

東海大學統計研究所

碩士論文

指導教授：劉家頤 博士

碎形特性於點過程之應用－台灣地區地震發生頻度分析

The point processes with fractal properties used  
in modeling earth-quakes in Taiwan.

研究生：曾筱晴

中華民國一零七年七月

## 摘要

我們了解有許多可以被記錄為點過程的資料，例如：地震的發生、神經細胞發射的傳導流或交通流量等，其中基於我們對地震的認識，了解到地震的發生是由一主震引發其餘震，與群集卜瓦松過程由一主要事件觸發其餘次要事件之機制相似，因此本研究以近年來台灣地區地震發生次數為適配對象，利用群集卜瓦松過程建立地震模型，過程中利用頻譜特性與碎形特性觀察其參數之變化，進而找出最接近真實地震資料之參數，並進一步做比較，最後證實群集卜瓦松過程除了高計數地震較難近似外，其餘部分能夠相似於地震發生過程。

## 致謝詞

回憶起這兩年在東海統計系當研究生的日子，心裡是充滿感謝的，學習的過程中有許多同學互相切磋學業，使我更加有效率地吸收教授們所傳授的專業知識，系上老師也總是不辭辛勞地為我們解開課業上的疑惑。

此篇論文能順利完成，首先要感謝劉家頤老師在此期間的指導與督促，不論是問題的挖掘抑或觀念的指正，皆給予我細心的教導與寶貴的意見，且會適時地給予鼓勵，使我受益良多且在寫作論文的期間更加順利，與老師討論論文的過程是非常愉快且收益良多的。

在口試期間，特別感謝張玉媚老師與楊權輝老師，在百忙之中仍抽空詳閱我的論文，並且提供寶貴的意見，使論文內容更趨完善。

此外，在研究所求學的過程中，非常感謝我的家人朋友的支持與照顧，在我遇到挫折時適時地給予鼓勵，做我的後盾，讓我能無憂無慮地專心完成學業。

最後，以此論文獻給我的家人、朋友、師長以及所有幫助過我的人，感謝你們無盡的關心與協助。

曾筱晴 謹致

民國一零七年七月

# 目錄

第一章 續論	1
1.1 研究動機與目的	1
1.2 文獻回顧	2
1.2.1 隨機點過程	2
1.2.2 卜瓦松過程	3
1.2.3 均齊性卜瓦松過程	3
1.2.4 非均齊性卜瓦松過程	3
1.3 地震概述	4
1.3.1 地震之成因	4
1.3.2 地震之相關名詞解釋	4
第二章 群集卜瓦松過程	5
2.1 群集卜瓦松之定義	5
2.2 群集個數之分配	8
2.3 群集卜瓦松過程與地震之關係	8
第三章 研究方法	8
3.1 頻譜分析	8
3.1.1 頻譜分析與應用	8
3.1.2 自我相關函數與偏自我相關函數	9
3.1.3 頻譜密度函數	10
3.1.4 群集卜瓦松之頻譜特性	10
3.2 碎形特性與應用分析	12
3.2.1 碎形特性與發展	12
3.2.2 碎形特性之點過程	13
3.2.3 群集卜瓦松過程之碎形特性	14
3.2.4 以發生次數為測量基準之碎形分析方法	14
第四章 模擬過程與實證分析	16
4.1 分析比較之目的	16
4.1.1 兩年真實地震資料之特性(2016/01/01~2018/01/01)	16
4.2 群集卜瓦松過程之模擬	19
4.2.1 參數估計過程	19
4.3 真實地震資料與模擬資料之比較(2016/01/01~2018/01/01)	27
4.4 真實地震資料	35
4.4.1 十年真實地震資料之特性(2008/01/01~2018/01/01)	35

4.5 群集卜瓦松過程之模擬	38
4.6 真實地震資料與模擬資料之比較(2008/01/01~2018/01/01)	46
第五章 結論與後續研究	54
5.1 結論	54
5.2 後續研究方向	54
參考文獻	55

# 圖表目錄

## 第一章

圖 1.2.1 不同定義下之序列圖----- 2

圖 1.3.1 地震波----- 5

## 第二章

圖 2.1.1 不同 alpha 下伽瑪分配pdf 圖----- 6

圖 2.1.2 不同 beta 下伽瑪分配pdf 圖----- 7

圖 2.1.3 群集卜瓦松過程----- 7

## 第三章

圖 3.1.1 測量域示意圖----- 9

圖 3.1.2 群集卜瓦松過程雙對數尺度頻譜圖----- 11

圖 3.2.1 Sierpinski gasket----- 12

圖 3.2.2 冰晶體----- 12

## 第四章

2016/01/01~2018/01/01

圖 4.1.1 真實地震資料之次數分配圖----- 16

圖 4.1.2 真實地震資料之頻譜圖----- 17

圖 4.1.3 真實地震資料之雙對數尺度頻譜圖----- 17

圖 4.1.4 真實地震資料之 Variance-Time-Curve----- 18

圖 4.1.5 真實地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve----- 18

圖 4.1.6 真實地震資料之 Fano Factor 圖----- 19

圖 4.1.7 真實地震資料之雙對數尺度 Fano Factor 圖----- 19

圖 4.2.1 真實地震資料雙對數尺度之 Variance-Time-Curve----- 21

圖 4.2.2 模擬雙對數尺度 Variance-Time-Curve 之斜率與 z 值的關係圖----- 21

圖 4.2.3 針對 1.8 到 2.8 之間所算出之斜率平均數與 z 值關係圖----- 22

表 4.2.1 真實地震資料之次數分配----- 22

圖 4.2.4 參數組(1)次數分配比較圖----- 23

圖 4.2.5 參數組(1)雙對數頻譜圖----- 23

圖 4.2.6 參數組(1)雙對數 VTC 圖----- 23

圖 4.2.7 參數組(2)次數分配比較圖----- 24

圖 4.2.8 參數組(2)雙對數頻譜圖----- 24

圖 4.2.9 參數組(2)雙對數 VTC 圖----- 24

圖 4.2.10 參數組(3)次數分配比較圖----- 25

圖 4.2.11 參數組(3)雙對數頻譜圖----- 25

圖 4.2.12 參數組(3)雙對數 VTC 圖----- 25

圖 4.3.1 模擬地震資料之頻譜圖----- 27

圖 4.3.2 模擬地震資料之雙對數尺度頻譜圖----- 27

圖 4.3.3 調整後模擬地震資料之頻譜圖-----	28
圖 4.3.4 調整後模擬地震資料之雙對數尺度頻譜圖-----	28
圖 4.3.5 真實地震資料之時間數列圖-----	29
圖 4.3.6 模擬地震資料之時間數列圖-----	29
圖 4.3.7 真實與模擬地震資料之次數分配比較圖-----	30
表 4.3.1 發生次數之基本統計量-----	31
圖 4.3.8 真實與模擬地震資料之雙對數 Variance-Time-Curve 比較圖-----	31
圖 4.3.9 真實與模擬地震資料之雙對數尺度 FF 比較圖-----	31
圖 4.3.10 真實地震資料之發生次數 ACF 圖-----	32
圖 4.3.11 模擬地震資料之發生次數 ACF 圖-----	32
圖 4.3.12 真實地震資料之發生次數 PACF 圖-----	33
圖 4.3.13 模擬地震資料之發生次數 PACF 圖-----	33
圖 4.3.14 真實地震資料之風險率-----	34
圖 4.3.15 模擬地震資料之風險率-----	34
2008/01/01~2018/01/01	
圖 4.4.1 真實地震資料之次數分配圖-----	35
圖 4.4.2 真實地震資料之頻譜圖-----	36
圖 4.4.3 真實地震資料之雙對數尺度頻譜圖-----	36
圖 4.4.4 真實地震資料之 Variance-Time-Curve-----	37
圖 4.4.5 真實地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve-----	37
圖 4.4.6 真實地震資料之 Fano Factor 圖-----	38
圖 4.4.7 真實地震資料之雙對數尺度 Fano Factor 圖-----	38
圖 4.5.1 真實地震資料雙對數尺度之 Variance-Time-Curve-----	39
圖 4.5.2 模擬雙對數尺度 Variance-Time-Curve 之斜率與 z 值的關係圖-----	39
圖 4.5.3 針對-2.7 到-2.2 之間所算出之斜率平均數與 z 值關係圖-----	40
表 4.5.1 真實地震資料之次數分配-----	40
圖 4.5.4 參數組(1)次數分配比較圖-----	41
圖 4.5.5 參數組(1)雙對數頻譜圖-----	41
圖 4.5.6 參數組(1)雙對數 VTC 圖-----	41
圖 4.5.7 參數組(2)次數分配比較圖-----	42
圖 4.5.8 參數組(2)雙對數頻譜圖-----	42
圖 4.5.9 參數組(2)雙對數 VTC 圖-----	42
圖 4.5.10 參數組(3)次數分配比較圖-----	43
圖 4.5.11 參數組(3)雙對數頻譜圖-----	43
圖 4.5.12 參數組(3)雙對數 VTC 圖-----	43
圖 4.5.13 參數組(4)次數分配比較圖-----	44
圖 4.5.14 參數組(4)雙對數頻譜圖-----	44
圖 4.5.15 參數組(4)雙對數 VTC 圖-----	44

圖 4.6.1 模擬地震資料之頻譜圖-----	46
圖 4.6.2 模擬地震資料之雙對數尺度頻譜圖-----	46
圖 4.6.3 調整後模擬地震資料之頻譜圖-----	47
圖 4.6.4 調整後模擬地震資料之雙對數尺度頻譜圖-----	47
圖 4.6.5 真實地震資料之時間數列圖-----	48
圖 4.6.6 模擬地震資料之時間數列圖-----	48
圖 4.6.7 真實與模擬地震資料之次數分配比較圖-----	49
表 4.6.1 發生次數之基本統計量-----	49
圖 4.6.8 真實與模擬地震資料之雙對數 Variance-Time-Curve 比較圖-----	50
圖 4.6.9 真實與模擬地震資料之雙對數尺度 FF 比較圖-----	50
圖 4.6.10 真實地震資料之發生次數 ACF 圖-----	51
圖 4.6.11 模擬地震資料之發生次數 ACF 圖-----	51
圖 4.6.12 真實地震資料之發生次數 PACF 圖-----	52
圖 4.6.13 模擬地震資料之發生次數 PACF 圖-----	52
圖 4.6.14 真實地震資料之風險率-----	53
圖 4.6.15 模擬地震資料之風險率-----	53



# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機與目的

台灣處於亞洲東部，於東北亞和東南亞交會處，東接太平洋（菲律賓海）、西隔台灣海峽與歐亞大陸（中國大陸）相望、南濱巴士海峽與菲律賓相望，北接東海，東北方則與琉球群島相接。

因其地理位置於歐亞大陸板塊與菲律賓海板塊的交接地帶上，兩板塊相互擠壓之下形成台灣島，在海域地區則出現有海溝、海脊、海槽及海脊等現象，板塊活動除了反映在地形之外，也使得台灣地區出現相當頻繁的地震情形，釀成災害之地震亦頻傳。（李伊婷等，民 102，中央氣象局地震測報中心）

依地震的發生型態，台灣地區主要分為三個地震帶：西部地震帶、東部地震帶及東北部地震帶。西部地震帶包括整個台灣西部地區，主要因為板塊碰撞前緣的斷層作用而引發地震活動，震源深度較淺，由於人口稠密，因此大地震容易造成災情。東部地震帶係直接肇因於菲律賓海板塊與歐亞板塊碰撞所造成，地震頻率高、震源深度較淺。東北部地震帶受沖繩海槽擴張作用影響，多屬深層地震，並伴隨有地熱與火山活動現象。（交通部中央氣象局）

身處於地震頻繁的台灣，對地震的經驗人人皆有，對這個天災也都心存畏懼，不免試圖多加了解，以期避免地震所帶來生命財產之重大損失，雖地震屬於天然災害，無法有效預測，但我們了解地震為隨機發生且可被記錄為一點過程資料，因此，本研究嘗試以群集卜瓦松過程適配真實地震資料，透過模擬與分析，證實群集卜瓦松過程可近似地震之發生機制，並希望透過此一研究對地震有更進一步的了解。

## 1.2 文獻回顧

### 1.2.1 隨機點過程(Stochastic point process)

在我們生活的周遭，有許多看似不規則之現象產生，例如排隊過程、店家雨傘放置過程、不同級別地震的發生……等等，經研究發現，其實某些事物遵循著某一特定規律，若以統計學角度而言，我們認為這些事物服從某些特定機率函數，此現象稱為隨機過程(stochastic point process)。

隨機點過程由一序列的時間所組成，也可簡稱為點過程，即為遵循某一機率分配之特定事件隨機發生之時間，由於單位為時間，其範圍落在時間軸之 $[0, \infty)$ 半實數線上。隨機點過程僅表示特定事件發生之時間，並無法表達其自身相關性及更多訊息與特性，因此為進一步探討，經常將序列 $\{t_i\}$ 拆解為以間隔時間為基準之序列及發生次數為基準之序列來分析，此兩種新的序列將具有許多統計上之意義，且提供更多點過程之特性。(Papoulis, 2001)

事件發生間隔時間(interarrival time)之序列 $\{\tau_i\}$ ，其中 $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ ，代表了第  $i$  個間隔時間，為第  $i$  個事件與第  $i-1$  個事件之間隔時間，因此 $\tau_i$ 為正實數所構成之序列，若將其序列累加至最終項，即為事件發生之時間，也就是原始之點過程 $\{t_i\}$ 。

發生次數(count)之序列 $\{N_i\}$ ，其中 $N_i$ 為以每單位計數測量時間  $T$  為基準下之第  $i$  個計數窗口(counting window)所發生之事件次數，因此 $N_i$ 為非負整數所構成之序列， $N_i$ 加總後即為點過程事件總發生之次數。以下為圖例示範：

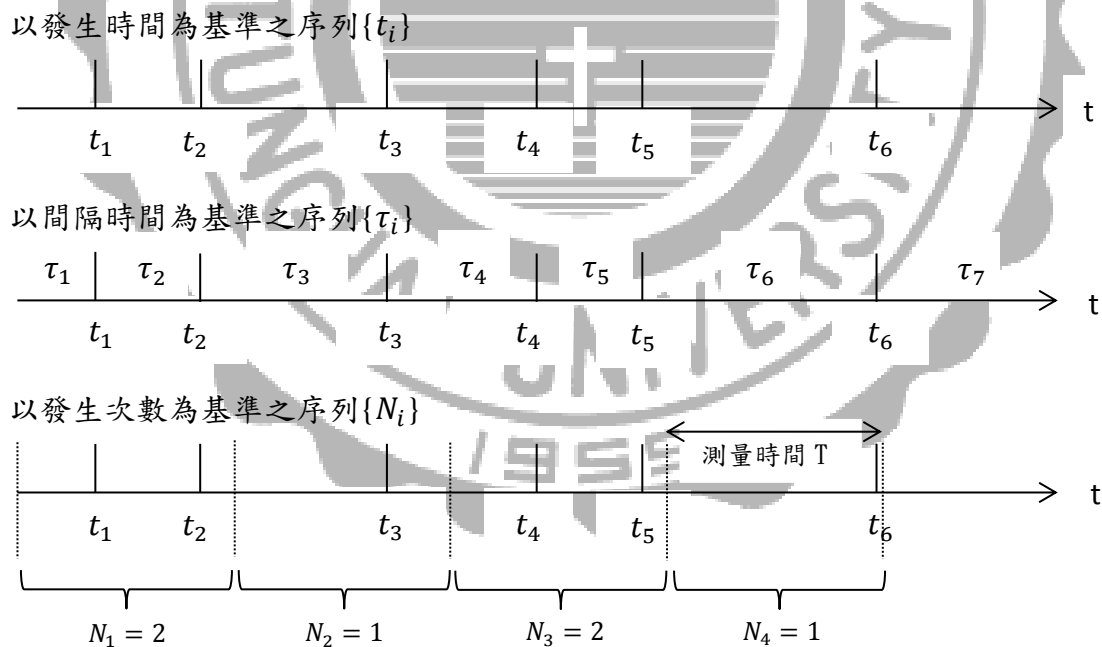


圖 1.2.1 不同定義下之序列圖

### 1.2.2 卜瓦松過程(Poisson process)

卜瓦松過程為最基礎的一種點過程理論，經常被應用於各種不同領域，以事件的發生次數定義之，其具有以下條件：

1. 在兩兩不重疊之時間區間內的發生事件次數為互相獨立之隨機變量。
2. 在時間區間 $[t, t + \tau]$ 內之事件發生次數的機率分配為

$$P[(N(t + \tau) - N(t)) = k] = \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3.  $N(t_0) = 0$ ，指在起始時間點無事件發生，其中  $t_0 = 0$ 。
4. 給定任意時間點  $t \geq 0, s \geq 0, N(t) - N(0)$  和  $N(t + s) - N(t)$  有相同之機率分配。
5.  $P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$ ，其中  $o(\Delta t)$  滿足  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ ，表示在極短時間區間內發生多於兩次事件之機率幾乎為 0。(Gallager, R.G, 1996)

### 1.2.3 均齊性卜瓦松過程(Homogeneous Poisson process, HPP)

均齊性卜瓦松過程之參數為  $\lambda$ ，其中  $\lambda$  為一正數，是固定之參數，通常稱為發生率或強度(intensity)。給定任意  $t_0 \geq 0, t_1 \geq 0$  下，其中  $t_0 \neq t_1$ ，在時間點  $t_0$  事件的發生與在時間點  $t_1$  事件的發生不互相影響，因此事件發生間隔時間之序列  $\{\tau_i\}$  與發生事件次數之序列  $\{N_i\}$  皆獨立且服從相同分配(independent and identically distribution; iid)。均齊性卜瓦松過程之發生間隔時間服從指數分配(exponential distribution)，而事件發生次數則為卜瓦松分配(Poisson distribution)。

### 1.2.4 非均齊性卜瓦松過程(Nonhomogeneous Poisson process, NHPP)

非均齊性卜瓦松過程之參數為  $\lambda(t)$ ，其中  $\lambda(t)$  為強度(intensity)參數，為時間  $t$  之函數，因此會隨著不同時間  $t$  而改變。因此，非均齊性卜瓦松過程滿足以下三個條件：

1.  $\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(N(t+\Delta t) - N(t) = 1)}{\Delta t}$

2.  $P(N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2) = o(\Delta t)$ ，其中  $o(\Delta t)$  滿足  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ ，表示在極短時間區間內發生多於兩次事件之機率幾乎為 0

3.  $P(N(t_0) = 0) = 1$

(Pinsky and Karlin, 2011)

### 1.3 地震概述(中央氣象局，地震百問，2003)

#### 1.3.1 地震之成因

首先，我們可以利用日常生活行為簡單地解釋一下何謂地震，當我們今天用手握住筷子的兩端，慢慢施力使之彎曲，隨著力道增大，筷子將越來越彎曲，直至無法承受後斷裂為兩半，此一斷裂所產生之振動即為地震。地震為地底下之地殼因板塊運動而累積巨大地應力，在地應力長期緩慢地作用下，造成地殼的岩層發生彎曲變形，當地應力超過岩石本身能承受的強度時，便會使岩層斷裂錯動，並伴隨著巨大能量之釋放，涉及周圍岩層而引起振動。在地震成因中，可由它的發生原因分為：

- 1.火山地震：由於火山活動時岩漿噴發衝擊或熱力作用而引起的地震。
- 2.衝擊地震：地殼因大型隕石撞擊而產生。
- 3.構造地震：由於地球不停地運動變化，從而從地殼內部產生巨大地應力作用。

在地應力長期緩慢的作用下，造成地殼的岩層發生彎曲變形，當地應力超過岩石本身能承受的強度時便會使岩層斷裂錯動，其巨大的能量突然釋放，形成構造地震，世界上絕大多數地震都屬於構造地震。

#### 1.3.2 地震之相關名詞解釋

地震順序：

- 1.前震(Fore-Shock)：同一系列之地震中，於主震之前發生之地震稱為前震。有時前震為時非常短且不明顯。
- 2.主震(Main-Shock)：同一系列之地震中規模最大者稱為主震；若最大者有兩個，先發生者稱為主震。
- 3.餘震(After-Shock)：同一系列之地震中，主震之後發生的地震稱之為餘震。
- 4.群震(Swarm-earthquake)：一群不容易區分前震、主震及餘震之地震。

地震發生：

- 1.震源(hypocenter)：地層發生錯動或斷裂之地點。淺源地震為震源在地面到地面以下七十公里內；中源地震為震源深度在七十到三百公里內；深源地震為震源深度在三百公里以上。
- 2.震央(epicenter)：震源垂直延伸到地表之投影點。
- 3.地震規模：指地震所釋放之能量，臺灣所採用的計算方式為芮氏規模，在敘述時以「規模 5.0」、「規模 7.3」的方式來表示，數字的後面不加「級」字。地震規模每增加「1」，所釋放之能量約為前一個等級的 31~32 倍。
- 4.地震震度：指地震時人們對於地面震動之感受程度，或物品因震動遭受破壞之程度。中央氣象局利用地震觀測站所記錄之最大加速度，計算出各地區之最大震度，表達方式為數字後加「級」。在一場地震當中，設在不同地區的地震觀測站所記錄到的最大震度不盡相同。
- 5.斷層：指岩石形成節理構造破裂後，兩側岩層發生顯著之相對位移。斷層大小不等，大的斷層可縱貫整個岩石圈，水平則可綿延幾千公里。

6. 體波(Body wave)：在地球內部傳遞，又分成 P 波和 S 波兩種。

P 波：P 代表主要 (Primary) 或壓縮 (Pressure)，為一種縱波，粒子振動方向和波前進方平行，在所有地震波中，前進速度最快，也最早抵達。P 波能在固體、液體中傳遞。

S 波：S 意指次要 (Secondary) 或剪力 (Shear)，前進速度僅次於 P 波，粒子振動方向垂直於波的前進方向，是一種橫波。S 波只能在固體中傳遞，無法穿過液態外地核。兩者詳細圖片如下：

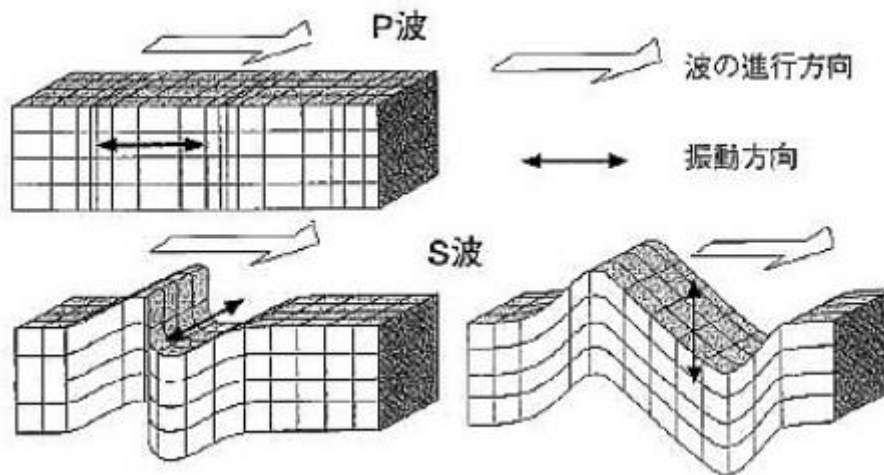


圖 1.3.1 地震波

## 第二章 群集卜瓦松過程(Cluster Poisson processes ; CPP)

### 2.1 群集卜瓦松過程之定義

群集卜瓦松過程為許多群集內含不同個數之事件所組成，基於卜瓦松過程之基礎，進而推廣成有群集特性之過程，從事件發生時間圖來看，有較清楚之疏密程度分別，完整事件由主要過程及次要過程所組成，說明如下：

#### 1. 主要過程(primary process)

主要過程由一連串主要事件之發生序列所組成，主要過程為均齊性卜瓦松過程，亦即在時間 $[0, t]$ 間主要事件發生 $k$ 次之機率為卜瓦松分配，式子如下：

$$P\{(N(t) = k)\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} ; k = 0, 1, 2, 3, \dots ; 0 \leq \lambda t < \infty \quad (2.1)$$

$$E(k) = \lambda t , \text{Var}(k) = \lambda t ,$$

其中 $\lambda$ 為卜瓦松分配之唯一參數，稱為強度參數。(Papoulis, 2001)

主要過程之發生次數服從卜瓦松分配，因此，事件發生之間隔時間服從指數分配，其機率密度如下：

$$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} ; 0 \leq x < \infty ; \lambda > 0 \quad (2.2)$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} , \text{Var}(x) = \frac{1}{\lambda^2} ,$$

其中 $\lambda$ 為指數分配之唯一參數，亦即主要事件每單位時間內期望發生之次數。

## 2.次要過程(secondary process)

在主要過程中，每個主要事件會各自觸發(trigger)一連串之次要事件，即所謂的群集，每個群集皆由  $M$  個隨機事件所組成，其中  $M$  為隨機變數，服從某一特定分配，因此，當  $M = 1$  時，表示僅有主要事件，並未觸發其次要事件，不具有群集之現象。當  $M > 1$  時，表示此過程由主要事件及其觸發之一連串次要事件所組成，具有群集之現象，即為一群集卜瓦松過程，群集間彼此互相獨立且具有相同分配，這些群集之集合即為次要過程。(Grunies et al., 1989)

