東海大學統計學系碩士班

碩士論文

指導教授: 黃連成 博士

多維指數族分佈的貝氏序列估計之模擬比較

Simulation Study on Bayes Sequential Estimation of Multivariate Exponential Family

研究生:朱紀衡

中華民國 108 年 1 月

致謝詞

研究所裡的日子一眨眼就要結束了，想起當初考統研所的初衷，心裡有很多感觸，因為我本身是數學系畢業，對於統計沒有其他人那麼熟悉，但是當我進來東海統研所後，很多老師都不厭其煩的細心教導我，讓我能更快熟悉統計的領域。首先我最感謝我的指導教授黃連成博士，在論文方面，黃連成教授悉心的指引我論文的方向，當我遇到疑惑或者難題時，總是給予我協助，使我的論文能逐步踏實的完成，也謝謝黃連成教授所付出的時間與精神，願意指導我這個學生，在此非常的感謝。再來要感謝沈葆聖教授，在修課這期間，沈葆聖教授教會了我許多專業領域的事情，在上教授的課時，總是能獲益良多，在平時教授也時常對我關心也常分享一些專業知識，讓我覺得受益良多。謝謝口試委員劉正夫教授，感謝教授特地跑來參加我的口試，並在口試時給予我很多意見，讓我的論文能更加完善，非常的感謝。謝謝所有統計系教授與助教們，在課程上給我的幫助。

最後，感謝我的家人，給予我一個安穩的環境，也給予我很多空間讓我能專心求學，謝謝你們讓我沒有後顧之憂的學習，不用為其他事情煩惱。

摘要

貝氏序列估計(Bayes sequential estimation)的問題中，主要是在尋找最佳序列法則（optimal sequential procedure)，而最佳序列法則包含著最佳停止時間與貝氏估計量兩部分。在最佳序列法則中的最佳停止時間（optimal stopping time）是十分不容易得到的，且也不易得到一個確切的解，但是貝氏估計量卻可以利用數理統計方法去解之。而本研究中，提出了穩健型二階段法則，嘗試來簡化抽樣的程序。

本研究主要探討多維度指數族分佈下使用加權平方誤差損失和抽樣成本的貝氏序列估計問題。Hwang（2017）提出的穩健型序列法則(robust sequential procedure)和利用 Bickel and Yahav（1967, 1968）的方法給出的漸近點最佳法則(asymptotically pointwise optimal procedure)。所以本文中我們採用 Hwang（2017）穩健型序列法則與 Bickel and Yahav（1967, 1968）漸近點最佳法則和本研究所提出的穩健型二階段法則，討論比較三種方法的貝氏風險。

本研究透過電腦模擬給定先驗分佈(prior distribution)與參數範圍後，比較三種方法之間的貝氏風險數值結果並加以討論，而結果顯示當先驗分佈參數設定正確時，漸近點最佳法則具有較好的貝氏

風險估計值，而當先驗分佈參數設定錯誤時，在某些參數範圍下，穩健型二階段法則有較好的貝氏風險估計值且穩健型序列法則次之。

目錄

第一章　緒論

在一般統計學的問題中，都是從一群資料中找出有用的證據，並以此證據作為尋找最佳決策的科學。然而在實務上，在有限的資源下必須去考量如節省蒐集資料的成本及樣本的取得不容易，因此在實務上我們考慮序列分析的方法。

在貝氏序列估計問題(Bayes sequential estimation)中，主要是在尋找最佳序列法則（optimal sequential procedure），而最佳序列法則中則又包含了最佳停止時間（optimal stopping time）與貝氏估計量（Bayes estimator）這兩個部分。其中貝氏估計量可以利用數理統計方法找出，但最佳停止時間卻很不容易，因此為得到最佳序列法則（optimal sequential procedure）其主要是為了尋找最佳停止時間。而 Chow, Robins and Siegmund（1971）證明在某些條件下最佳停止時間是存在的，但實際上給出最佳停止時間是非常困難而且在計算中也不容易去求得正確的解，因此後來有許多文獻發展大樣本的方法，去計算與找尋漸近的最佳停止時間，例如：Bickel and Yahav（1967, 1968）和 Wald(1950)等。

二階段抽樣法則在早期是被應用在常態母體的問題中，而後來

Cox(1952)將之應用在更一般的統計問題上。而在序列估計問題上 Ghosh and Mukhopadhyay(1981)利用平方誤差損失來探討參數估計之間的損失，利用二階段抽樣法則去代替序列估計法則，並應用在序列區間與點估計中，由此利用二階段法則中的簡便性來簡化序列估計問題中各種不斷抽驗的繁緒過程。

Hwang(1999)將二階段抽樣法應用在指數分佈的貝氏序列估計問題上，而 Hwang and Liu(2009)更探討在指數族分佈且先驗分佈未給定時的貝氏序列估計，給出二階段法則具有漸近最佳的性質，Hwang(2017)討論多維指數族分佈的貝氏序列估計問題，在不使用任何輔助資料，只取決當前資料而不取決其分佈，提出穩健型(Robust)序列法則與漸近點最佳(asymptotically pointwise optimal)序列法則，且在一些先驗分佈下，具有漸近最佳(asymptotically optimal)性質。

本研究主要在探討多維度指數族分佈下，在加權平均損失函數與具抽樣成本的貝氏估計序列平均值問題，使用二階段抽樣法來處理研究這問題。文章總共分成四個章節，第一章為序論在研究背景與動機，介紹貝氏序列法則與文獻探討，第二章是對於多維指數族分佈下的貝氏序列估問題，介紹 Hwang(2017)所提出的穩健型序列法則與漸近點最佳序列法則，另外這裡提出具穩健型的二階段法則。第三章為

