

東海大學應用數學系  
碩士論文

兩物種行波解的弱交互作用

Weak interaction between two-species traveling waves

研究生：吳佳津

Graduate Student : Wu Chia-Chin

指導教授：張覺心博士

Thesis Advisor : Dr. Chang Chueh-Hsin

A Thesis Submitted to  
The Department of Applied Mathematics  
Tunghai University  
in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science

中華民國一〇八年六月

June 2019

東 海 大 學

應 用 數 學 系

碩 士 學 位 口 試 委 員 審 定 書

本系碩士班 吳佳津 君

所提論文 Weak interaction between two-species traveling waves.  
(兩物種行波解的弱交互作用)

合於碩士班資格水準，業經本委員會評審通過，特此證明。

口試委員：

楊 知 煜

吳 昌 鴻

指導教授：

張 覺 心

系主任：

胡 馨 云

中 華 民 國 一〇八 年 六 月 十 三 日

## 摘要

本篇論文先討論常用的競爭-擴散系統進行物種競爭的研究，藉由三物種 $(u, v, w)$ 的行波方程式，將 $u = 0$ (或 $v = 0$ )建構出 $(v, w)$ (或 $(u, w)$ )兩物種競爭系統的行波解，黏出三物種的情況。

利用matlab做數值分析，在不同的影響因素下，探討其三物種生存空間的分布，並探討其不穩定性的行為。

## 誌 謝

此篇論文的完成，首先感謝我的指導老師—張覺心老師，在研究之初，導引我研究文獻並耐心教導，在寫作過程中用心的指導與鼓勵，在此感謝老師的教誨與包容。

感謝口試委員台南大學吳昌鴻教授與東海大學楊智烜教授細心閱讀本論文，提供本論文諸多寶貴意見，學生獲益良多，使我得以修補論文的缺陷，特此感謝。

感謝東海大學應用數學系系上老師，在讀書期間給予我課程的知識。感謝系上助理，適時提醒我該注意的事項。感謝同學，分享論文寫作經驗，借閱書籍等。感謝東海大學提供優美的環境，安靜的讀書地方，完成論文。

最後，還要感恩我最親愛的家人和朋友們，在我就讀研究所及論文寫作期間給予我的支持與陪伴。

願將我的所有成果與你們共享。

吳 佳 津 謹識於  
東海大學應用數學系研究所  
民國一〇八年六月

## 目錄

1	導論	1
2	兩物種行波交互作用	5
3	三物種行波的弱交互作用	21
4	數值分析	28
4.1	$d_v = d_w = 1$ . . . . .	28
4.2	$c_0 = 0$ . . . . .	37
4.3	結論 . . . . .	49
5	總結	52

# 1 導論

在生態學中，學者們常使用競爭-擴散系統(competition-diffusion systems) 進行物種競爭的研究。一個典型的模型如下:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1 - u - c_{12}v - c_{13}w) \\ v_t = d_v v_{xx} + v(r_2 - c_{21}u - v - c_{23}w) \\ w_t = d_w w_{xx} + w(r_3 - c_{31}u - c_{32}v - w) \end{cases}, t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

其中 $(u, v, w)$ 為空間位置 $x$ 和時間 $t$ 時的三物種的密度，且 $d_v, d_w$ 為擴散率(空間中的移動能力)。  $r_i > 0$  ( $i = 2, 3$ )為固有成長率， $c_{ij} > 0$  ( $i \neq j$ )物中之間的競爭率。，正如文獻[2]所表示，我們的研究在於動機上，討論當兩個競爭激烈的物種( $u$ 和 $v$ )被第三物種( $w$ )入侵所產生共存(competition-mediated coexistence)的可能性，也就是第三物種是如何影響兩原生物種。

考慮(1.1)無擴散係數的模型:

$$\begin{cases} u_t = u(r_1 - a_1 u - c_{12}v - c_{13}w) \\ v_t = v(r_2 - c_{21}u - a_2 v - c_{23}w) \\ w_t = w(r_3 - c_{31}u - c_{32}v - a_3 w) \end{cases}, t > 0 \quad (1.2)$$

依據[2]，我們在無擴散系統中的 $r_i$ 、 $a_i$ 和 $c_{ij}$  ( $i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ )中加入一些假設:

(A-1)  $\frac{1}{c_{21}} < \frac{r_1}{r_2} < \frac{c_{12}}{1}$ ，這表示在沒有 $w$ 的情況下， $u$ 和 $v$ 競爭強烈，可以推到 $u$ 和 $v$ 之間會發生競爭排斥(competitive exclusion)。