假設群集內事件發生之間隔時間服從伽瑪分配(gamma distribution)，以隨機變數  $x$  來表示之，其機率密度函數如下：

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} ; 0 \leq x < \infty ; \alpha, \beta > 0 , \quad (2.3)$$

$$E(x) = \alpha\beta , \text{Var}(x) = \alpha\beta^2 ,$$

其中， $\alpha$  為形狀參數(shape parameter)，影響機率密度函數圖形之陡峭程度； $\beta$  為尺度參數(scale parameter)，影響機率密度函數圖形之散佈程度； $\Gamma(\alpha)$  為伽瑪函數(gamma function)，伽瑪函數之數學式如下：

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt , \quad (2.4)$$

當伽瑪分配之形狀參數為 1 時，便是指數分配。下圖為分別給定  $\alpha$ 、 $\beta$  下， $\alpha$ 、 $\beta$  對 pdf 的影響：

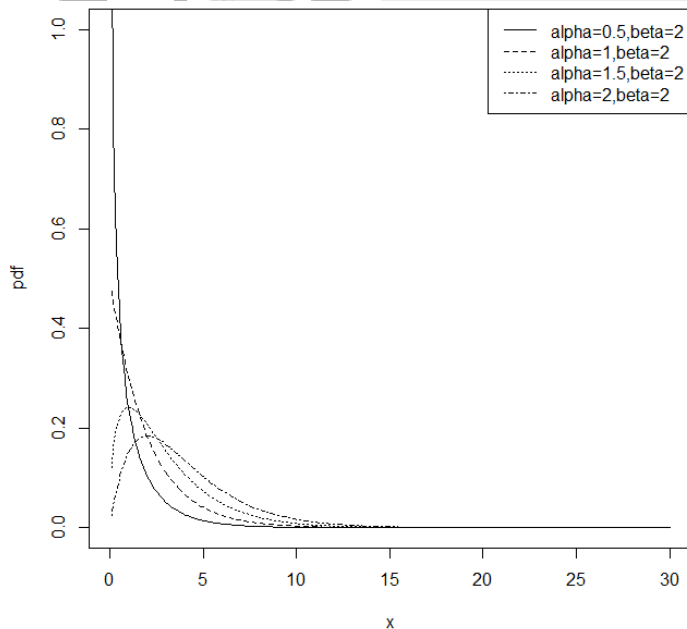


圖 2.1.1 不同 alpha 下伽瑪分配pdf 圖

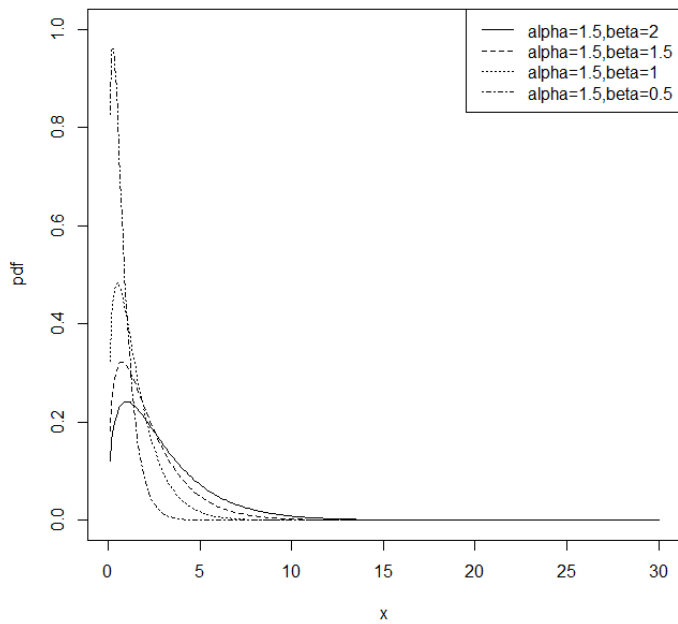


圖 2.1.2 不同 beta 下伽瑪分配pdf 圖

### 3. 完整過程(complete process)

將所有主要事件與各群集中發生之次要事件依照時間順序疊合而成，形成一個無差別序列，即為完整過程，當一個完整的群集卜瓦松過程形成後，各群集之結構已合而為一，各群集內之結構將相對沒那麼重要。

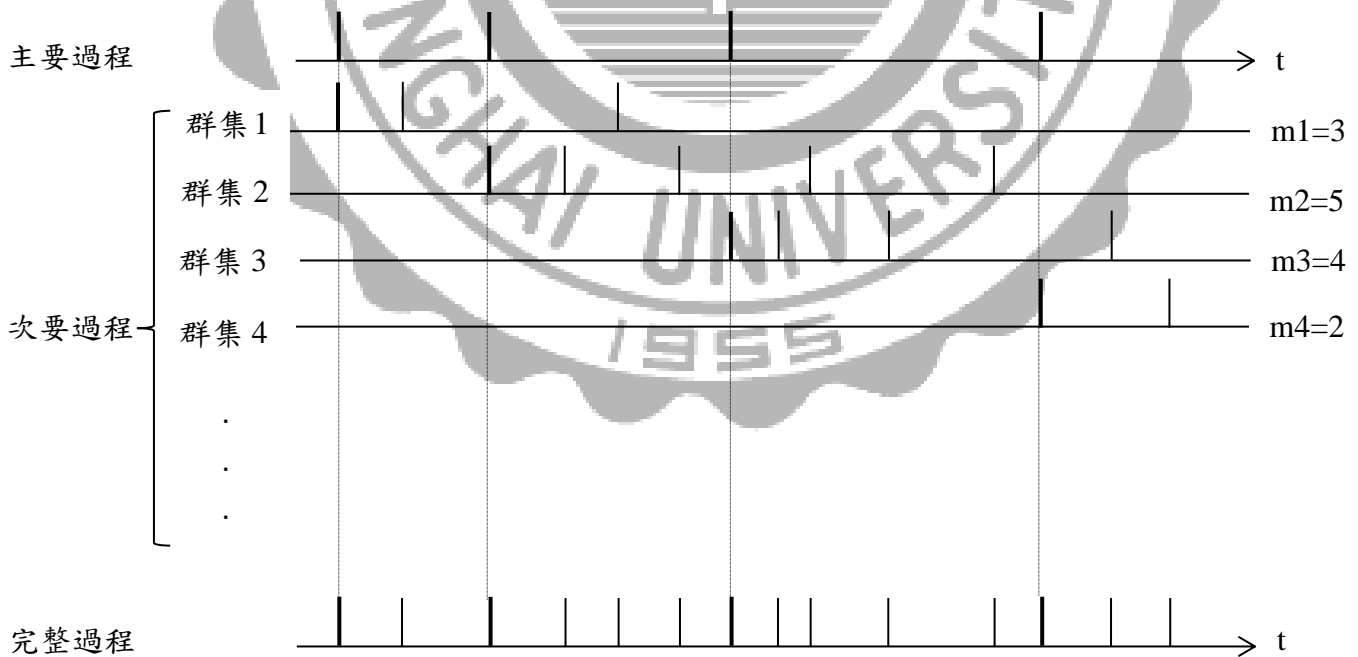


圖 2.1.3 群集卜瓦松過程

## 2.2 群集個數之分配(clutser-size distribution)

群集個數之分配意指每個群集內事件發生個數所服從之分配，群集個數以隨機變數  $M$  表示之，此特殊機率分配如下：

$$P(m) = \frac{m^z}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z}, -\infty < z < \infty, \quad (2.5)$$

$$E(M) = \sum_{m=1}^{N_0} mP(m) = \frac{\sum_{m=1}^{N_0} m^{z+1}}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z}, \quad (2.6)$$

$$E(M^2) = \sum_{m=1}^{N_0} m^2P(m) = \frac{\sum_{m=1}^{N_0} m^{z+2}}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z}, \quad (2.7)$$

其中， $N_0$  為給定最大群集個數， $z$  為特定實數。群集個數分配與後面所討論之頻譜形狀息息相關，因此有其重要性。(Gruneis et al., 1989)

## 2.3 群集卜瓦松過程與地震之關係

由前一章所提及，隨機點過程由一序列的時間所組成，而真實地震發生之紀錄亦可視為一點過程之實現值，故以點過程來配適地震資料應屬適當。

另外，前兩小節可得知一群集卜瓦松過程是由一連串主要事件各自觸發一連串次要事件而形成之點過程，而地震發生情形亦為一主震各自引發其餘震，類似於群集卜瓦松過程，因此本研究嘗試以群集卜瓦松過程模擬真實地震資料。

# 第三章 研究方法

## 3.1 頻譜分析

### 3.1.1 頻譜分析與應用

時間序列是一組按照時間先後發生順序所排列而成之序列，亦為隨機過程中等距時間之實現值，時間間隔也許為分秒，也許為日、月、年等更大之時間單位。

在時間序列的資料中，有兩種主要之分析方法：時間定義域分析法(time domain)及頻率定義域分析法(frequency domain)(Boualem, 2015)，在分析資料過程中以何種角度來看即稱為域，顧名思義時間定義域(時域)為以時間為角度；頻率定義域(頻域)則以頻率為角度，在了解此兩種方法前，首先必須先了解何謂時域以及頻域，茲說明如下：

1. 時域：描述一序列信號對時間之關係，經常分析其平穩性或週期性。在我們生活中，經歷與發展皆是以時間為單位所記錄，已經習慣事情依照時間先後所發生，而時域也是唯一實際存在之域。在空間概念上，時域即為從正面之角度去觀察信號之改變。
2. 頻域：描述一序列信號對頻率之關係，以橫軸為頻率，縱軸為該頻率信號之頻譜密度函數所畫出的圖，即為頻譜(spectrum)圖，描述了頻率與信號之關係。在空間概念上，頻域即為從側面之角度去觀察信號之幅度。其時域及頻域之示意圖，如下：



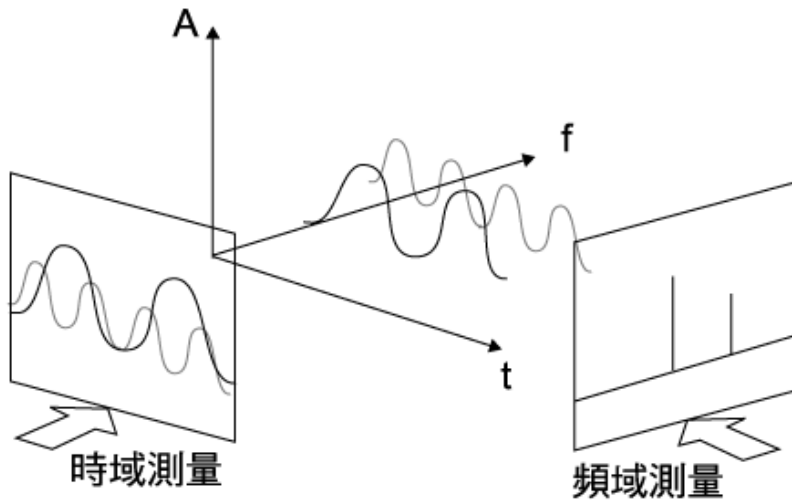


圖 3.1.1 測量域示意圖

A：信號幅度，t：時間，f：頻率。(http://www.ledgb.com/)

接著，以下為兩種分析法之解釋：

1. 時間定義域分析法：在時間域中對一序列事件分析之方法，利用自我相關函數 (autocorrelation function, ACF) 作為建模之依據，分析序列之穩定性及形狀變化。
2. 頻率定義域分析法：以頻域為觀測角度對一序列事件分析之方法，以頻譜作為分析之工具，亦稱頻譜分析。

其中，時域分析法中之時間函數可經由傅立葉轉換(Fourier transform)得到頻域分析中之頻譜密度函數(Spectral density function)，反之則可由逆傅立葉轉換(inverse fourier transform)得到。

地震的發生能夠以間隔時間為基準與發生次數為基準之序列紀錄之，兩種紀錄方法皆可使用以上兩種方法做分析，而本研究選擇採用頻率定義分析法來分析計數過程 $\{N_i\}$ 。

### 3.1.2 自我相關函數與偏自我相關函數(William W. S., 1989)

自我相關函數顧名思義為描述一序列隨機變數在時間點 $t(t > 0)$ 與時間點 $t + k$ 之相關性，假設一平穩隨機序列 $\{Z_i\}$ ，其自我相關函數之數學式為：

$$\rho(k) = \frac{\text{Cov}(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(Z_t)}\sqrt{\text{Var}(Z_{t+k})}} = \frac{\gamma(k)}{\sqrt{\gamma^2(0)}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} \quad , \text{其中}, \quad (3.1)$$

$$\text{Cov}(Z_t, Z_{t+k}) = \gamma(k)。$$

其性質如下：

1.  $\rho(k) = \rho(-k)$ ； $\gamma(k) = \gamma(-k)$ ，for all  $k$ 。
2.  $\gamma(0) = \text{Var}(Z_t)$ ； $\rho(0) = 1$ 。
3.  $|\gamma(k)| \leq \gamma(0)$ ； $|\rho(k)| \leq 1$ 。

一平穩隨機序列 $\{Z_i\}$ ，在不失一般性的情況下，假設 $E(Z_i) = 0$ ，令 $Z_{t+1}, Z_{t+2}, Z_{t+3}, \dots$ 與 $Z_{i+k}$ 為一線性關係，其數學式如下：

$\hat{Z}_{t+k} = \alpha_1 Z_{t+k-1} + \alpha_2 Z_{t+k-2} + \dots + \alpha_{k-1} Z_{t+1}$ ，其中 $\hat{Z}_{t+k}$ 為 $Z_{t+k}$ 之最佳線性估計。偏自我相關函數為剔除了中間 $k-1$ 個隨機變數的干擾後， $Z_t$ 對 $Z_{t+k}$ 影響的相關程度，其偏自我相關函數之數學式為：

$$P_k = \frac{\text{Cov}[(Z_t - \hat{Z}_t), (Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})]}{\sqrt{\text{Var}(Z_t - \hat{Z}_t)} \sqrt{\text{Var}(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})}}, \text{ 其中,}$$

$$\text{Var}(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}) = E[Z_{t+k}(Z_{t+k} - \alpha_1 Z_{t+k-1} - \dots - \alpha_{k-1} Z_{t+1})],$$

$$\text{Var}(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}) = \text{Var}(Z_t - \hat{Z}_t) = \gamma(0) - \alpha_1 \gamma(1) - \dots - \alpha_{k-1} \gamma(k-1),$$

$$\text{Cov}[(Z_t - \hat{Z}_t), (Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})] = \gamma(k) - \alpha_1 \gamma(k-1) - \dots - \alpha_{k-1} \gamma(1),$$

$$\text{Cov}(Z_t, Z_{t+k}) = \gamma(k)。$$

### 3.1.3 頻譜密度函數(Spectral density function)

頻譜圖中的頻譜密度函數 $s(f)$ 為頻率 $f$ 之函數，若已知一時間函數為 $x(t)$ ，則其頻譜密度 $S(\omega)$ 可由傅立葉轉換得來，其式子如下：

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.2)$$

逆函數則為：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \text{ 其中} \quad (3.3)$$

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t), i = \sqrt{-1}, \omega(\text{角頻率}) = 2\pi f. (\text{Weisstein, E. W., 2004})$$

### 3.1.4 群集卜瓦松過程之頻譜特性

在 Gruneis(1989)中已仔細說明了群集卜瓦松之頻譜特性，其頻譜密度函數 $s(f)$ 包含兩部分，第一項為白噪音(white noise)，第二項為因群集形成而有的額外噪音(excess noise, EXN)，其式子如下：

$$\begin{aligned} s(f) &= 2\langle n_{tot} \rangle + 2\langle n_c \rangle Q(f) \\ &= 2\langle n_c \rangle \langle m \rangle + 2\langle n_c \rangle \frac{c}{(f\langle \lambda \rangle)^b}, \text{ 其中} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\langle n_{tot} \rangle = \langle n_c \rangle \langle m \rangle, Q(f) = \frac{c}{(f\langle \lambda \rangle)^b},$$

$\langle n_{tot} \rangle$ ：總事件平均發生率(mean rate of overall occurrence of events)，

$\langle n_c \rangle$ ：群集平均發生率(mean rate of cluster occurrence)，

$\langle m \rangle$ ： $\sum_{m=1}^{N_0} m p_m$ ，群集平均發生個數(mean number of events within cluster)，

$Q(f)$ ：群集內事件相互之關係，

$\langle \lambda \rangle$ ：群集內事件發生之平均間隔時間，

$c$ ：常態，

$f$ ：頻率，

$b$ ：特定實數 $z$ 之函數，定義如下：

$b = 0$ ， $-\infty < z \leq -3$ ；

$b = z + 3$ ， $-3 \leq z \leq -1$ ；

$b = 2$ ， $-1 < z < \infty$ 。(Grüneis and Baiter, 1986)

在頻譜分析中，頻率 $f$ 與頻譜密度 $s(f)$ 呈現反比現象，稱為低頻率波動型態(low frequency fluctuation)或 $1/f^b$ 波動型態。通常一碎形點過程之頻譜密度函數在頻率很大時會趨近至一近似值(Lowen and Teich, 1994)，而群集卜瓦松過程正具備此一特性。在數學上， $1/f^b$ 波動型態可被建立為具有碎形特性之隨機過程，碎形特性在3.2小節有詳細說明。

下圖為一雙對數尺度頻譜圖(double-logarithmic scale spectrum)，分別由白噪音與額外噪音所組成，從圖中可觀察出頻率 $f$ 與頻譜密度 $s(f)$ 為 $1/f^b$ 波動型態，其型態主要部份由額外噪音所構成。從額外噪音之上下界 $F_0$ 、 $F_1$ 及範圍EXN可求出其頻譜密度之斜率 $B_e$ ，表示當頻率 $f$ 增加時，頻譜密度 $s(f)$ 遞減之快慢程度。

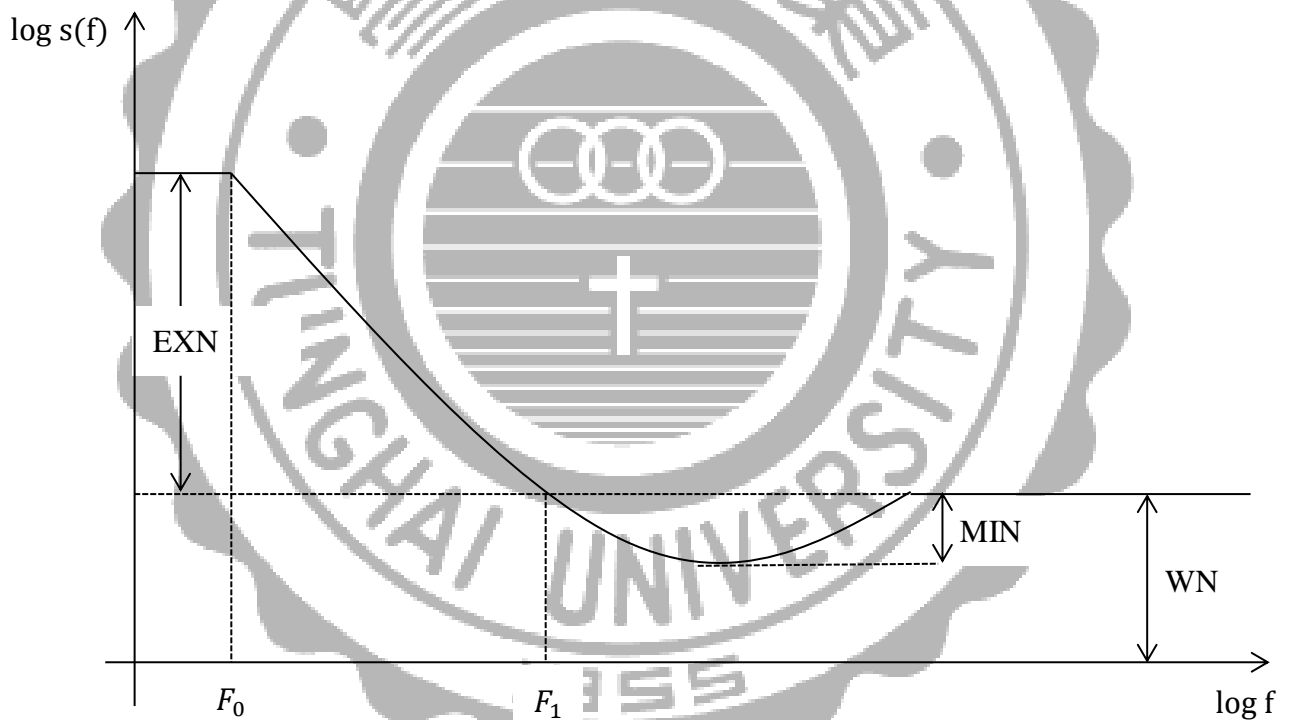


圖 3.1.2 群集卜瓦松過程雙對數尺度頻譜圖

上圖中，

WN：白噪音之範圍

MIN：小於白噪音之最小深度

EXN：額外噪音之範圍

$F_0$ ：額外噪音下界(lower limit of excess noise)

$F_1$ ：額外噪音上界(upper limit of excess noise)

## 3.2 碎形特性與應用分析

### 3.2.1 碎形特性與發展(Fractal property)

一事物中的任意一小部分結構與整體之結構相似或是整體結構的複製，即代表整體看上去與只看任意一小部分是一致的，當具有以上的性質，通稱為具有碎形特性之事物。

最早出現碎形一詞，是由數學家 Benoit Mandelbrot 首次提出(Mandelbrot, B., 1982)，並將此概念拓展到自然界中的幾何圖形，建立在看似不規則的形狀在所有尺度上皆可以具有相同結構的概念上，之後便廣泛地被應用在各個領域，在大自然生活中，例如斷層線、蕨類植物的葉子及冰晶體等，皆能觀察到碎形特性，在醫學方面，為了分析不同癌症等級中病理影像的亮度及紋理複雜度的變化，提出以碎形為基礎的紋理特徵萃取方法(鄭淑真，2004)；在地理學方面，藉由碎形了解空間分布型態演變及演變狀況(李介中與蔡博文，2005)；在音樂學上，由碎形理論衍生的準則作曲方式稱作碎形音樂創作，藉由碎形為基礎，利用電腦碎形的疊代程序，將單一動機의各種變形，在不同聲部間以指數倍數的增值方式來構成音樂的碎形結構，產生三聲部的碎形音樂(施博文，2010)。因此，由上述例子可見，碎形已成為和人類與自然界中息息相關之新興科學。

圖 3.2.1 的圖形稱為 Sierpinski gasket，是一種碎形，能夠清楚地發現任意一小部分的三角形結構皆與大三角型之結構相似，且都是三角形的複製圖形，具有自身相似(self-similarity)的性質(Fortin, et al., 1992)。另外，圖 3.2.2 為冰晶體之形狀，其中任意一小部分都是整個冰晶體的複製，若將每一小部分放大來看，就好比是整個冰晶體的結構，因此同樣具有碎形特性。

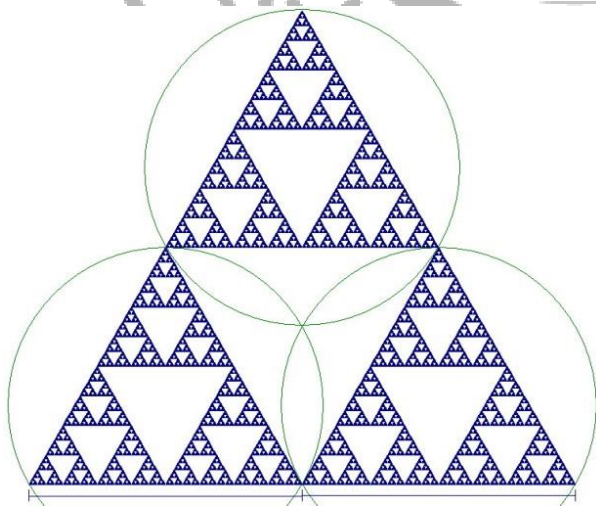


圖 3.2.1 Sierpinski gasket

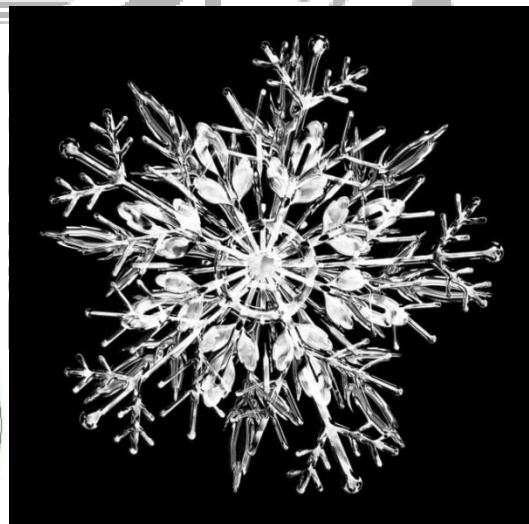


圖 3.2.2 冰晶體

### 3.2.2 碎形特性之點過程(Fractal point process)

一隨機點過程之定義在先前有提及，那麼在探討一點過程之碎形特性前，首先定義一隨機點過程之表示法，以下由(Gruneis, et al, 1993)中所提及。

一隨機點過程可用下列數學式所表示：

$$y(t) = \sum_n \delta(t - t_n), \text{ 其中} \quad (3.5)$$

$t_n$ ：第  $n$  個事件的隨機發生時間，

$\delta$ ：Dirac's delta 函數。

同樣地，先前已提及一隨機點過程可由計數函數  $N(\tau)$  定義之，此處由下列式子定義之：

$$N(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} y(t) dt ; \tau > 0, \text{ 其中} \quad (3.6)$$

