

東海大學

應用數學系

碩士論文

關於河內圖形與相關(2,3)-圖形之零和流數研究

On Zero-Sum Flow Numbers of Hanoi Graphs and Related
(2,3)-Graphs

研究生：劉人豪

指導教授：王道明 博士

中華民國一〇八年五月

關於河內圖形與相關(2,3)-圖形之零和流數研究

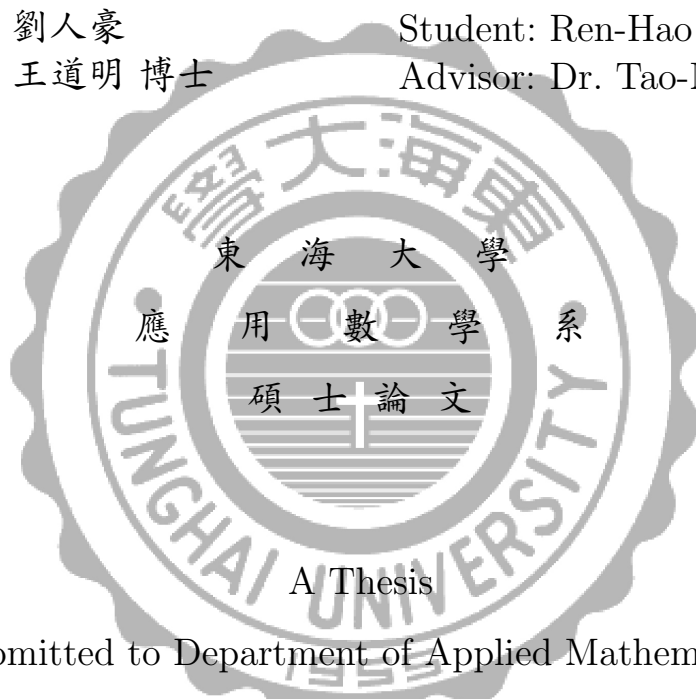
On Zero-Sum Flow Numbers of Hanoi Graphs and Related
(2,3)-Graphs

研 究 生：劉人豪

Student: Ren-Hao Liu

指 導 教 授：王道明 博士

Advisor: Dr. Tao-Ming Wang



A Thesis

Submitted to Department of Applied Mathematics

Tunghai University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Applied Mathematics

May 2019

Taichung, Taiwan

中華民國一〇八年五月

關於河內圖形與相關(2,3)-圖形之零和流數研究

學生：劉人豪

指導教授：王道明 博士

東海大學應用數學系

摘 要

設 G 為一無向圖，若在 G 的每一邊上指定非零整數，使得在每一頂點之所有鄰接邊的整數和為零，稱此圖形 G 具有零和流(Zero-sum flow)。若邊上之指定整數均來自集合 $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(k-1)\}$ ，則稱其為一零和 k -流(Zero-sum k -flow)。進一步可定義圖 G 之零和流數(Zero-sum flow number)，使得 G 具有零和 k -流之最小值 k 。本論文主要探討河內圖形以及相關的(2,3)-圖形之零和流與零和流數，並且提出未來可繼續努力的方向。



On Zero-Sum Flow Numbers of Hanoi Graphs and Related
(2,3)-Graphs

Student: Ren-Hao Liu

Advisor: Dr. Tao-Ming Wang

Submitted to Department of Applied Mathematics
Tunghai University

ABSTRACT

For an undirected graph G , let $E(v)$ denote the set of edges incident on a vertex $v \in V(G)$. A zero-sum flow is an assignment of non-zero integers to the edges such that the sum of the values v of all edges incident with each vertex is zero. A zero-sum k -flow is a zero-sum flow whose values are integers with absolute value less than k . This paper study on zero-sum flow numbers of hanoi graphs and related (2,3)-Graphs. Open problems are listed in the last section.

Acknowledgement

此論文的完成，我要感謝指導教授王道明教授與口試委員李渭天教授、陳宏賓教授，給予我的建議與指導。特別感謝指導教授王道明老師，在研究所期間耐心指導我在學術上的研究，不管途中遇到什麼挫折，都能在您指導之後迎刃而解，而您對於學術研究的熱情與態度都是我希望能學習的，在這段期間所學習到的知識與態度，都會成為我未來在人生道路上的養分，我也會努力實踐。

感謝東海大學應用數學系在大學與研究所時期所有幫助過我的老師及同儕，這裡有著溫馨的環境，也能學習到相當多知識，我能在此學習真的十分幸運，也謝謝系辦的助理與助教，在就學期間幫忙處理我對於行政流程的疑難雜症。感謝研究所時期的同學，有你們的陪伴與互相討論，才能讓我學習如此順利也讓我過的更加精彩。

感謝東海大學在社團裡認識的所有朋友與老師，在社團時那段有笑有淚的回憶，還有辛苦奮鬥的過程都讓我成為更好的自己，也謝謝曾經給予我主持與演講機會的老師、朋友，還有主持搭檔們，拿著麥克風的那段日子是我最美好的回憶。

感謝東海教育學程的所有老師與同學，教師之路雖然辛苦，但有老師們的教導與同學的陪伴、互相打氣，一切都會順利的！

謝謝在研究所期間陪伴我的所有朋友，忙碌的生活中，多虧了你們，我才能在充電後，繼續努力下去。也要謝謝在家鄉的老朋友們，你們在各行各業的專業，都幫了我非常大的忙，也希望未來我能用我的專業幫助更多人。

最後要感謝我的父母與兩位弟弟，人生路上會順利，都是有你們默默支持我，你們的幫助與鼓勵，都讓我充滿勇氣走下去。

Contents

Inner Cover	i
Abstract (in Chinese)	ii
Abstract (in English)	iii
Acknowledgement	iv
Contents	v
List of Figures	vi
1 Introduction	2
2 Zero-sum flow number for Hanoi Graphs	7
2.1 Hanoi-Graph $H(N, 3)$ 圖形零和流標號	7
2.2 Hanoi-Graph 四邊形 $H(N, 4)$ 圖形零和流標號	18
2.3 Hanoi-Graph M邊形 M為奇數 $H(N, M)$ 圖形零和流標號	29
2.4 Hanoi-Graph M邊形 M為偶數 $H(N, M)$ 圖形零和流標號	33
3 未來發展	37
References	41

List of Figures

1.1	G 滿足zero-sum 2-flow	5
1.2	$(2, 3)$ -圖	5
1.3	$F(G) = \infty$	6
2.1	$H(1, 3)$	7
2.2	$H(2, 3)$	7
2.3	$H(3, 3)$	8
2.4	$H(4, 3)$	8
2.5	$H(1, 3)$ 沒有zero-sum flow	8
2.6	$H(2, 3)$ zero-sum flow	9
2.7	$H(2, 3)$ 標號	9
2.8	$H(3, 3)$ zero-sum flow	10
2.9	將 $H(3, 3)$ 分三等份為 $H'(3, 3)$	10
2.10	$H(2, 3)$ 轉變成 $H'(3, 3)$	12
2.11	$H(2, 3)$ 轉變成 $H'(3, 3)$	12
2.12	$H'(3, 3)$ 延伸出的 $H(3, 3)$	13
2.13	$H(3, 3)$ 轉變成 $H'(4, 3)$	14
2.14	$H(3, 3)$ 轉變成 $H'(4, 3)$	15
2.15	$H'(4, 3)$ 延伸出的 $H(4, 3)$	15
2.16	$H(N - 1, 3)$	17

2.17	$H(N - 1, 3)$ 轉變成 $H'(N - 1, 3)$	17
2.18	$H(1, 4)$	18
2.19	$H(2, 4)$	18
2.20	$H(1, 4)$ 標號	18
2.21	$H(2, 4)$ 標號	19
2.22	$H(2, 4)$ 標號	19
2.23	$H(3, 4)$ 標號	20
2.24	將 $H(2, 4)$ 分三等份，每份稱作 $H'(2, 4)$	20
2.25	$H(1, 4)$ 轉變成 $H'(2, 4)$	21
2.26	$H(1, 4)$ 轉變成 $H'(2, 4)$	22
2.27	$H'(2, 4)$ 延伸出 $H(2, 4)$	22
2.28	$H(2, 4)$ 轉變成 $H'(3, 4)$	24
2.29	$H(2, 4)$ 轉變成 $H'(3, 4)$	24
2.30	$H'(3, 4)$ 延伸出的 $H(3, 4)$	25
2.31	$H(3, 4)$ 零和流標號	25
2.32	$H(N - 1, 4)$	27
2.33	$H(N - 1, 4)$ 轉變成 $H'(N, 4)$	28
2.34	$H'(2, 3)$ 標號延伸成 $H'(2, 5)$	29
2.35	$H(2, 3)$ 延伸至 $H(2, 5)$	30
2.36	$H(2, 3)$ 延伸至 $H(2, 5)$	30
2.37	$H(N, 3)$ 延伸至 $H(N, 5)$	30
2.38	已知 $H'(2, 3)$ 可得知 $H'(2, 5)$	31

2.39	已知 $H'(2, 3)$ 可得知 $H'(2, M)$ ， M 為奇數	31
2.40	已知 $H'(2, 3)$ 可得知 $H'(2, M)$ ， M 為奇數	32
2.41	已知 $H'(2, 3)$ 可得知 $H'(2, M)$ ， M 為奇數	33
2.42	$H(1, 4)$ 與 $H(1, 6)$ 之間關係	33
2.43	$H(1, 4)$ 與 $H(1, M)$ 之間關係	34
2.44	$H(2, 4)$ 與 $H(2, 6)$ 之間關係	34
2.45	$H(2, 4)$ 與 $H(2, M)$ 之間關係	35
2.46	$H(3, 4)$ 與 $H(3, 6)$ 之間關係	36
2.47	$H(N, M)$	36
3.1	circle-圖頂點加入新的奇數circle-圖	38
3.2	連接點切成兩兩奇數， C_o^e	38
3.3	連接點切成兩兩偶數， C_e^e	38
3.4	circle-圖頂點加入新的偶數circle-圖	39
3.5	circle-圖頂點加入新的circle-圖	40

Chapter 1 Introduction

此論文提到的全部有關於圖形理論的術語與符號，都可以參照由D. West [11] 所著的教科書。使 G 是個directed圖，在 G 上的nowhere-zero flow是由Kirchhoff所定的規則，每一個連接到頂點的邊為非零整數，而輸入邊的總和會等於輸出邊的總和。nowhere-zero k -flow是一個nowhere-zero flow中使用絕對值最大為 $k - 1$ 標號的邊。注意對於directed圖，nowhere-zero flows與方向的選擇互相獨立，因此可以使用undirected圖形考慮。1954年，Tutte著名的猜測：每個bridgeless圖形具有nowhere-zero 5-flow。1979年，F. Jaeger證明每個bridgeless圖形具有nowhere-zero 8-flow [5]，然後1981年，P. Seymour證明每個bridgeless圖形具有nowhere-zero 6-flow [7]，然而創始的Tutte猜想至今依然未解。

在1983年，Bouchet [4]有系統的發展出nowhere-zero flow一個更一般的概念，使用bidirected 邊替代directed邊。Bouchet提出猜測，每個有nowhere-zero integer flow的bidirected圖具有nowhere-zero 6-flow。最近另一個相關的nowhere-zero flow概念已經開始研究，於2009年，S. Akbari et al. [1,2]使用undirected圖，且可視為關於bi-directed的情形。

Definition 1.1 對於一個undirected圖 G ，zero-sum flow是每個頂點連接所有邊的標號總和都為零，且每個邊上的標號為非零整數。zero-sum k -flow是zero-sum flow中，要求每個頂點的絕對值小於 k 。

以代數的觀點，尋找這樣的zero-sum flows是等價於在圖形的關聯矩陣零空間中尋找處處成分非零的向量。S. Akbari et al.提出了zero-sum flows的概念類似於Tutte's 5-flow猜測如下：

Conjecture 1.1 (Zero-Sum 6-flow Conjecture) 設 G 是一個具有zero-sum flow的圖形，則 G 具有zero-sum 6-flow。

2010年Akbari et al. [1]證明出，bidirected圖形中Zero-Sum 6-Flow 猜測等價於Bouchet's 6-Flow 猜測，也得到在regular圖中，存在zero-sum 7-flows。根據結果，他們針對regular圖提出了一個猜想：如果 G 是 $r \geq 3$ 的 r -regular圖，

則 G 有zero-sum 5-flow。關於directed圖和bidirected圖的minimum flow number在文獻中有一般的概念，定義為 k -flow圖形中可允許的最小整數 k 。在2011年Wang, T.-M., Hu, S.-W. 擴展到undirected圖，引進zero-sum flow numbers的概念，並考慮regular圖的一般性constant-sum flows [8]：

Definition 1.2 設 G 為undirected圖，則 zero-sum flow number $F(G)$ 的定義為圖 G 中所有存在的zero-sum k -flow的最小 k 值。如果沒有這樣的 k 存在，則 $F(G) = \infty$ 。