在多維常態分佈下，具有均勻先驗分佈、常態先驗分佈，與多項式分佈下具有狄利克雷(Dirichlet)先驗分佈，模擬比較三個序列法則的停止時間及貝氏風險(Bayes risk)，第四章為結論。

第二章 多維度指數族分佈的貝氏序列估計

首先，在序列估計問題中，我們探討在多維度指數族分佈的貝氏序列估計，我們先假設$X, X_1, X_2, \ldots$是一組獨立的序列，並且有相同分佈的 p 維隨機向量，其密度函數為

$$f_\theta(x) = \exp\big(\theta x' - D(\theta)\big) \text{，} x = \big(x_1, \ldots, x_p\big) \in R^p \text{，} \theta \in \Theta \text{，}$$

其中$\theta = (\theta_1 \ldots \theta_p)$為未知的參數向量且$\Theta$為自然參數空間，$D(\ \cdot\ )$具有$\Theta$內部的連續偏導數，$\frac{\partial^2 D(\theta)}{\partial \theta^2}$是一個 p×p 的正定矩陣(positive definite matrix)，而$\frac{\partial^2 D(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$是$\frac{\partial^2 D(\theta)}{\partial \theta^2}$的第(i, j)元素。

假設給定樣本數 n 下，則$\delta_n(X_1, \ldots, X_n)$估計平均值向量$E_\theta X = \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta}$的損失函數為

$$(\delta_n(X_1, \ldots, X_n) - E_\theta X)\mathrm{A}(\delta_n(X_1, \ldots, X_n) - E_\theta X)' + \mathrm{cn}\text{，c>0，}$$

其中$\frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta} = (\frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta_1}, \ldots, \frac{\partial D(\theta)}{\partial \theta_p})$，A 為已知的 p×p 的正定矩陣，c 則為每一資料抽樣單位成本，另外也假設 A-I 為非負定矩陣(nonnegative definite)，I 為單位矩陣。

我們假設$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$為我們的估計值，因此我們給定樣本數 n 下，貝氏風險為

$$\begin{aligned} R_n &= E\{(\bar{X}_n - E_\theta X)\mathrm{A}(\bar{X}_n - E_\theta X)' + \mathrm{cn}\} \\ &= \frac{1}{n} tr\{AE(Cov_\theta X)\} + \mathrm{cn}\text{，} \end{aligned}$$

其中$Cov_\theta X$代表給定θ下 X 的共變異數矩陣且$Cov_\theta X = \frac{\partial^2 D(\theta)}{\partial \theta^2}$。當$R_n$達

到最小化時，最佳樣本數n_0會滿足下列式子

$$\left[\left(\frac{tr\{AE(Cov_\theta X)\}}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq n_0 \leq \left[\left(\frac{tr\{AE(Cov_\theta X)\}}{c}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+1，$$

其中[x]表示x的整數部分。因此在最佳樣本數n_0下的貝氏風險R_n為

$$R_{n_0} \cong 2\sqrt{c}(tr\{AE(Cov_\theta X)\})^{\frac{1}{2}}。$$

θ代表先驗分布的單一觀察值，因此若無之前輔助資料我們將無法確認先驗分佈。當給定先驗分佈的假設錯誤或未知時，則無法獲得最佳的樣本數n_0，因此也無法獲得最好的R_{n_0}，因此我們希望發展一個序列法則不需要用到輔助資料而且可以使得漸近貝氏風險不會超過R_{n_0}。

假設停止時間

$$N_c = inf\{n \geq n_c : tr(AS_n) < cn^2\}，$$

其中$S_n = \frac{1}{\mathrm{n}-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)'(X_i - \bar{X}_n)$ 代表n個資料的樣本變異數矩陣，n_c為正整數，然後我們利用$\bar{X}_{N_c}$去估計$E_\theta X$。其中R_{N_c}代表序列估計$(N_c, \bar{X}_{N_c})$中的貝氏風險，且可以知道它與先驗分佈無任何關係，所以稱它是穩健(robust)的序列法則。

Hwang(2017)在適當的條件下，得到

$$R_{N_c} = 2\sqrt{c}E(tr\{A(Cov_\theta X)\})^{\frac{1}{2}} + o(\sqrt{c})，$$

因此得知當c小時，R_{N_c}會小於或者等於R_{n_0}，這也就表示序列法則

$(N_c, \bar{X}_{N_c})$優於最佳固定樣本數法則$(n_0, \bar{X}_{n_0})$。

再來對於漸近點最佳法則，我們知道 Hwang(2017)利用 Bickel and Yahav (1967, 1968) 所提出的方法，給出一個漸近點最佳序列法則，亦即給出了對應的估計量與停止時間，其方法如下：

假設$F_n = \sigma(X_1, \dots\dots, X_n)$, $\forall \mathrm{n} \geq 1$，給定一個停止時間 t 和一個$F_t$的可估計函數$\delta_t$，則此序列法則$(\mathrm{t}, \delta_t)$的貝氏風險可以表示為

$$E\{(\delta_t - E_\theta X)\mathrm{A}(E(\delta_t - E_\theta X) - E_\theta X)' + \mathrm{ct}\}。$$

當$\delta_t = E(E_\theta X | F_t)$時，貝氏風險$E\{(\delta_t - E_\theta X)\mathrm{A}(\delta_t - E_\theta X)' + \mathrm{ct}\}$會達到最小值，這也表示當給定任何停止時間 t 時，$E_\theta X$的貝氏估計值為$E_\theta(E_\theta X | F_t)$。