$y(t)$  如(3.5)之定義，

$N(\tau)$  表示從  $t_n$  到  $t_{n+\tau}$  的事件發生個數。

除了在前一小節所提及之碎形特性的自身相似性質，冪次定理(power-law)關係亦是碎形特性之點過程中最大的特徵之一，所謂的冪次定理為表示變數間有一特定關係，此關係以函數表示方法為  $f(x) = ax^b$ ，其中  $a$ 、 $b$  皆為常數，下列式子為冪次定理關係式，若一點過程滿足之，則稱為具有碎形特性之點過程：

$$N(a\tau) = a^H N(\tau) ; t_{min} < t < t_{max}, \text{ 其中} \quad (3.7)$$

$a$  為尺度因子，

$H$  為一常數且被稱為 Hurst 指數(Mandelbrot, 1982)。

一碎形特性之點過程，其頻譜震動幅度的改變具有自身相似之特性，其頻譜密度函數與 Hurst 指數具有以下關係式：

$$s(f) \propto \frac{1}{f^{2H-1}} ; f_{min} < f < f_{max}, \quad (3.8)$$

當  $H = \frac{1}{2}$  時，此過程被視為不相關(uncorrelation)的，可視為一均齊性卜瓦松過程；

當  $\frac{1}{2} < H < 1$  時，此過程具有長期相關(long-term correlation)之特性，其中， $H$  可用

$N(\tau)$  之變方來估計，其關係式如下：

$$\text{var}(N(\tau)) \propto \tau^{2H}。 \quad (3.9)$$

### 3.2.3 群集卜瓦松過程之碎形特性

在先前 2.1 節有提及，群集卜瓦松過程是由一序列之主要過程與主要過程所觸發之次要過程，並依事件發生時間排序後所組成之完整過程，且群集之間假設獨立，在(Gruneis,et al.,1993)中此完整過程可由數學式子表示如下：

$$y(t) = \sum_i \sum_{j=1}^{N_k} \delta(t - t_i - t_{ij}) \text{ , 其中} \quad (3.10)$$

$t_i$  = 主要過程之發生時間點，

$t_{ij}$  = 次要過程之發生時間點，

$N_k$  = 第 k 個群集之發生個數。

另外，在先前 3.1.4 小節曾提及群集卜瓦松之頻譜函數具有以下性質：

$$s(f) \propto \frac{1}{f^b} \text{ ,} \quad (3.11)$$

與(3.8)式相比較可得出  $H = \frac{1+b}{2}$ ，因此，我們能夠將群集卜瓦松過程視為一具有碎形特性之隨機過程。

### 3.2.4 以發生次數為測量基準之碎形分析方法(朱家儀，2013)

在 1.2.1 小節曾提及，一隨機點過程可拆解為以間隔時間為基準之序列及發生次數為基準之序列，此處以發生事件次數為測量基準，用 Variance-Time-Curve 及 Fano Factor 兩種分析方法來探討資料是否具有碎形特性。

#### 1. Variance-Time-Curve(VTC)

VTC 為在給定一個測量時間寬度  $\Delta t$  下，所測量出的事件發生次數之變異數所畫出的曲線圖，其 var 函數定義如下列式子：

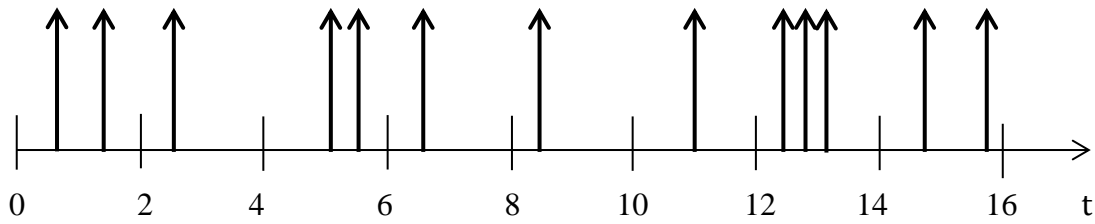
$$\text{Var} = \text{Var}(N(\Delta t)) = E((N(\Delta t) - E(N(\Delta t)))^2) = E(N(\Delta t)^2) - E(N(\Delta t))^2 \text{ ,}$$

其中， $N(\Delta t)$  為在給定測量時間  $\Delta t$  下，所發生的事件次數，為一序列。VTC 會隨著測量時間寬度的增加而增加，若一點過程符合碎形特性時，其增加的趨勢將近似於  $(\Delta t)^a$ ，其中 a 稱為 VTC 指數，代表了隨著測量時間寬度的增加，事件發生次數變異增加的快慢且 a 介於 0~2 之間，此關係亦是一種幂次定理關係，關係如下：

$$\text{Var} = \text{Var}(N(\Delta t)) = b(\Delta t)^a \propto (\Delta t)^a \text{ , 其中，} 0 < a \leq 2 \text{ , } b \text{ 為一常數}$$

而若以均齊性卜瓦松過程為例，在不同測量時間寬度  $\Delta t$  下，其  $\text{Var}(N(\Delta t)) = \lambda \Delta t$ 。

下圖為一例子，給定不同測量時間  $\Delta t$  下，計算發生事件次數之變異數與平均數：



給定 $\Delta t = 2$ 時，

$$E(N(2)) = \frac{2+1+2+1+1+1+3+2}{8} = 1.625, \text{Var}(N(2)) = \frac{(2-1.625)^2+(1-1.625)^2+\dots}{8-1} = 0.55$$

給定 $\Delta t = 4$ 時，

$$E(N(4)) = \frac{3+3+2+5}{4} = 3.25, \text{Var}(N(4)) = \frac{(3-3.25)^2+(3-3.25)^2+\dots}{4-1} = 1.58$$

## 2.Fano Factor(FF)

FF 為在給定一個測量時間寬度 $\Delta t$ 下，所測量出的事件發生次數之變異數除上其平均數，其定義如下列式子：

$$FF = F(\Delta t) = \frac{E(N(\Delta t)^2) - E(N(\Delta t))^2}{E(N(\Delta t))} = \frac{\text{Var}(N(\Delta t))}{E(N(\Delta t))}$$

FF 會隨著測量時間寬度的改變而有所不同，因此它提供了一個較簡易的方式來描述一點過程事件序列之間的相關程度，且可用來判斷一點過程事件發生之群集程度。若以均齊性卜瓦松過程為例，在不同測量時間寬度 $\Delta t$ 時，其 FF 皆等於 1，因此若一點過程在相同測量時間寬度 $\Delta t$ 下，所得出之 FF 小於 1，表示此一點過程比均齊性卜瓦松過程還要有規律、有次序，相反地，若一點過程之 FF 值大於 1，則說明了此一過程的事件有群聚現象的產生且較不規律，因此，FF 又被稱作是散亂的指標(Lowen and Teich, 1994)。

上述之 VTC 也可看出一點過程的散亂程度與群聚現象，但 FF 為 VTC 常態化後之數值，因此大多數皆會採用 FF 作為指標。通常一具有碎形特性之點過程事件無法直接描述其自身相似之特性，因此 FF 提供了一個判別的指標，因為 FF 具有一特殊形態，即為當測量時間寬度很小時，FF 會近似於 1，也就是此一過程的事件發生會近似於均齊性卜瓦松過程一樣地規律，但當測量時間寬度上升時，FF 會隨之增加並滿足冪次定理之關係式( $f(N(\Delta t)) = b(\Delta t)^\delta$ )，也就是其增加的趨勢近似於 $(\Delta t)^\delta$ ，其中 $\delta$ 稱為 FF 指標並且介於 0~1 之間，此指標可以充分表達群聚程度增加的情形。

## 第四章 模擬過程與實證分析

### 4.1 分析比較之目的

透過先前內容的描述，可以得知以群集卜瓦松過程適配地震資料應屬合理，而地震亦是人們所重視的天災之一，因此利用群集卜瓦松過程為工具，將對真實地震資料進行適配，期許能得知更多地震的訊息。

首先，選擇 2016/01/01~2018/01/01 真實地震資料，針對發生次數進行模擬與分析，但發現計數為 0 之個數過多，因此試著將測量時間寬度( $\Delta t$ )拉長，但須考量到觀測值數量，因此亦拉長真實地震資料之時間，改選擇 2008/01/01~2018/01/01 真實地震資料進行適配，並進行兩種模擬之比對。因此，以下將列出兩種不同的模擬：

- 一、針對 2016/01/01 到 2018/01/01 的真實地震資料，以每日為一時間單位，計算每日地震發生次數來進行適配
- 二、針對 2008/01/01 到 2018/01/01 的真實地震資料，以每五天為一時間單位，計算每五天地震發生次數來進行適配。

#### 4.1.1 兩年真實地震資料之特性(2016/01/01~2018/01/01)

從中央氣象局的網站，我們收集了台灣地區從 2016 年 01 月 01 日至 2018 年 01 月 01 日的真實地震發生資料，其規模介於 0 到 10 且深度介於 0 到 350 公里，共 732 天的資料，以每日為單位進行觀察，共計 732 筆。

##### 1. 真實地震之次數分配

圖 4.1.1 為以每日為測量單位下，所得出之次數分配。其中最多筆為計數 0 之事件，共 263 筆，之後則隨著發生次數的增加快速下降，高於發生次數 11 次之筆數少之又少；而最高發生次數為 26 次。

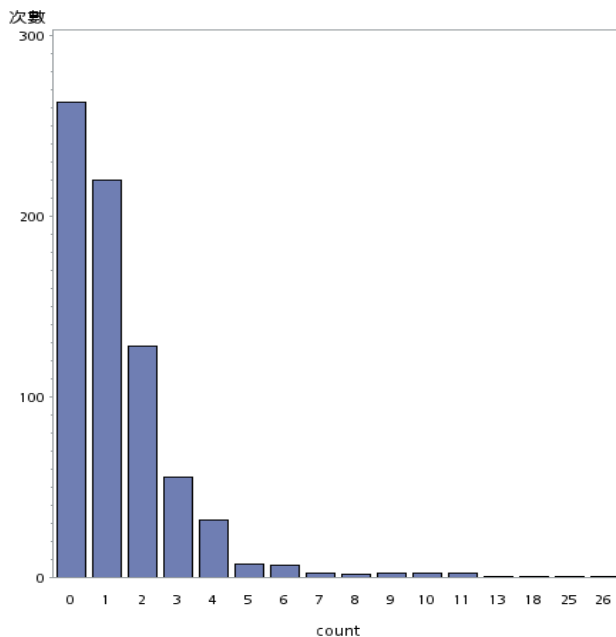


圖 4.1.1 真實地震資料之次數分配圖



## 2.真實地震之頻譜特性(2016/01/01~2018/01/01)

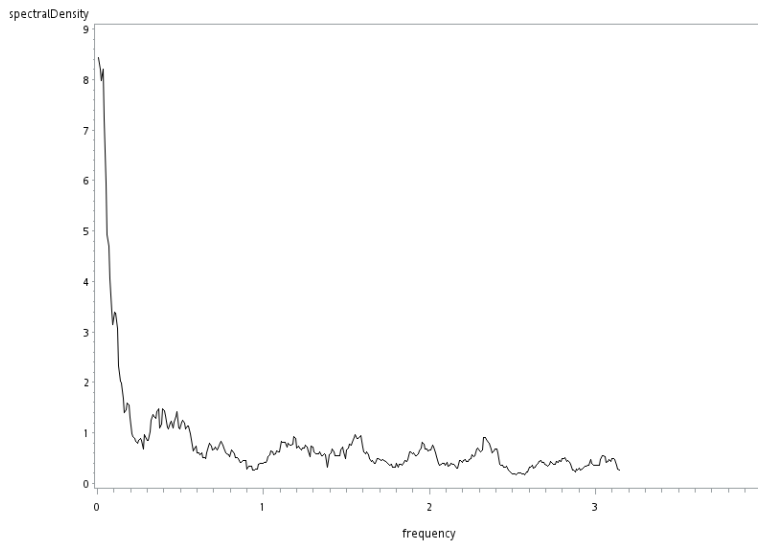


圖 4.1.2 真實地震資料之頻譜圖

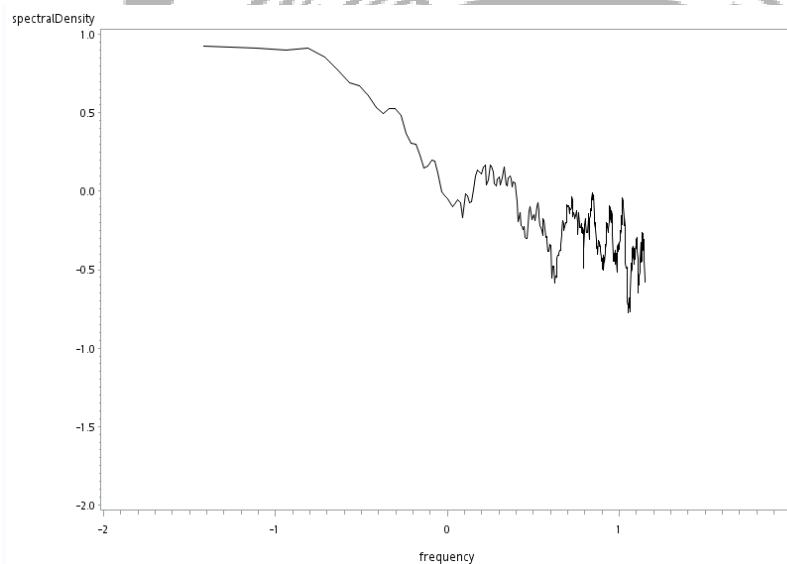


圖 4.1.3 真實地震資料之雙對數尺度頻譜圖

圖 4.1.2 為真實地震資料之頻譜圖，發現具有  $1/f^b$  型態，接著將縱橫軸兩尺度皆取對數，如圖 4.1.3，觀察其趨勢。

由雙對數尺度之頻譜圖可觀察到頻譜密度與頻率呈反向變動，即為低頻有較高之頻譜密度，高頻則相反，呈現  $1/f^b$  波動型態，因此可將此筆地震真實資料視為群集卜瓦松過程且具有碎形特性。因此以群集卜瓦松過程為工具來適配真實地震資料應為適當的。

### 3.真實地震資料之碎形特性(2016/01/01~2018/01/01)

#### 1.Variance-Time-Curve(VTC)

圖 4.1.4 為此筆真實地震資料之 Variance-Time-Curve，隨著測量時間寬度 $\Delta t$ 的增加，地震發生次數的變異也隨之增加，且增加趨勢為 $(\Delta t)^a$ ，其中 a 值可利用兩軸取對數後的斜率求得，即為圖 4.1.5 的斜率，經由簡單線性迴歸求得斜率為 1.55251，即為 VTC 指數，由於 VTC 指數介於 0~2 之間，顯示此筆資料具有碎形特性。

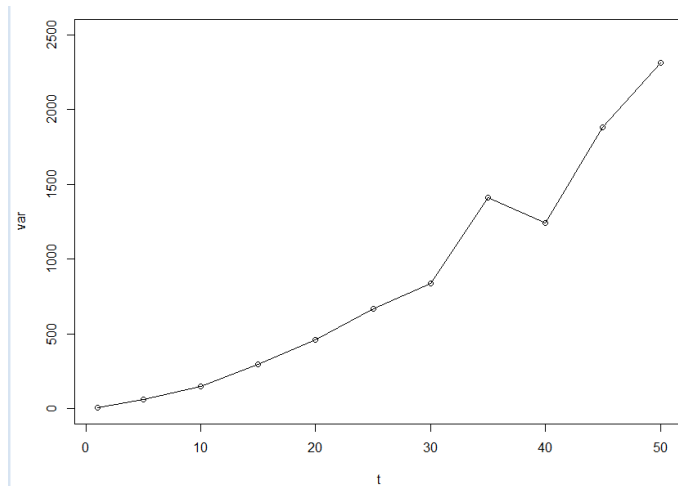


圖 4.1.4 真實地震資料之 Variance-Time-Curve

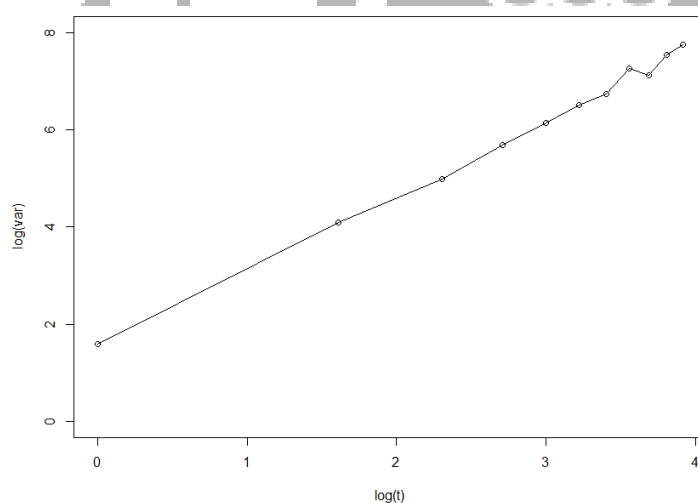


圖 4.1.5 真實地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve

#### 2.Fano Factor(FF)

圖 4.1.6 為真實地震資料之 Fano Factor 圖，隨著測量時間寬度 $\Delta t$ 的增加，其 FF 隨之增加且增加趨勢為 $(\Delta t)^\delta$ ，將兩軸尺度透過對數轉換後，如圖 4.1.7，以簡單線性迴歸求得 $\delta$ 值為 0.56111，亦即 FF 指數，介於 0~1 之間，表示此筆資料具有碎形特性。另外，在不同測量時間寬度 $\Delta t$ 下，其 FF 值皆大於 1，表示此筆資料有群聚現象，符合群集卜瓦松過程之性質。

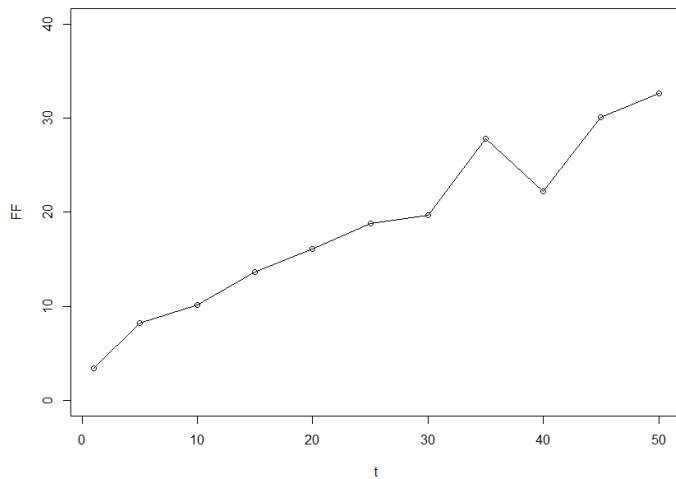


圖 4.1.6 真實地震資料之 Fano Factor 圖

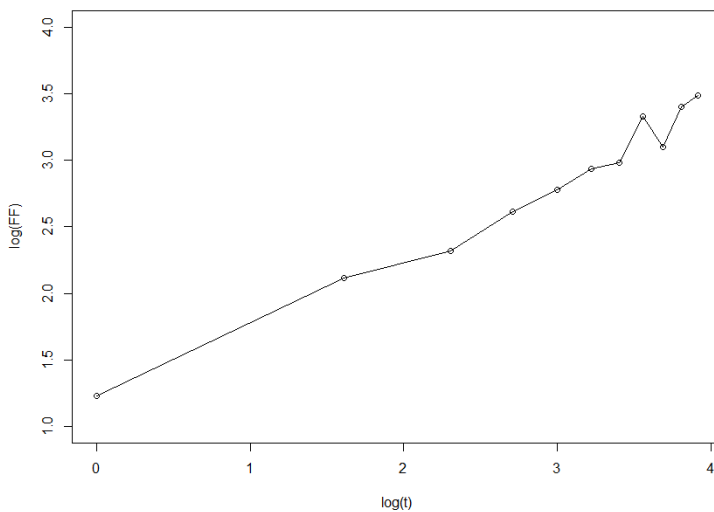


圖 4.1.7 真實地震資料之雙對數尺度 Fano Factor 圖

藉由以上頻譜與碎形分析方法，我們可以得知此筆真實地震資料服從群集卜瓦松過程且具有碎形特性，因此下節開始進行群集卜瓦松過程之參數估計。

## 4.2 群集卜瓦松過程之模擬(2016/01/01~2018/01/01)

### 4.2.1 參數估計過程

本小節以真實地震資料之性質，尋找最適當群集卜瓦松過程之參數。以下分成三個階段，首先討論參數間的影響與相互關係，再依據參數的影響依序找出參數可能值，最後選定參數估計值。

在估計參數前，先介紹此次模擬的重點，模擬過程會依據頻譜特性、碎形特性(VTC、FF)、次數分配、平均發生次數進行模擬與分析。

#### 1. 參數間的影響與相互關係

本研究以群集卜瓦松過程為適配工具，在 2.1 節有介紹到模擬一群集卜瓦松過程所需參數分別為主要過程中的 $\lambda$ 參數、次要過程中的 $\alpha$ 及 $\beta$ 參數、以及群集個數分配

中的 $z$ 與 $N_0$ 兩參數，共五個參數。以下先介紹各個參數間之影響：

(1)

參數	相互關係與影響
$\lambda$	為主要事件每單位時間內期望發生之次數，因此在模擬過程中會影響平均發生次數，當 $\lambda$ 值越高，代表每單位時間內發生次數越多，平均發生次數則會越高。
$\alpha$	為次要事件之 gamma 分配的形狀參數， $\alpha$ 值越大，次要事件離主要事件越遠。另外， $\alpha$ 值越小，平均發生次數會略提高，但影響不明顯。
$\beta$	為次要事件之 gamma 分配的尺度參數， $\beta$ 值越大，次要事件離主要事件越遠，反之則越近。
$z$	在 2.2 小節提及群集卜瓦松之次數分配為 $P(m) = \frac{m^z}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z}$ ，其中 $m$ 為隨機變數，因此當 $z$ 值越大，次要事件之平均個數將會隨之增加。
$N_0$	為給定最大群集個數，當 $N_0$ 上升，代表次要事件之平均發生個數將會提高，完整過程之平均發生次數亦會提高，因此須適時地下降 $\lambda$ 值，藉此控制平均發生次數之大小。

(2)接著，我們觀察每個參數對雙對數尺度 VTC 斜率(即為 VTC 指數)的影響，經由使用不同參數值的模擬後，我們觀察到在固定其他參數不變下， $z$  值對於 VTC 指數影響最大，其次為 $\alpha$ 、 $\beta$ ，最後為 $N_0$ 、 $\lambda$ 。因此， $z$ 值為主要影響 VTC 指數之參數。

(3)由先前群集卜瓦松過程之定義可得知，一完整群集卜瓦松過程是由主要事件與次要事件所構成，因此，完整過程之期望發生次數即為主要事件與次要事件之期望發生次數的乘積，以下列式子表示之：

$$E(C) = \lambda(E(M)) = \lambda \frac{\sum_{m=1}^{N_0} m^{z+1}}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z},$$

其中，

$E(C)$ : 完整過程之期望發生次數

$\lambda$ : 主要過程之期望發生次數

$E(M)$ : 群集之期望發生次數

$N_0$ : 最大群集個數

$z$ : 群集分配之參數

因此， $\lambda$ 、 $z$ 、 $N_0$ 為影響主要事件期望發生次數之參數。

(4)此研究固定每日為測量時間寬度，在加上次要過程後，主要事件發生 0 次的百分比將會比完整過程發生 0 次的百分比來的多，而主要過程之次數分配由 2.1

的式子所得到： $P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ ，因此，

$P\{N(t) = 0\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t}$  不小於完整過程中發生 0 次事件之百分比，

亦即  $e^{-\lambda t}$  不小於完整過程中發生 0 次事件之百分比。

此筆真實地震資料之 0 次事件百分比約為 0.359，因此為  $e^{-\lambda t} \geq 0.359$ ，推得主要事件之參數  $\lambda \leq 1.0244$ 。

