	24	0.34641	0.415489	0.199413
0.001	77	0.154919	0.155196	0.001785	55	0.154919	0.17452	0.126521
0.0005	109	0.109545	0.109847	0.002765	78	0.109545	0.115138	0.051062
0.0001	245	0.04899	0.049076	0.001759	173	0.04899	0.051714	0.055614

參考文獻

Arrow, K.J., Blackwell, D., and Girshick, M.A. (1949). Bayes and Minimax Solutions of Sequential Decision Problems, *Econometrica* 17: 213-244.

Bickel P.J. and Yahav,J.A. (1967). Asymptotically Pointwise Optimal Procedures in Sequential Analysis, Proceedings of Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1, 401-413, Unoversity of California Press.

Bickel P.J. and Yahav, J.A. (1968). Asymptotically Optimal Bayes and Minimax Procedures in Sequential Estimation, *Ann. Math. statist.* 33: 442-456.

Chow, Y.S., Robbins, H., and Siegmund, D. (1971). *Great Expectations*: The Theory of Optimal Stopping, Boston: Houghton Mifflin.

Chow, Y.S., and Yu, K.F. (1981). On the Performance of a Sequential Procedure for the Estimation of the Mean, Ann. Statist. 9: 184-189.

Ghosh, B.K. and Sen, P.K. (1991). Handbook of Sequential Analysis, New York: Marcel Dekker.

Ghosh, M. and Hoekstra, R.M. (1989). A.P.O. Rules in Hierarchical and Empirical Bayes Models, Sequential Analysis 8: 79-100.

Ghosh, M., Mukhopadhyay, N., and Sen, P.K. (1997). Sequential Estimation, New York: Wiley.

Ghosh, M., Sinha, B.K., and Mukhopadhyay, N. (1976). Multivariate Sequential Estimation, J. Mult. Anal. 6: 281-294.

Hwang, L.-C. (1999). A Robust Asymptotically Optimal Procedure in Bayes Sequential Estimation, Statistica Sinica 9: 893-904.

Hwang, L.-C. (2017). Asymptotically Optimal Procedures in Multivariate Bayesian Sequential Estimation, Sequential Analysis 36: 481-489.

Martinsek, A.T. (1987). Empirical Bayes Methods in Sequential Estimation, Sequential Analysis 6: 119-137.

Takada, Y. and Nagao, H. (2004). Asymptotic Improvement of the Sample Mean Vector for Sequential Point Estimation of a Multivariate Normal Mean with a LINEX Loss Function, Scientiae Mathematicae Japonicae 60: 337-345.

Wald, A. (1950). Asymptotic Minimax Solutions of Sequential Point Estimation Problems, Proceedings of Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability Los Angeles, 1-11, University of California Press.