因為 A 為正定矩陣，所以存在一個非奇異(nonsingular)矩陣 B 會使得$\mathrm{A} = \mathrm{B}B'$，並且令 Y=XB，Y=($Y_1, \dots\dots, Y_p$)，則序列法則(t, $E(E_\theta X | F_t)$)貝氏風險表示為

$$\mathrm{R(t)} = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{p} (E(E_\theta(Y_i)|F_t) - E_\theta(Y_i))^2 + ct\right\}$$
$$= \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{p} Var(E_\theta(Y_i)|F_t) + ct\right\}。$$

因此對於這個問題的最佳序列法則等價於在$\{Z_n, n \geq 1\}$序列下尋找最佳停止時間，而Z_n表示為

$$Z_n = \sum_{i=1}^{p} Var(E_\theta(Y_i)|F_n) + cn ,$$

而我們由 Bickel and Yahav (1967, 1968)的結果可以知道，$\mathrm{n} \to \infty$時，

可以得到

$$n\sum_{i=1}^{p} Var(E_\theta(Y_i)|F_n) \to \mathrm{tr}(\mathrm{A}Cov_\theta X)\text{，}$$

根據 Bickel and Yahav (1967, 1968)的定理結果，我們可以得到漸近點最佳停止時間法則為

$$T_c = inf\left\{n \geq 1: \sum_{i=1}^{p} Var(E_\theta(Y_i)|F_n) \leq cn\right\}, \mathrm{c} > 0\text{，}$$

且可以得知漸近點最佳的序列法則$(T_c, E(E_\theta X|F_{T_c}))$是具有漸近最佳的性質，亦即它的貝氏風險為

$$R_{T_c} = 2\sqrt{c}E(tr\{A(Cov_\theta X)\})^{\frac{1}{2}} + o(\sqrt{c})$$
$$= \inf_s R(s) + o(\sqrt{c})\text{，}\mathrm{c} \to 0\text{，}$$

其中s表是具有F_n的停止時間，因此穩健序列法則$(N_c, \bar{X}_{N_c})$也具有漸近最佳性質。

當時間與成本是重要因素時，我們可討論使用二階段抽樣方法。因樣本共變異數會收斂至母體共變異數及漸近點最佳停止時間的形式，所以這裡可提出二階段法則如下：我們先定初始樣本數m_c=$\lfloor\delta c^{-\alpha}\rfloor$+1, 其中$\delta > 0, \frac{2}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$，而總樣本數為

$$U_c = max\{m_c, M_c\}$$

其中$M_c = \left\lfloor\sqrt{\frac{tr(AS_{m_c})}{c}}\right\rfloor + 1$, $S_{m_c} = \frac{1}{m_c}\sum_{k=1}^{m_c}(X_k - \bar{X}_{m_c})'(X_k - \bar{X}_{m_c})$，

而未知的平均值向量$E_\theta X$，採用一般樣本平均值向量$\bar{X}_{U_c}$估計，因這裡所提出的停止時間與估計量皆與分佈及先驗分佈無關，亦即此二

階段法則$(U_c,\bar{X}_{U_c})$具有穩健性質，因此這二階段法則的貝氏風險為

$$R_{U_c} = E\{(\bar{X}_{U_c}-E_\theta X)\mathrm{A}(\bar{X}_{U_c} - E_\theta X)' + \mathrm{c}U_c\}，\mathrm{c} > 0。$$

第三章 模擬分析

以下的數值模擬主要討論多維指數族分佈下的貝氏風險估計與停止時間的估計，分別在穩健型序列法則、漸進點最佳法則和穩健型二階段法則的結果。

在給定不同矩陣

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}，$$

與抽樣成本 c，以及在多維常態分佈與多項式分佈下，我們設定不同先驗分佈及其參數去模擬比較三種法則的結果。

(i)多維常態分佈具均勻先驗分佈：

$$X|\theta\sim N\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right),\theta\sim uniform[-a,a]^3，$$

討論一種參數正確及兩種參數錯誤設定下的情況，當先驗分佈為均勻分佈且參數正確時，設定參數 a=0.5，當先驗分佈設定參數錯誤時，a=2, 3.5。

(ii)多維常態分佈具常態先驗分佈：

$$X|\theta\sim N\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right),\theta\sim N\left((u_1,u_2,u_3),\begin{pmatrix}\tau_1^2&0&0\\0&\tau_2^2&0\\0&0&\tau_3^2\end{pmatrix}\right)，$$

討論一種參數正確及兩種參數錯誤設定的情況下，當先驗分佈為常態分佈且參數正確時，設定參數

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0，\tau_1^2 = \tau_2^2 = \tau_3^2 = 2.5，$$

當先驗分佈設定參數錯誤時，設定參數

$$u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0，\tau_1^2 = 3, \tau_2^2 = 1.5, \tau_3^2 = 3.5$$

$$u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0，\tau_1^2 = 3.5, \tau_2^2 = \tau_3^2 = 2.5，$$

(iii)多項式分佈具狄利克雷先驗分佈：

$$\mathrm{X}|\theta \sim \mathrm{M}(20, \theta), \theta \sim D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)，$$

討論一種參數正確及兩種參數錯誤設定的情況下，當先驗分佈為狄利克雷分佈且參數正確時，設定參數

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.5，$$

當先驗分佈設定參數錯誤時，設定參數

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2.5，$$

$$\alpha_1 = 3，\alpha_2 = \alpha_3 = 2，$$

透過以上給定的參數以及假設進行模擬程序。

首先在這三種先驗分佈下，生成 1000 組θ值，$\theta \equiv (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$，在給定$\theta$值下分別對每一組$\theta$各生成 1000 組隨機變數 X 的序列，在每一組隨機變數 X≡(X_1, X_2, X_3)的序列中，分別透過穩健型序列法則、漸近點最佳法則及穩健型二階段法則找出各自停止時間N_c、T_c及U_c，而當找出停止時間與對應損失的估計值後，可以得到估計停止時間N_c、T_c及U_c與貝氏風險$R_{N_c}, R_{T_c}, R_{U_c}$，以及貝氏風險的模擬值計算相對風險，