## 2. 估計參數之過程

經由上一步驟之介紹，統籌整理為：

- (1) 影響 VTC 指數的參數主要為  $z$  值
- (2) 影響平均發生次數的參數為  $\lambda$ 、 $z$ 、 $N_0$

因此，我們優先估計  $z$  值，讓 VTC 指數最接近真實地震資料，接著選取  $N_0$ ，再藉由控制平均發生次數來調整  $\lambda$  值並且注意  $\lambda$  值是否在合理範圍內，最後根據次數分配來選取最適當的  $\alpha$  與  $\beta$  值。圖 4.2.1 為真實地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve，虛線為簡單線性迴歸線，求得斜率為 1.55254，因此在固定其他參數不變下，我們將找出斜率最逼近 1.55254 之  $z$  值。

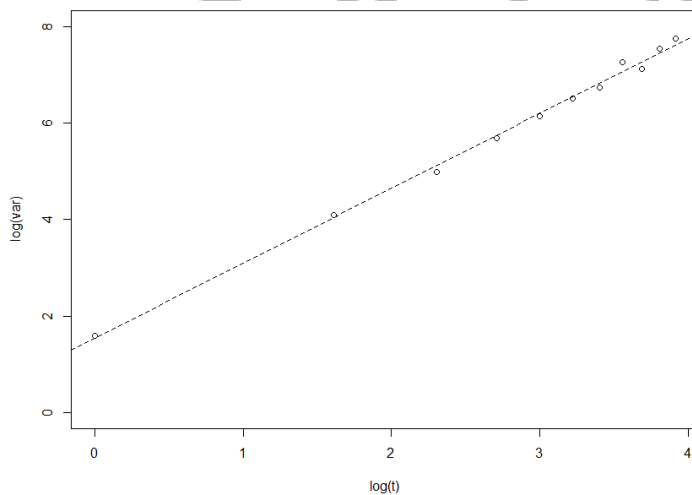


圖 4.2.1 真實地震資料雙對數尺度之 Variance-Time-Curve

圖 4.2.2 為不同  $z$  值下，雙對數尺度 Variance-Time-Curve 斜率的波動，可發現斜率 1.55254 所對應到的  $z$  值為 1.8 到 2.8 之間，因此針對這區間內的  $z$  值進一步觀察。

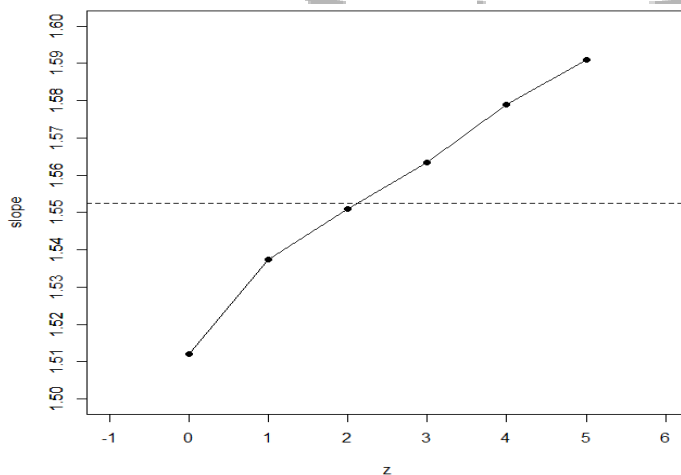


圖 4.2.2 模擬雙對數尺度 Variance-Time-Curve 之斜率與  $z$  值關係圖

由前述可知，影響雙對數尺度之 Variance-Time-Curve 斜率最小者為 $\lambda$ ，因此固定其他參數不變下，藉由 $\lambda$ 的變動，算出這區間內  $z$  值的所有斜率平均數，並選擇最接近之  $z$  值。圖 4.2.3 為針對此區間計算出不同  $z$  值的所有斜率之平均關係圖。

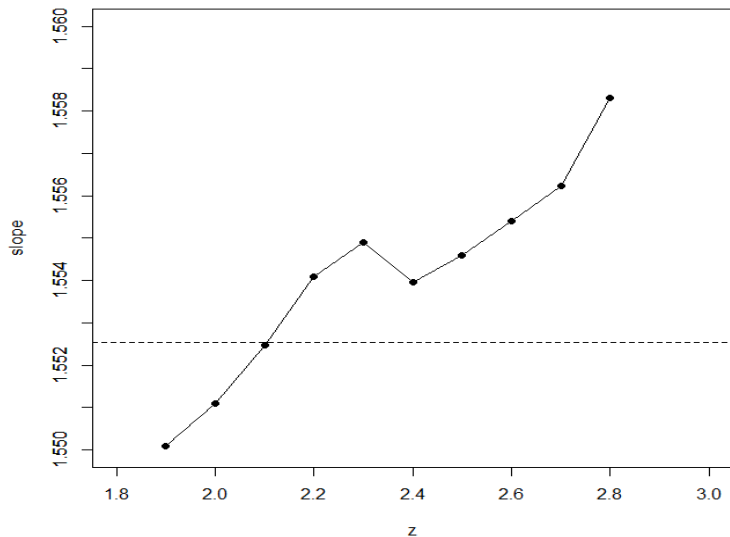


圖 4.2.3 針對 1.8 到 2.8 之間所算出之斜率平均數與  $z$  值關係圖

由上圖可得知，最接近真實地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve 斜率的  $z$  值約為 2.1。

下表為真實地震之次數分配，計數為每日地震所發生之次數，個數為同樣計數下的總個數：

平均數為 1.452186，變異數為 4.967615

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	18	25	26
個數	263	220	128	56	32	8	7	3	2	3	3	3	1	1	1	1

表 4.2.1 真實地震資料之次數分配

以下將列出幾組參數選取之過程，希望能夠盡量符合真實地震之次數分配且平均數接近 1.452186，列出次數分配比較圖、雙對數尺度 Variance-Time-Curve 與雙對數尺度頻譜圖，並計算總差異個數。

(1)

$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$z$	$N_0$
0.126	1/1.5	2.5	2.1	15

平均數 1.485714，變異數 2.525341

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8
個數	252	174	155	79	31	21	8	8	4

個數總差異：146 個

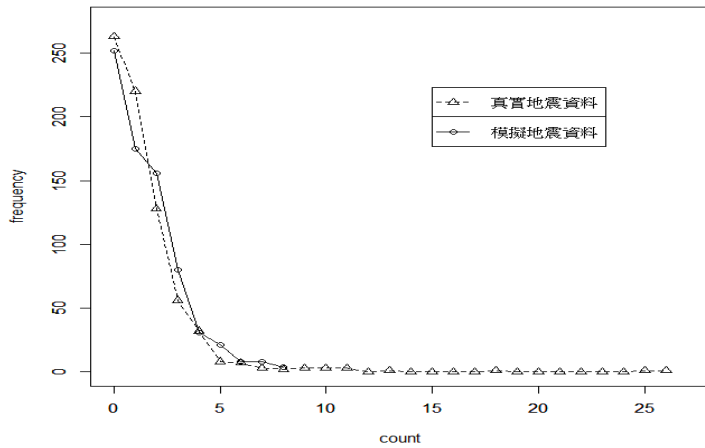


圖 4.2.4 參數組(1)次數分配比較圖

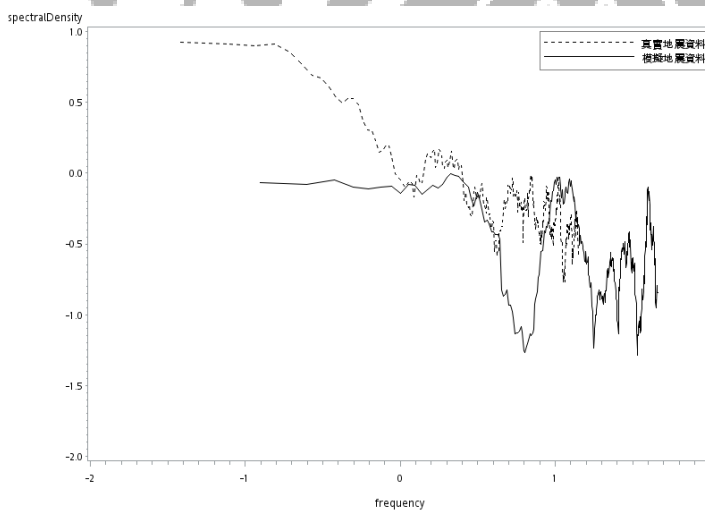


圖 4.2.5 參數組(1)雙對數頻譜圖

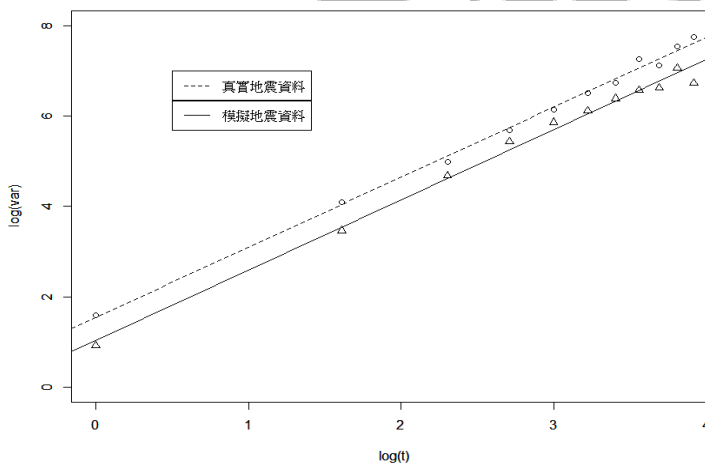


圖 4.2.6 參數組(1)雙對數 VTC 圖

(2)

$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$z$	$N_0$
0.29	1/1.5	2.5	2.1	5

平均數 1.483651，變異數 2.05362

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8
個數	215	218	142	85	43	21	4	3	1

個數總差異：134 個

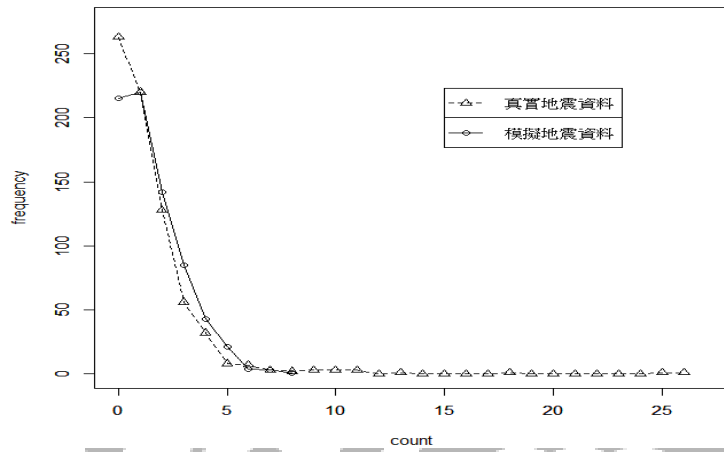


圖 4.2.7 參數組(2)次數分配比較圖

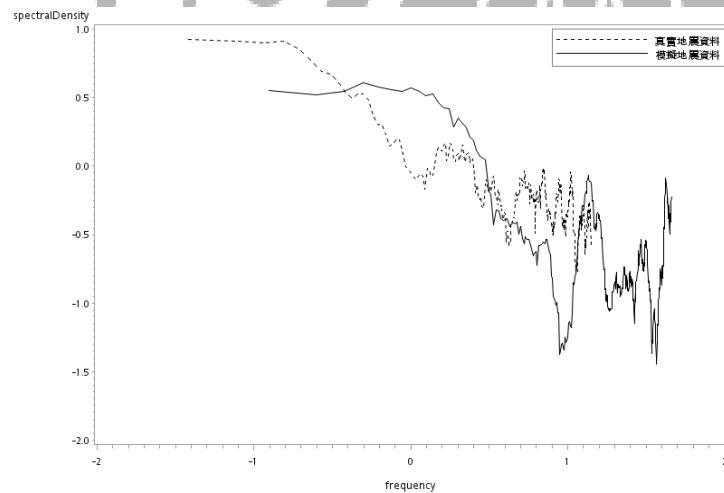


圖 4.2.8 參數組(2)雙對數頻譜圖

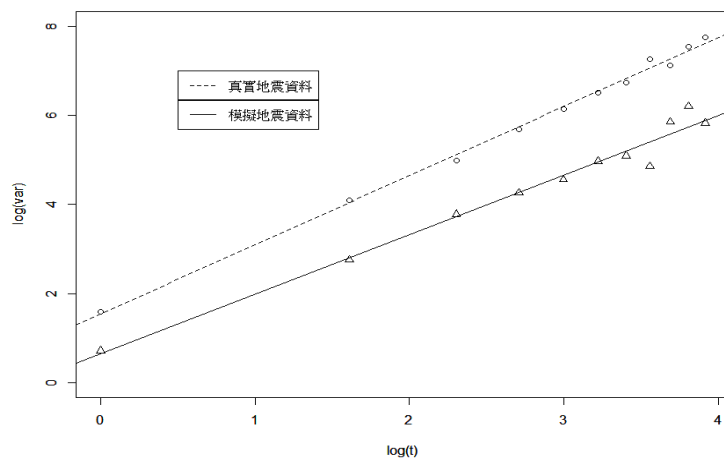


圖 4.2.9 參數組(2)雙對數 VTC 圖



(3)

$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$z$	$N_0$
0.215	1/1.5	2.5	2.1	7

平均數 1.42585，變異數 2.094971

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8
個數	239	201	140	84	43	14	6	4	1

個數總差異：116 個

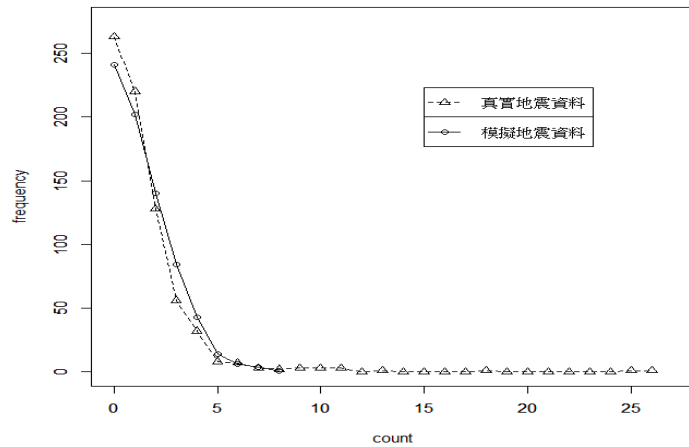


圖 4.2.10 參數組(3)次數分配比較圖

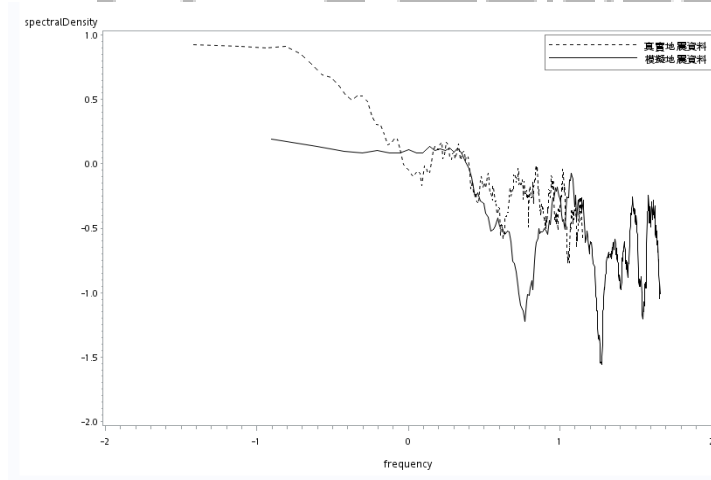


圖 4.2.11 參數組(3)雙對數頻譜圖

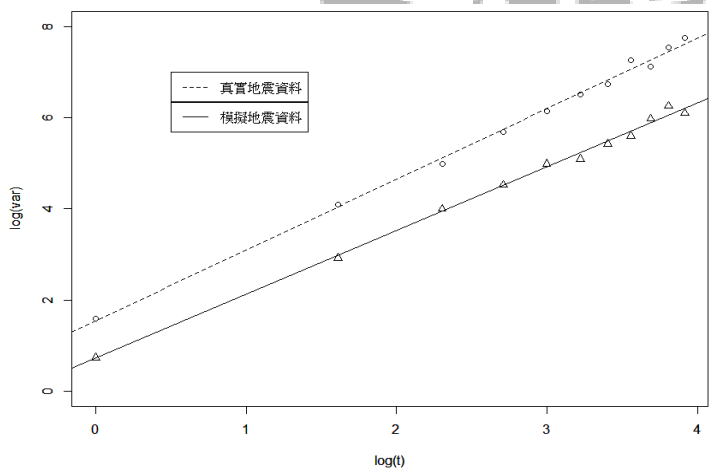


圖 4.2.12 參數組(3)雙對數 VTC 圖

### 3. 固定參數

在固定 $z$ 值後，分別從 $N_0$ 較大數值依序尋找至較小值，並藉由調整平均發生次數與次數分配找出 $\lambda$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 值，最終固定之參數為：

參數	$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$z$	$N_0$
數值	0.215	1/1.5	2.5	2.1	7

此模擬之資料平均發生次數為 1.42585 次，與真實地震資料之平均發生次數 1.452186 次相近；與真實資料之次數分配總差異個數為 116 個，是三組參數中最小值；從雙對數尺度頻譜圖來看，整體趨勢與真實地震資料為三組模擬中最相符者；從次數分配來看，除了在計數 0 與 3 的個數有較明顯差異，以及計數 9 以上，其餘算是與真實地震資料吻合。



### 4.3 真實地震資料與模擬資料之比較(2016/01/01~2018/01/01)

#### 1. 發生次數之頻譜特性

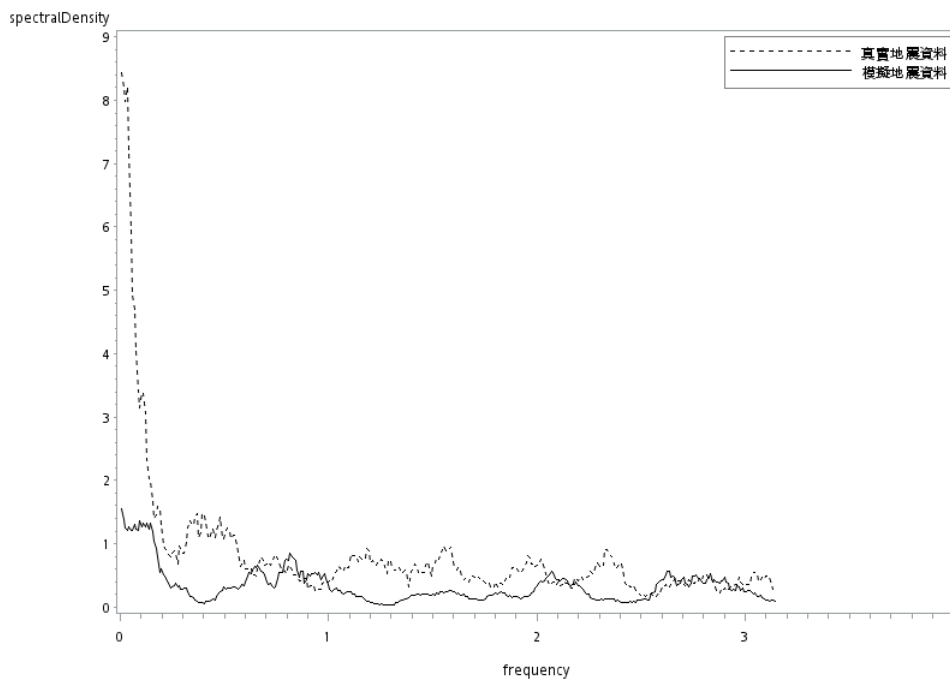


圖 4.3.1 模擬地震資料之頻譜圖

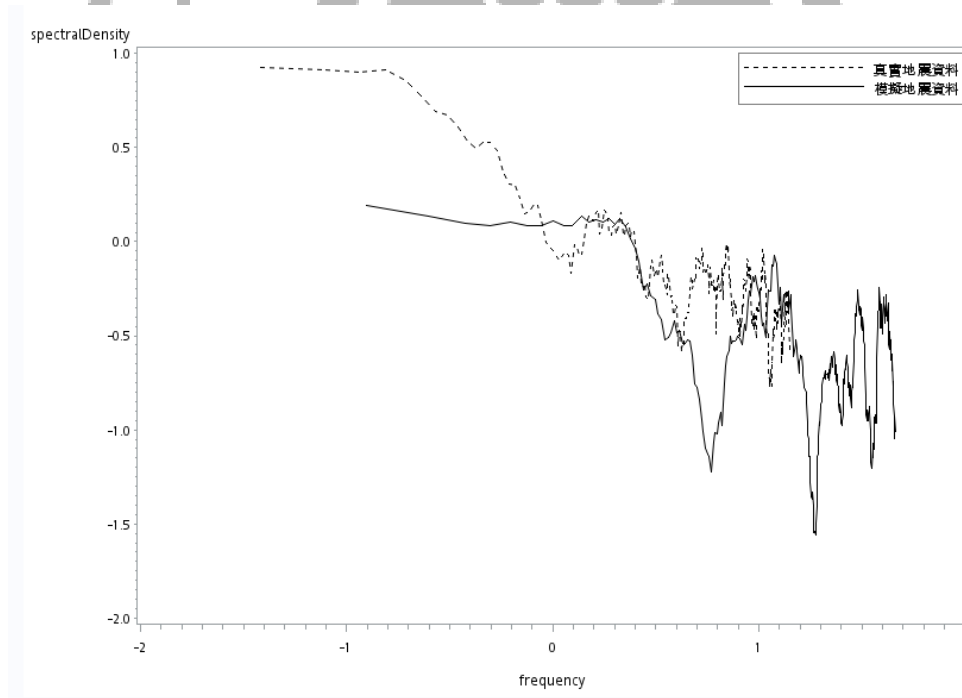


圖 4.3.2 模擬地震資料之雙對數尺度頻譜圖

圖 4.3.1 與圖 4.3.2 皆可看出一開始的頻譜密度與真實地震資料差異較大，且平均頻譜密度皆偏低。因此，以下我們嘗試將真實地震資料計數 9 以上之地震個數添加至模擬地震資料，查看是否因高計數之地震個數造成頻譜圖之明顯落差，下圖為調整後之模擬地震資料與真實地震資料之比較圖。

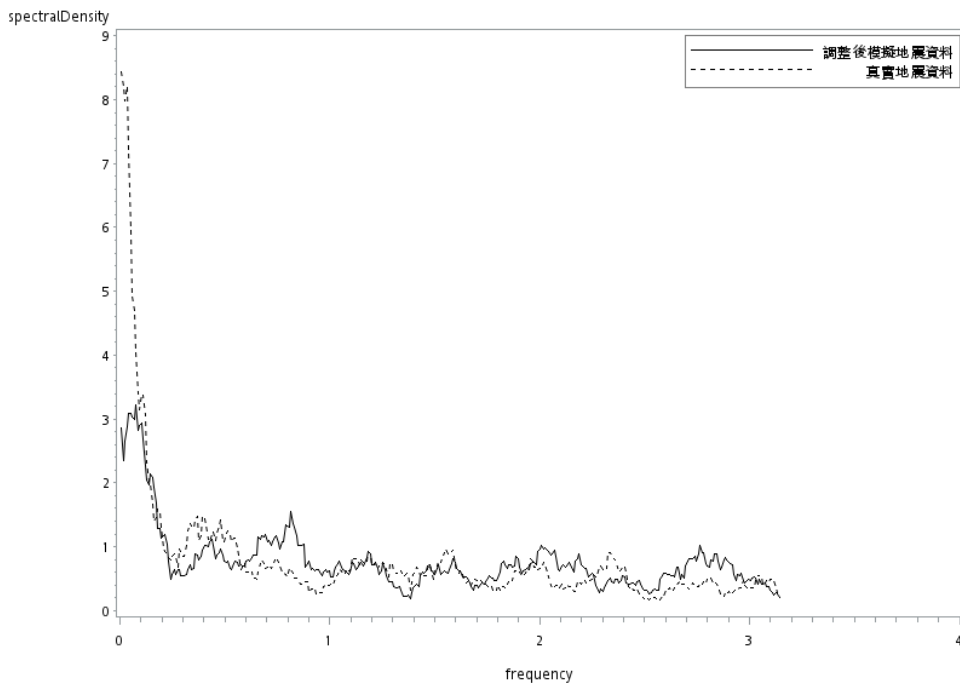


圖 4.3.3 調整後模擬地震資料之頻譜圖

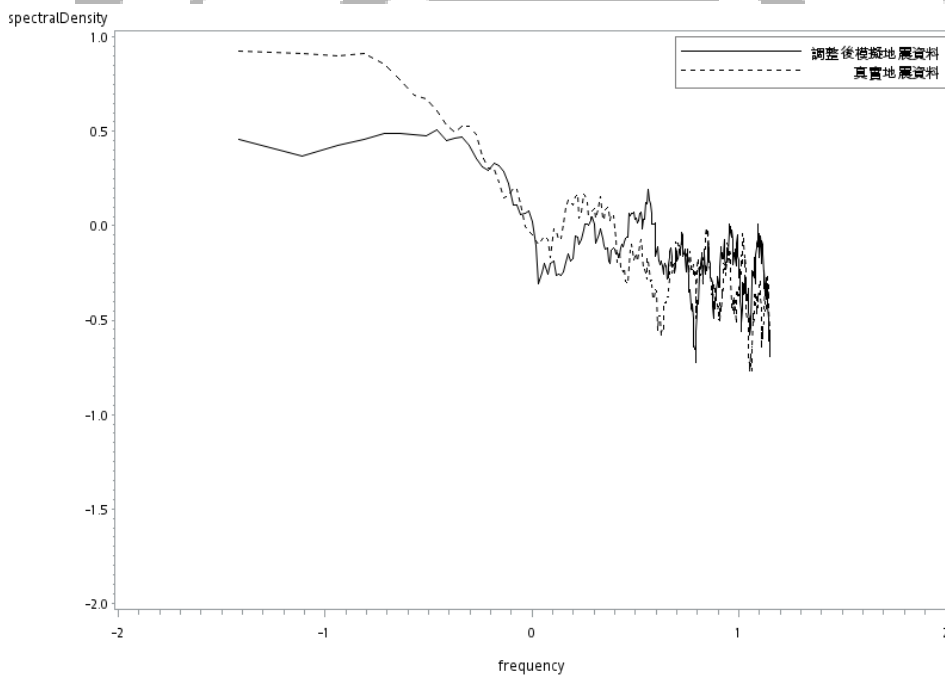


圖 4.3.4 調整後模擬地震資料之雙對數尺度頻譜圖

圖 4.3.3 與 4.3.4 可發現，調整後模擬地震資料之頻譜圖與雙對數尺度頻譜圖皆明顯上升，可發現最前端低頻部分仍達不到真實地震資料之高度，原因為在模擬的情況下，真實地震資料計數高之個數，將會被計數 9 以下之個數平分掉，造成整體變異較低且穩定，因此即便對模擬地震資料進行調整，其整體變異仍無真實地震資料來的高，因此低頻部分仍有些許差異，而除此之外其餘算是與真實地震資料吻合，因此可得知高計數地震個數造成頻譜圖整體明顯偏低之現象。