特別的是，Wang, T.-M., Hu, S.-W.獲得了flow number 2的刻劃和具有flow number 3的3-regular圖的其他結果 [9]，相關結果由第一位發表者在北京在FAW2012會議上公佈。介紹後面部分中zero-sum minimum flow numbers的基本屬性和先前結果。

此外，眾所皆知平面上有三種可能類型的regular tessellations，它們是由正方形，等邊三角形和六邊形組成的拼接圖形。形式上，lattice grid或lattice grid graph由無限整數格子網格 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的有限子集組成。Lattice grid的頂點是lattice points，並且邊連接彼此相距單位的點。無限網格 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 可以將其視為具有單位正方形的平面的regular tiling的頂點集。另一個種類是正三角形，可以用相同的方法去定義triangular grid。triangular grid graph是由無限三角形網格的有限子集引起的圖。另一種類型的tiling是regular hexagons，它定義了infinite hexagonal grid。很類似的，由infinite hexagonal grid的finite subset引起的圖形稱為hexagonal grid graph。文獻中，hexagonal圖也被稱為的honeycomb圖。

顯然，zero-sum flow numbers可以提供關於zero-sum flows的更詳細信息。舉例，我們可以重申前面提到的Zero-Sum 6-flow 猜想如下:假設undirected圖 G 具有zero-sum flow，則 $F(G) \leq 6$ 。在2012年，Wang, T.-M., Hu, S.-W.展示了small flow numbers的一般性，所以計算zero-sum flow numbers會比較容易。眾所皆知，圖形若有nowhere-zero 2-flow，若且唯若，圖形是Eulerian（每個頂點的degree為偶數），可以獲得zero-sum flows的以下內容：

Lemma 1.1 (T. Wang and S. Hu [9]) 使圖形 G 有zero-sum flow number $F(G) = 2$ ，若且唯若， G 是 Eulerian且在每一個連通區中邊數均為偶數。

1949年，Tutte證明一個cubic圖有nowhere-zero 3-flow，若且唯若，它是bipartite。對於undirected圖也有類似的作法：

Lemma 1.2 (*T. Wang and S. Hu [9]*) cubic圖形 G 有 zero-sum flow number $F(G) = 3$ ，若且唯若， G 具有 perfect matching。

Lemma 1.3 (*T. Wang and S. Hu [9]*) 設圖形 G 為 undirected 圖，且 $G = H_1 \cup H_2$ 是 H_1 和 H_2 的 arbitrary union，flow numbers $F(H_1) = k_1$ 且 $F(H_2) = k_2$ ，則 $F(G) \leq k_1 k_2$ 。

然後我們得到以下推論，這些是一般用於計算流數的非常有用的工具：

Corollary 1.1 設 G 是個 undirected 圖， $G = H_1 \cup H_2$ 是 H_1 的 arbitrary union，flow numbers $F(H_1) = F(H_2) = 2$ ，則 $F(G) \leq 4$ 。

Corollary 1.2 設 G 是個 undirected 圖， $G = H_1 \cup H_2$ 是 H_1 的 arbitrary union，flow numbers $F(H_1) = 2$ 且 $F(H_2) = 3$ ，則 $F(G) \leq 6$ 。

S. Akbari, N. Ghareghani, G.B. Khosrovshahi 和 A. Mahmoody [2] 考慮以下問題。滿足 zero-sum flow 的圖 G ，邊上標記都是非零實數，任何頂點連接的所有邊的總和都要是 0，圖 G 的 zero-sum k -flow 的 k 值滿足此集合 $\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(K-1)\}$ 。注意滿足 nowhere-zero flow 的圖 G 跟具有 zero-sum flow 的圖 G 不相同。我們現在只考慮 zero-sum flow 問題， G 是個圖形，我們可這樣說，如果頂點 v 連接的所有邊的總和事件為 0，則 zero-sum rule 堅持頂點 $v \in G$ 。

Example 1.1 設 G 是一個 4 節點的 cycle C_4 ，則 G 是一個 zero-sum 2-flow 如圖 1.1。

Akbari et al. 已經證明出 non-bipartite 圖中，zero-sum flow 必要且有效的存在條件。

Theorem 1.1 (*Akbari et al. [2]*) 假設圖形 G 不是一個 bipartite 圖。則 G 具有 zero-sum flow，若且唯若，任何 G 的邊 e ， $G \setminus \{e\}$ 內沒有 bipartite 的組成。

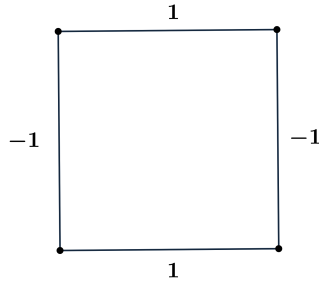


圖 1.1: G 滿足 zero-sum 2-flow

Definition 1.3 令 G 是個 *connected* 圖。如果只有少於 k 個邊被移除，它仍保持連接狀態，則 G 是 k -edge connected 圖。

Akbari et al. 也證明了在 2-edge connected bipartite 圖的 zero-sum 猜測是正確的。

Theorem 1.2 (Akbari et al. [2]) 設 G 是 2-edge connected bipartite 圖，則 G 有 zero-sum 6-flow。

此外，Akbari et al. 證明 3-regular 圖的 zero-sum conjecture 是正確的。

Theorem 1.3 (Akbari et al. [2]) 任何 3-regular 圖皆具有 zero-sum 5-flow。

Definition 1.4 設 G 是一個圖，如果圖的每個頂點 *degree* 是 2 或 3，我們稱 G 為 (2,3)-圖，如圖 1.2。

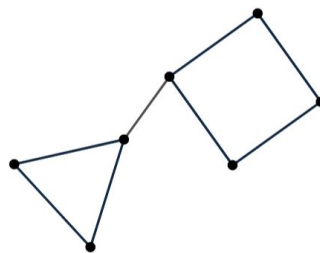


圖 1.2: (2,3)-圖

此外，Akbari et al. 證明了 (2,3)-圖和 zero-sum 推測之間的關係。

Theorem 1.4 (*Akbari et al. [2]*) 如果對於(2,3)-圖的 *Zero-Sum* 推測是對的，則對任何圖都是正確的。

有關上述定理和其他結果的細節，看 [2,3]。T.M. Wang 和 S.-W. Hu 在2011年，藉由定義擴展zero-sum flow number 這個概念。

Example 1.2 G 是個 *non-bipartite* 圖如圖 1.3。在刪除 $E(G)$ 中的一個邊 e 後，圖 G 有一個 *bipartite* 組件，則從Theorem 1.1 推得 $F(G) = \infty$ 。

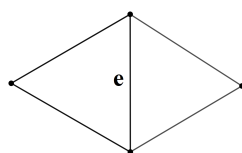


圖 1.3: $F(G) = \infty$

T.M. Wang et al. [9] 證明一些small zero-sum flow numbers的一般性，以致 zero-sum flow numbers 更容易的被估計。zero-sum flow numbers的結果如下。

Theorem 1.5 (*T.M. Wang et al. [9]*) 圖形 G 是一個 *zero-sum flow number* $F(G) = 2$ 若且唯若 G 是偶數個邊組成的 *Eulerian*。

(T.M. Wang et al. [10]) 完成了某些類別的 triangular grid graphs的complete zero-sum flow numbers，例如：regular triangular grids，triangular belts，fans和wheels圖等。(MUHAMMAD K. S., MUHAMMAD N., MUHAMMAD I. [12]) 完成了 octagonal grid、generalized prism 和 book 圖的complete zero-sum flow numbers 和zero sum number。而(Eu,Z.-k. [13]) 完成了某些(2,3)-圖形的 zero-sum flow numbers，由path a和 tree擴展出來的圖形Christmas lamps和 the tree lamps，並得到這些圖形的 zero-sum flow numbers最多為5。

此論文延續(Eu,Z.-k. [13])的題材，從Path、Tree中的頂點轉換成新的Circle圖，稱作Christmas lamps和 the tree lamps，延伸研究Circle圖中的頂點替換成Circle圖的圖形，稱作Hanoi-Graph的變形，這也是一種 (2,3)-圖形，探討圖形是否符合零和流、zero-sum flow numbers。

Chapter 2 Zero-sum flow number for Hanoi Graphs

從Hanoi-Graph中探討，找出每個Hanoi-Graph的zero-sum flow，並討論是否能找出zero-sum flow number。一開始先從三邊形的zero-sum flow，持續討論到任意奇數邊形的zero-sum flow，再從四邊形的zero-sum flow，討論到任意偶數邊形的zero-sum flow。

首先定義 $H(N, M)$ 如下：(1) $H(1, M)$ 是 M -圖 C_M (2) $H(N, M)$ 定義為以 $H(N-1, M)$ 為基本圖形，將每一頂點用 C_M 取代，並保留原來的邊。

Example 2.1 *Hanoi-Graph*是對應河內塔問題的可移動範圍所構成的圖形，具有獨特的Hamiltonian循環，三邊形組成的*Hanoi-Graph*有 3^n 個頂點與 $3(3^n - 1)/2$ 個邊，依照圖 2.1、圖 2.2、圖 2.3、圖 2.4的規律發展圖形，因為*Hanoi-Graph*是由非常多三邊形所組成的大型三邊形，我們定義此圖形為 $H(n, 3)$ 。

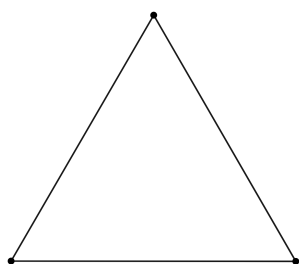


圖 2.1: $H(1, 3)$

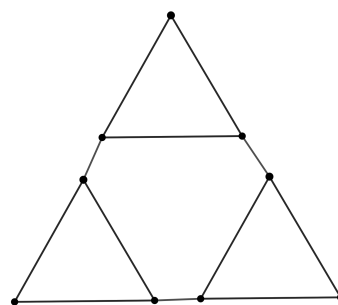


圖 2.2: $H(2, 3)$

2.1 Hanoi-Graph $H(N, 3)$ 圖形零和流標號

Theorem 2.1 $H(1, 3)$ 圖型沒有零和流標號。

Theorem 2.2 $H(1, 3)$ 的 $F(G) = \infty$ 。

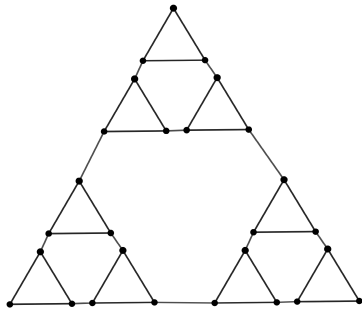


圖 2.3: $H(3, 3)$

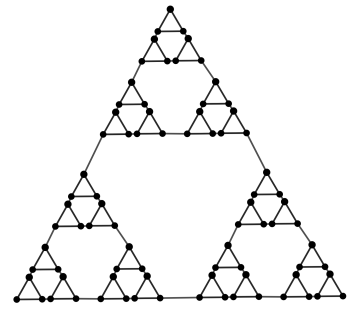


圖 2.4: $H(4, 3)$

Proof 圖 2.5 為 Hanoi-Graph $H(1, 3)$ 的 zero-sum flow 標號。由圖可得，

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \quad (2.1)$$

由上式得 $2a = -b - c$ ，但 $-b - c = 0$ ，得到 $a = 0$ ，不符合 zero-sum flow 原則(邊上標號為非零整數)，因此此圖沒有 zero-sum flow。

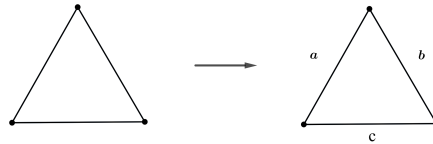


圖 2.5: $H(1, 3)$ 沒有 zero-sum flow

Example 2.2 圖 2.6 為 Hanoi-Graph $H(2, 3)$ 的 zero-sum flow。

Remark 2.1 (A. Mehrabian et al. [6]) Hanoi-Graph $H(2, 3)$ 有 Zero sum 6-flow number。

Proof 在圖 2.7 中，進行零和流標號，可得以下式子：

$$\begin{cases} X+a+b=0 \\ Y-a+b=0 \end{cases} \quad (2.2)$$

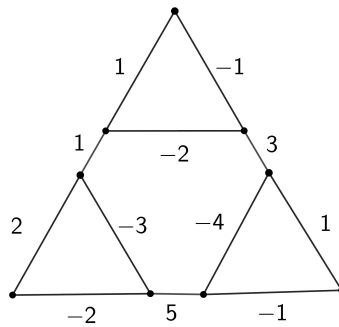


圖 2.6: $H(2, 3)$ zero-sum flow

整理後可得，

$$\begin{cases} X+Y=-2b \\ X-Y=-2a \end{cases} \quad (2.3)$$

從(2.2)的第一式可以得到 $X \equiv Y \pmod{2}$ ，且 $|X| \neq |Y|$ 。在 X 與 Y 、 Y 與 Z 、 Z 與 X 之間都有此關係，所以 $X \equiv Y \equiv Z \pmod{2}$ ， $|X| \neq |Y| \neq |Z|$ ， X 、 Y 、 Z 三數之間同奇同偶，且不能相同，因此可得知 X 、 Y 、 Z 最小的標號集合為 $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5\}$ 具有 $Zero\ sum\ 6-flow\ number$ 。