(A-2)  $\frac{1}{c_{32}} < \frac{c_{23}}{1} < \frac{r_2}{r_3}$ ，這表示在沒有 $u$ 的情況下， $v$ 會生存，而 $w$ 會滅絕。

(A-3)  $\frac{1}{c_{13}} < \frac{r_3}{r_1} < \frac{c_{31}}{1}$  ,這表示在沒有 $v$ 的情況下， $u$ 和 $w$ 競爭激烈。

(A-4) (1.2)沒有正的平衡點，或是有不穩定正的平衡點。

在(A-1)，(A-2)，(A-3)和(A-4)下，可以找到(1.2)的穩定平衡點為 $(\frac{r_1}{a_1}, 0, 0)$ 和 $(0, \frac{r_2}{a_2}, 0)$ ，且其它平衡點皆為不穩定。根據[2]的結果，在 $(u, v, w)$ 系統中， $w$ 是弱小的，最後 $w$ 會退出 $(u, v, w)$ 系統，所以不會發生競爭調和(competition-mediated)或是共存。

在本篇文章中，我們考慮參數 $(r_i, c_{ij})$ 滿足不同於[2]的假設(見(2.2)，(2.5)，(2.7))，我們將先探討兩物種行波解弱交互作用(weak interaction)(參考[2])，根據Lotka – Volterra三物種競爭-擴散系統(1.1)，本論文的目的為利用數值檢驗[1]構造的行波解是否穩定？

根據文獻[1]建構出以下三物種的行波解。

我們引入moving coordinates,

$$(u, v, w)(x, t) = (u, v, w)(x - ct)$$

則(1.1)可轉換成

$$\begin{cases} u'' + cu' + u(1 - u - c_{12}v - c_{13}w) = 0 , \\ d_v v'' + cv' + v(r_2 - c_{21}u - v - c_{23}w) = 0 , \\ d_w w'' + cw' + w(r_3 - c_{31}u - c_{32}v - w) = 0 , \end{cases} \quad (1.3)$$

並滿足邊界條件：

$$(u, v, w)(-\infty) = (0, r_2, 0) , \quad (u, v, w)(+\infty) = (1, 0, 0) . \quad (1.4)$$

我們預期(1.3)，(1.4)可提供兩個front，一個pluse的波型(如圖1.1) 而影響其行為的因素有(1)擴散率，(2) $c_{ij}$ ，(3)行波解速度(traveling speed)。

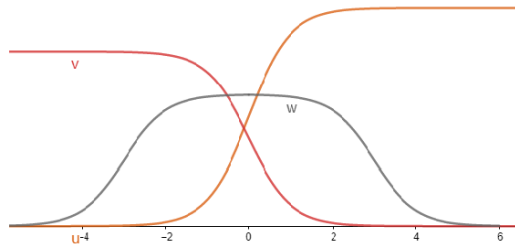


Figure 1.1: (1.1)行波解的輪廓，其中 $u$ 為波前(front)、 $v$ 為波後(back)、 $w$ 為脈衝波(pulse)

在探討三物種的行波解前，先瞭解兩物種的物種競爭擴散行為，根據 *Lotka – Volterra* 兩物種競爭-擴散系統

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \phi(1 - \phi - c\psi) , \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = d \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi(a - b\phi - \psi) , \end{cases} \quad (1.5)$$

其中 $\phi$ 的擴散率、固有成長率和內部競爭率皆為1， $\psi$ 對 $\phi$ 的傷害為 $c$ 。 $\psi$ 的擴散率為 $d$ ，固有成長率為 $a$ ，內部競爭率為1， $\phi$ 對 $\psi$ 的傷害率為 $b$ ，其中 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 和 $d$ 皆為正數且 $(\phi, \psi)(x, 0) \geq 0$ 。我們考慮(1.5)的行波解 $(\phi, \psi)(x, t) = (\phi, \psi)(z)$ ，其中 $z = x - \theta t$ 、 $\theta$ 為傳播速率，改寫(1.5)方程為

$$\begin{cases} 0 = \frac{d^2 \phi}{dz^2} + \theta \frac{d\phi}{dz} + \phi(1 - \phi - c\psi) , \\ 0 = \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \theta \frac{d\psi}{dz} + \psi(a - b\phi - \psi) , \end{cases} \quad (1.6)$$