另外，從圖 4.3.2 可發現模擬資料呈 $1/f^b$ 型態，表示具有碎形特性且為群集卜瓦松過程。

## 2.發生次數之時間數列圖

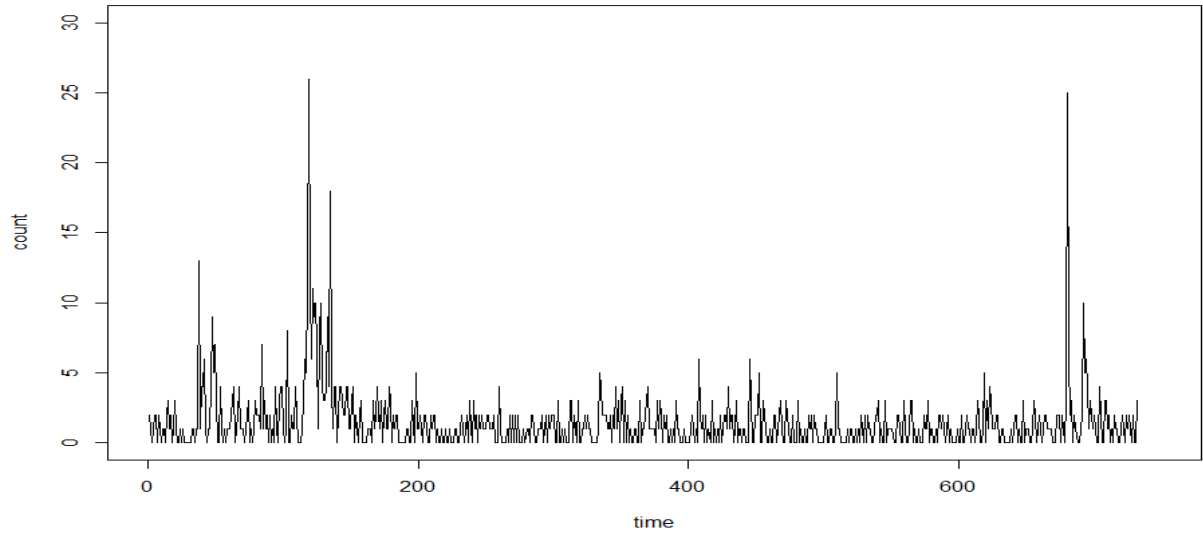


圖 4.3.5 真實地震資料之時間數列圖

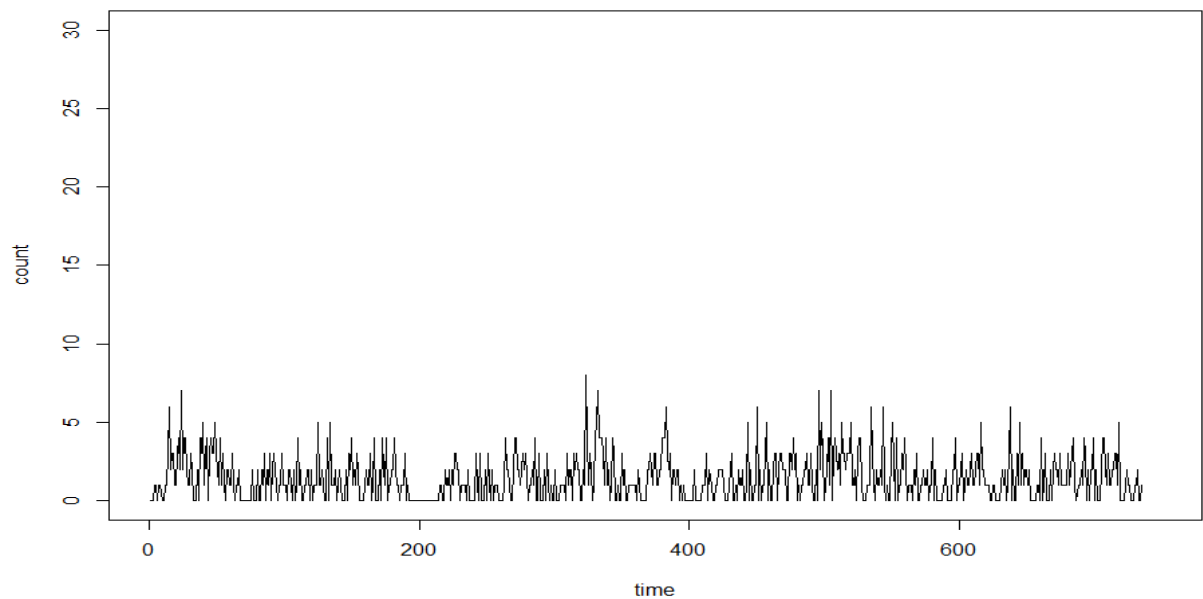


圖 4.3.6 模擬地震資料之時間數列圖

透過時間數列圖，能清楚地觀察在不同時間下，發生次數的改變情形，圖 4.3.5 為真實地震資料之時間數列圖，圖中可看出這兩年台灣每日最高發生次數為 26 次，且有將近十天發生超過 10 次地震，與模擬地震資料相比，模擬資料最高可模擬次數為 8 次，更高之次數較難去預估，除此之外，發生次數之變化情形與真實地震資料相似。

### 3.發生次數之比較圖

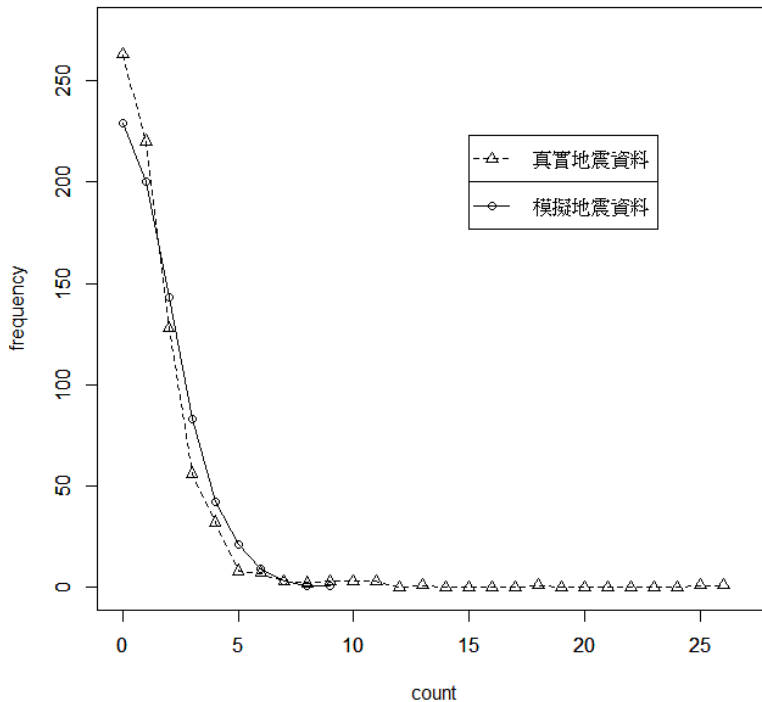


圖 4.3.7 真實與模擬地震資料之次數分配比較圖

透過圖 4.3.7 之次數分配比較圖，發現除了計數 0、1 與 3 之個數有差距，與計數 9 以上之個數較難預測，其餘算是與真實地震資料符合。以下分成兩部分做解釋：

#### 1. 較高之地震次數無法預估

我們所生活的世界，即便科學有多先進，皆不可能做出萬無一失之預測結果，因大自然的種種現象，即便相似於科學的某種理論與結果，皆不可能為完全複製品，因此我們能從生活上遇見很多預測失準之情形，最常見的例子為天氣預報，預測結果與實際情形相去甚遠，造成民眾防護措施不足，導致損失慘重。另一例子為股票，眾多專業投資者皆會根據過往經驗預測未來走向，但事實卻經常與預測結果相去甚遠，造成重大的損失。因此，此研究預測地震亦不可能百分之百準確，明顯可看出在計數較高之個數(也稱作離群值)上，我們較難預估出來。

#### 2. 計數 0、1 與 3 之個數有差距

此研究之真實地震資料為 732 筆，為了準確的適配，模擬資料亦模擬出 732 筆的計數過程。因為無法模擬出計數較高(計數 9 以上)之個數，同為 4.3.1 小節所提及，因此每日發生 0、1 與 3 次的地震相較於真實地震資料來得多，模擬地震資料之離群值較真實地震資料少，整體之變異也較小。

#### 4.發生次數之基本統計量

	min	max	mean	variance	sum	median
真實資料	0	26	1.452186	4.967615	1063	1
模擬資料	0	8	1.42585	2.094971	1048	1

表 4.3.1 發生次數之基本統計量

從表 4.3.1 可發現，兩者之差異為先前所提及，模擬地震資料之變異數較小，且最大發生次數較低，因離群值所導致。

#### 5.發生次數之雙對數尺度 VTC 與 FF

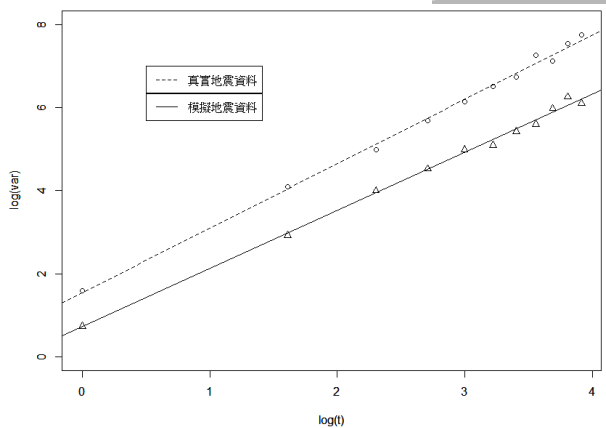


圖 4.3.8 真實與模擬地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve

真實地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve:截距為 1.54208，斜率為 1.553

模擬地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve：截距 0.72298，斜率為 1.3993

由上述可得知，模擬資料與地震資料雖斜率相近但截距相差 0.8191，原因是真實地震資料離群值較多，即為高次數之地震，導致整體變異較模擬資料大

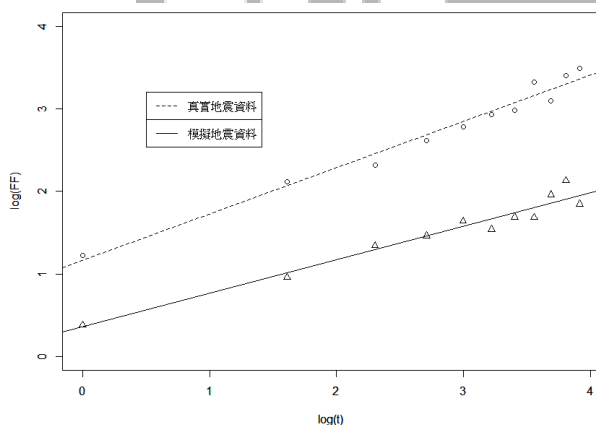


圖 4.3.9 真實與模擬地震資料之雙對數尺度 FF 圖

真實地震資料之雙對數尺度 FF 圖:截距為 1.16184，斜率為 0.56111

模擬地震資料之雙對數尺度 FF 圖：截距為 0.35972，斜率為 0.40703

模擬地震資料之 FF 指數為 0.56111，介於 0 到 1 之間，表示具有碎形特性。模

擬資料與地震資料雖斜率相近但截距相差 0.80212，其原因與前者雙對數尺度 VTC 圖一樣，此處則不多贅述。

### 6. 發生次數之 ACF

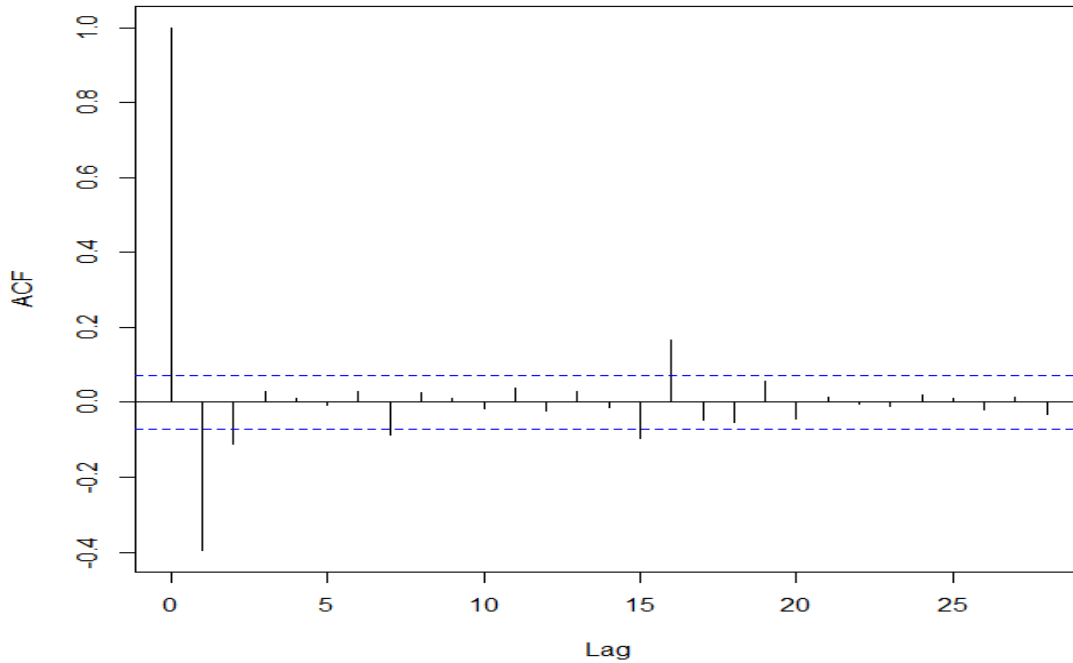


圖 4.3.10 真實地震資料之發生次數 ACF 圖

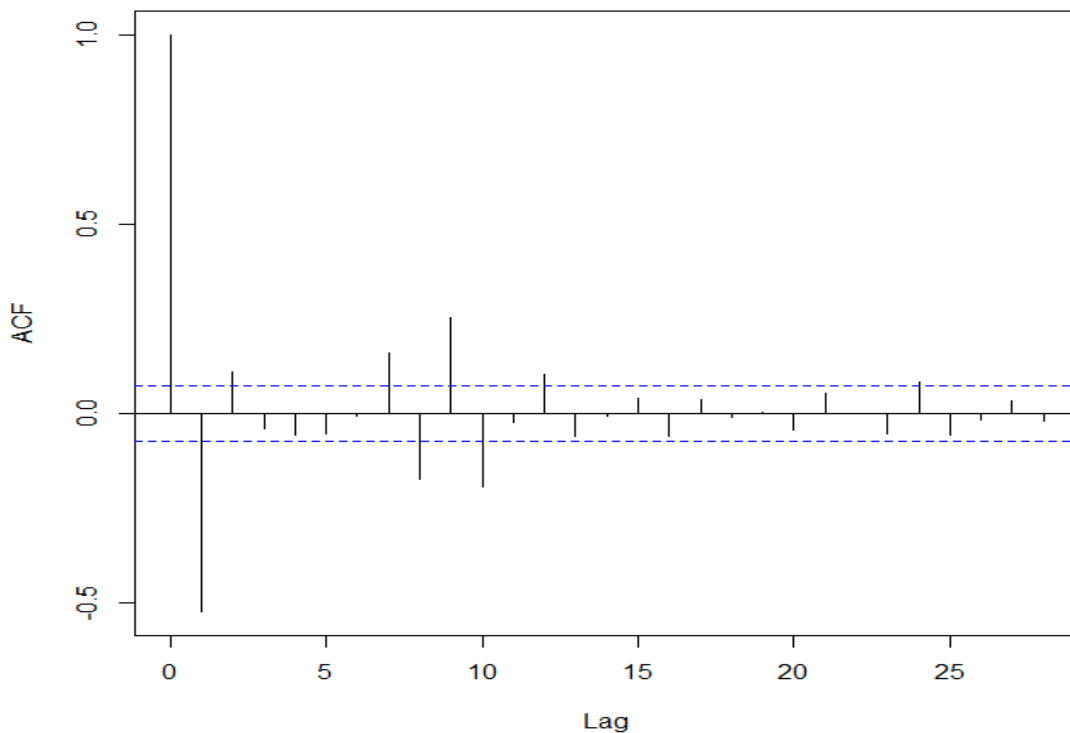


圖 4.3.11 模擬地震資料之發生次數 ACF 圖

兩筆地震資料之發生次數皆不平穩，所以由取差分後之 ACF 圖來看，ACF 為自我相關函數，可以發現兩筆地震資料發生次數之 ACF 圖皆於-0.5 至 1 之間上下擺盪且幅度相似。



## 7.發生次數之 PACF

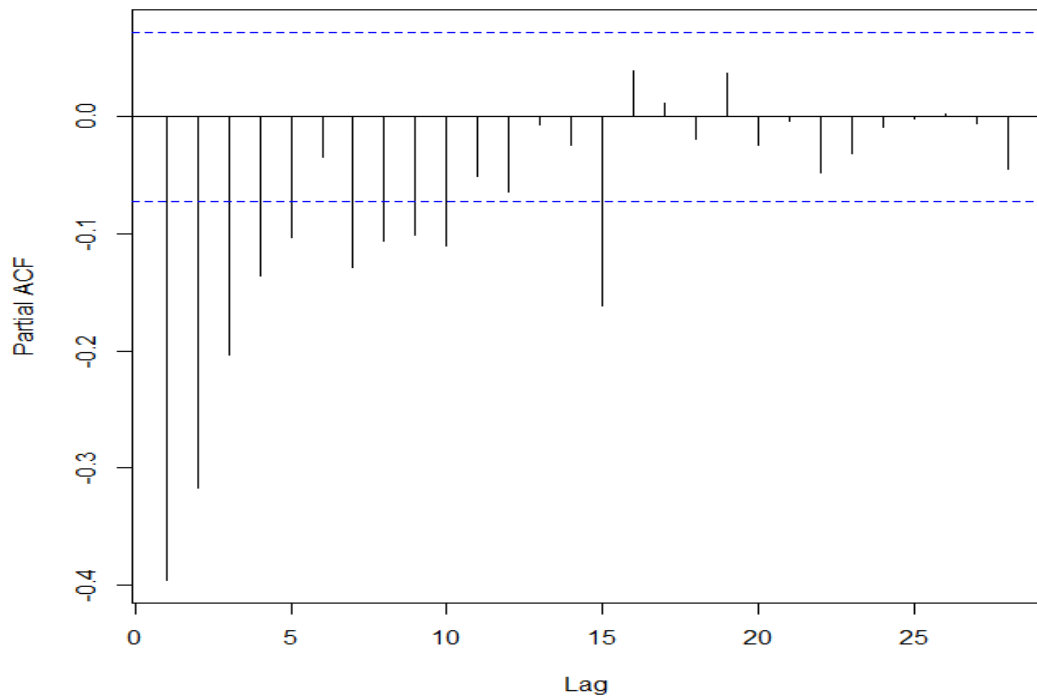


圖 4.3.12 真實地震資料之發生次數 PACF 圖

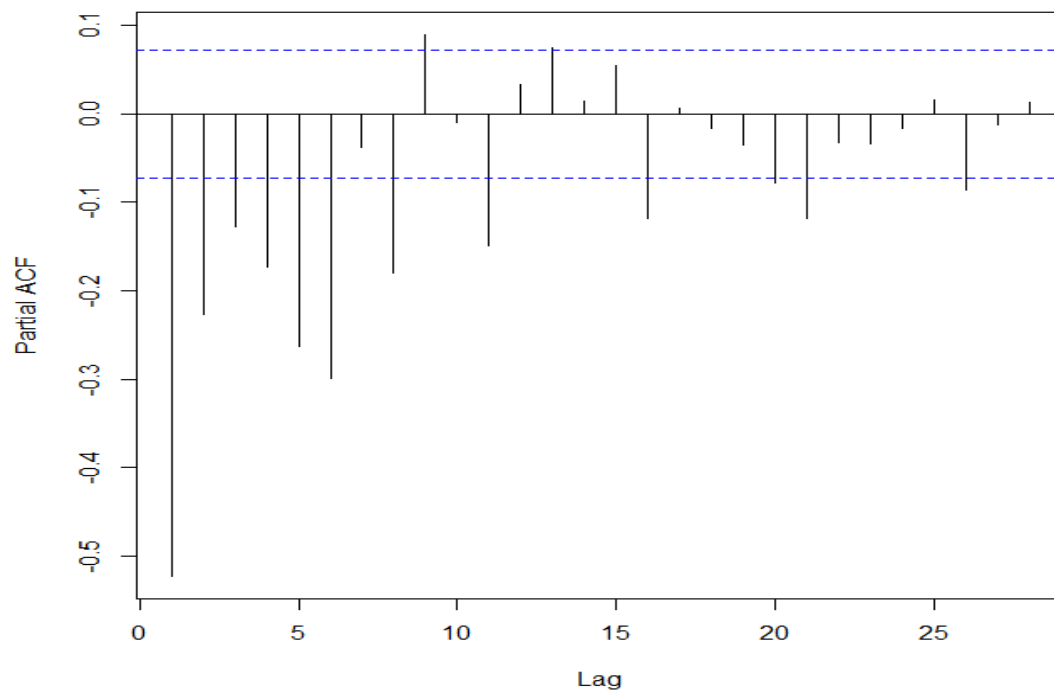


圖 4.3.13 模擬地震資料之發生次數 PACF 圖

兩筆地震資料之發生次數皆不平穩，所以由取差分後之 PACF 圖來看，PACF 為偏自我相關函數，可以發現兩筆地震資料發生次數之 PACF 圖皆於-0.5 至 0.1 之間上下擺盪且幅度相似。