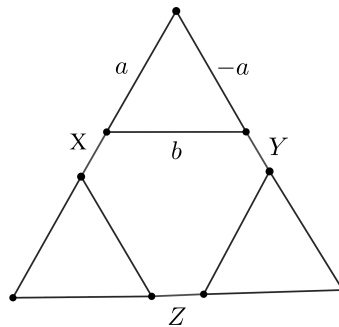


圖 2.7: $H(2, 3)$ 標號

Example 2.3 $H(3,3)$ 的 zero-sum flow，如圖 2.8。

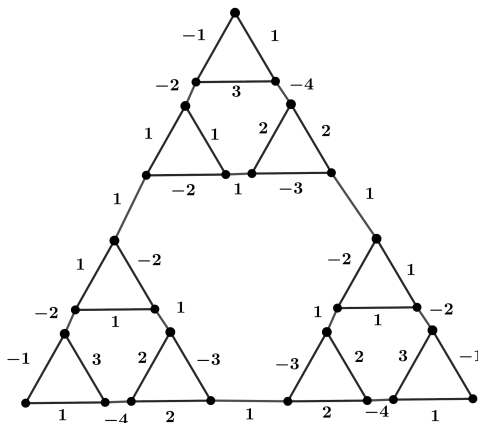


圖 2.8: $H(3,3)$ zero-sum flow

Definition 2.1 如圖 2.9，試著將 $H(3,3)$ 圖型內部細分為三等份，每等份稱為 $H'(3,3)$ 。

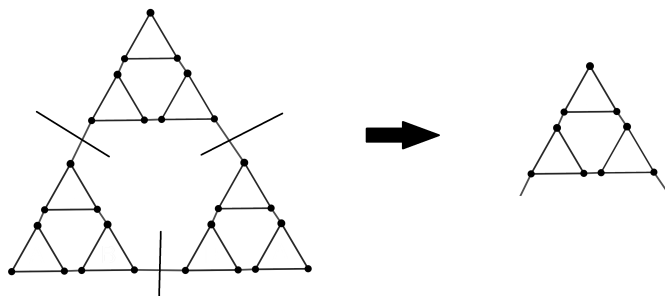


圖 2.9: 將 $H(3,3)$ 分三等份為 $H'(3,3)$

Theorem 2.3 已知 $H(2, 3)$ 的zero-sum flow 標號，則可得到 $H(3, 3)$ 的zero-sum flow 標號。

Proof 利用 $H(2, 3)$ 的zero-sum flow 標號，製造出 $H'(3, 3)$ 的zero-sum flow 標號，在 $H(2, 3)$ 延伸出的邊上標號 k ，並更改其餘邊上標號，最後組合成 $H(3, 3)$ 。

$$\begin{cases} x_n - k, n \text{ is odd}, k \in Z, k \neq x_n \\ x_m + k, m \text{ is even}, k \in Z, k \neq -x_m \end{cases} \quad (2.4)$$

使延伸出的兩邊相等後，就能組合成有zero-sum flow的 $H(3, 3)$ ，如圖 2.10。

$H(2, 3)$ 圖形標號關係如下：

$$\begin{cases} y_1 + x_1 = 0 \\ x_1 + y_2 + x_2 = 0 \\ x_2 + y_3 + x_3 = 0 \\ x_3 + y_4 = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

$H'(3, 3)$ 圖形標號的關係如下：

$$\begin{cases} k + y_1 + (x_1 - k) = 0 \\ (x_1 - k) + y_2 + (x_2 + k) = 0 \\ (x_2 + k) + y_3 + (x_3 - k) = 0 \\ (x_3 - k) + y_4 + k = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

可得 $H(2, 3)$ 與 $H'(3, 3)$ 內零和流標號的關係相同，所以假設成立。

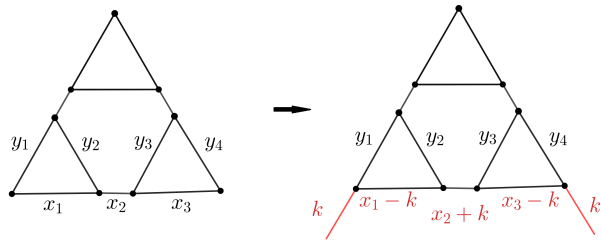


圖 2.10: $H(2,3)$ 轉變成 $H'(3,3)$

Example 2.4 利用 $H(2,3)$ 的零和流標號，製造出 $H'(3,3)$ ，並能延伸出 $H(3,3)$ 圖形，如圖 2.11 顯示，圖 2.12 為延伸出 $H(3,3)$ 的情況。

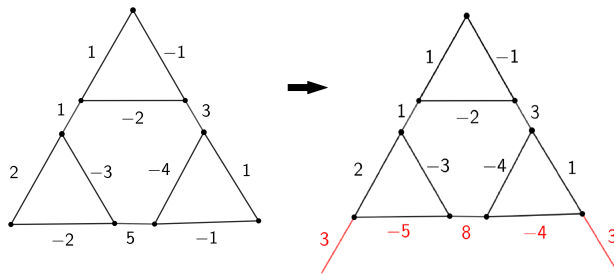


圖 2.11: $H(2,3)$ 轉變成 $H'(3,3)$

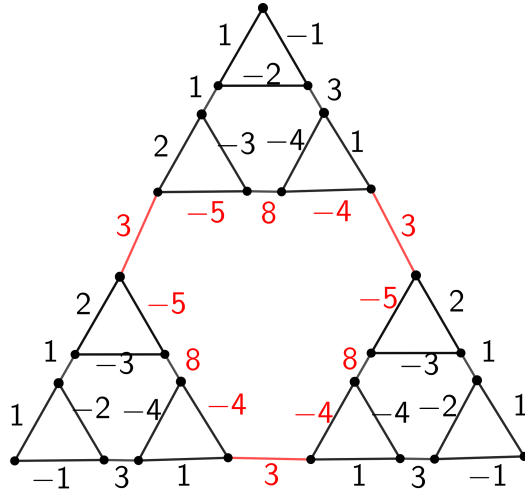


圖 2.12: $H'(3,3)$ 延伸出的 $H(3,3)$

Theorem 2.4 使用 *Theorem 2.3* 的方法，已知 $H(3,3)$ 零和流標號可得 $H(4,3)$ 零和流標號。

Proof 使用 *Theorem 2.3* 的方法從 $H(3,3)$ 找出 $H'(4,3)$ ，並延伸出 $H(4,3)$ 圖形。

$$\begin{cases} x_n - k, & n \text{ is odd}, k \in \mathbb{Z}, k \neq x_n \\ x_m + k, & m \text{ is even}, k \in \mathbb{Z}, k \neq -x_m \end{cases} \quad (2.7)$$

如圖 2.13。

$H(3,3)$ 內零和流標號的關係如下：

$$\begin{cases} y_1 + x_1 = 0 \\ x_1 + y_2 + x_2 = 0 \\ x_2 + y_3 + x_3 = 0 \\ x_3 + y_4 + x_4 = 0 \\ x_4 + y_5 + x_5 = 0 \\ x_5 + y_6 + x_6 = 0 \\ x_6 + y_7 + x_7 = 0 \\ x_7 + y_8 = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$H'(4,3)$ 內零和流標號的關係如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} k+y_1 + (x_1 - k) = 0 \\ (x_1 - k) + y_2 + (x_2 + k) = 0 \\ (x_2 + k) + y_3 + (x_3 - k) = 0 \\ (x_3 - k) + y_4 + (x_4 + k) = 0 \\ (x_4 + k) + y_5 + (x_5 - k) = 0 \\ (x_5 - k) + y_6 + (x_6 + k) = 0 \\ (x_6 + k) + y_7 + (x_7 - k) = 0 \\ (x_7 - k) + y_8 + k = 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

可得 $H(3,3)$ 與 $H'(4,3)$ 內零和流標號的關係相同，所以假設成立。

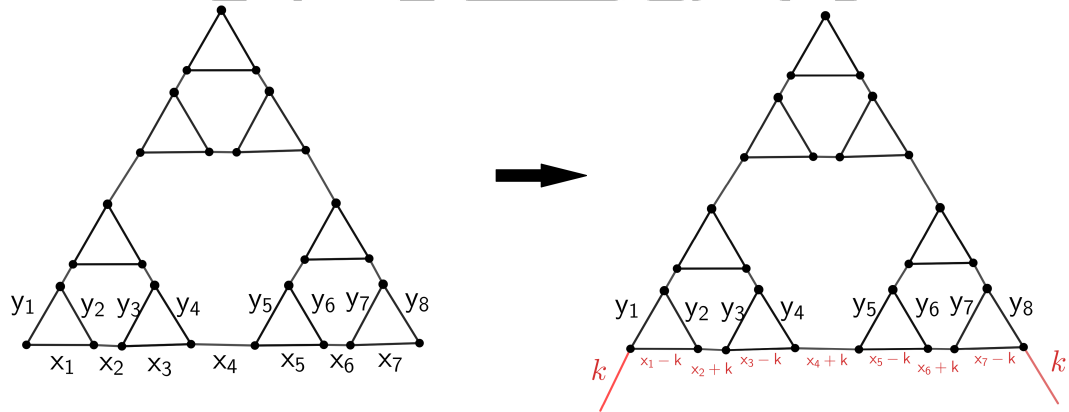


圖 2.13: $H(3,3)$ 轉變成 $H'(4,3)$

Example 2.5 利用 $H(3,3)$ 的圖形標號，製造出 $H'(4,3)$ ，並能延伸出 $H(4,3)$ 圖形，如圖 2.14 顯示，圖 2.15 為延伸出 $H(4,3)$ 的情況。

Theorem 2.5 使用 *Theorem 2.3* 的方法，已知 $H(N-1,3)$ 零和流標號可得 $H(N,3)$ 零和流標號。

Proof 使用 *Theorem 2.3* 的方法推廣至第 N 個圖形，從 $H(N-1,3)$ 找出 $H'(N,3)$ ，並延伸出 $H(N,3)$ 圖形。

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n - k, \quad n \text{ is odd}, k \in Z, k \neq x_n \\ x_m + k, \quad m \text{ is even}, k \in Z, k \neq x_m \end{array} \right. \quad (2.10)$$