考慮(1.6)的邊界條件

$$(\phi, \psi)(-\infty) = (0, a) , \quad (\phi, \psi)(+\infty) = (1, 0) , \quad (1.7)$$



根據 *Rodrigo* 和 *Mimura* [6] 的理論可以找到(1.6)的行波解 $(\phi, \psi)$ 使得 $a, b, c$ 滿足雙穩態條件。

本文結構如下：第二節我們考慮兩個物種的行波解，利用[6]的公式得出 $(u, w)$ 和 $(v, w)$ 有相同速度的條件，在第三節我們回顧弱交互作用的結果(見[1])。第四節藉由matlab做數值分析，改變其影響因素，觀察三物種競爭模型是否有穩定的行波解形成。

## 2 兩物種行波交互作用

文獻[1]用兩物種的行波解去”黏”(gluing bifurcation)出三物種的行波解，及兩物種行波解”弱交互作用”。

根據Ei [3]的定理，我們定義兩物種 $(v,w)$ 和 $(u,w)$ 之間當 $t = 0$ 時距離很遠時，在 $t > 0$ 後的互相影響，稱為弱交互作用。

首先我們考慮(1.3)，如果 $u \equiv 0$ ，則(1.3)變為兩物種 $(v,w)$ 的行波方程式：

$$\begin{cases} d_v v'' + cv' + v(r_2 - v - c_{23}w) , \\ d_w w'' + cw' + w(r_3 - c_{32}v - w) , \end{cases} \quad (2.1)$$

由 Kan-on [5]的結果，固定 $d_v$ 和 $d_w$ ，如果

$$\frac{1}{c_{32}} < \frac{r_2}{r_3} < c_{23} , \quad (2.2)$$

則存在兩物種行波解 $(v_0, w_L)$ ，速度為 $c_1$ ，滿足邊界條件

$$(v_0, w_L)(-\infty) = (r_2, 0) , \quad (v_0, w_L)(+\infty) = (0, r_3) . \quad (2.3)$$

如果 $v \equiv 0$ ，我們也可以由(1.3)推導出兩物種 $(u,w)$ 的行波方程式：

$$\begin{cases} u'' + cu' + u(1 - u - c_{13}w) = 0 , \\ d_w w'' + cw' + w(r_3 - c_{31}u - w) = 0 , \end{cases} \quad (2.4)$$

固定 $d_w$ ，如果

$$\frac{1}{c_{13}} < r_3 < c_{31} , \quad (2.5)$$

則存在兩物種行波解 $(u_0, w_R)$ ，速度為 $c_2$ ，滿足邊界條件

$$(u_0, w_R)(-\infty) = (0, r_3) \quad , \quad (u_0, w_R)(+\infty) = (1, 0) \quad . \quad (2.6)$$

根據(1.6)和(1.7)的假設可以推導出存在兩物種行波解 $(v_0, w_L)$ 和 $(u_0, w_R)$ 。我們加強一些參數的條件，考慮 $u$ 與 $v$ 滿足強競爭作用的假設

$$\frac{1}{c_{12}} < r_2 < c_{21} \quad . \quad (2.7)$$

令

$$P_1 = (0, r_2, 0) \quad , \quad P_2 = (0, 0, r_2) \quad , \quad P_3 = (1, 0, 0) \quad .$$

根據這些條件，我們有以下的結果。

**Proposition 2.1.** 利用文獻[5]的結果(1)當 $c_{32}, r_2, c_{23}, r_3$ 滿足(2.2)，(1.1)有三物種行波解 $\Phi_1(z) := (0, v_0, w_L)(z)$ 滿足(2.3)，速度為 $c_1$ ，且

$$\Phi_1(-\infty) = P_1 \quad , \quad \Phi_1(+\infty) = P_2 \quad . \quad (2.8)$$

(2) 當 $c_{13}, r_3, c_{31}$ 滿足(2.5)，(1.1)有三物種行波解 $\Phi_2(z) := (u_0, 0, w_R)(z)$ 滿足(2.6)，速度 $c_2$ ，且

$$\Phi_2(-\infty) = P_2 \quad , \quad \Phi_2(+\infty) = P_3 \quad . \quad (2.9)$$

其中是指(1.1)的解之中有一個分量為0。

我們探討 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 之間的弱交互作用的重要條件是 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 有相同的速度 $c_0$ (見[3])。從兩物種的行波解和Lotka – Volterra兩物種競爭擴散系統，我們可以給定參數 $(r_i, c_{ij})$ 使得 $c_1 = c_2 \triangleq c_0$ 。