## 8. 風險率(Hazard rate)

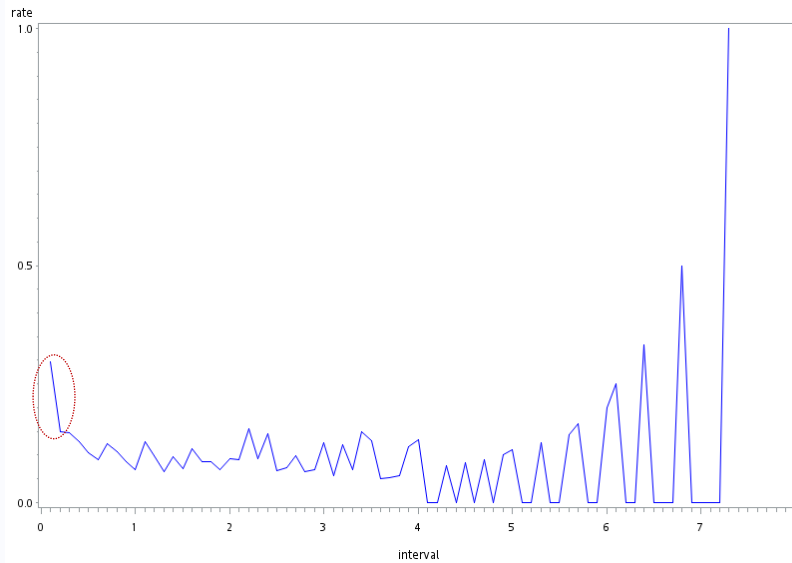


圖 4.3.14 真實地震資料之風險率

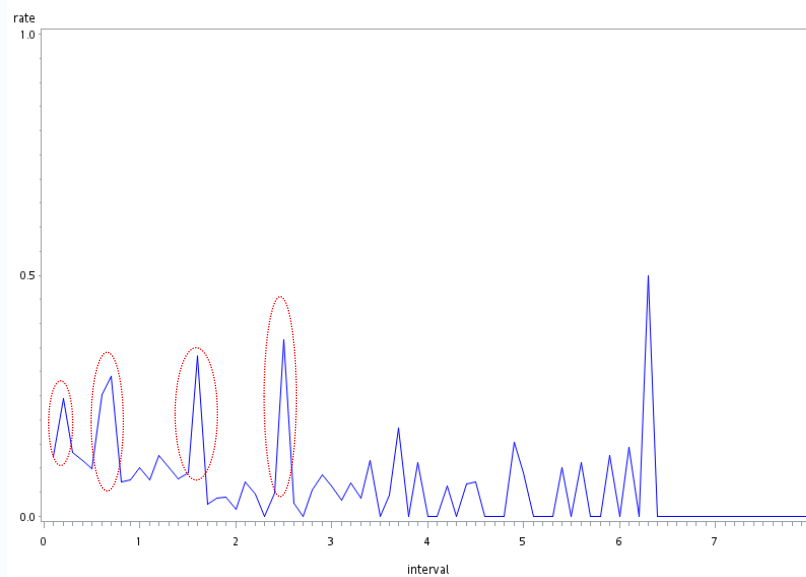


圖 4.3.15 模擬地震資料之風險率

風險率所分析之項目為間隔時間，將資料之間隔時間做排序，接著給定時間單位，計算每個時間單位下所發生事件個數與剩下事件個數之機率，此處時間單位為 0.1。縱軸為風險率，橫軸為間隔時間。

從圖 4.3.14 可發現真實地震資料之間隔時間落在 0~0.1(虛線圈起處)之數量相當多，表示較多高計數之地震發生，與先前結果相符。從圖 4.3.15 可發現模擬地震資料較多間隔時間落於 0.1~0.2、1.5~1.6、2.4~2.5 與 0.6~0.7 之間(虛線圈起處)，原因為無法模擬較高計數之地震，因此平分於其餘低次數之發生，導致間隔時間大多落於此四個區間內，想法與 4.3.1 所述相同。除了先前兩點所提及，其餘風險率之走向與真實地震資料大致吻合。

#### 4.4 真實地震資料(2008 年~2018 年)

##### 4.4.1 十年真實地震資料之特性(2008/01/01~2018/01/01)

從中央氣象局的網站，我們收集了台灣地區從 2008 年 01 月 01 日至 2018 年 01 月 01 日的真實地震發生資料，其規模介於 0 到 10 且深度介於 0 到 350 公里，共 3653 天的資料，以每五天為單位進行觀察，共計 731 筆。

##### 1. 真實地震之次數分配

圖 4.4.1 為以每五天為測量單位下，所得出之次數分配。其中最多筆為發生次數 5 之事件，共 83 筆，而最高每五天發生次數為 84。

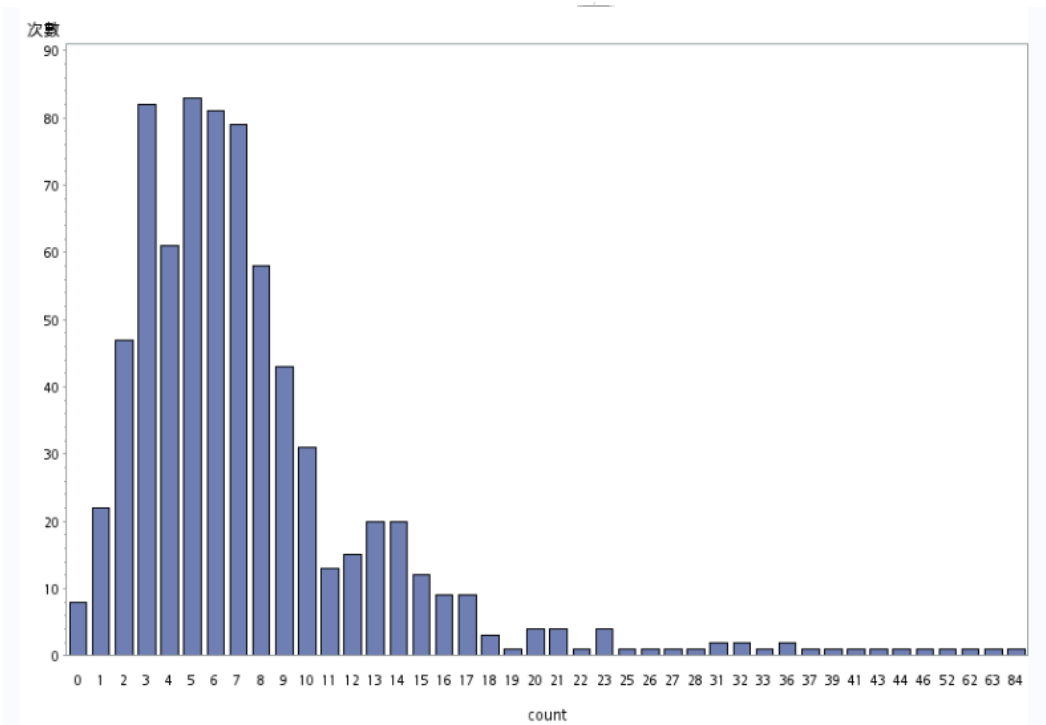


圖 4.4.1 真實地震資料之次數分配圖

## 2.真實地震資料之頻譜特性(2008/01/01~2018/01/01)

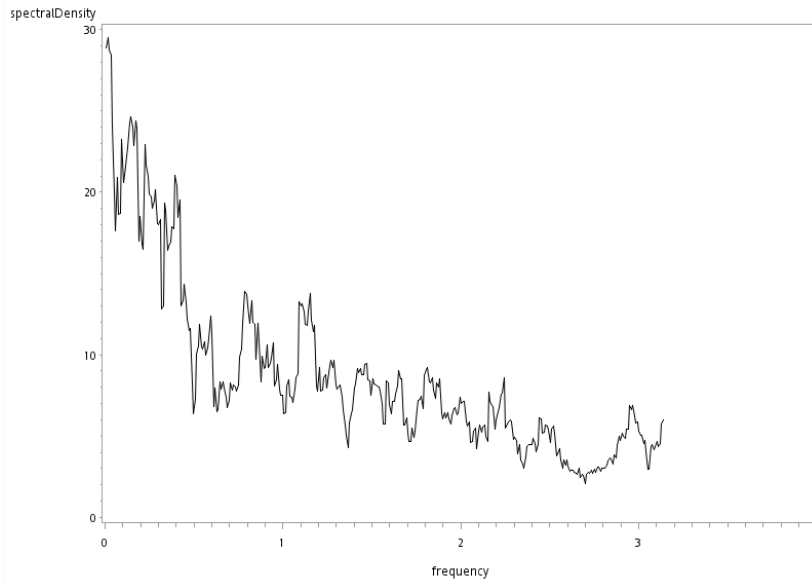


圖 4.4.2 真實地震資料之頻譜圖

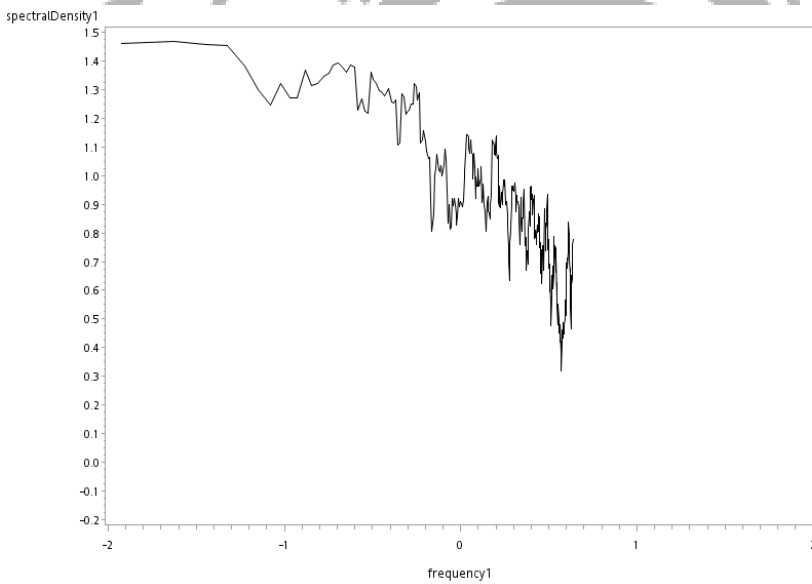


圖 4.4.3 真實地震資料之雙對數尺度頻譜圖

圖 4.4.2 為真實地震資料之頻譜圖，發現具有  $1/f^b$  型態，接著將縱橫軸兩尺度皆取對數，如圖 4.4.3，觀察其趨勢。

由雙對數尺度之頻譜圖可觀察到頻譜密度與頻率呈反向變動，且呈現  $1/f^b$  波動型態，因此可將此筆地震真實資料視為群集卜瓦松過程且具有碎形之特性。另外可觀察到此筆資料與兩年之地震真實資料之頻譜略有不同，震動幅度較大。

### 3.真實地震資料之碎形特性(2008/01/01~2018/01/01)

#### 1.Variance-Time-Curve(VTC)

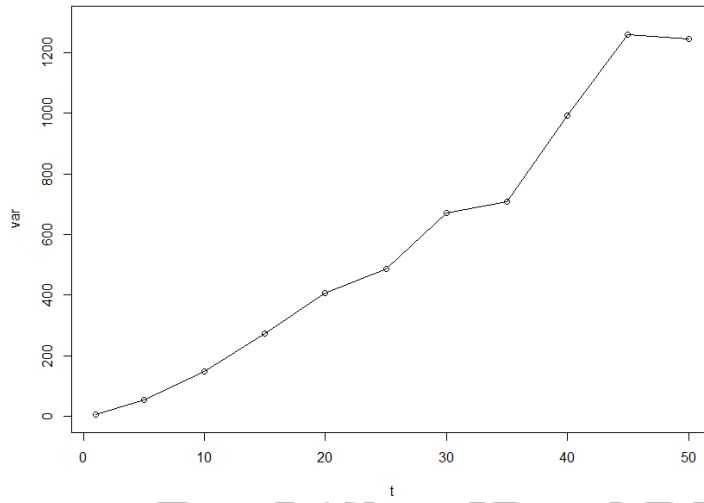


圖 4.4.4 真實地震資料之 Variance-Time-Curve

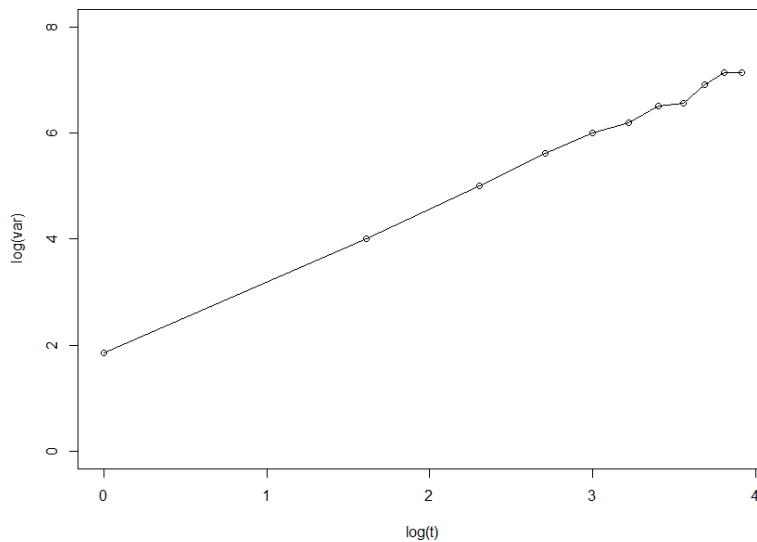


圖 4.4.5 真實地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve

圖 4.4.4 為此筆真實地震資料之 Variance-Time-Curve，隨著測量時間寬度 $\Delta t$ 的增加，地震發生次數的變異也隨之增加，且增加的趨勢為 $(\Delta t)^a$ ，其中 a 值可利用兩軸取對數後的斜率求得，即為圖 4.4.5 的斜率，經由簡單線性迴歸求得斜率為 1.36062，即為 VTC 指數，由於 VTC 指數介於 0~2 之間，顯示此筆資料具有碎形特性。

## 2.Fano Factor(FF)

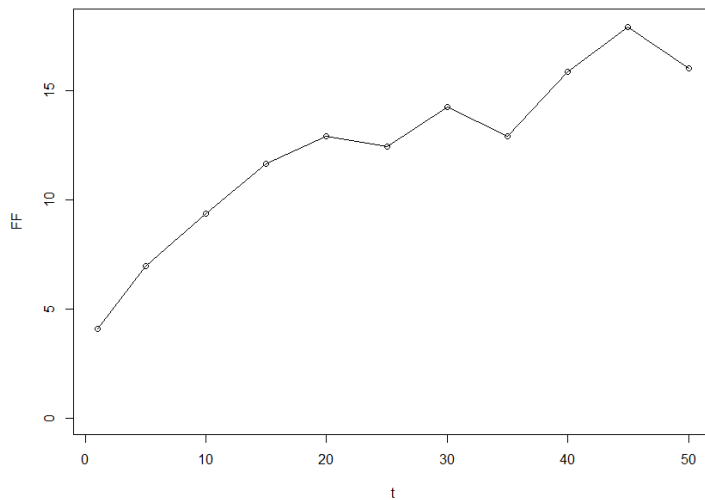


圖 4.4.6 真實地震資料之 Fano Factor 圖

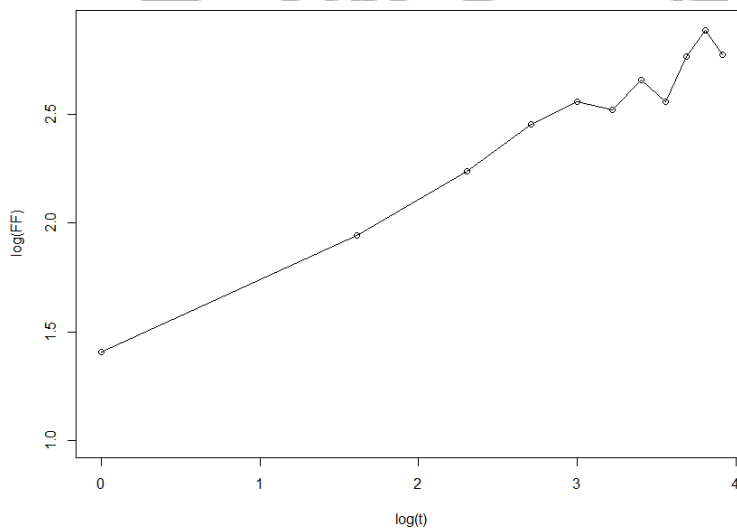


圖 4.4.7 真實地震資料之雙對數尺度 Fano Factor 圖

圖 4.4.6 為真實地震資料之 Fano Factor 圖，隨著測量時間寬度 $\Delta t$ 的增加，其 FF 隨之增加且增加趨勢為 $(\Delta t)^\delta$ ，將兩軸尺度透過對數轉換後，如圖 4.4.7，以簡單線性迴歸求得 $\delta$ 值為 0.36318，亦即 FF 指數，介於 0~1 之間，表示此筆資料具有碎形特性。另外，在不同測量時間寬度 $\Delta t$ 下，其 FF 值皆大於 1，表示此筆資料有群聚現象，符合群集卜瓦松過程之性質。

### 4.5 群集卜瓦松過程之模擬(2008/01/01~2018/01/01)

先前估計參數之過程已詳細說明，利用同樣之方法，我們優先估計 $z$ 值，讓 VTC 指數最接近真實地震資料，接著選取 $N_0$ ，再藉由控制平均發生次數來調整 $\lambda$ 值，最後根據次數分配來選取最適當的 $\alpha$ 與 $\beta$ 值。

圖 4.5.1 為真實地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve，由簡單線性迴歸得到斜率為 1.36062，因此在固定其他參數不變下，我們將找出斜率最逼近 1.36062 之  $z$  值。

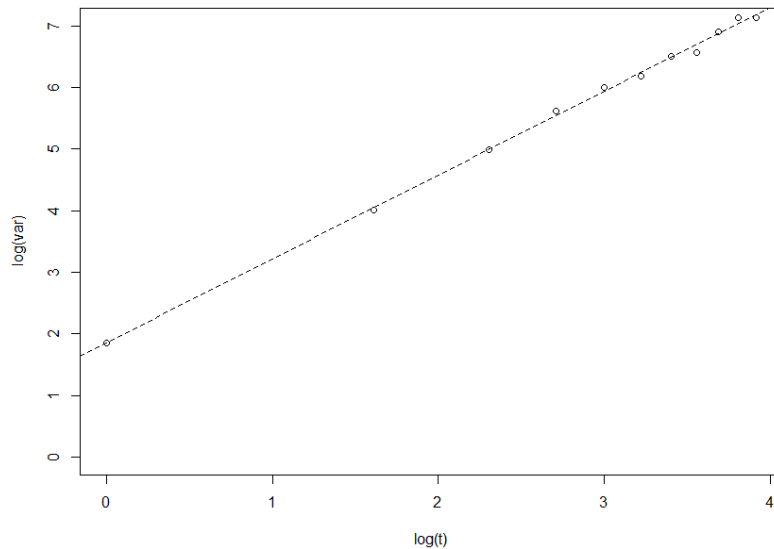


圖 4.5.1 真實地震資料之 Variance-Time-Curve

圖 4.5.2 為不同  $z$  值下，雙對數尺度 Variance-Time-Curve 斜率的波動，可發現斜率 1.36062 所對應到的  $z$  值為 -2.7 到 -2.2 之間，因此針對這區間內的  $z$  值進一步觀察。

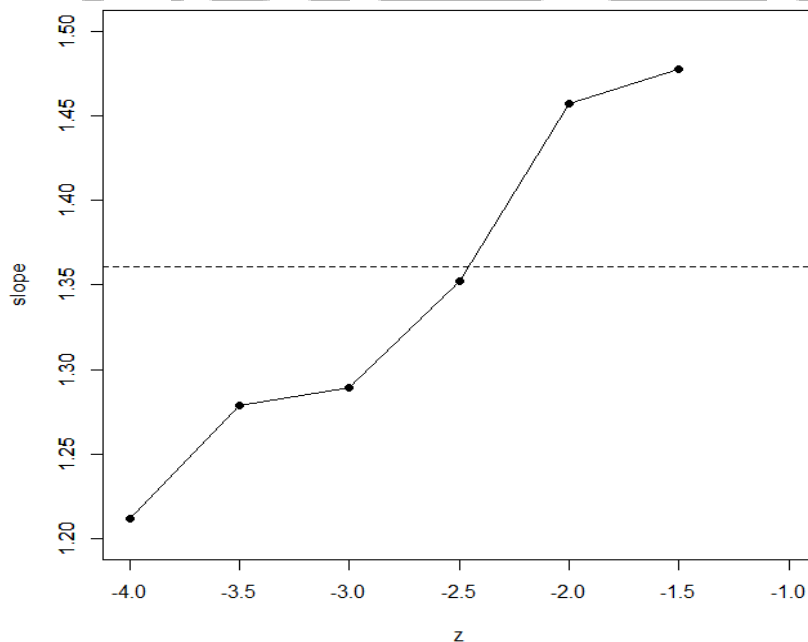


圖 4.5.2 模擬雙對數尺度 Variance-Time-Curve 之斜率與  $z$  值的關係圖

由前述可知，影響雙對數尺度之 Variance-Time-Curve 斜率最小者為  $\lambda$ ，因此固定其他參數不變下，藉由  $\lambda$  的變動，算出這區間內  $z$  值的所有斜率平均數，並選擇最

接近之  $z$  值。圖 4.5.3 為針對此區間所算出之斜率平均數與  $z$  值關係圖。

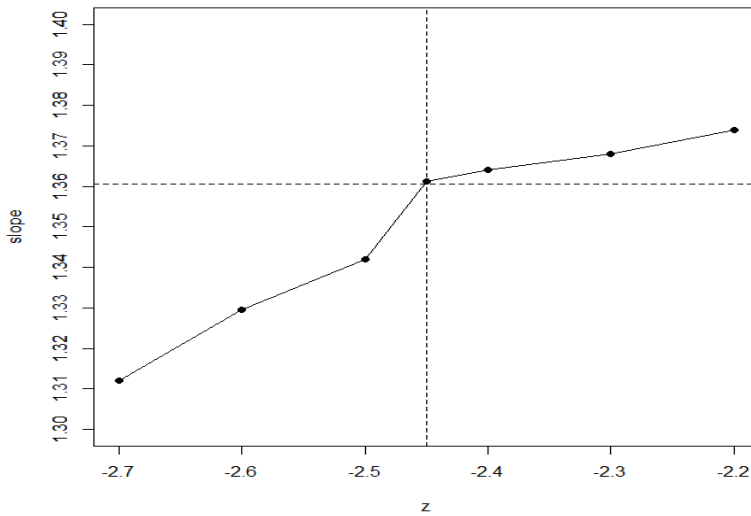


圖 4.5.3 針對-2.7 到-2.2 之間所算出之斜率平均數與  $z$  值關係圖

由上圖可得知，最接近真實地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve 斜率的  $z$  值約為-2.45。

下表為真實地震之次數分配，計數為每五天地震所發生之次數，個數為同樣計數下的總個數：

平均數為 7.879617，變異數為 54.98549

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
個數	8	22	47	82	61	83	81	79	58	43	31	13	15	20	20	12	9	9	3	1	4
計數	21	22	23	25	26	27	28	31	32	33	36	37	39	41	43	44	46	52	62	63	84
個數	4	1	4	1	1	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

表 4.5.1 真實地震資料之次數分配

以下將列出幾組參數選取之過程，希望能夠盡量符合真實地震之次數分配且平均數接近 7.879617，列出次數分配比較圖、雙對數尺度 Variance-Time-Curve 與雙對數尺度頻譜圖，並計算總個數差異。



(1)

$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$z$	$N_0$
0.602	10.1	0.15	-2.45	15

平均數 7.871409，變異數 16.81906

個數總差異:226

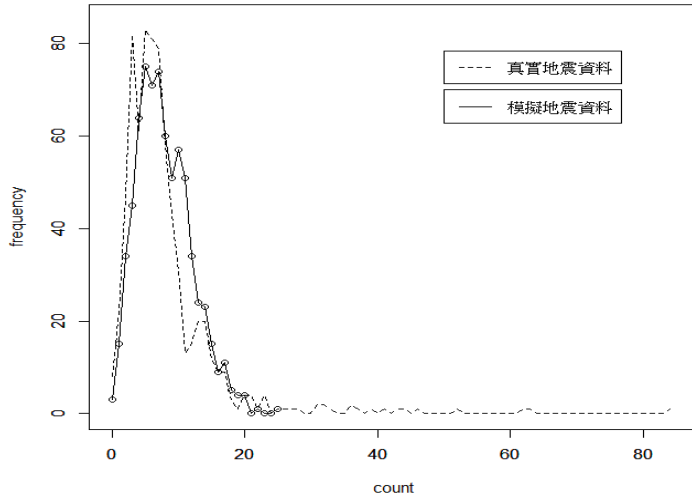


圖 4.5.4 參數組(1)次數分配比較圖

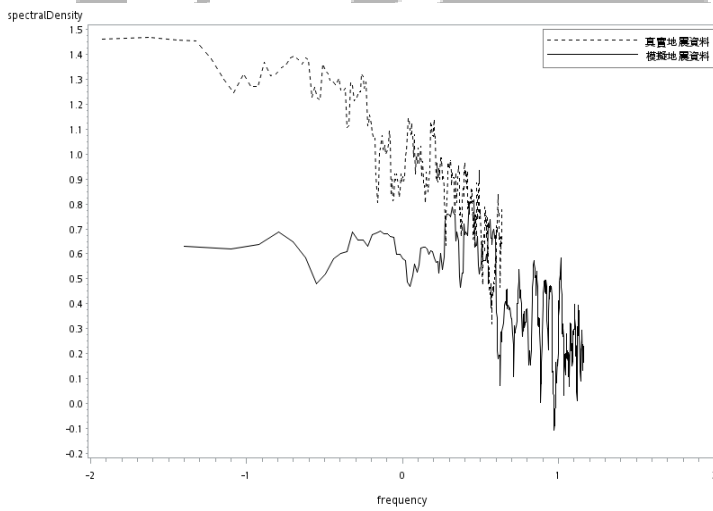


圖 4.5.5 參數組(1)雙對數頻譜圖

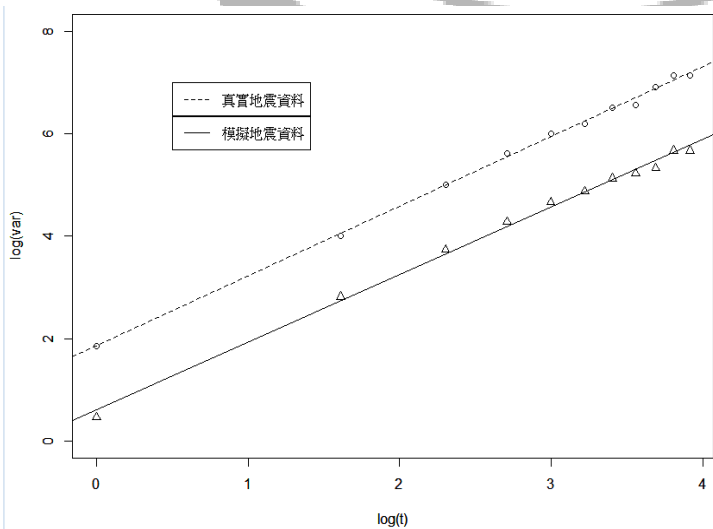


圖 4.5.6 參數組(1)雙對數 VTC 圖

(2)