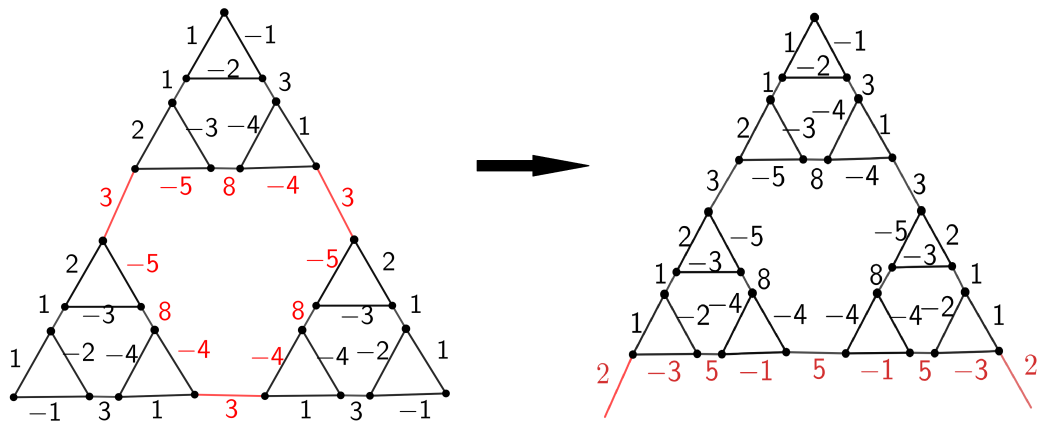


圖 2.14: $H(3,3)$ 轉變成 $H'(4,3)$

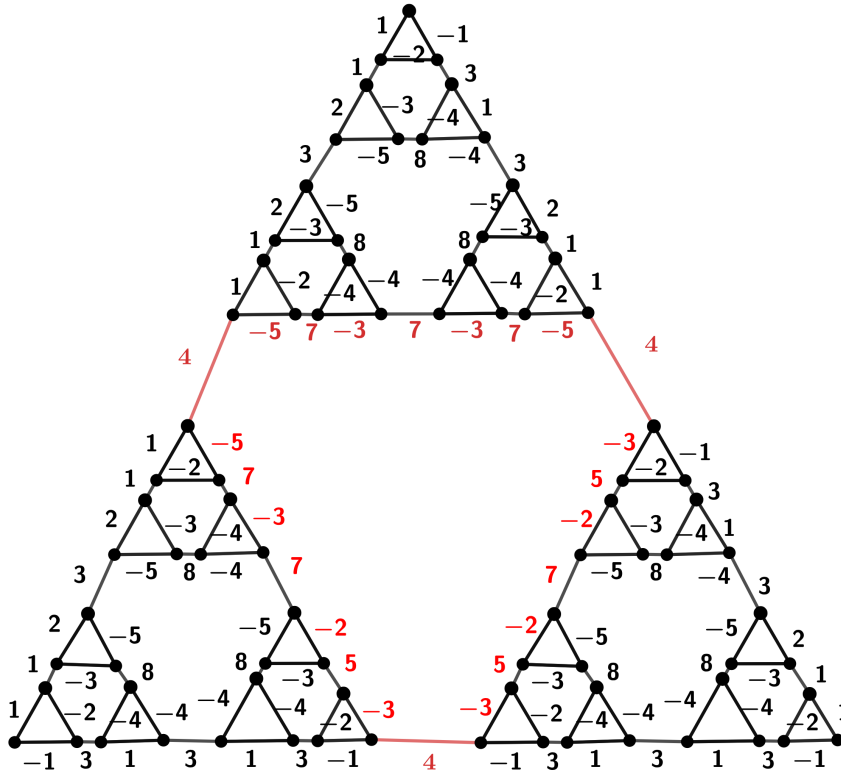


圖 2.15: $H'(4,3)$ 延伸出的 $H(4,3)$

如圖 2.16 2.17 。

$H(N-1, 3)$ 內零和流標號的關係如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + x_1 = 0 \\ x_1 + y_2 + x_2 = 0 \\ x_2 + y_3 + x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_{2^{N-1}-3} + y_{2^{N-1}-2} + x_{2^{N-1}-2} = 0 \\ x_{2^{N-1}-2} + y_{2^{N-1}-1} + x_{2^{N-1}-1} = 0 \\ x_{2^{N-1}-1} + y_{2^{N-1}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.11)$$

$H'(N, 3)$ 內零和流標號的關係如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} k + y_1 + (x_1 - k) = 0 \\ (x_1 - k) + y_2 + (x_2 + k) = 0 \\ (x_2 + k) + y_3 + (x_3 - k) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ (x_{2^{N-1}-3} - k) + y_{2^{N-1}-2} + (x_{2^{N-1}-2} + k) = 0 \\ (x_{2^{N-1}-2} + k) + y_{2^{N-1}-1} + (x_{2^{N-1}-1} - k) = 0 \\ (x_{2^{N-1}-1} - k) + y_{2^{N-1}} + k = 0 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

可得 $H(N-1, 3)$ 與 $H'(N, 3)$ 內零和流標號的關係相同，所以假設成立。

在這章節裡，若已知 $H(N-1, 3)$ 的零和流標號，即可延伸出 $H(N, 3)$ 的零和流標號，因此 $H(N, 3)$ 都具有零和流。除了 $H(2, 3)$ 的zero-sum flow number已知，其餘圖形的zero-sum flow number都尚未找出，在此提出一個問題： $F(H(N, 3))$ ， $N \geq 3$ 是什麼？

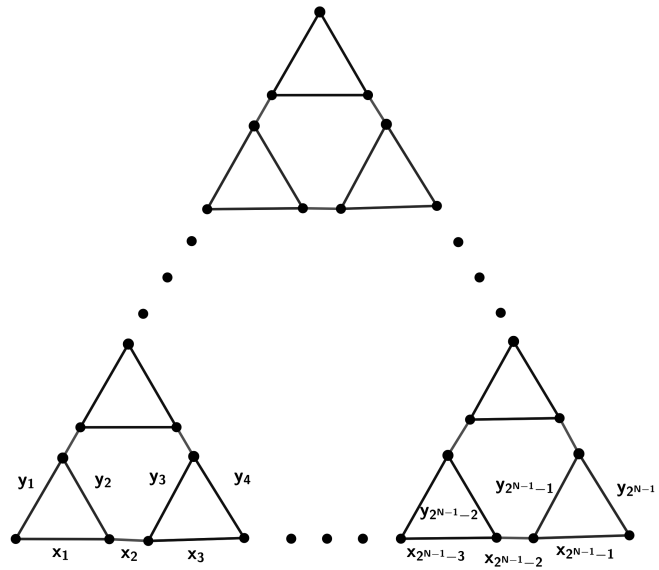


圖 2.16: $H(N-1, 3)$

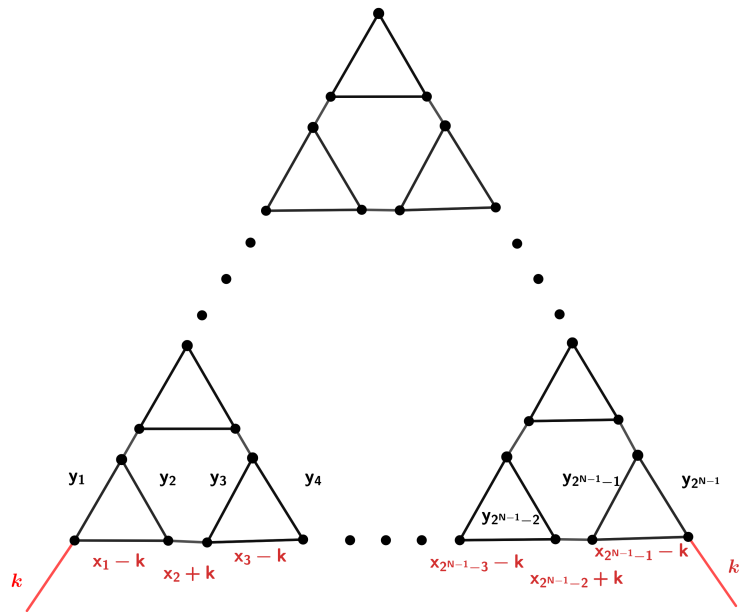


圖 2.17: $H(N-1, 3)$ 轉變成 $H'(N-1, 3)$

2.2 Hanoi-Graph 四邊形 $H(N, 4)$ 圖形零和流標號

Definition 2.2 *Hanoi-Graph* 四邊形 $H(n, 4)$ 是將 *Hanoi-Graph* 圖形的三邊形碎形遞迴，替換成四邊形遞迴，如圖 2.18、2.19。

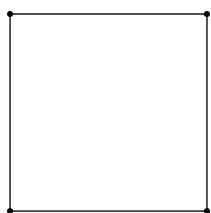


圖 2.18: $H(1, 4)$

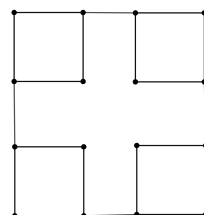


圖 2.19: $H(2, 4)$

Theorem 2.6 $H(1, 4)$ 是 *Hanoi-Graph* 四邊形，可簡單的進行 *zero-sum* 標號，如圖 2.20。

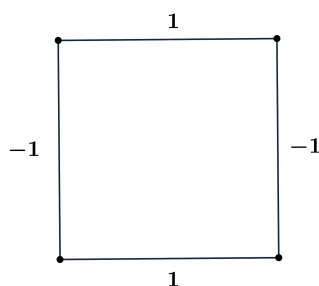


圖 2.20: $H(1, 4)$ 標號

Example 2.6 $H(2, 4)$ 是 *Hanoi-Graph* 四邊形，進行 *zero-sum* 標號後，如圖 2.21。

Theorem 2.7 $H(2, 4)$ 有零和流標號，且 $H(2, 4)$ 為 $F(G)=3$ 的圖形。

Proof $H(2, 4)$ 是 *Hanoi-Graph* 四邊形，並標上未知數後，如圖 2.22。討論圖形的 *zero-sum* 標號，可得以下式子：

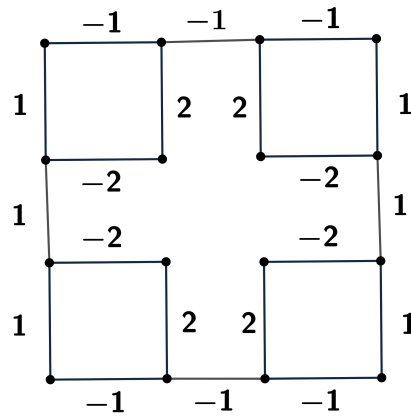


圖 2.21: $H(2, 4)$ 標號

$$\begin{cases} A+a+b=0 \\ Y-a-b=0 \end{cases} \quad (2.13)$$

整理後可得， $A = -Y$ ，並推得 YX 、 XZ 、 ZA 之間都有此關係，從圖 2.21 的例子得知 $H(2, 4)$ 為 $F(G)=3$ 的圖形，不能再使用比 ± 2 更小的標號。

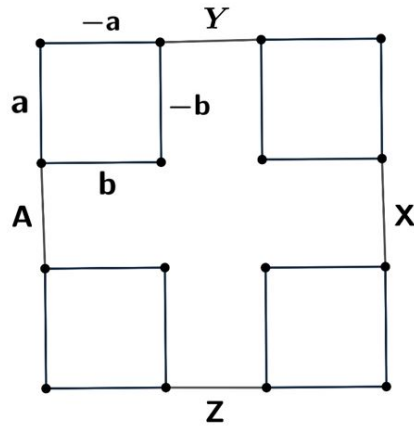


圖 2.22: $H(2, 4)$ 標號

Example 2.7 $H(3, 4)$ 是 *Hanoi-Graph* 四邊形，進行 *zero-sum* 標號後，如圖 2.23。

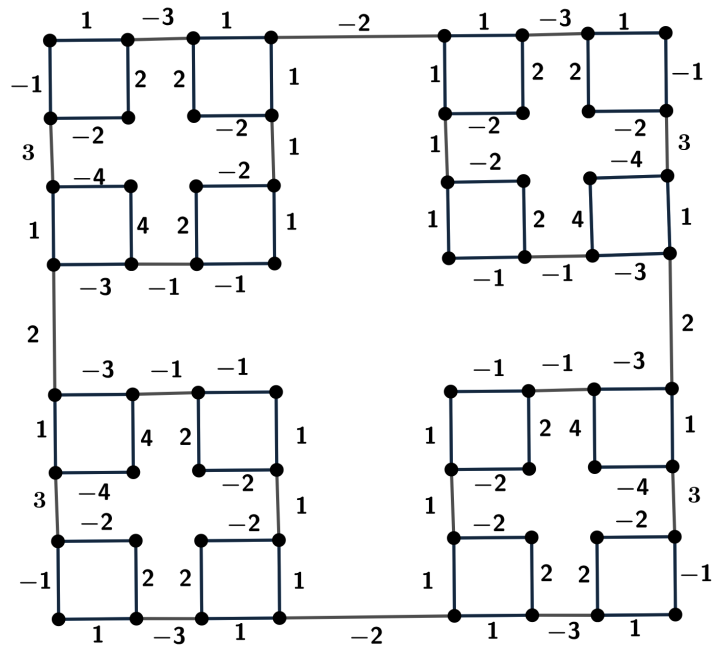


圖 2.23: $H(3,4)$ 標號

Example 2.8 仿照 $H(N,3)$ 的零和流標號推導過程，將 $H(2,4)$ 圖型內部細分為四等份，每等份稱為 $H'(2,4)$ ，如圖 2.24。

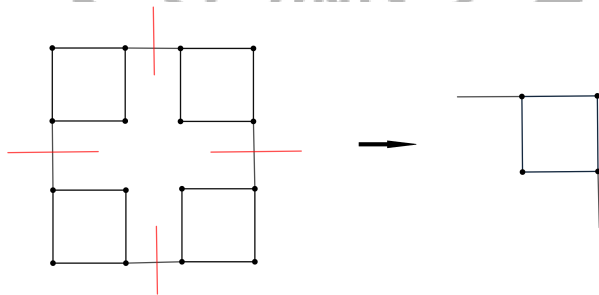


圖 2.24: 將 $H(2,4)$ 分三等份，每份稱作 $H'(2,4)$

Theorem 2.8 已知 $H(1,4)$ 有零和流標號，即可得知 $H(2,4)$ 有零和流標號。

Proof 利用 $H(1,4)$ 的圖形標號，製造出 $H'(2,4)$ ，在 $H(2,4)$ 延伸出的邊上標號 k 與 $-k$ ，並更改其餘邊上標號，

$$\begin{cases} x_n - k, n \text{ is odd}, k \in \mathbb{Z}, k \neq x_n \\ x_m + k, m \text{ is even}, k \in \mathbb{Z}, k \neq -x_m \end{cases} \quad (2.14)$$