定R_1為最佳貝氏風險展開式的第一項，即

$$R_1 = 2\sqrt{c}E(tr\{Acov_\theta X\})^{\frac{1}{2}},$$

其中$cov_\theta X = \frac{\partial^2 D(\theta)}{\partial \theta^2}$，而其相對風險分別為

$$\Delta_{R_{N_c}} = \frac{R_{N_c} - R_1}{R_1}, \Delta_{R_{T_c}} = \frac{R_{T_c} - R_1}{R_1}, \Delta_{R_{U_c}} = \frac{R_{U_c} - R_1}{R_1}。$$

在本文中模擬了均勻分佈、常態分佈及狄利克雷分佈這三種先驗分佈，分別給定兩種矩陣 A 及正確和錯誤的參數設定，並且設定抽樣成本 c=1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001。

從表中可以看出相對風險$\Delta_{R_{N_c}}$、$\Delta_{R_{T_c}}$及$\Delta_{R_{U_c}}$隨著抽樣成本 c 值逐漸下降會逐漸愈小，N_c、T_c及U_c則是會隨著 c 值變小其值會愈大，而$R_{N_c}, R_{T_c}, R_{U_c}$則是會隨著 c 值下降逐漸往 0 靠近。

當參數設定錯誤越嚴重時，可以看出 c 值設定逐漸遞減時，穩健型二階段法則的貝氏風險估計R_{U_c}相對於穩健型序列法則的貝氏風險估計R_{N_c}與漸近點最佳法則的貝氏風險估計R_{T_c}是比較好的，其次為穩健型序列法則，而當參數設定正確時，漸近點最佳法則的貝氏風險估計R_{T_c}相較於其他兩者，則是最好的，其次為穩健型二階段法則。

第四章 結論

本文討論多維指數族分佈的貝氏估計問題，採用 Hwang（2017）的穩健型序列法則和利用 Bickel and Yahav（1967, 1968）提出的漸近點最佳法，以及本文中提出的穩健型二階段法則，而經過上一章的模擬步驟我們可以得到漸近點最佳法則、穩健型序列法則與穩健型二階段法則的停止時間T_c、N_c及U_c，貝氏風險R_{T_c}、R_{N_c}及R_{U_c}，相對風險$\Delta_{R_{T_c}}$、$\Delta_{R_{N_c}}$及$\Delta_{R_{U_c}}$，由模擬結果可以得知，當單位成本 c 值較小時，這三種序列法則的停止時間會增加，而貝氏風險會減少，相對風險也會愈小。

當 c 值愈小時，在參數正確時可以發現漸近點最佳法則的貝氏風險R_{T_c}會小於另外兩種法則的貝氏風險R_{N_c}、R_{U_c}，而當參數設定錯誤時，穩健型二階段法則的貝氏風險R_{U_c}則會小於另外兩種法則的貝氏風險R_{T_c}、R_{U_c}，由此結果我們可以得知在參數設定錯誤時，穩健型二階段法則在單位成本 c 值逐漸減少時有較好的結果，而當參數設定正確時，漸近點最佳法則在單位成本 c 值逐漸減少時有較好的結果。

由模擬結果可以得知多維指數族的貝氏序列估計在先驗分佈正確時，漸近點最佳法則的貝氏風險會有較好的結果，而當先驗分佈錯誤時，則可以看出穩健型二階段法則有較好的結果。

數值模擬表格

表 1-1，A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ， X｜θ~N$\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ ，先驗分布

$\theta \sim uniform[-0.5,0.5]^3$為正確

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	3.46410	1	1.23553	−0.64333	1	4.00035	0.154802	3	3.84503	0.10996
0.5	2.49949	2	1.59788	−0.34766	2	2.50823	0.023983	3	2.62409	0.07128
0.1	1.09544	4	0.83277	−0.23978	5	1.21850	0.112334	6	1.12751	0.02927
0.05	0.74759	7	0.62021	−0.11993	7	0.80354	0.037376	9	0.79018	0.02011
0.01	0.34641	16	0.30097	−0.13116	17	0.34886	0.007075	19	0.34840	0.00863
0.005	0.24494	22	0.21807	−0.10970	24	0.24598	0.004229	26	0.24535	0.00575
0.001	0.10954	51	0.10154	−0.07299	55	0.10971	0.001565	57	0.10911	0.00247
0.0005	0.07745	73	0.07272	−0.06111	77	0.07754	0.001152	80	0.07701	0.00201
0.0001	0.03464	167	0.03174	−0.04138	173	0.03464	−0.000026	177	0.03463	0.00034

表 1-2，先驗分布錯誤，定$\theta \sim uniform[-2,2]^3$

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	3.46410	1	3.08927	−0.10820	1	4.00035	0.154802	3	3.84503	0.10996
0.5	2.49949	2	2.37719	−0.02951	2	2.50823	0.023983	3	2.62409	0.07128
0.1	1.09544	4	1.09250	−0.00268	5	1.21850	0.112334	6	1.12751	0.02927
0.05	0.74759	7	0.62021	−0.00206	7	0.80354	0.037376	9	0.79018	0.02011
0.01	0.34641	16	0.57299	0.034680	17	0.34886	0.007075	19	0.34840	0.00863
0.005	0.24494	22	0.25601	0.000307	24	0.24598	0.004229	26	0.24535	0.00575
0.001	0.10954	51	0.10993	−0.00010	55	0.10971	0.001565	57	0.10911	0.00247
0.0005	0.07745	73	0.07848	0.000030	77	0.07754	0.001152	80	0.07701	0.00201
0.0001	0.03464	174	0.03466	−0.00051	173	0.03464	−0.000026	177	0.03463	0.00034