$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$z$	$N_0$
0.594	10.5	0.15	-2.45	20

平均數 7.886457，變異數 16.12819

個數總差異:252

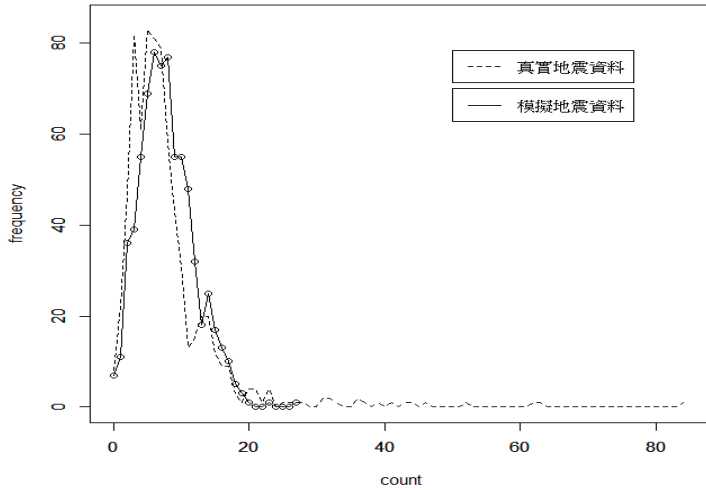


圖 4.5.7 參數組(2)次數分配比較圖

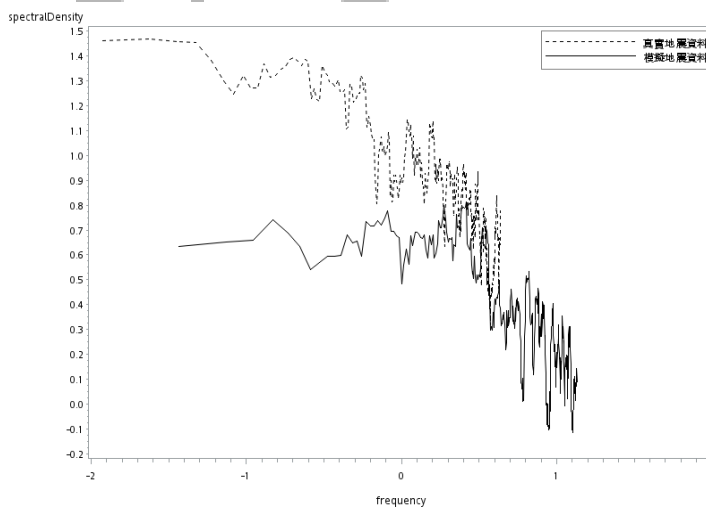


圖 4.5.8 參數組(2)雙對數頻譜圖

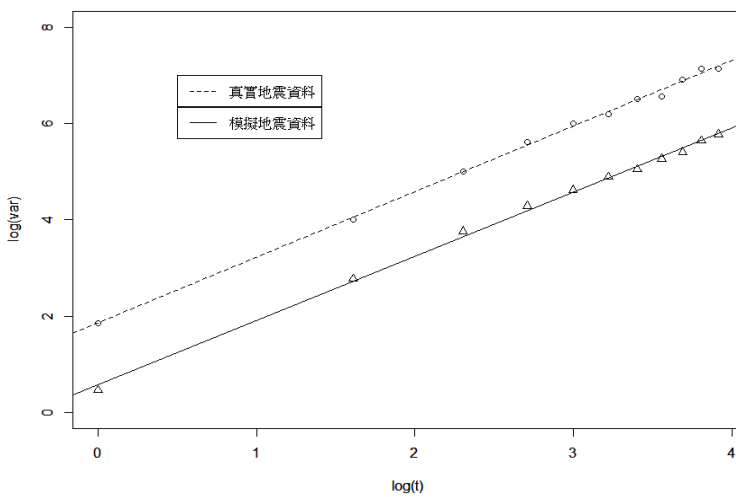


圖 4.5.9 參數組(2)雙對數 VTC 圖

(3)

$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$z$	$N_0$
0.625	9.8	0.15	-2.45	10

平均數 7.874145，變異數 16.49921

個數總差異:236

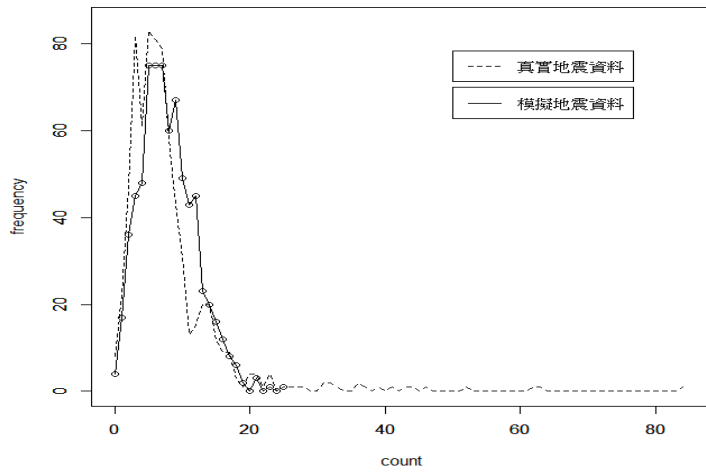


圖 4.5.10 參數組(3)次數分配比較圖

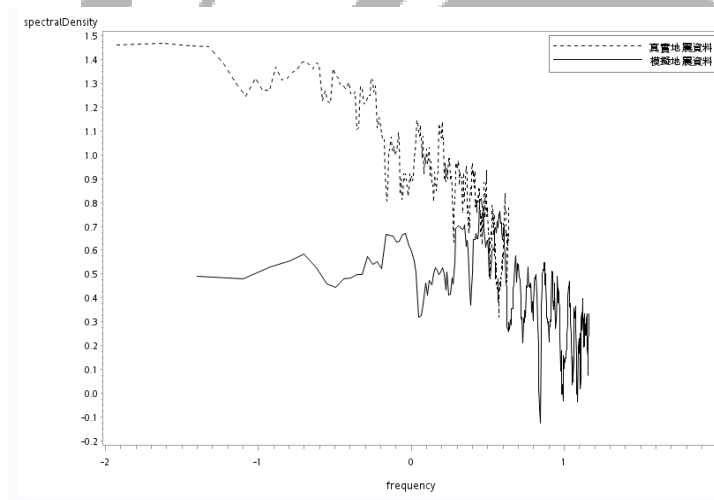


圖 4.5.11 參數組(3)雙對數頻譜圖

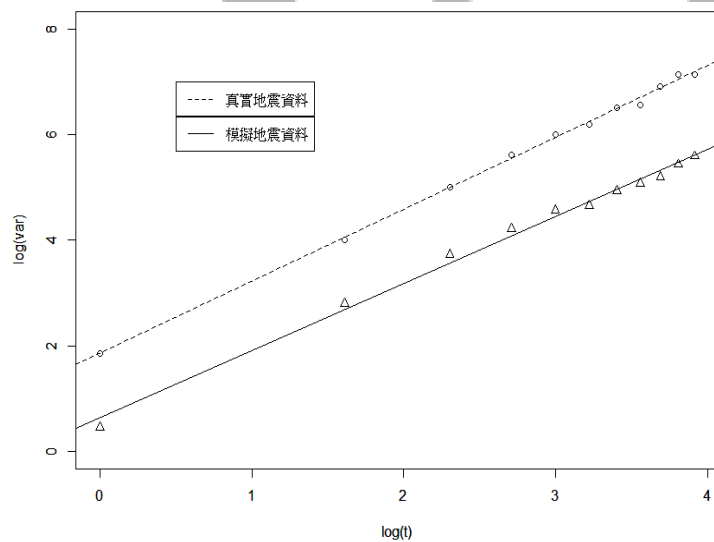


圖 4.5.12 參數組(3)雙對數 VTC 圖

(4)

$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$z$	$N_0$
0.586	10.8	0.15	-2.45	25

平均數 7.856361，變異數 16.56701

個數總差異:225

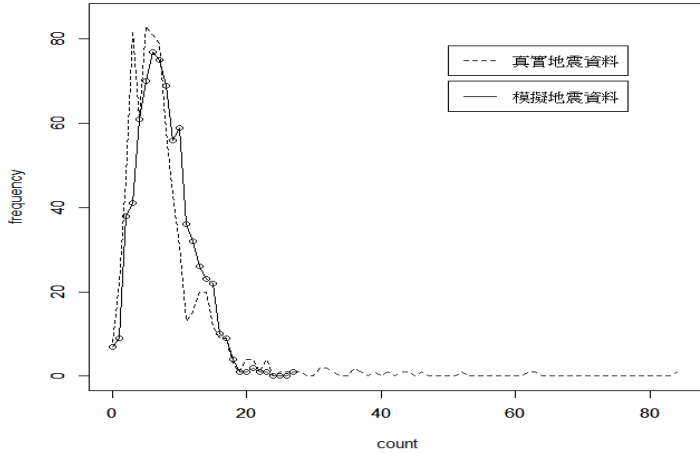


圖 4.5.13 參數組(4)次數分配比較圖

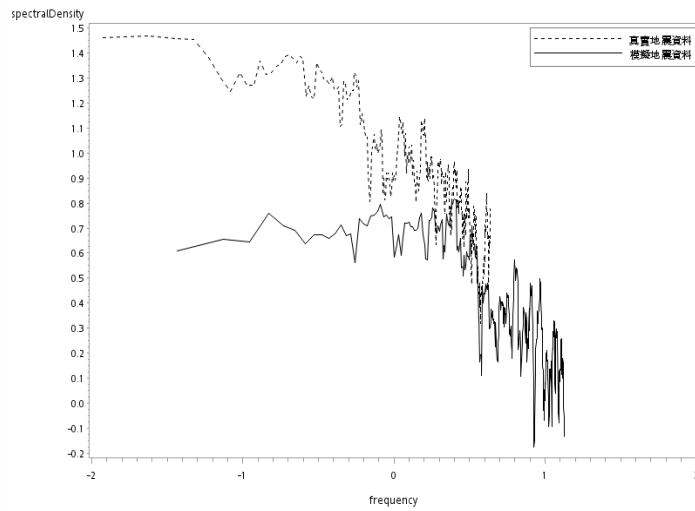


圖 4.5.14 參數組(4)雙對數頻譜圖

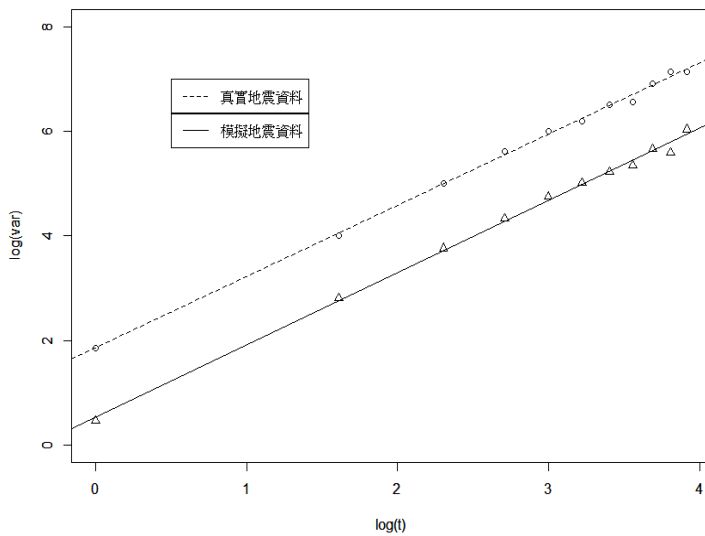


圖 4.5.15 參數組(4)雙對數 VTC 圖

### 3. 固定參數

在固定 $z$ 值後，接著選取 $N_0$ ，並藉由調整平均發生次數與次數分配找出 $\lambda$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$ 值，最終固定之參數為：

參數	$\lambda$	$\alpha$	$\beta$	$z$	$N_0$
數值	0.586	10.8	0.15	-2.45	25

此模擬之資料平均發生次數為 7.856361 次，與真實地震資料之平均發生次數 7.879617 次相近；與真實資料之次數分配總差異個數為 225 個，是四組參數中最小值；雙對數尺度 Variance-Time-Curve 的斜率亦是五種參數中最接近真實地震資料(VTC=1.36062)者；從次數分配來看，在計數 3、10、11 與 12 的個數有較明顯差異，以及計數 27 以上，其餘算是與真實地震資料吻合。



## 4.6 真實地震資料與模擬資料之比較(2008/01/01~2018/01/01)

### 1. 發生次數之頻譜特性

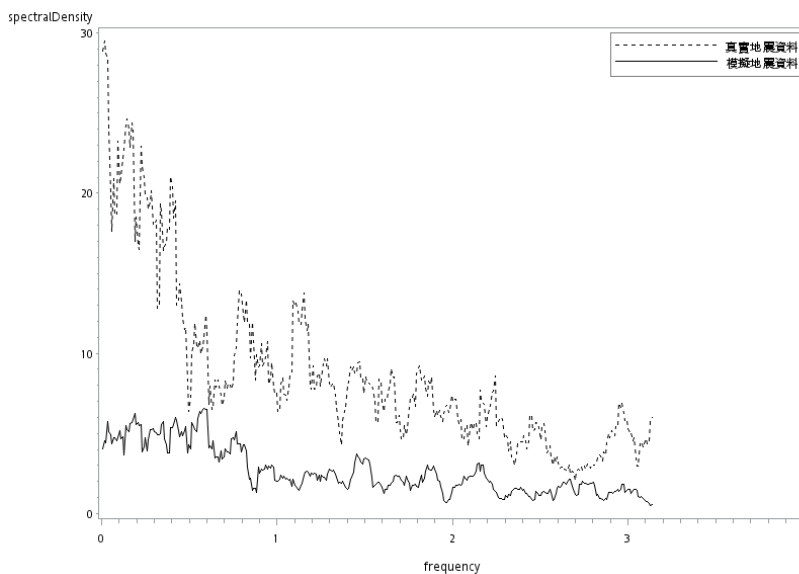


圖 4.6.1 模擬地震資料之頻譜圖

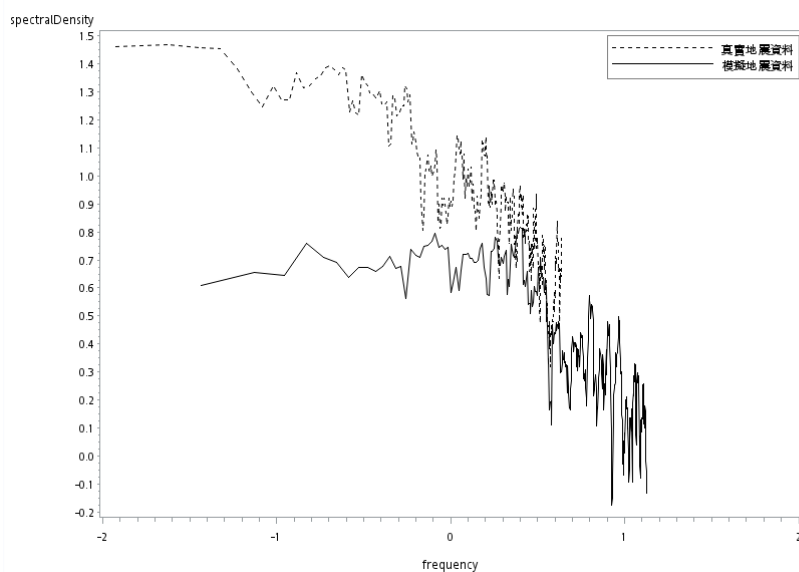


圖 4.6.2 模擬地震資料之雙對數尺度頻譜圖

圖 4.6.1 與圖 4.6.2 皆可看出一開始的頻譜密度與真實地震資料差異較大，且平均頻譜密度皆偏低。因此，以下我們嘗試將真實地震資料計數 27 以上之地震個數添加至模擬地震資料，查看是否因高計數之地震個數造成頻譜圖之明顯落差，下圖為調整後之模擬地震資料與真實地震資料之比較圖。

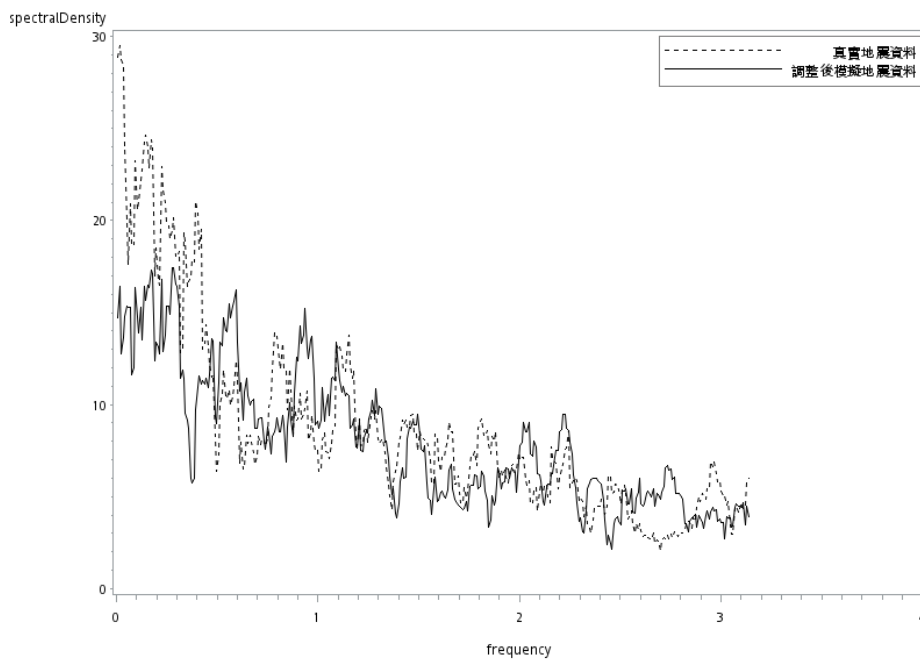


圖 4.6.3 調整後模擬地震資料之頻譜圖

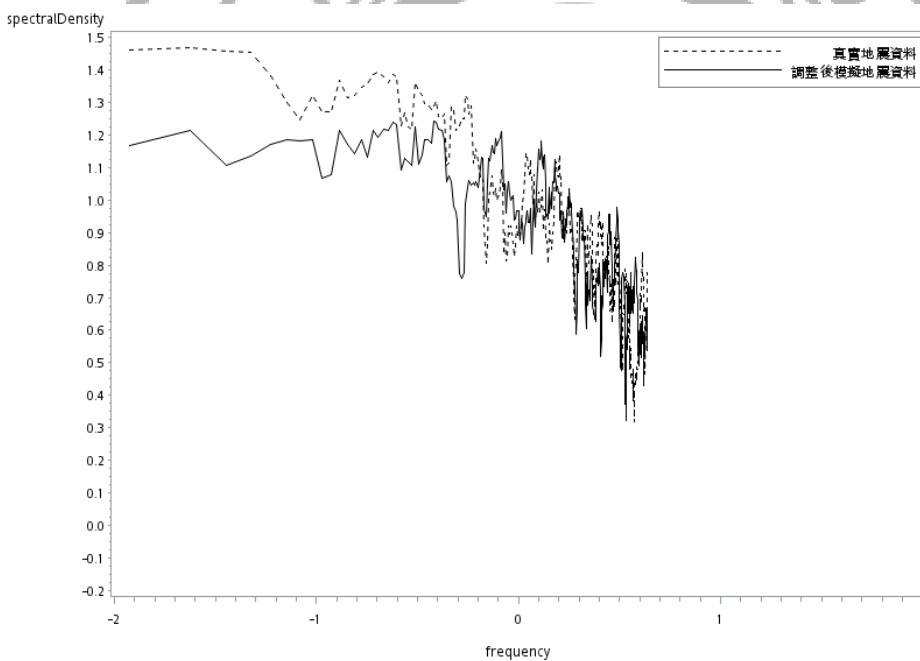


圖 4.6.4 調整後模擬地震資料之雙對數尺度頻譜圖

圖 4.6.3 與 4.6.4 可發現，調整後模擬地震資料之頻譜圖與雙對數尺度頻譜圖皆明顯上升，可發現最前端低頻部分仍達不到真實地震資料之高度，原因為在模擬的情況下，真實地震資料計數高之個數，將會被計數 27 以下之個數平分掉，造成整體變異較低且穩定，因此即便對模擬地震資料進行調整，其整體變異仍無真實地震資料來的高，因此低頻部分仍有些許差異，而除此之外其餘算是與真實地震資料吻合，因此可得知高計數地震個數造成頻譜圖整體明顯偏低之現象。

另外，從圖 4.6.2 可發現模擬資料呈 $1/f^b$ 型態，表示具有碎形特性且為群集卜瓦松過程。

## 2.發生次數之時間數列圖

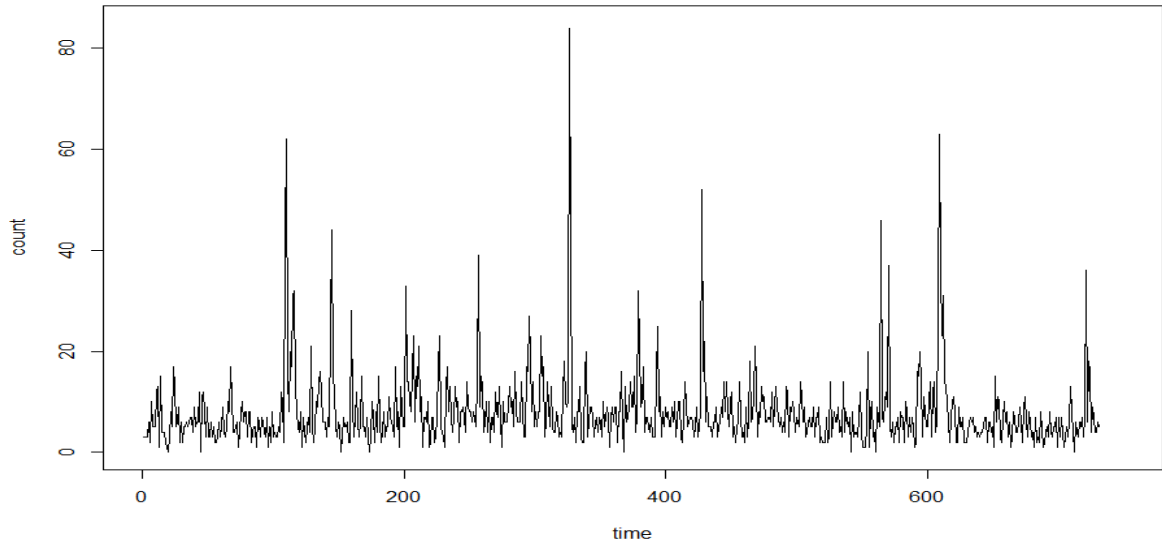


圖 4.6.5 真實地震資料之時間數列圖

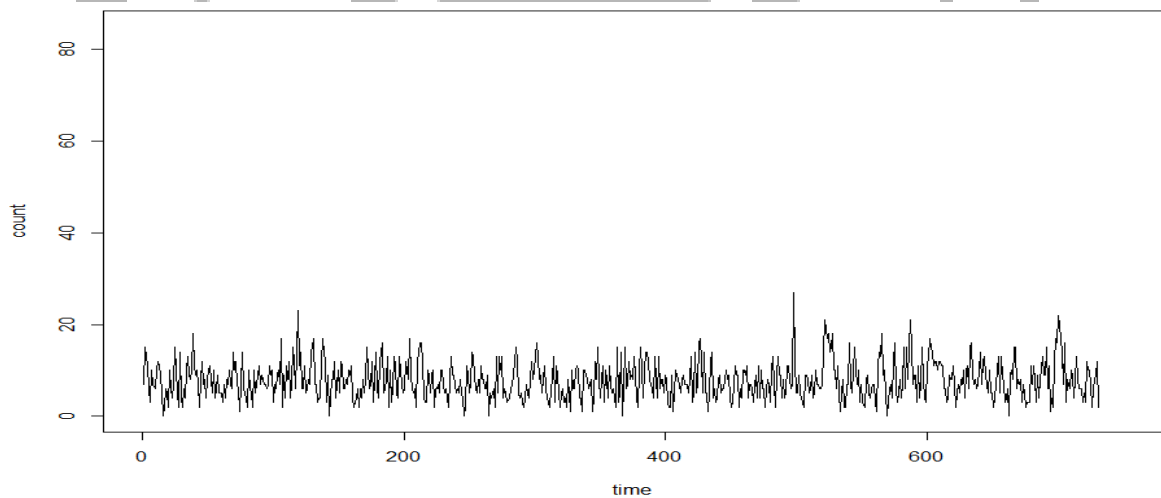


圖 4.6.6 模擬地震資料之時間數列圖

圖 4.5.5 為真實地震資料之時間數列圖，圖中可看出這十年台灣幾乎每五天皆有地震發生，五天內最高發生次數為 84 次，且有約二十次五天內發生超過 25 次地震，與模擬地震資料相比，模擬資料最高可模擬次數為 27 次，更高之次數則較難去預估，除此之外，其餘發生次數之變化情形與真實地震資料相似。