使延伸出的兩邊相等後，就能組合成 $H(2,4)$ 零和流標號圖形，如圖 2.25。

$H(1, 4)$ 內零和流標號的關係如下：

$$\begin{cases} y_1 + x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

$H'(3, 3)$ 的關係如下：

$$\begin{cases} k + y_1 + (x_1 - k) = 0 \\ (x_1 - k) + (x_2 + k) = 0 \\ (x_2 + k) + y_2 + -k = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

可得 $H(1, 4)$ 與 $H'(2, 4)$ 內零和流標號的關係相同，所以假設成立。

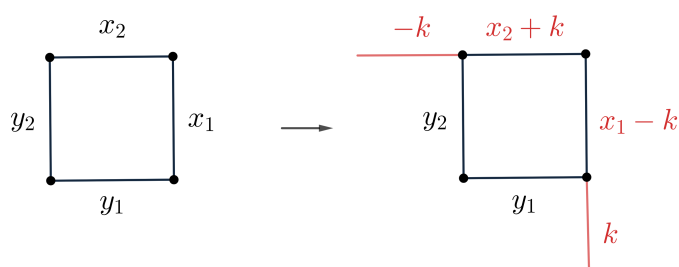


圖 2.25: $H(1, 4)$ 轉變成 $H'(2, 4)$

Example 2.9 利用 $H(1, 4)$ 的圖形標號，製造出 $H'(2, 4)$ ，並能延伸出 $H(2, 4)$ 圖形，如圖 2.26 顯示，圖 2.28為延伸出 $H(2, 4)$ 的情況。

Theorem 2.9 已知 $H(2, 4)$ 有零和流標號，即可得知 $H(3, 4)$ 有零和流標號。

Proof 使用Theorem 2.8 的方法從 $H(2, 4)$ 找出 $H'(3, 4)$ ，並延伸出 $H(3, 4)$ 圖形。

$$\begin{cases} x_n - k, & n \text{ is odd, } k \in \mathbb{Z}, k \neq x_n \\ x_m + k, & m \text{ is even, } k \in \mathbb{Z}, k \neq -x_m \end{cases} \quad (2.17)$$

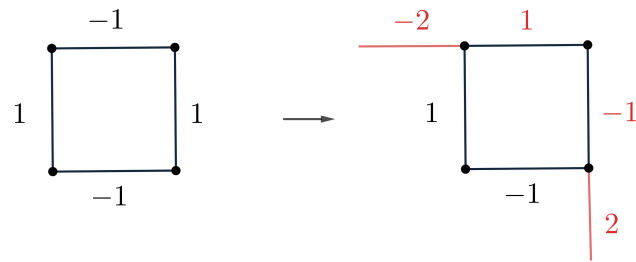


圖 2.26: $H(1,4)$ 轉變成 $H'(2,4)$

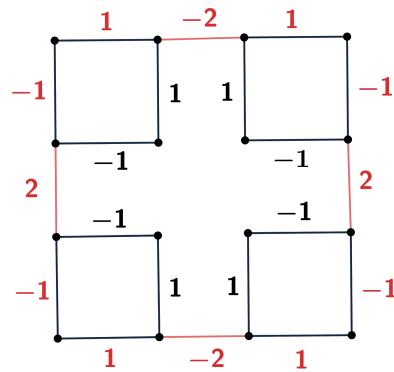


圖 2.27: $H'(2,4)$ 延伸出 $H(2,4)$

如圖 2.28 。

$H(2, 4)$ 內零和流標號的關係如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + x_1 = 0 \\ x_1 + y_2 + x_2 = 0 \\ x_2 + y_3 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 + y_4 + x_5 = 0 \\ x_5 + y_5 + x_6 = 0 \\ x_6 + y_6 = 0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$H'(3, 4)$ 內零和流標號的關係如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} k + y_1 + (x_1 - k) = 0 \\ (x_1 - k) + y_2 + (x_2 + k) = 0 \\ (x_2 + k) + y_3 + (x_3 - k) = 0 \\ (x_3 - k) + (x_4 + k) = 0 \\ (x_4 + k) + y_4 + (x_5 - k) = 0 \\ (x_5 - k) + y_5 + (x_6 + k) = 0 \\ (x_6 + k) + y_6 + (-k) = 0 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

可得 $H(2, 4)$ 與 $H'(3, 4)$ 內零和流標號的關係相同，所以假設成立。

Example 2.10 利用 $H(2, 4)$ 的圖形標號，製造出 $H'(3, 4)$ ，並能延伸出 $H(3, 4)$ 圖形，如圖 2.29 顯示，圖 2.30 為延伸出 $H(3, 4)$ 的情況。

此論文有找到關於 $H(3, 4)$ 的零和流標號使用到 $k = \pm 3$ ，但不確定 k 還有沒有更小值，如圖 2.31。

Theorem 2.10 已知 $H(N-1, 4)$ 的零和流標號，即可得知 $H(N, 4)$ 有零和流標號。

Proof 使用Theorem 2.8 的方法推廣至第 N 個圖形，從 $H(N-1, 4)$ 找出 $H'(N, 4)$ ，並延伸出 $H(N, 4)$ 圖形。

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n - k, \quad n \text{ is odd}, k \in Z, k \neq x_n \\ x_m + k, \quad m \text{ is even}, k \in Z, k \neq x_m \end{array} \right. \quad (2.20)$$

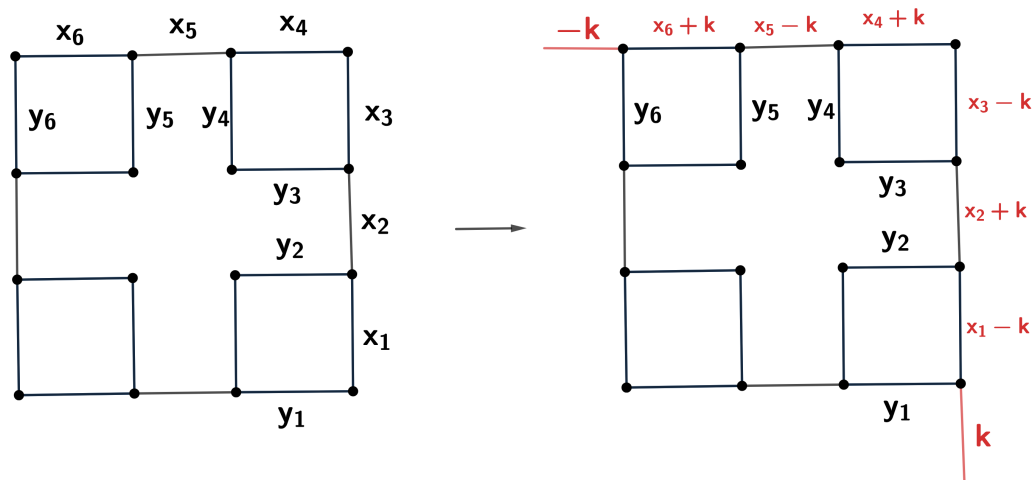


圖 2.28: $H(2,4)$ 轉變成 $H'(3,4)$

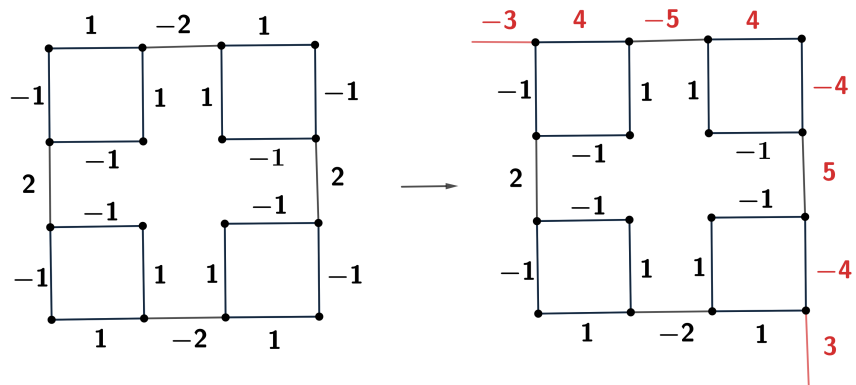


圖 2.29: $H(2,4)$ 轉變成 $H'(3,4)$

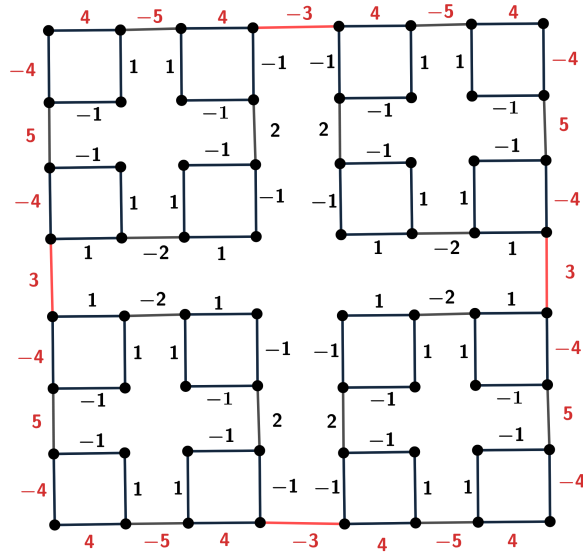


圖 2.30: $H'(3,4)$ 延伸出的 $H(3,4)$

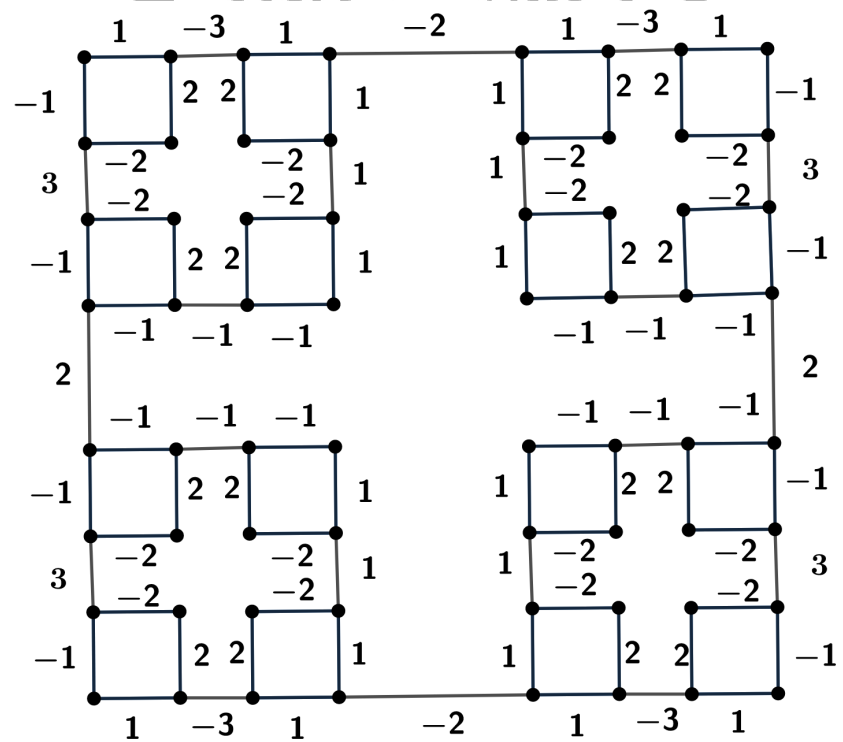


圖 2.31: $H(3,4)$ 零和流標號

如圖 2.32 2.33 。

$H(N-1, 4)$ 內零和流標號的關係如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 + x_1 = 0 \\ x_1 + y_2 + x_2 = 0 \\ x_2 + y_3 + x_3 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{2^{N-4}} + y_{2^{N-4}} + x_{2^{N-3}} = 0 \\ x_{2^{N-3}} + y_{2^{N-3}} + x_{2^{N-2}} = 0 \\ x_{2^{N-2}} + y_{2^{N-2}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

$H'(N, 4)$ 內零和流標號的關係如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} k + y_1 + (x_1 - k) = 0 \\ (x_1 - k) + y_2 + (x_2 + k) = 0 \\ (x_2 + k) + y_3 + (x_3 - k) = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ (x_{2^{N-4}} + k) + y_{2^{N-4}} + (x_{2^{N-3}} - k) = 0 \\ (x_{2^{N-3}} - k) + y_{2^{N-3}} + (x_{2^{N-2}} + k) = 0 \\ (x_{2^{N-2}} + k) + y_{2^{N-2}} - k = 0 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

可得 $H(N-1, 4)$ 與 $H'(N, 4)$ 內零和流標號的關係相同，所以假設成立。

在這章節裡，若已知 $H(N-1, 4)$ 的零和流標號，即可延伸出 $H(N, 4)$ 的零和流標號，因此 $H(N, 4)$ 都具有零和流。除了 $H(1, M)$ 、 $H(2, 4)$ 的zero-sum flow number已知，其餘圖形的zero-sum flow number都尚未找出，在此提出一個問題： $F(H(N, 4))$ ， $N \geq 2$ 是什麼？