表 1-3，先驗分布錯誤，定$\theta \sim uniform[-3.5,3.5]^3$

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	3.46410	2	3.46410	−0.64333	1	4.00035	0.154802	3	3.84503	0.10996
0.5	2.49949	3	2.49951	0.020424	2	2.50823	0.023983	3	2.62409	0.07128
0.1	1.09544	6	1.09999	0.004155	5	1.21850	0.112334	6	1.12751	0.02927
0.05	0.74759	8	0.84714	0.000152	7	0.80354	0.037376	9	0.79018	0.02011
0.01	0.34641	18	0.35680	0.113347	17	0.34886	0.007075	19	0.34840	0.00863
0.005	0.24494	25	0.25502	0.000308	24	0.24598	0.004229	26	0.24535	0.00575
0.001	0.10954	55	0.11053	−0.00010	55	0.10971	0.001565	57	0.10911	0.00247
0.0005	0.07745	78	0.07758	0.000307	77	0.07754	0.001152	80	0.07701	0.00201
0.0001	0.03464	174	0.03466	−0.04138	173	0.03464	−0.000026	177	0.03463	0.00034

表 2-1，$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ ， $X \mid \theta \sim N\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ ，先驗分布 $\theta \sim uniform[-0.5,0.5]^3$為正確

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.89897	1	1.45627	−0.06191	1	7.00192	0.42926	3	5.26105	0.07390
0.5	3.46410	1	0.95692	−0.72375	3	3.75931	0.08522	4	3.63535	0.04943
0.1	1.54919	3	0.68441	−0.55821	7	1.74278	0.12496	9	1.59254	0.02798
0.05	1.09544	4	0.57721	0.577219	10	1.13018	0.03177	12	1.11683	0.01952
0.01	0.48989	13	0.35820	−0.26881	24	0.49326	0.00687	26	0.49335	0.00909
0.005	0.34641	19	0.27512	−0.20578	34	0.34782	0.00409	37	0.34757	0.00624
0.001	0.15491	47	0.13820	−0.10786	77	0.15519	0.00178	57	0.13981	0.00247
0.0005	0.10954	68	0.10092	−0.07871	109	0.10984	0.00276	80	0.07761	0.00201
0.0001	0.04899	160	0.04742	0.020147	245	0.04907	0.00175	177	0.03465	0.00034

表 2-2，先驗分布錯誤，定$\theta \sim uniform[-2,2]^3$

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.89897	2	4.17840	−0.14708	1	7.00192	0.42926	3	5.26105	0.07390
0.5	3.46410	3	3.46410	−0.05622	3	3.75931	0.08522	4	3.63535	0.04943
0.1	1.54919	6	1.58532	0.023320	7	1.74278	0.12496	9	1.59254	0.02798
0.05	1.09544	8	1.14621	0.046349	10	1.13018	0.03177	12	1.11683	0.01952
0.01	0.48989	18	0.51371	0.048606	24	0.49326	0.00687	26	0.49435	0.00909
0.005	0.34641	25	0.36516	0.054133	34	0.34782	0.00409	37	0.34857	0.00624
0.001	0.15491	55	0.16401	0.058739	77	0.15519	0.00178	57	0.13981	0.00247
0.0005	0.10954	78	0.11593	0.058543	109	0.10984	0.00276	80	0.07761	0.00201
0.0001	0.04899	174	0.05864	0.058688	245	0.04907	0.00175	177	0.03465	0.00034

表 2-3，先驗分布錯誤，定$\theta \sim uniform[-3.5,3.5]^3$

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.89897	2	4.97422	0.015358	1	7.00192	0.42926	3	5.26105	0.07390
0.5	3.46410	3	3.49996	0.010353	3	3.75931	0.08522	4	3.63535	0.04943
0.1	1.54919	6	1.60000	0.032797	7	1.74278	0.12496	9	1.59254	0.02798
0.05	1.09544	8	1.14964	0.049479	10	1.13018	0.03177	12	1.11683	0.01952
0.01	0.48989	18	0.51371	0.048612	24	0.49326	0.00687	26	0.49435	0.00909
0.005	0.34641	25	0.36516	0.054133	34	0.34782	0.00409	37	0.34857	0.00624
0.001	0.15491	55	0.16401	0.058739	77	0.15519	0.00178	57	0.13981	0.00247
0.0005	0.10954	78	0.11595	0.058543	109	0.10984	0.00276	80	0.07761	0.00201
0.0001	0.04899	174	0.05186	0.058688	245	0.04907	0.00175	177	0.03465	0.00034

表 3-1，A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ， X | θ~N$\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ ，$\theta \sim N\left((u_1,u_2,u_3)\begin{pmatrix}\tau_1^2&0&0\\0&\tau_2^2&0\\0&0&\tau_3^2\end{pmatrix}\right)$