### 3.發生次數之比較圖

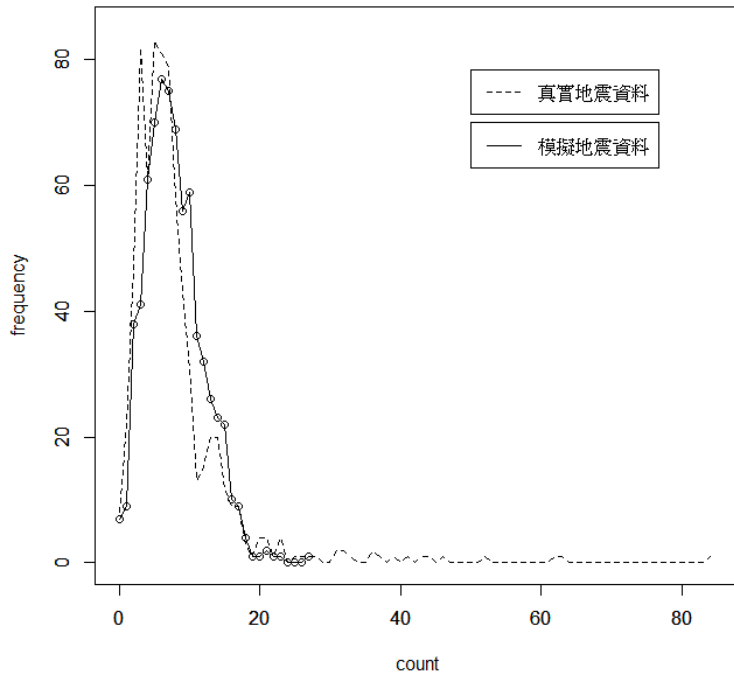


圖 4.6.7 真實與模擬地震資料之次數分配比較圖

透過圖 4.6.7 之次數分配比較圖，發現除了在計數 3、10、11 與 12 的個數有明顯差異，以及計數 27 以上無法預估出來，其餘算是與真實地震資料符合，原因為 4.3.小節所提及，此處不多加贅述。

### 4.發生次數之基本統計量

	min	max	mean	variance	sum	median
真實資料	0	84	7.879617	54.98549	5760	6
模擬資料	0	27	7.856361	16.56701	5743	7

表 4.6.1 發生次數之基本統計量

從表 4.6.1 可發現，兩者之差異為先前所提及，模擬地震資料之變異數較小，且最大發生次數較低，因離群值所導致。

## 5. 發生次數之雙對數尺度 VTC 與 FF

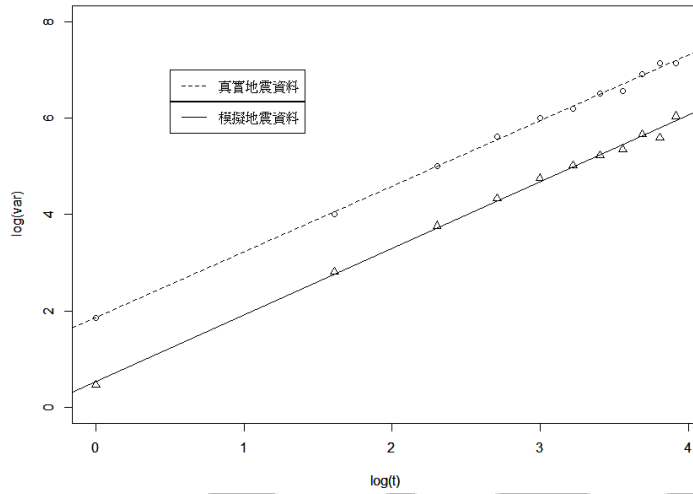


圖 4.6.8 真實與模擬地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve 圖

真實地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve: 截距為 1.86019, 斜率 1.36062

模擬地震資料之雙對數尺度 Variance-Time-Curve: 截距: 0.54136, 斜率: 1.37929

由上述可得知, 模擬資料與地震資料斜率非常相近但截距相差 1.31883, 原因是真實地震資料離群值較多, 即為高次數之地震, 導致整體變異較模擬資料大

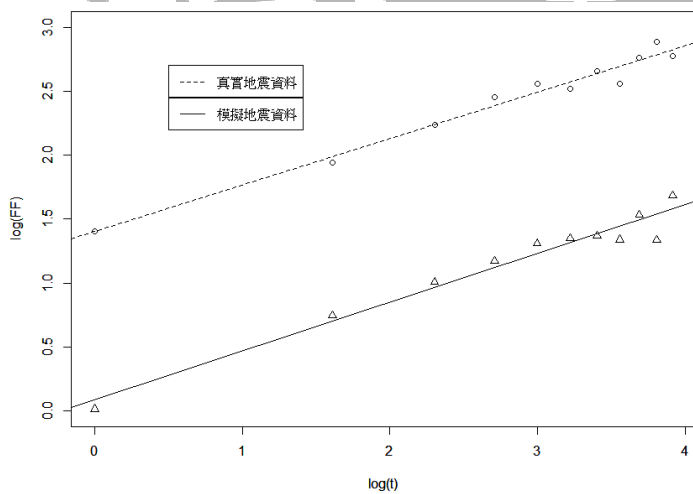


圖 4.6.9 真實與模擬地震資料之雙對數尺度 FF 圖

真實地震資料之雙對數尺度 FF 圖: 截距為 1.40214, 斜率為 0.36318

模擬地震資料之雙對數尺度 FF 圖: 截距為 0.08627, 斜率為 0.38186

模擬地震資料之 FF 指數為 0.36318, 介於 0 到 1 之間, 表示具有碎形特性。

## 6. 發生次數之 ACF

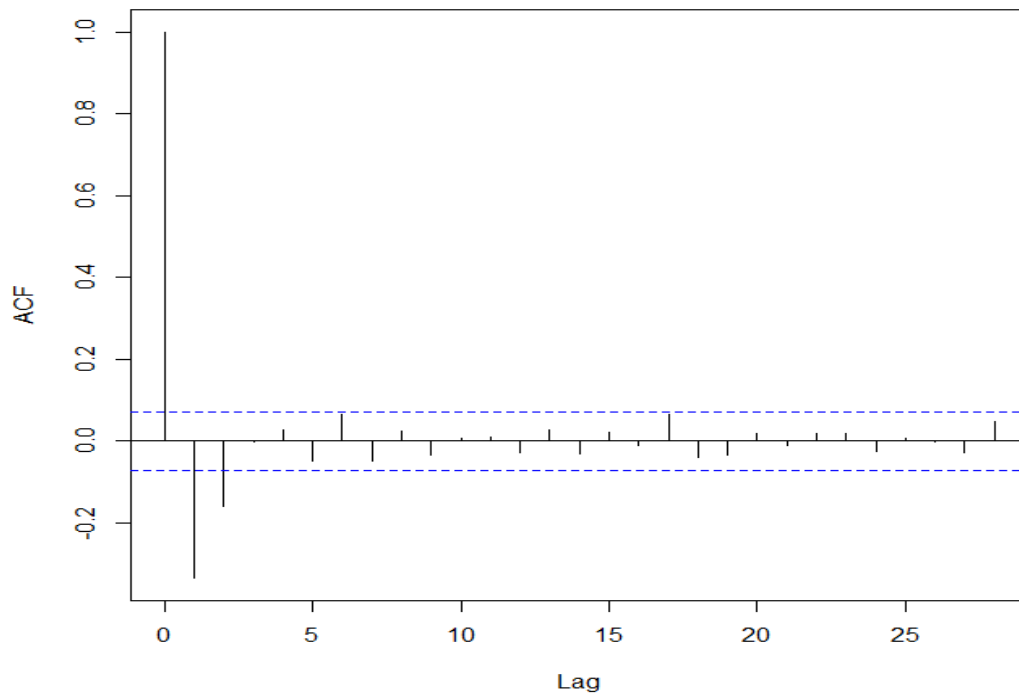


圖 4.6.10 真實地震資料之發生次數 ACF 圖

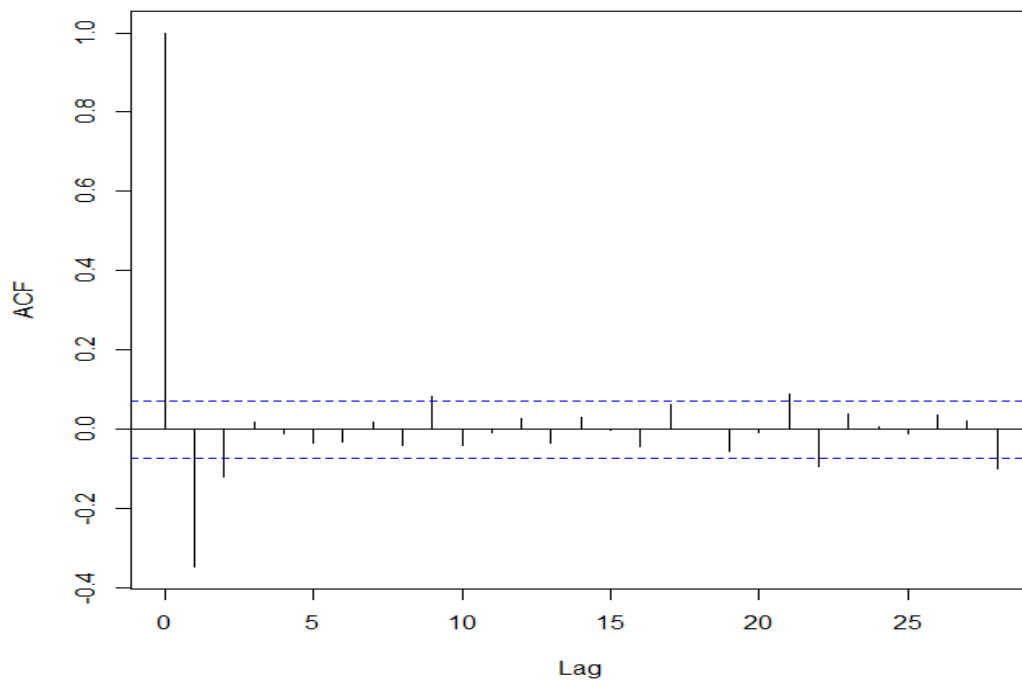


圖 4.6.11 模擬地震資料之發生次數 ACF 圖

兩筆地震資料之發生次數皆不平穩，所以由取差分後之 ACF 圖來看，可以發現兩筆地震資料發生次數之 ACF 圖皆於-0.4 至 1 之間上下擺盪且幅度相似。

## 7.發生次數之 PACF

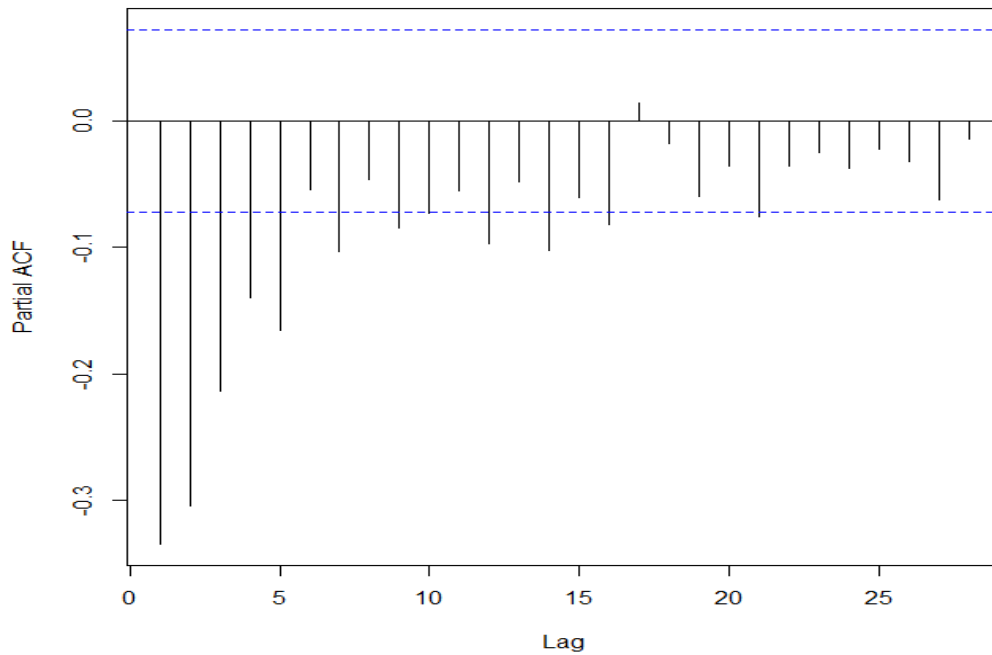


圖 4.6.12 真實地震資料之發生次數 PACF 圖

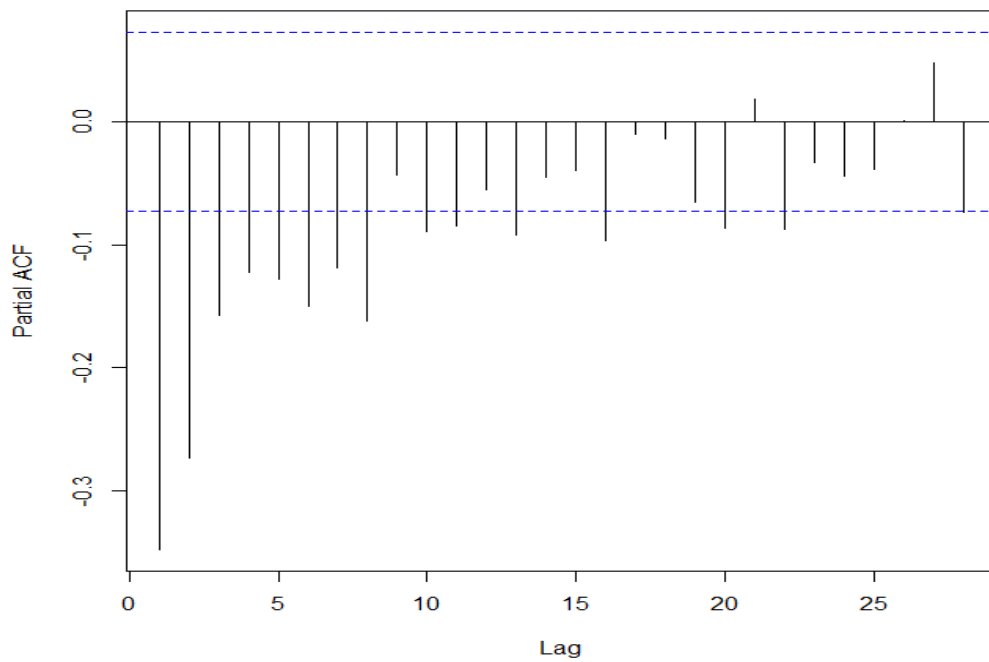


圖 4.6.13 模擬地震資料之發生次數 PACF 圖

兩筆地震資料之發生次數皆不平穩，所以由取差分後之 PACF 圖來看，可以發現兩筆地震資料發生次數之 PACF 圖皆於-0.4 至 0.1 之間上下擺盪且幅度相似。

## 8. 風險率(Hazard rate)

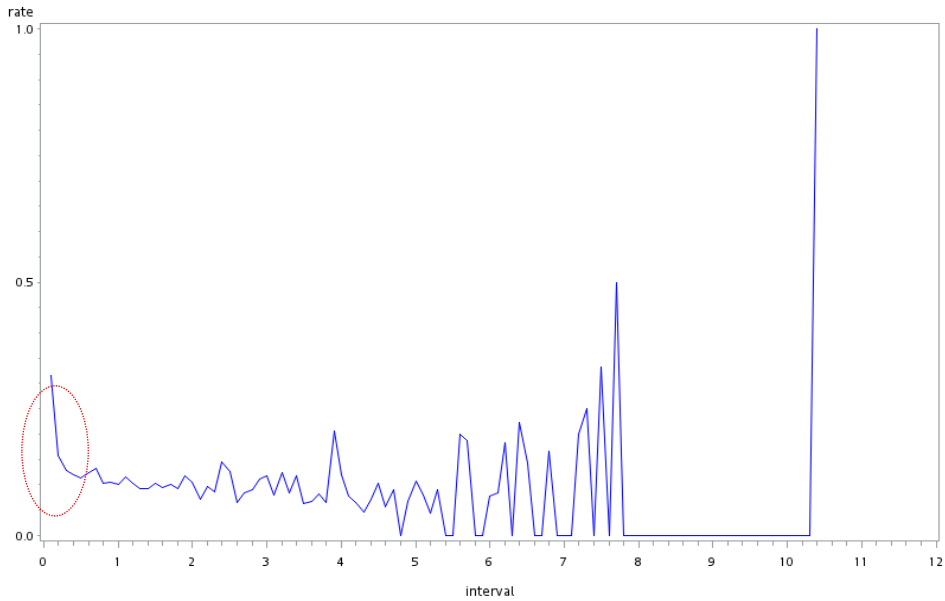


圖 4.6.14 真實地震資料之風險率

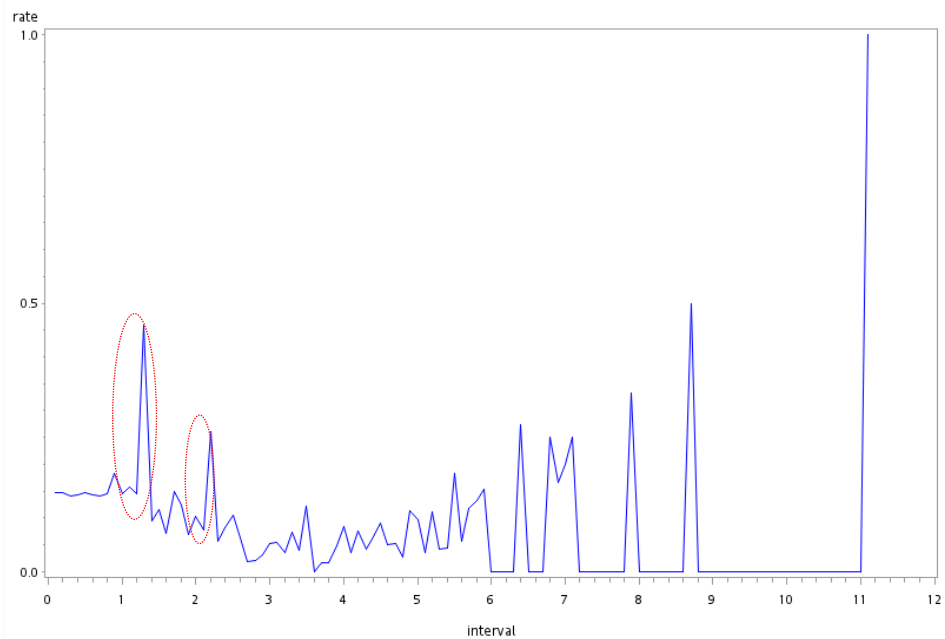


圖 4.6.15 模擬地震資料之風險率(縱軸為風險率，橫軸為間隔時間。)

從圖 4.6.14 可發現真實地震資料之間隔時間落在 0~0.1(虛線圈起處)之數量相當多，表示較多高計數之地震發生，與先前結果相符，而模擬資料在此時間單位僅發生約一半次數，因模擬資料變異較小，間隔時間之落差無法比擬真實資料。另外，從圖 4.6.15 可發現模擬地震資料較多間隔時間落於 1.1~1.2 與 2.1~2.2 之間(虛線圈起處)，原因為無法模擬較高計數之地震，因此平分於其餘低次數之發生，導致間隔時間大多落於此兩區間內，想法與 4.3.1 所述相同。除了先前兩點所提及，其餘風險率之走向與真實地震資料大致吻合。

## 第五章 結論與後續研究

### 5.1 結論

在第四章的模擬與實證分析中，我們取兩種真實地震資料分別做模擬，在選取不同測量時間寬度下，可以發現到寬度為每五天之結果略勝於寬度為每日之結果，當測量寬度過小時，導致發生次數過低，抑或0次過多，因此相對上較難與真實地震資料相符。

本研究之目的在於探討地震發生機制，而非預測地震之發生，藉由不同的指標觀察台灣區地震發生之特性。從先前各項觀察與分析可以發現到最大的困難點在於高計數之地震，我們難以透過此模型模擬出真實地震資料之離群值，在各項分析中亦差異於此，而其餘模擬結果皆與真實地震資料相似，此困難點亦證實了自然現象難以透過科學完美預測出來，只能盡可能地逼近。

### 5.2 後續研究方向

本研究所選取之模型雖與真實地震資料相似，但卻仍有很大的進步空間，因此以下列出幾點後續研究方向，嘗試藉此更加了解地震之機制，使模型更加符合真實資料。

1. 尋找是否有其餘更適合適配真實地震資料之點過程模型。
2. 嘗試以其他碎形指標作為分析依據(如：Allen factor)。
3. 嘗試針對地震發生間隔時間做模擬與分析。
4. 嘗試將發生次數變數轉換後再進行模擬，藉以降低真實地震資料之變異。

## 參考文獻

中文部分：

- 1.交通部中央氣象局，地震測報中心，  
網址：<https://scweb.cwb.gov.tw/EarthquakeAdv.aspx?ItemId=57&loc=tw>。
- 2.交通部中央氣象局，民 92，地震百問，交通部中央氣象局地震測報中心編印。
- 3.朱家儀，民 102，台灣地區之地震發生頻度分析—以群集卜瓦松過程為適配工具，東海大學統計研究所碩士論文。
- 4.李介中、蔡博文，民 94，應用碎形理論於臺灣建地空間型態與地形關係之研究，台灣地理資訊學刊，3 期，43-55 頁。
- 5.李伊婷、邱俊達、許麗文、何美儀、張建興、吳逸民，民 102，2011 年臺灣地區地震活動回顧，氣象學報第 50 卷第一期。
- 6.洪祥齡，民 90，碎形特性於點過程之應用—區分重度自律神經病變糖尿病人病人與健康人之脈搏波動，東海大學統計研究所碩士論文。
- 7.施博文，民 99，電腦碎形音樂創作之研究，國立台北教育大學音樂學系碩士論文。
- 8.鄭淑真，民 93，醫學影像之碎形特徵分析及其特徵值萃取，國立成功大學工程科學系博士論文。

英文部分：

- 9.Boualem, B., 2015, Time-Frequency Signal Analysis and Processing: A Comprehensive Reference, 2<sup>nd</sup> ed., Academic Press.
- 10.Fortin, C., Kumaresan, R., Ohley, W., Hofer, S., 1992, Fractal Dimension in the Analysis of Medical Images., IEEE Engineering in Medicine and Biology: 65-70.
- 11.Gruneis, F., Nakao, M., Yamamoto, M., Musha, T., Nakahama, H., 1989, An Interpretation of 1/f Fluctuations in Neuronal Spike Trains During Dream Sleep., Biological Cybernetics 60:161-169.
- 12.Gruneis, F., Nakao, M., Yamamoto, M., 1990, Counting Statistics of 1/f Fluctuations in Neuronal Spike Trains., Biological Cybernetics 62:407-413.
- 13.Gruneis, F., Nakao, M., Mizutani, Y., Yamamoto, M., Meesmann, M., Musha, T., 1993, Further Study on 1/f Fluctuations Observed in Central Single Neurons During REM Sleep., Biological Cybernetics 68:193-198.
- 14.Gruneis, F., Musha, T., 1986, Clustering Poisson Process and 1/f Noise, Japanese Journal of Applied Physics Vol.25, pp.1504-1509.
- 15.Gallager, R.G, 1996, Discrete Stochastic Processes, Springer Verlag,. 16.Lowen, S. B., Teich, M. C., 1994, Estimation and Simulation of Fractal Stochastic Point Processes, Fractals, Vol. 3:183-210.
- 17.Mandelbrot, B., 1982, The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and

Company.

18. Papoulis, A., 2002, Probability Random Variables, and Stochastic Processes, 4<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill College.
19. Pinsky, M. A., Karlin, S., 2011, An Introduction to Stochastic Modeling Academic Press is an Imprint of Elsevier.
20. Weisstein, E.W., 2004, Fourier Transform, Wolfram MathWorld .
21. William W. S., 1989, Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods, Pearson College Div.