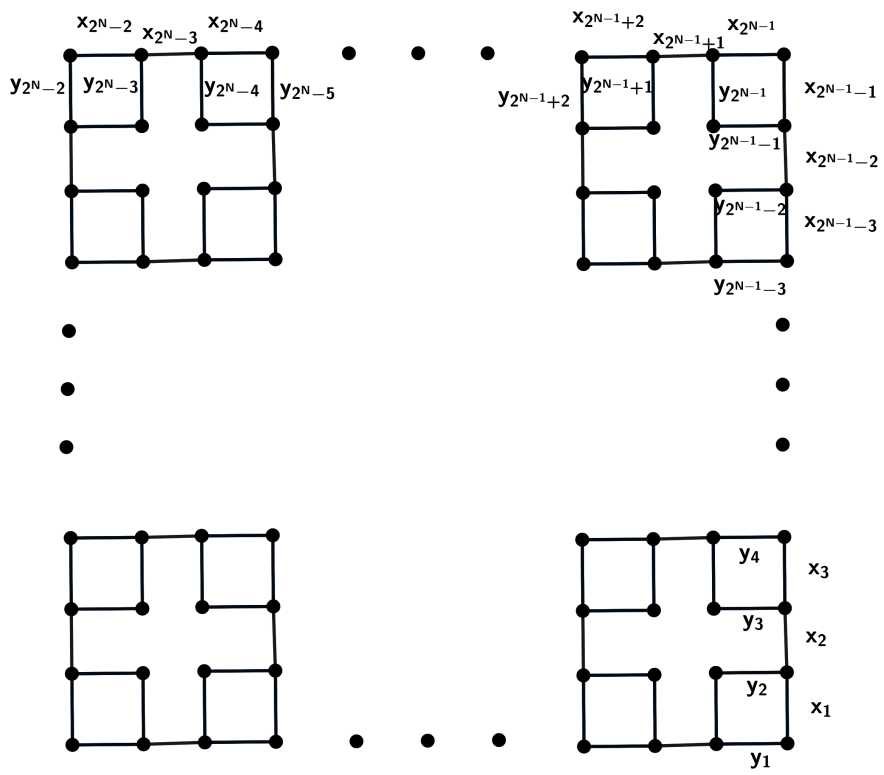


圖 2.32: $H(N-1, 4)$

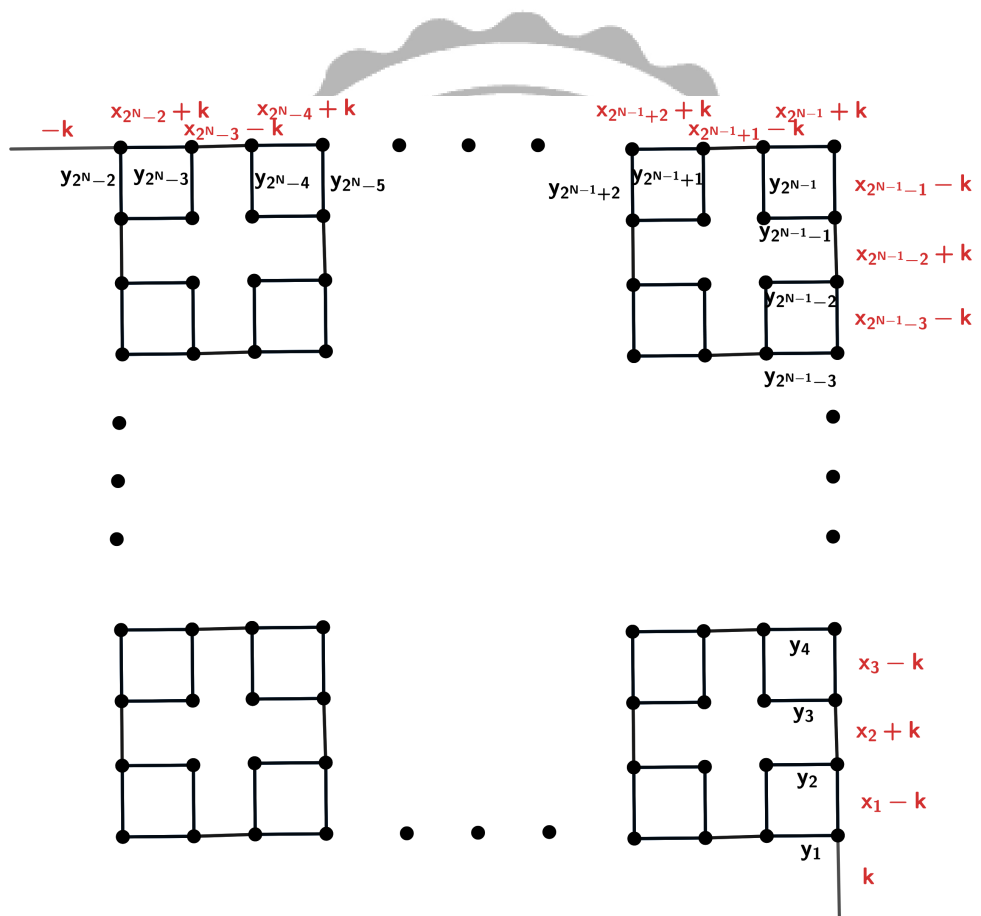


圖 2.33: $H(N-1, 4)$ 轉變成 $H'(N, 4)$

2.3 Hanoi-Graph M 邊形 M 為奇數 $H(N, M)$ 圖形零和流標號

上個章節提到的 $H'(2, 3)$ 零和流標號，能在 a_1^1 處新增兩個頂點後轉換成 $H'(2, 5)$ 零和流標號，如圖 2.34，因此只要能找到 $H'(2, 3)$ 零和流標號，就能推得 $H'(2, 5)$ 零和流標號。

Theorem 2.11 已知 $H(2, 3)$ 有零和流標號，即可得知 $H(2, 5)$ 有零和流標號，且 $H(2, 5)$ 有 zero-sum flow number 6。

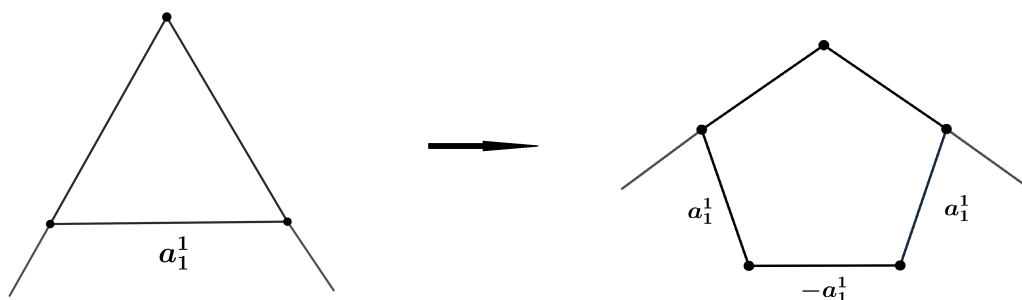


圖 2.34: $H'(2, 3)$ 標號延伸成 $H'(2, 5)$

Proof 若 $H'(2, 3)$ 零和流標號成立時， $H'(2, 5)$ 零和流標號也可成立。則可以使用 $H'(2, 3)$ 簡化 $H(2, 5)$ ，如圖 2.35。簡化過後的圖可再利用 $H'(2, 5)$ 相等性質，使 $a_1^2 = a_3^2$ ，已知 $H(2, 3)$ 零和流標號即可推得 $H(2, 5)$ 零和流標號，如圖 2.35 與 2.36。在圖 2.35 中 a_n^2 皆符合 Remark 2.1，所以可得 $H(2, 5)$ 有 zero-sum flow number 6。

Theorem 2.12 已知 $H(N, 3)$ 有零和流標號，即可得知 $H(N, 5)$ 有零和流標號。

Proof 若可以得知 $H'(N, 3)$ 零和流標號成立，則可以推得 $H'(N, 5)$ 零和流標號成立，可再利用 $H'(N, 5)$ 相等性質，使 $a_1^N = a_3^N$ ，推得 $H(N, 5)$ 圖形，即已知 $H(N, 3)$ 零和流標號，也可推得 $H(N, 5)$ 零和流標號，如圖 2.37。

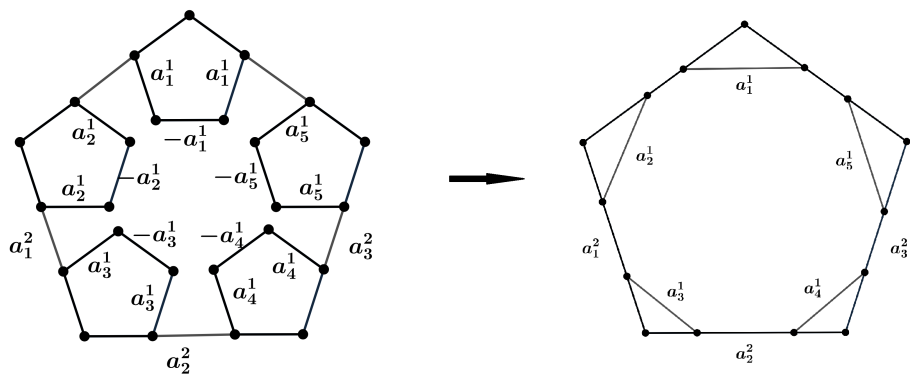


圖 2.35: $H(2,3)$ 延伸至 $H(2,5)$

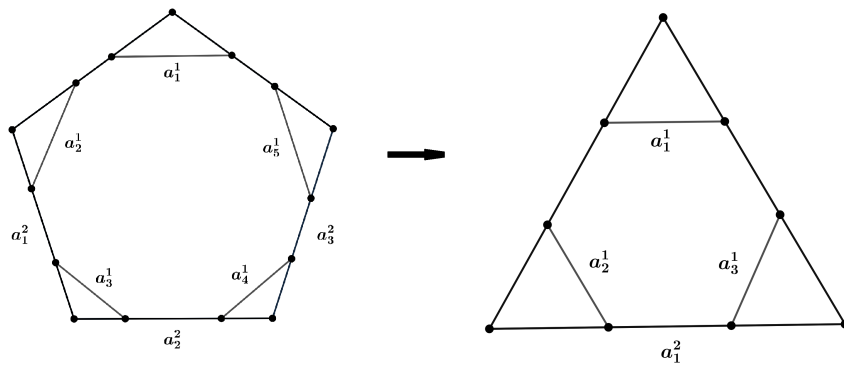


圖 2.36: $H(2,3)$ 延伸至 $H(2,5)$

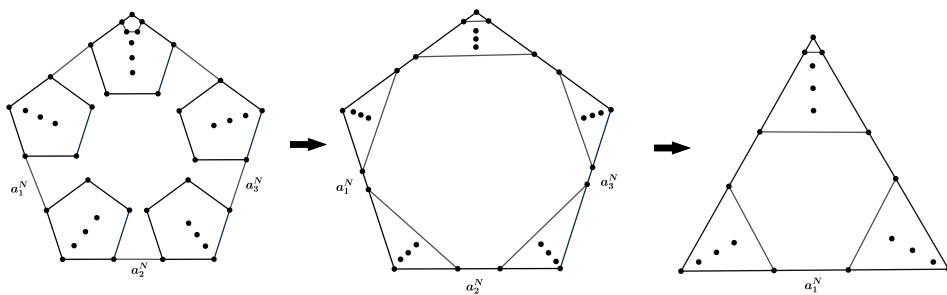


圖 2.37: $H(N,3)$ 延伸至 $H(N,5)$

Theorem 2.13 已知 $H(2,3)$ 有零和流標號，即可得知 $H(2,7)$ 有零和流標號，且 $H(2,7)$ 有 zero-sum flow number 6。

Proof $H'(2,7)$ 零和流標號圖形，使 $a_1^1 = a_3^1 = a_5^1$ ， $a_2^1 = a_4^1 = -a_1^1$ ，則可以得知若 $H'(2,3)$ 零和流標號成立，則 $H'(2,7)$ 零和流標號也成立。

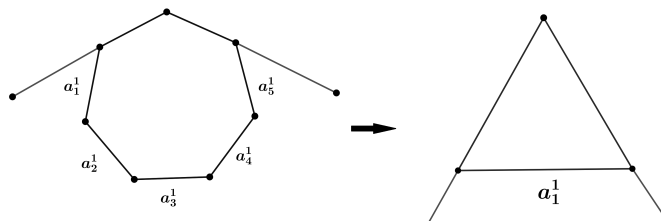


圖 2.38: 已知 $H'(2,3)$ 可得知 $H'(2,5)$

Theorem 2.14 已知 $H(2,3)$ 有零和流標號，即可得知 $H(2,M)$ 有零和流標號， M 為奇數，且 $H(2,M)$ 有 zero-sum flow number 6。