**Proposition 2.2.** 給定 $d_v$ 和 $d_w$ ，經過運算可以得到

$$\begin{aligned} \text{當 } c_0 = 0 \quad , \quad r_2 = d_v \quad , \quad r_3 = d_w \quad , \quad c_{31} = 5d_w \quad , \\ c_{32} = 5\frac{d_w}{d_v} \quad , \quad c_{23} = 5\frac{d_v}{d_w} \quad , \quad c_{13} = \frac{5}{d_w} \quad , \end{aligned}$$

且對任意的 $c_{12}$ ， $c_{21}$  滿足 $c_{21} > 2d_v$ ， $c_{12} > \frac{2}{d_v}$ ，

可分別得到

$$\Phi_1(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ w_L \end{pmatrix} (z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d_v}{4} \left(1 - \tanh \frac{z}{2}\right)^2 \\ \frac{d_w}{4} \left(1 + \tanh \frac{z}{2}\right)^2 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\Phi_2(z) = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ w_R \end{pmatrix} (z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(1 + \tanh \frac{z}{2}\right)^2 \\ 0 \\ \frac{d_w}{4} \left(1 - \tanh \frac{z}{2}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

滿足(2.8)和(2.9)。

**證明** 根據兩物種 $(V, W)$ 行波方程，可知 $(v_0, w_L)$ 滿足(2.1)：

$$\begin{cases} d_v v_0'' + c_1 v_0' + v_0(r_2 - v_0 - c_{23} w_L) = 0 \quad , \\ d_w w_L'' + c_1 w_L' + w_L(r_3 - c_{32} v_0 - w_L) = 0 \quad . \end{cases} \quad (2.12)$$

爲了使用[6]的方程(1.6)，令 $v_0(z) = PV(qz)$ ， $w_L(z) = rW(qz)$ ，其中 $qz = y$ ，而 $P, r, q$ 爲待定之常數，則

$$(V, W)(-\infty) = \left(\frac{r_2}{P}, 0\right), \quad (V, W)(+\infty) = \left(0, \frac{r_3}{r}\right),$$

$$v_0'(z) = Pq\dot{V} \quad , \quad v_0''(z) = Pq^2\ddot{V} \quad , \quad (2.13)$$

$$w_L'(z) = rq\dot{W} \quad , \quad w_L''(z) = rq^2\ddot{W} \quad . \quad (2.14)$$

將(2.13)和(2.14)帶入(2.12)得，

$$d_w r q^2 \ddot{W} + c_1 r q \dot{W} + r W (r_3 - c_{32} P V - r W) = 0 \quad (2.15)$$

$$d_v P q^2 \ddot{V} + c_1 P q \dot{V} + P V (r_2 - P V - c_{23} r W) = 0 \quad (2.16)$$

將(2.15)除  $d_w r q^2$  得

$$\ddot{W} + \frac{c_1}{d_w q} \dot{W} + W \left( \frac{r_3}{d_w q^2} - \frac{r}{d_w q^2} W - \frac{c_{32} P}{d_w q^2} V \right) = 0 \quad (2.17)$$

爲了使  $\frac{r_3}{d_w q^2} = 1 \Rightarrow q^2 = \frac{r_3}{d_w} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{r_3}{d_w}}$ ，且  $\frac{r}{d_w q^2} = 1 \Rightarrow$

$r = d_w q^2 = d_w \frac{r_3}{d_w} \Rightarrow r = r_3$ ，所以  $\frac{c_1}{d_w q} = \frac{c_1}{d_w \sqrt{\frac{r_3}{d_w}}} = \frac{c_1}{\sqrt{d_w r_3}}$ 。

將(2.16)除以  $P$  得

$$\frac{d_v q^2}{P} \ddot{V} + \frac{c_1 q}{P} \dot{V} + V \left( \frac{r_2}{P} - \frac{c_{23} r}{P} W - V \right) = 0 \quad (2.18)$$

比較(2.15)的  $\dot{W}$  項和(2.16)的  $\dot{V}$  項，得  $\frac{c_1 q}{P} = \frac{c_1}{d_w q} \Rightarrow P = d_w q^2 = d_w \frac{r_3}{d_w} =$