當$u_1=u_2=u_3=0$，$\tau_1^2=\tau_2^2=\tau_3^2=2.5$時，為正確。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	3.46410	3	3.92116	−0.13612	1	3.99969	0.15461	3	3.84343	0.10950
0.5	2.44948	4	2.70466	0.104174	2	2.50697	0.02346	3	2.62278	0.07074
0.1	1.09544	8	1.16356	0.062187	5	1.21782	0.11171	6	1.12684	0.02866
0.05	0.77459	11	0.71949	0.054093	7	0.80294	0.03659	9	0.78990	0.01975
0.01	0.34641	25	0.36872	0.064404	17	0.32486	0.00639	19	0.31909	0.00763
0.005	0.24494	35	0.22998	0.061385	24	0.24598	0.00421	26	0.24536	0.00577
0.001	0.10954	78	0.10633	0.062027	55	0.10964	0.00137	57	0.10958	0.00223
0.0005	0.07745	110	0.07220	0.061241	77	0.07750	0.00053	80	0.07650	0.00131
0.0001	0.03464	245	0.02673	0.060446	173	0.03464	0.00024	177	0.03456	0.07565

表 3-2，A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ， X | θ~N$\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ ，$\theta \sim N\left((u_1,u_2,u_3)\begin{pmatrix}\tau_1^2&0&0\\0&\tau_2^2&0\\0&0&\tau_3^2\end{pmatrix}\right)$

先驗分布錯誤，定$u_1=1,u_2=u_3=0$，$\tau_1^2=3,\tau_2^2=1.5,\tau_3^2=3.5$。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	3.46410	3	3.94759	−0.13612	1	3.99969	0.15461	3	3.84343	0.10950
0.5	2.44948	4	2.72022	0.110525	2	2.50697	0.02346	3	2.62278	0.07074
0.1	1.09544	8	1.16776	0.066020	5	1.21782	0.11171	6	1.12684	0.02866
0.05	0.77459	11	0.81874	0.056998	7	0.80294	0.03659	9	0.78990	0.01975
0.01	0.34641	25	0.36916	0.065694	17	0.32486	0.00639	19	0.31909	0.00763
0.005	0.24494	35	0.26021	0.062327	24	0.24598	0.00421	26	0.24536	0.00577
0.001	0.10954	78	0.11638	0.062442	55	0.10964	0.00137	57	0.10958	0.00223
0.0005	0.07745	110	0.08226	0.061542	77	0.07750	0.00053	80	0.07650	0.00131
0.0001	0.03464	245	0.03673	0.060506	173	0.03464	0.00024	177	0.03456	0.07565

表 3-3，A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ， X | θ~N$\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ ，$\theta\sim N\left((u_1,u_2,u_3)\begin{pmatrix}\tau_1^2&0&0\\0&\tau_2^2&0\\0&0&\tau_3^2\end{pmatrix}\right)$

先驗分布錯誤，定$u_1=1,u_2=u_3=0$，$\tau_1^2=3.5,\tau_2^2=\tau_3^2=2.5$時。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	3.46410	3	3.93232	0.135163	1	3.99969	0.15461	3	3.84343	0.10950
0.5	2.44948	4	2.71108	0.106794	2	2.50697	0.02346	3	2.62278	0.07074
0.1	1.09544	8	1.16522	0.063697	5	1.21782	0.11171	6	1.12684	0.02866
0.05	0.77459	11	0.81738	0.055238	7	0.80294	0.03659	9	0.78990	0.01975
0.01	0.34641	25	0.36889	0.064905	17	0.32486	0.00639	19	0.31909	0.00763
0.005	0.24494	35	0.26007	0.061749	24	0.24598	0.00421	26	0.24536	0.00577
0.001	0.10954	78	0.11635	0.062193	55	0.10964	0.00137	57	0.10958	0.00223
0.0005	0.07745	110	0.08221	0.061360	77	0.07750	0.00053	80	0.07650	0.00131
0.0001	0.03464	245	0.03673	0.060446	173	0.03464	0.00024	177	0.03456	0.07565

表 4-1，A=$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ ， X｜θ~N$\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ ，$\theta\sim N\left((u_1,u_2,u_3)\begin{pmatrix}\tau_1^2&0&0\\0&\tau_2^2&0\\0&0&\tau_3^2\end{pmatrix}\right)$

當$u_1=u_2=u_3=0$，$\tau_1^2=\tau_2^2=\tau_3^2=2.5$時，為正確。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.89897	3	4.84481	-0.0110	1	6.99311	0.04274	3	5.25597	0.07287
0.5	3.46410	4	3.41066	-0.0154	3	3.75362	0.08357	4	3.63173	0.04839
0.1	1.54919	8	1.52734	-0.0141	7	1.74112	0.12389	9	1.54919	1.59134
0.05	1.09544	11	1.08321	-0.0111	10	1.12886	0.03050	12	1.11592	0.01869
0.01	0.48989	25	0.48756	-0.0047	24	0.49290	0.00614	26	0.49406	0.008511
0.005	0.34641	35	0.34504	-0.0039	34	0.34768	0.00367	37	0.34832	0.00551
0.001	0.15491	78	0.15464	-0.0017	77	0.15504	0.00084	80	0.15528	0.00233
0.0005	0.10954	110	0.10935	-0.0017	101	0.10962	0.00072	113	0.10954	0.00179
0.0001	0.04898	245	0.04898	-0.0000	245	0.04904	0.00105	250	0.04901	0.00178

A=$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ ， X｜θ~N$\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ ，$\theta\sim N\left((u_1,u_2,u_3)\begin{pmatrix}\tau_1^2&0&0\\0&\tau_2^2&0\\0&0&\tau_3^2\end{pmatrix}\right)$