Proof $H'(2,M)$ 零和流標號圖形，使

$$\begin{cases} a_n^1 = a_1^1, n \text{ is odd} \\ a_m^1 = -a_1^1, m \text{ is even} \end{cases} \quad (2.23)$$

則可以得知若 $H'(2,3)$ 零和流標號成立，則 $H'(2,M)$ 零和流標號也成立。

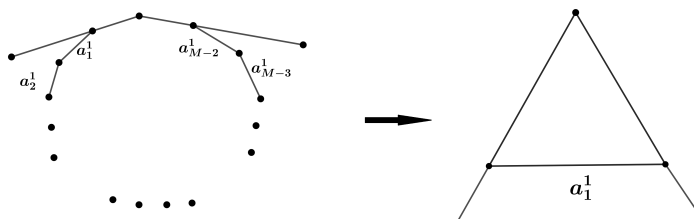


圖 2.39: 已知 $H'(2,3)$ 可得知 $H'(2,M)$ ， M 為奇數

已知 $H'(2,3)$ 零和流標號成立，則 $H'(2,M)$ 零和流標號也成立，可再利用 $H'(2,M)$ 可相等的性質，使

$$\begin{cases} a_n^2 = a_1^2, n \text{ is odd} \\ a_m^2 = a_2^2, m \text{ is even} \end{cases} \quad (2.24)$$

藉由上個定理得知可從 $H'(2, 3)$ 推得 $H'(2, M)$ 圖形 ($M \in odd$)，再藉由 $a_1^2 = a_{M-2}^2$ 相等，即可省略 $a_2^2 \dots a_{M-1}^2$ 形成 $H(2, 3)$ 圖形，如圖 2.40，因此若已知 $H(2, 3)$ 圖形，即可推得 $H(2, M)$ ($M \in odd$)，在圖 2.41中 a_M^2 皆符合 Remark 2.1，所以可得 $H(2, M)$ 有zero-sum flow number 6。

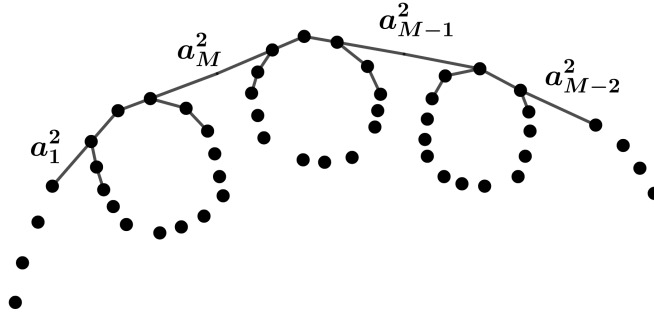


圖 2.40: 已知 $H'(2, 3)$ 可得知 $H'(2, M)$ ， M 為奇數

Theorem 2.15 已知 $H(N, 3)$ 有零和流標號，即可得知 $H(N, M)$ 有零和流標號， M 為奇數。

Proof 已知 $H'(N, 3)$ 零和流標號成立，則 $H'(N, M)$ 零和流標號也成立，可再利用 $H'(N, M)$ ($M \in odd$) 可相等的性質，使

$$\begin{cases} a_n^N = a_1^N, n \text{ is odd} \\ a_m^N = a_2^N, m \text{ is even} \end{cases} \quad (2.25)$$

藉由上個定理得知可從 $H'(N, 3)$ 推得 $H'(N, M)$ 圖形 ($M \in odd$)，再藉由 $a_1^N = a_M^N$ 相等，即可省略 $a_2^N \dots a_{M-1}^N$ 形成 $H(2, 3)$ 圖形，如圖 2.41，因此若已知 $H(2, 3)$ 圖形，即可推得 $H(2, M)$ ($M \in odd$)。

在這章節裡，若已知 $H(N, 3)$ 的零和流標號，即可延伸出 $H(N, M)$ 的零和流標號， M 為奇數，因此 $H(N, M)$ 都具有零和流。除了 $H(2, M)$ 的zero-sum flow number已知，其餘圖形的zero-sum flow number都尚未找出，在此提出一個問題：當 $N \geq 3$ ， M 為奇數時， $F(H(N, M))$ 是什麼？

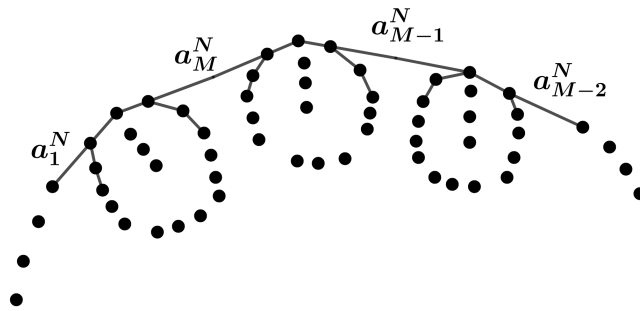


圖 2.41: 已知 $H'(2,3)$ 可得知 $H'(2,M)$, M 為奇數

2.4 Hanoi-Graph M 邊形 M 為偶數 $H(N, M)$ 圖形零和流標號

Theorem 2.16 已知 $H(1,4)$ 有零和流標號，即可得知 $H(1,6)$ 有零和流標號。

Proof 上個章節提到的 $H(1,4)$ 能找出零和流標號。使 $H(1,6)$ 中的每個邊標號，使 $a_1^1 = a_3^1$, $a_2^1 = a_4^1$ ，連接 a_1^1 與 a_4^1 即可得到 $H(1,4)$ 圖形並符合零和流標號，如圖 2.42，因此只要能找到 $H(1,4)$ 零和流標號，就能推得 $H(1,6)$ 零和流標號。

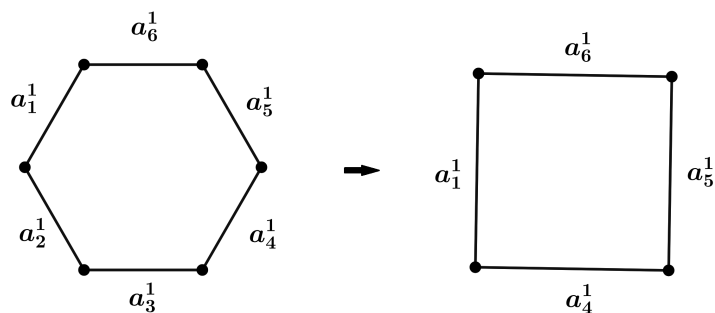


圖 2.42: $H(1,4)$ 與 $H(1,6)$ 之間關係

Theorem 2.17 已知 $H(1,4)$ 有零和流標號，即可得知 $H(1,M)$ 有零和流標號， M 為偶數，且 $H(1,M)$ 為 $F(G)=2$ 的圖形。

Proof 上個章節提到的 $H(1, 4)$ 能找出零和流標號。 $M \in \text{even}$ ，使 $H(1, M)$ 中的每個邊標號，使

$$\begin{cases} a_n^1 = a_1^1, n \text{ is odd} \\ a_m^1 = a_{M-2}^1, m \text{ is even} \end{cases} \quad (2.26)$$

連接 a_1^1 與 a_{M-2}^1 即可得到 $H(1, 4)$ 圖形並符合零和流標號，如圖 2.43，因此只要能找到 $H(1, 4)$ 零和流標號，就能推得 $H(1, M)$ 零和流標號。

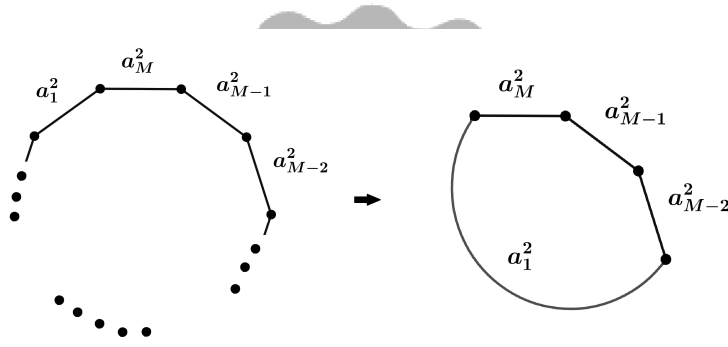


圖 2.43: $H(1, 4)$ 與 $H(1, M)$ 之間關係

Theorem 2.18 已知 $H(2, 4)$ 有零和流標號，即可得知 $H(2, 6)$ 有零和流標號。

Proof 使 $H(2, 6)$ 中的每個邊標號，因 $H'(2, 6)$ 從 $H(1, 6)$ 延伸出的端點，可以左右對調，令 $a_1^2 = a_3^2$ ， $a_2^2 = a_4^2$ ，連接相等的 a_1^1 與 a_3^1 ，再使 $H'(1, 6)$ 依照前個定理的步驟轉換成 $H'(1, 4)$ ，即可得到 $H(2, 4)$ 圖形並符合零和流標號，如圖 2.44，因此只要能找到 $H(2, 4)$ 零和流標號，就能推得 $H(2, 6)$ 零和流標號。已知 $H(1, 4)$ 的 $F(G)=2$ ，所以 $H(1, M)$ 為 $F(G)=2$ 的圖形，不能再找到更小的標號。

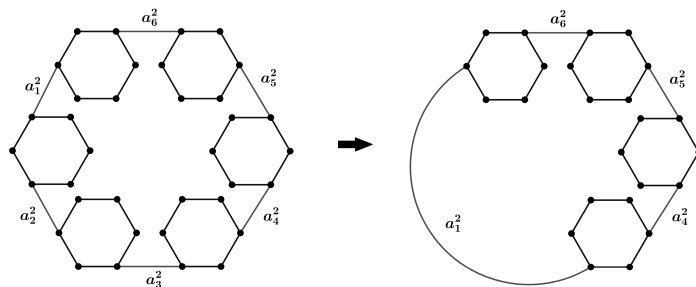


圖 2.44: $H(2, 4)$ 與 $H(2, 6)$ 之間關係

Theorem 2.19 已知 $H(2, 4)$ 有零和流標號，即可得知 $H(2, M)$ 有零和流標號， M 為偶數，且 $H(1, M)$ 為 $F(G)=3$ 的圖形。

Proof $M \in \text{even}$ ，使 $H(2, M)$ 中的每個邊標號，因 $H'(2, M)$ 從 $H(1, M)$ 延伸出的端點，可以左右對調，令

$$\begin{cases} a_n^2 = a_1^2, n \text{ is odd} \\ a_m^2 = a_{M-2}^2, m \text{ is even} \end{cases} \quad (2.27)$$

連接相等的 a_1^1 與 a_{M-3}^1 ，再使 $H'(2, M)$ 依照前個定理的步驟轉換成 $H'(2, 4)$ ，即可得到 $H(2, 4)$ 圖形並符合零和流標號，如圖 2.45，因此只要能找到 $H(2, 4)$ 零和流標號，就能推得 $H(2, M)$ 零和流標號。已知 $H(2, 4)$ 的 $F(G)=3$ ，所以 $H(1, M)$ 為 $F(G)=3$ 的圖形，不能再找到更小的標號。

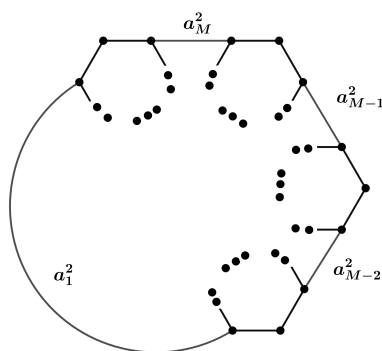


圖 2.45: $H(2, 4)$ 與 $H(2, M)$ 之間關係

Theorem 2.20 已知 $H(3, 4)$ 有零和流標號，即可得知 $H(3, 6)$ 有零和流標號。

Proof 使 $H(3, 6)$ 中的每個邊進行標號，因 $H'(3, 6)$ 從 $H(2, 6)$ 延伸出的端點，可以左右對調，令 $a_1^3 = a_3^3$ ， $a_2^3 = a_4^3$ ，連接相等的 a_1^3 與 a_3^3 ，再使 $H'(3, 6)$ 依照前個定理的步驟轉換成 $H'(3, 4)$ ，即可得到 $H(3, 4)$ 圖形並符合零和流標號，如圖 2.46，因此只要能找到 $H(3, 4)$ 零和流標號，就能推得 $H(3, 6)$ 零和流標號。