$r_3$ ，所以  $P = r_3 = r$ ， $q = \sqrt{\frac{r_3}{d_w}}$ ，

$$v_0(z) = P V(qz) = r_3 V \left( \sqrt{\frac{r_3}{d_w}} z \right) \quad (2.19)$$

$$w_L(z) = r W(qz) = r_3 W \left( \sqrt{\frac{r_3}{d_w}} z \right) \quad (2.20)$$

且  $\frac{P}{d_w q^2} = \frac{r_3}{d_w \frac{r_3}{d_w}} = 1$  ,  $\frac{d_v q^2}{P} = \frac{d_v}{r_3} \cdot \frac{r_3}{d_w}$  , 將(2.17)和(2.18)改寫為

$$\begin{cases} \ddot{W} + \frac{c_1}{\sqrt{d_w r_3}} \dot{W} + W(1 - W - c_{32}V) = 0 , \\ \frac{d_v}{d_w} \ddot{V} + \frac{c_1}{\sqrt{r_3 d_w}} \dot{V} + V \left( \frac{r_2}{r_3} - c_{23}W - V \right) = 0 , \end{cases} \quad (2.21)$$

因為在[6]之中，方程的形式為

$$\begin{cases} U'' + sU' + U(1 - U - cV) = 0 , \\ dV'' + sV' + V(a - bU - V) = 0 . \end{cases} \quad (2.22)$$

比較(2.21)和(2.22)可得

$$c = c_{32} , \quad s = \frac{c_1}{\sqrt{d_w r_3}} , \quad a = \frac{r_2}{r_3} , \quad b = c_{23} . \quad (2.23)$$

由[6]，當

$$b = 5 + 5a - ac , \quad d = \frac{5 + 6a - ac}{1 + ac} , \quad s = \frac{-5 + ac}{\sqrt{6 + 6ac}} ,$$

可得到

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{1 + ac}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2 , \\ V(z) &= \frac{a}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{1 + ac}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2 . \end{aligned} \quad (2.24)$$

由(2.23)可得，

$$\begin{aligned} b &= 5 + 5 \frac{r_2}{r_3} - \frac{r_2}{r_3} c_{32} = \frac{5r_3 + 5r_2 - c_{32}r_2}{r_3} , \\ d &= \frac{5 + 6 \frac{r_2}{r_3} - \frac{r_2}{r_3} c_{32}}{1 + \frac{r_2}{r_3} c_{32}} = \frac{5r_3 + 6r_2 - r_2 c_{32}}{r_3 + r_2 c_{32}} = \frac{d_v}{d_w} , \\ s &= \frac{-5 + \frac{r_2}{r_3} c_{32}}{\sqrt{6 + 6 \frac{r_2}{r_3} c_{32}}} = \frac{-5r_3 + r_2 c_{32}}{\sqrt{6r_3^2 + 6r_2 r_3 c_{32}}} , \end{aligned}$$

代入(2.24)可得

$$\begin{cases} W(z) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{1+ac}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{r_3 + r_2 c_{32}}}{2\sqrt{6}r_3} z \right) \right]^2, \\ V(z) = \frac{a}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{1+ac}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2 = \frac{r_2}{4r_3} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{r_3 + r_2 c_{32}}}{2\sqrt{6}r_3} z \right) \right]^2. \end{cases} \quad (2.25)$$

由(2.9)，(2.20)，

$$\begin{cases} w_L = rW(qz) = \frac{r_3}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{r_3 + r_2 c_{32}}}{2\sqrt{6}r_3} \sqrt{\frac{r_3}{d_w}} z \right) \right]^2, \\ v_0 = PV(qz) = \frac{r_2}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{r_3 + r_2 c_{32}}}{2\sqrt{6}r_3} \sqrt{\frac{r_3}{d_w}} z \right) \right]^2. \end{cases} \quad (2.26)$$

用相同方法，因為 $(u_0, w_R)$ 滿足(2.4)：

$$\begin{cases} u_0'' + c_2 u_0' + u_0(1 - u_0 - c_{13}w_R) = 0, \\ d_w w_R'' + c_2 w_R' + w_R(r_3 - c_{31}u_0 - w_R) = 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

$$(u_0, w_R)(-\infty) = (0, r_3), \quad (u_0, w_R)(\infty) = (1, 0),$$

和(2.22)比較，可得到

$$d = \frac{5 + 6r_3 - r_3 c_{13}}{1 + r_3 c_{13}} = d_w,$$

$$b = 5 + 5r_3 - r_3 c_{13} = c_{31},$$

$$s = \frac{-5 + r_3 c_{13}}{\sqrt{6} + 6r_3 c_{13}} = c_2.$$

代入(2.24)，可得

$$\begin{cases} U(z) = u_0 = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{1+ac}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{1+r_3 c_{13}}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2, \\ V(z) = w_R = \frac{a}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{1+ac}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2 = \frac{r_3}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{1+r_3 c_{13}}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2. \end{cases} \quad (2.28)$$