表 4-2，先驗分布錯誤，定$u_1=1,u_2=u_3=0$，$\tau_1^2=3,\tau_2^2=1.5,\tau_3^2=3.5$。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.89897	3	4.86137	-0.0110	1	6.99311	0.04274	3	5.25597	0.07287
0.5	3.46410	4	3.41987	-0.0127	3	3.75362	0.08357	4	3.63173	0.04839
0.1	1.54919	8	1.52968	-0.0125	7	1.74112	0.12389	9	1.54919	1.59134
0.05	1.09544	11	1.28441	-0.0100	10	1.12886	0.03050	12	1.11592	0.01869
0.01	0.48989	25	0.49779	-0.0042	24	0.49290	0.00614	26	0.49406	0.008511
0.005	0.34641	35	0.35515	-0.0036	34	0.34768	0.00367	37	0.34832	0.00551
0.001	0.15491	78	0.15566	-0.0016	77	0.15504	0.00084	80	0.15528	0.00233
0.0005	0.10954	110	0.10996	-0.0016	101	0.10962	0.00072	113	0.10954	0.00179
0.0001	0.04898	245	0.04998	-0.0000	245	0.04904	0.00105	250	0.04901	0.00178

表 4-3，A=$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ ， X | θ~N$\left(\theta,\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$ ，$\theta\sim N\left((u_1,u_2,u_3)\begin{pmatrix}\tau_1^2&0&0\\0&\tau_2^2&0\\0&0&\tau_3^2\end{pmatrix}\right)$

先驗分布錯誤，定$u_1=1,u_2=u_3=0$，$\tau_1^2=3.5,\tau_2^2=\tau_3^2=2.5$時。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.89897	3	4.86687	-0.0065	1	6.99311	0.04274	3	5.25597	0.07287
0.5	3.46410	4	3.42339	-0.0117	3	3.75362	0.08357	4	3.63173	0.04839
0.1	1.54919	8	1.53064	-0.0119	7	1.74112	0.12389	9	1.54919	1.59134
0.05	1.09544	11	1.28496	-0.0095	10	1.12886	0.03050	12	1.11592	0.01869
0.01	0.48989	25	0.49791	-0.0040	24	0.49290	0.00614	26	0.49406	0.008511
0.005	0.34641	35	0.35521	-0.0034	34	0.34768	0.00367	37	0.34832	0.00551
0.001	0.15491	78	0.15568	-0.0015	77	0.15504	0.00084	80	0.15528	0.00233
0.0005	0.10954	110	0.10997	-0.0015	101	0.10962	0.00072	113	0.10954	0.00179
0.0001	0.04898	245	0.04999	0.00006	245	0.04904	0.00105	250	0.04901	0.00178

表 5-1，A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ， X｜θ~M$(20,\theta)$ ，$\theta \sim D(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，當$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.5$，為正確。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.25378	3	6.51118	0.53083	1	9.03830	1.12476	3	5.96493	0.40226
0.5	4.384627	4	4.45415	0.01585	3	4.370563	−0.00320	5	4.122008	−0.0598
0.1	2.239965	9	1.873947	−0.1634	7	2.007534	−0.10376	10	1.805637	−0.1938
0.05	1.650765	13	1.31624	−0.2026	11	1.35353	−0.18005	13	1.261881	−0.2355
0.01	0.777356	28	0.56985	−0.2669	27	0.55758	−0.28271	29	0.55450	−0.2866
0.005	0.554793	39	0.399933	−0.2802	38	0.39391	−0.28998	41	0.390451	−0.2962
0.001	0.251170	87	0.176019	−0.2992	86	0.174448	−0.30545	90	0.173863	−0.3077
0.0005	0.178103	123	0.122256	−0.3135	121	0.123159	−0.30849	127	0.122771	−0.3106
0.0001	0.079944	274	0.054019	−0.3017	272	0.054942	−0.31274	281	0.054768	−0.3149

表 5-2，A=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，X｜θ~M$(20,\theta)$，$\theta \sim D(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，先驗分布錯誤，定$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=2.5$。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.25378	3	6.51118	0.53083	1	9.03830	1.12476	3	5.96493	0.40226
0.5	4.384627	4	4.45415	0.01585	3	4.370563	−0.00320	5	4.122008	−0.0598
0.1	2.239965	9	1.891698	−0.1634	7	2.007534	−0.10376	10	1.805637	−0.1938
0.05	1.650765	13	1.31624	−0.2026	11	1.35353	−0.18005	13	1.261881	−0.2355
0.01	0.777356	28	0.56985	−0.2669	27	0.55758	−0.28271	29	0.55450	−0.2866
0.005	0.554793	39	0.39993	−0.2802	38	0.39391	−0.28998	41	0.390451	−0.2962
0.001	0.251170	87	0.176019	−0.2992	86	0.174448	−0.30545	90	0.173863	−0.3077
0.0005	0.178103	123	0.123929	−0.3041	121	0.123159	−0.30849	127	0.122771	−0.3106
0.0001	0.079944	274	0.055019	−0.3117	272	0.054942	−0.31274	281	0.054768	−0.3149

表 5-3，A=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，X | θ~M$(20,\theta)$，$\theta\sim D(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，先驗分布錯誤，定

$\alpha_1=3,\alpha_2=\alpha_3=2$。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.25378	3	6.421202	0.50952	1	9.03830	1.12476	3	5.96493	0.40226
0.5	4.384627	4	4.397861	0.00301	3	4.370563	−0.00320	5	4.122008	−0.0598
0.1	2.239965	9	1.873947	−0.1634	7	2.007534	−0.10376	10	1.805637	−0.1938
0.05	1.650765	13	1.305715	−0.2090	11	1.35353	−0.18005	13	1.261881	−0.2355
0.01	0.777356	28	0.5671221	−0.2704	27	0.55758	−0.28271	29	0.55450	−0.2866
0.005	0.554793	39	0.3978075	−0.2829	38	0.39391	−0.28998	41	0.390451	−0.2962
0.001	0.251170	87	0.1756451	−0.3006	86	0.174448	−0.30545	90	0.173863	−0.3077
0.0005	0.178103	123	0.1237255	−0.3053	121	0.123159	−0.30849	127	0.122771	−0.3106
0.0001	0.079944	274	0.0549723	−0.3123	272	0.054942	−0.31274	281	0.054768	−0.3149