Theorem 2.21 已知 $H(N, 4)$ 有零和流標號，即可得知 $H(N, M)$ 有零和流標號， M 為偶數。

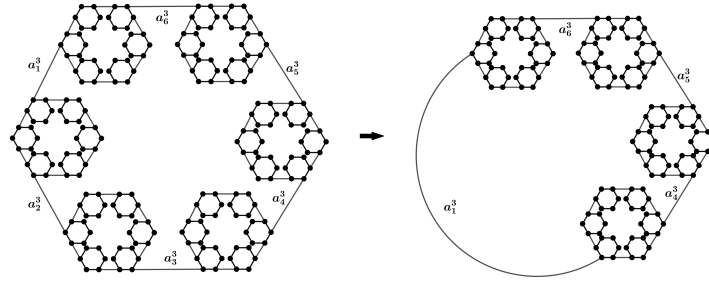


圖 2.46: $H(3, 4)$ 與 $H(3, 6)$ 之間關係

Proof $M \in \text{even}$ ，使 $H(N, M)$ 中的每個邊標號，因 $H'(N, M)$ 從 $H(N-1, M)$ 延伸出的端點，可以左右對調，令

$$\begin{cases} a_n^N = a_1^N, n \text{ is odd} \\ a_m^N = a_{M-2}^N, m \text{ is even} \end{cases} \quad (2.28)$$

連接相等的 a_1^N 與 a_{M-3}^N ，再使 $H'(N, M)$ 依照前個定理的步驟轉換成 $H'(N, 4)$ ，即可得到 $H(N, 4)$ 圖形並符合零和流標號，如圖 2.47，因此只要能找到 $H(N, 4)$ 零和流標號，就能推得 $H(N, M)$ 零和流標號。

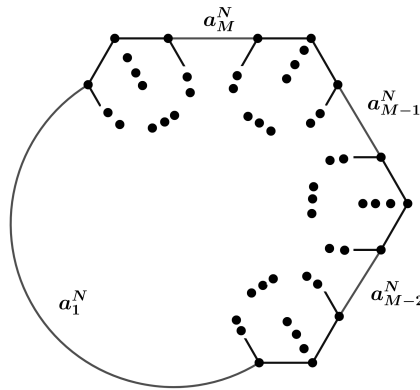


圖 2.47: $H(N, M)$

在這章節裡，若已知 $H(N, 4)$ 的零和流標號，即可延伸出 $H(N, M)$ 的零和流標號，因此 $H(N, M)$ 都具有零和流， M 為偶數。除了 $H(1, M)$ 、 $H(2, M)$ 的zero-sum flow number已知，其餘圖形的zero-sum flow number都尚未找出，在此提出一個問題：當 $N \geq 3$ ， M 為偶數時， $F(H(N, M))$ 是什麼？

Chapter 3 未來發展

此篇論文找到了關於 $H(N, M)$ 都具有zero-sum flow，希望未來能找到更多相關 $(2, 3)$ -圖的zero-sum flow 討論。

Theorem 3.1 $H(N, M)$ 具有零和流。

也能討論出所有 $H(N, M)$ 的zero-sum flow number，而以下是本文目前研究出 $H(N, M)$ 的zero-sum flow numbers：

- $F(H(1, 3)) = \infty$
- $H(2, 3)$ 有 Zero sum flow number 6
- M 為奇數， $H(2, M)$ 有 Zero sum flow number 6
- M 為偶數， $H(1, M)$ 有 Zero sum flow number 2
- M 為偶數， $H(2, M)$ 有 Zero sum flow number 3

除了討論 $H(N, M)$ 是否有zero-sum flow之外，也對circle-圖內的頂點替換成新的circle-圖是否能找到zero-sum flow 的標號做討論，第二章第三節提到：若已知 $H(2, 3)$ 的zero-sum flow 的標號，即可推得 $H(2, M)$ ($M \in odd$) 的zero-sum flow 標號。如果將固定的奇數邊 M 的circle換成任意奇數circle，能否能找到zero-sum flow 標號：

Theorem 3.2 將奇數circle-圖內的頂點換成奇數circle，有零和流。

Proof 在圖 3.1中，將原本 M 個邊的circle-圖 ($M \in odd$)，將每個頂點替換成不同的奇數 circle-圖，本文中第二章第三節 Theorem 2.13 有提到，奇數圈所形成的 $H'(2, M)$ 都能轉換成 $H'(2, 3)$ ，並可完成符合 zero-sum flow 的標號。

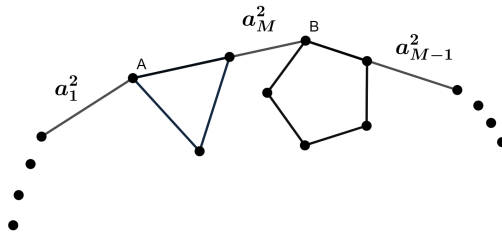


圖 3.1: circle-圖頂點加入新的奇數circle-圖

Definition 3.1 $H'(2, 4)$ 之間若連接點將圖切割成兩兩偶數邊，連接點互為相反數，圖 3.2, $H'(2, M)$, M 為偶數也能用此方法區分，稱之為 C_e^e ；若連接點將圖切割成兩兩奇數邊，連接點互為相同數，圖 3.3, $H'(2, M)$, M 為偶數也能用此方法區分，稱之為 C_o^e 。

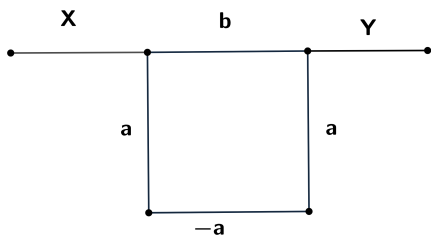


圖 3.2: 連接點切成兩兩奇數, C_o^e

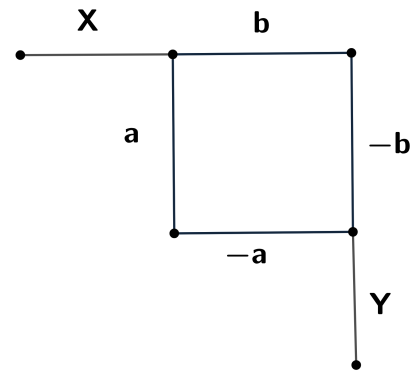


圖 3.3: 連接點切成兩兩偶數, C_e^e

Theorem 3.3 將奇數circle-圖內的頂點換成偶數circle, 其中具有偶數個 C_e^e 與任意個 C_o^e , 有零和流。

Proof 在圖 3.4中, 將原本 M 個邊的circle-圖 ($M \in odd$), 將每個頂點替換成不同的偶數 circle-圖, 本文中第二章第四節有提到, 偶數圈所形成的 $H'(2, M)$ 都能轉換成 $H'(2, 4)$, $H'(2, 4)$ 之間的連接點互為相反數或相同 (看連接的點是否將圖切割成兩兩偶數邊或奇數邊, 圖 3.2 3.3)。所以可得知在奇數個頂點中, 具有偶數個 C_e^e 與任意個 C_o^e , 即可完成 zero-sum flow 的標號。

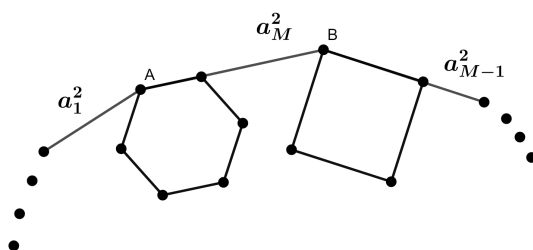


圖 3.4: circle-圖頂點加入新的偶數circle-圖

Theorem 3.4 將原本 M 個邊的circle-圖 ($M \in even$)，將每個頂點替換成不同的奇數circle-圖，具有零和流。

Proof 在圖 3.1中，將原本 M 個邊的circle-圖 ($M \in even$)，將每個頂點替換成不同的奇數circle-圖，本文中第二章第三節 2.13 有提到，奇數圈所形成的 $H'(2, M)$ 都能轉換成 $H'(2, 3)$ ，偶數個 $H'(2, 3)$ 可利用複製的性質完成 zero-sum flow 的標號。

Theorem 3.5 將原本 M 個邊的circle-圖 ($M \in even$)，具有偶數個 C_e^e 與任意個 C_o^e ，即可完成 zero-sum flow 的標號。

Theorem 3.6 在圖 3.4中，將原本 M 個邊的circle-圖 ($M \in even$)，將每個頂點替換成不同的偶數circle-圖，本文中第二章第四節有提到，偶數圈所形成的 $H'(2, M)$ 都能轉換成 $H'(2, 4)$ ， $H'(2, 4)$ 之間的連接點互為相反數或相同（看連接的點是否將圖切割成兩兩偶數邊或奇數邊，圖 3.2 3.3）。所以可得知在奇數個頂點中，具有偶數個 C_e^e 與任意個 C_o^e ，即可完成 zero-sum flow 的標號。

在圖 3.5中，將原本 M 個邊的circle-圖 ($M \in odd$)，將每個頂點替換成不同的偶數或奇數circle-圖，目前還未想到解決辦法。

此篇論文有些問題尚未解出：

- 當 $N \geq 3$ ， M 為奇數時， $F(H(N, M))$ 是什麼？
- 當 $N \geq 3$ ， M 為偶數時， $F(H(N, M))$ 是什麼？

- 將奇數邊的circle-圖，將每個頂點替換成不同的偶數或奇數 circle-圖，是否有零和流？
- 將奇數邊的circle-圖，將每個頂點替換成奇數的circle-圖，zero-sum flow number為何？
- 將奇數邊的circle-圖，將每個頂點替換成偶數的circle-圖，zero-sum flow number為何？
- 將偶數邊的circle-圖，將每個頂點替換成奇數的circle-圖，zero-sum flow number為何？
- 將偶數邊的circle-圖，將每個頂點替換成偶數的circle-圖，zero-sum flow number為何？
- 將奇數邊的circle-圖，將每個頂點替換成不同的偶數或奇數 circle-圖，是否有zero-sum flow number？

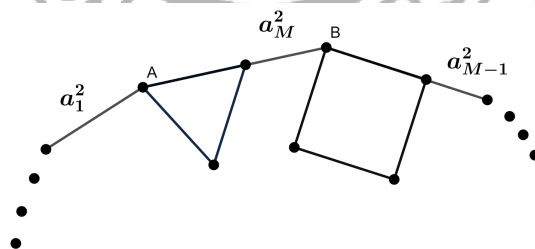


圖 3.5: circle-圖頂點加入新的circle-圖

Bibliography

- [1] Akbari, S., Daemi, A., Hatami, O., Javanmard, A., Mehrabian, A.: Zero-Sum Flows in Regular Graphs. *Graphs and Combinatorics* 26, 603–615 (2010)
- [2] Akbari, S., Ghareghani, N., Khosrovshahi, G.B., Mahmoody, A.: On zero-sum 6-flows of graphs. *Linear Algebra Appl.* 430, 3047–3052 (2009)
- [3] Akbari, S., et al.: A note on zero-sum 5-flows in regular graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics* 19(2), P7 (2012)
- [4] Bouchet, A.: Nowhere-zero integral flows on a bidirected graph. *J. Combin. Theory Ser. B* 34, 279–292 (1983)
- [5] Jaeger, F.: Flows and generalized coloring theorems in graphs. *J. Combin. Theory Ser. B* 26(2), 205–216 (1979)
- [6] A. Mehrabian: A Computer Search, Tech. Rep., Sharif University of Technology, Tehran (2007)
- [7] Seymour, P.D.: Nowhere-zero 6-flows. *J. Combin. Theory Ser. B* 30(2), 130–135 (1981)
- [8] Wang, T.-M., Hu, S.-W.: Constant Sum Flows in Regular Graphs. In: Atallah, M., Li, X.-Y., Zhu, B. (eds.) FAW-AAIM 2011. LNCS, vol. 6681, pp. 168–175. Springer, Heidelberg (2011)
- [9] Wang, T.-M., Hu, S.-W.: Zero-Sum Flow Numbers of Regular Graphs. In: Snoeyink, J., Lu, P., Su, K., Wang, L. (eds.) AAIM 2012 and FAW 2012. LNCS, vol. 7285, pp. 269–278. Springer, Heidelberg (2012)
- [10] Wang, T.-M., Zhang, G.-H.: Zero-Sum Flow Numbers of Hexagonal Grids. In: Fellows, M., Tan, X., Zhu, B. (eds.) FAW-AAIM 2013. LNCS, vol. 7924, pp. 339–349. Springer, Heidelberg (2013)
- [11] West, D.B.: *Introduction to Graph Theory*, 2nd edn. Prentice Hall, Englewood Cliffs (2001)

- [12] MUHAMMAD K. S., MUHAMMAD N., MUHAMMAD I.:Zero-Sum Flow Numbers of Some Grid Graphs,Open J. Discret. Appl. Math., Vol. 1(2018), No. 1, pp. 16 - 25 (2018)
- [13] Eu,Z.-k.:Zero-Sum Flow Numbers of (2, 3)-Graphs, 碩士論文，國立交通大學應用數學系所，(2016)。<<https://hdl.handle.net/11296/jjcubm>>