假設 $c_1 = c_2 = 0$ ，則

$$\left( \frac{-5r_3 + r_2c_{32}}{\sqrt{6r_3^2 + 6r_2r_3c_{32}}} \right) \sqrt{d_w r_3} = \frac{-5 + r_3c_{13}}{\sqrt{6 + 6r_3c_{13}}} = 0, \quad (2.29)$$

令 $k = r_2c_{32}$ ， $h = r_3c_{13}$ ，由(2.29)可得

$$\left( \frac{-5r_3 + k}{\sqrt{6r_3^2 + 6r_3k}} \right) \sqrt{d_w r_3} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{-5 + h}{\sqrt{6 + 6h}} = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{d_v}{d_w} = \frac{5r_3 + 6r_2 - r_2c_{32}}{r_3 + r_2c_{32}} = \frac{5r_3 + 6r_2 - k}{r_3 + k}, \quad (2.32)$$

$$d_w = \frac{5 + 6r_3 - r_3c_{13}}{1 + r_3c_{13}} = \frac{5 + 6r_3 - h}{1 + h}, \quad (2.33)$$

由(2.31)知 $h = 5$ ，由(2.30)知 $k = 5r_3$ ，並將它代回(2.32)和(2.33)，可得：

$$\frac{d_v}{d_w} = \frac{5r_3 + 6r_2 - 5r_3}{r_3 + 5r_3} = \frac{r_2}{r_3}, \quad (2.34)$$

$$d_w = \frac{5 + 6r_3 - 5}{1 + 5} = r_3, \quad (2.35)$$

將(2.35)代入(2.34)得 $\frac{d_v}{r_3} = \frac{r_2}{r_3} \Rightarrow d_v = r_2$ ，所以

$$k = r_2c_{32} \Rightarrow c_{32} = \frac{5d_w}{d_v},$$

$$h = r_3c_{13} \Rightarrow c_{13} = \frac{5}{d_w},$$

$$c_{23} = \frac{5r_3 + 5r_2 - c_{32}r_2}{r_3} = \frac{5d_w + 5d_v - 5d_w}{d_w} = \frac{5d_v}{d_w},$$

$$c_{31} = 5 + 5r_3 - r_3c_{13} = 5 + 5d_w - 5 = 5d_w,$$



$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{r_2}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{r_3 + r_2 c_{32}}}{2\sqrt{6}r_3} \times \sqrt{\frac{r_3}{d_w}} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{d_v}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{z}{2} \right) \right]^2 , \\
w_L &= \frac{r_3}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{r_3 + r_2 c_{32}}}{2\sqrt{6}r_3} \times \sqrt{\frac{r_3}{d_w}} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{d_w}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{d_w + 5d_w}}{2\sqrt{6}d_w} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{d_w}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{z}{2} \right) \right]^2 , \\
u_0 &= \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{1 + r_3 c_{13}}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{1}{2} z \right) \right]^2 , \\
w_R &= \frac{r_3}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{1 + r_3 c_{13}}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{d_w}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{z}{2} \right) \right]^2 ,
\end{aligned}$$

分別可得到(2.10)和(2.11)。

以下證明 $c_{21} > 2d_v$ ， $c_{12} > \frac{2}{d_v}$ ：

根據[1]，將(1.3)對 $P_1(0, r_2, 0)$ 作線性化，可得到特徵方程式(characteristic polynomials)：

$$\begin{cases} \alpha^2 + c_0\alpha + 1 - c_{12}r_2 & = 0 , \\ d_v\alpha^2 + c_0\alpha - r_2 & = 0 , \\ d_w\alpha^2 + c_0\alpha + r_3 - c_{32}r_2 & = 0 , \end{cases} \quad (2.36)$$

分別可得特徵解

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_u^{1,\pm} := \frac{-c_0 \pm \sqrt{c_0^2 - 4(1 - c_{12}r_2)}}{2}, \\ \lambda_v^{1,\pm} := \frac{-c_0 \pm \sqrt{c_0^2 + 4d_v r_2}}{2d_v}, \\ \lambda_w^{1,\pm} := \frac{-c_0 \pm \sqrt{c_0^2 - 4d_w(r_3 - c_{32}r_2)}}{2d_w}, \end{array} \right. \quad (2.37)$$