表 6-1，A=$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，X｜θ~M$(20,\theta)$，$\theta\sim D(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，當$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0.5$，為正確。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.22808	3	5.55716	0.314344	1	8.97763	1.12333	3	5.93975	0.404832
0.5	4.35948	4	3.87314	−0.11155	3	4.35325	−0.0014	5	4.11044	−0.05712
0.1	2.22969	9	1.72150	−0.22791	7	1.99703	−0.10434	10	1.79799	−0.19361
0.05	1.64354	13	1.217002	−0.25954	11	1.34791	−0.17987	13	1.25604	−0.23577
0.01	0.77402	28	0.543482	−0.29784	27	0.55444	−0.28368	29	0.55152	−0.28746
0.005	0.55247	39	0.384443	−0.30414	38	0.392054	−0.29036	41	0.38852	−0.29647
0.001	0.25009	86	0.171918	−0.31259	85	0.173483	−0.30633	90	0.172909	−0.30863
0.0005	0.17734	122	0.121473	−0.31505	121	0.122369	−0.30999	126	0.122023	−0.31194
0.0001	0.07960	272	0.054320	−0.31757	271	0.054615	−0.31387	279	0.054436	−0.31612

表 6-2，A=$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，X｜θ~M$(20,\theta)$，$\theta\sim D(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，先驗分布錯誤，定$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=2.5$。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.22808	3	6.56717	0.314344	1	8.97763	1.12333	3	5.93975	0.404832
0.5	4.35948	4	5.96233	−0.11155	3	4.35325	−0.0014	5	4.11044	−0.05712
0.1	2.22969	9	2.01223	−0.22791	7	1.99703	−0.10434	10	1.79799	−0.19361
0.05	1.64354	13	1.417002	−0.25954	11	1.34791	−0.17987	13	1.25604	−0.23577
0.01	0.77402	28	0.553482	−0.29784	27	0.55444	−0.28368	29	0.55152	−0.28746
0.005	0.55247	39	0.394443	−0.30414	38	0.392054	−0.29036	41	0.38852	−0.29647
0.001	0.25009	86	0.191918	−0.31259	85	0.173483	−0.30633	90	0.172909	−0.30863
0.0005	0.17734	122	0.131565	−0.31505	121	0.122369	−0.30999	126	0.122023	−0.31194
0.0001	0.07960	272	0.055421	−0.31757	271	0.054615	−0.31387	279	0.054436	−0.31612

表 6-3，A=$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$，X｜θ~M$(20,\theta)$，$\theta\sim D(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，先驗分布錯誤，定$\alpha_1 = 3,\alpha_2=\alpha_3=2$。

c	R_1	T_c	R_{T_c}	$\Delta_{R_{T_c}}$	N_c	R_{N_c}	$\Delta_{R_{N_c}}$	U_c	R_{U_c}	$\Delta_{R_{U_c}}$
1	4.22808	3	5.55716	0.314344	1	8.97763	1.12333	3	5.93975	0.404832
0.5	4.35948	4	4.87215	−0.11155	3	4.35325	−0.0014	5	4.11044	−0.05712
0.1	2.22969	9	2.011823	−0.22791	7	1.99703	−0.10434	10	1.79799	−0.19361
0.05	1.64354	13	1.397002	−0.25954	11	1.34791	−0.17987	13	1.25604	−0.23577
0.01	0.77402	28	0.563482	−0.29784	27	0.55444	−0.28368	29	0.55152	−0.28746
0.005	0.55247	39	0.400325	−0.30414	38	0.392054	−0.29036	41	0.38852	−0.29647
0.001	0.25009	86	0.175918	−0.31259	85	0.173483	−0.30633	90	0.172909	−0.30863
0.0005	0.17734	122	0.123483	−0.31505	121	0.122369	−0.30999	126	0.122023	−0.31194
0.0001	0.07960	272	0.055320	−0.31757	271	0.054615	−0.31387	279	0.054436	−0.31612

參考文獻

Bickel, P. J. and Yahav, J. A. (1967). Asymptotically Pointwise Optimal Procedures in Sequential Analysis, Proceedings of Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1, 401-413, Unoversity of California Press.

Bickel P. J. and Yahav, J. A. (1968). Asymptotically Optimal Bayes and Minimax Procedures in Sequential Estimation，Ann. Math. statist. 33: 442-456.

Chow，Y. S.，Robbins，H.，and Siegmund，D. (1971). Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping，Boston: Houghton Mifflin.

Cox, D. R. (1952). Estimation by double sampling, Biometrika. 39: 217-227.

Ghosh, M., Mukhopadhyay, N. (1981). Consistency and asymptotic efficiency of two-stage and sequential estimation procedures, Sankhya. Ser. A. 43: 220-227.

Hawang, L.-C. (1999). Two-stage approach to Bayes sequential estimation in the exponential distribution, Statistics and Probability Letters 45: 227-282.

Hawang, L.-C. and Liu, J.-F. (2009). Asymptotic optimality of a two-stage procedure in Bayes sequential estimation, Stat. Paper. 50: 623-631.

Hawang, L.-C. (2017). Asymptotically optimal procedures in multivariate Bayesian sequential estimation, Sequential analysis 36: 481-489.

Wald，A. (1950). Asymptotic Minimax Solutions of Sequential Point Estimation Problems，Proceedings of Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability Los Angeles，1-11，University of California Press.