且我們需要  $\lambda_u^{1,-} < \max\{\lambda_v^{1,-}, \lambda_w^{1,-}\} < 0 < \min\{\lambda_v^{1,+}, \lambda_w^{1,+}\} < \lambda_u^{1,+}$  (見[1]) :

(1) 因為  $\lambda_u^{1,-} < \lambda_w^{1,-}$  (同理,  $\lambda_u^{1,+} < \lambda_w^{1,+}$ ), 由特徵方程解得

$$\begin{aligned} \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4(1 - c_{12}r_2)}}{2} &< \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4d_w(r_3 - c_{32}r_2)}}{2d_w} \\ \Rightarrow \frac{-\sqrt{-4(1 - c_{12}d_v)}}{2} &< \frac{-\sqrt{-4d_w(d_w - 5d_w)}}{2d_w} \\ \Rightarrow \sqrt{4(c_{12}d_v - 1)} &> 4 \Rightarrow c_{12}d_v - 1 > 4 \\ \Rightarrow c_{12} &> \frac{5}{d_v} \end{aligned}$$

(2) 因為  $\lambda_u^{1,-} < \lambda_v^{1,-}$  (同理,  $\lambda_u^{1,+} < \lambda_v^{1,+}$ ), 由特徵方程解得

$$\begin{aligned} \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4(1 - c_{12}r_2)}}{2} &< \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 + 4d_v r_2}}{2d_v} \\ \Rightarrow -\sqrt{c_{12}r_2 - 1} &< \frac{-\sqrt{r_2}}{\sqrt{d_v}} \\ \Rightarrow c_{12}r_2 - 1 &> \frac{r_2}{d_v} \Rightarrow c_{12} > \frac{1}{r_2} \left(1 + \frac{r_2}{d_v}\right) = \frac{2}{d_v} \\ \Rightarrow c_{12} &> \frac{5}{d_v} \end{aligned}$$

由(1)、(2)可得  $c_{12} > \frac{2}{d_v}$ 。

將  $P_3 = (1, 0, 0)$  帶入(1.3)線性化方程，可得特徵方程式：

$$\begin{cases} \alpha^2 + c_0\alpha - 1 = 0, \\ d_v\alpha^2 + c_0\alpha + r_2 - c_{21} = 0, \\ d_w\alpha^2 + c_0\alpha + r_3 - c_{31} = 0, \end{cases} \quad (2.38)$$

分別可得特徵解

$$\begin{cases} \lambda_u^{3,\pm} := \frac{-c_0 \pm \sqrt{c_0^2 + 4}}{2}, \\ \lambda_v^{3,\pm} := \frac{-c_0 \pm \sqrt{c_0^2 - 4d_v(r_2 - c_{21})}}{2d_v}, \\ \lambda_w^{3,\pm} := \frac{-c_0 \pm \sqrt{c_0^2 - 4d_w(r_3 - c_{31})}}{2d_w}, \end{cases} \quad (2.39)$$

且  $\lambda_v^{3,-} < \max\{\lambda_u^{3,-}, \lambda_w^{3,-}\}, \lambda_u^{3,-} \neq \lambda_w^{3,-}, \min\{\lambda_u^{3,+}, \lambda_w^{3,+}\} < \lambda_v^{3,+}, \lambda_u^{3,+} \neq \lambda_w^{3,+}$   
(見[1])：

(3) 說明  $\lambda_v^{3,-} < \lambda_u^{3,-}$  (同理， $\lambda_u^{3,+} < \lambda_v^{3,+}$ )

$$\begin{aligned} \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 + 4d_v(c_{21} - r_2)}}{2d_v} &< \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 + 4}}{2} \\ \Rightarrow \frac{-\sqrt{4d_v(c_{21} - d_v)}}{d_v} &< -2 \Rightarrow \frac{4(c_{21} - d_v)}{d_v} > 4 \\ &\Rightarrow c_{21} - d_v > d_v \Rightarrow c_{21} > 2d_v \end{aligned}$$

(4) 說明  $\lambda_v^{3,-} < \lambda_w^{3,-}$  (同理， $\lambda_w^{3,+} < \lambda_v^{3,+}$ )

$$\begin{aligned} \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4d_v(r_2 - c_{21})}}{2d_v} &< \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4d_w(r_3 - c_{31})}}{2d_w} \\ \Rightarrow \frac{-\sqrt{-4d_v(d_v - c_{21})}}{2d_v} &< \frac{-\sqrt{-4d_w(-4d_w)}}{2d_w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow d_w \sqrt{-4d_v(d_v - c_{21})} > d_v \sqrt{16d_w^2} \\
&\Rightarrow d_w^2(4d_v c_{21} - 4d_v^2) > 16d_v^2 d_w^2 \Rightarrow c_{21} - d_v > 4d_v \\
&\Rightarrow c_{21} > 5d_v
\end{aligned}$$

由(3)、(4)可得  $c_{21} > 2d_v$ 。

**Proposition 2.3.** 假設  $d_v = d_w = 1$ ，經過運算可以得到

$$\text{當 } r_3 = \alpha \left(\alpha > \frac{1}{3}\right), \quad c_0 = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{2(\alpha + 1)}}, \quad r_2 = A(\alpha) = \frac{\alpha(3\alpha - 1)}{\alpha + 1},$$

$$c_{31} = 3 + 2\alpha, \quad c_{32} = 3 + \frac{2\alpha}{A(\alpha)}, \quad c_{23} = 3 + 2\frac{A(\alpha)}{\alpha}, \quad c_{13} = 3 + \frac{2}{\alpha}, \quad \text{且}$$

對任意的  $c_{12}$ ， $c_{21}$  滿足

$$c_{12} > \frac{1}{A(\alpha)} + \max\left\{1, \frac{1}{A(\alpha)(3\alpha + 1)}\right\}, \quad c_{21} > A(\alpha) + \max\left\{1, \frac{A^2(\alpha)}{3\alpha + A(\alpha)}\right\}$$

分別可得到

$$\Phi_1(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ w_L \end{pmatrix} (z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{A(\alpha)}{4} \left(1 - \tanh \sqrt{\frac{A(\alpha) + \alpha}{8}} z\right)^2 \\ \frac{\alpha}{4} \left(1 + \tanh \sqrt{\frac{A(\alpha) + \alpha}{8}} z\right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$$\Phi_2(z) = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ w_R \end{pmatrix} (z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left( 1 + \tanh \sqrt{\frac{1+\alpha}{8}} z \right)^2 \\ 0 \\ \frac{\alpha}{4} \left( 1 - \tanh \sqrt{\frac{1+\alpha}{8}} z \right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

滿足(2.8)和(2.9)

根據以上的結果，在一個非空集合內，可以知道存在有相同速度 $c_0$ 的 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 。

**證明** 根據Proposition 2.2 的證明，假設 $d_v = d_w = 1$ ，且 $c_1 = c_2$ ，可得

$$d_w = \frac{5 + 6r_3 - r_3c_{13}}{1 + r_3c_{13}} = 1 \quad , \quad (2.42)$$

$$\frac{d_v}{d_w} = \frac{5r_3 + 6r_2 - r_2c_{32}}{r_3 + r_2c_{32}} = 1 \quad , \quad (2.43)$$

$$c_1 = \frac{-5r_3 + r_2c_{32}}{\sqrt{6r_3^2 + 6r_2r_3c_{32}}} \times \sqrt{d_w r_3} = \frac{-5 + r_3c_{13}}{\sqrt{6 + 6r_3c_{13}}} \quad , \quad (2.44)$$

令 $r_3c_{13} = k$ ， $r_2c_{32} = h$ ， $r_3 = \alpha$ ，由(2.43)可得

$$\frac{5\alpha + 6r_2 - h}{\alpha + h} = 1 \Rightarrow h = 2\alpha + 3r_2 \quad , \quad (2.45)$$

因此

$$r_2c_{32} = 2\alpha + 3r_2 \quad , \quad (2.46)$$

由(2.42)可得

$$\frac{5 + 6\alpha - k}{1 + k} = 1 \Rightarrow k = 2 + 3\alpha \quad , \quad (2.47)$$

因此

$$r_3 c_{13} = 2 + 3\alpha , \quad (2.48)$$

將(2.48)代回(2.44)

$$\frac{-3\alpha + 3r_2}{\sqrt{18\alpha^2 + 18\alpha r_2}} \times \sqrt{\alpha} = \frac{-3 + 3\alpha}{\sqrt{18 + 18\alpha}} ,$$

兩邊同時平方可得

$$\frac{(-3\alpha + 3r_2)^2 \alpha}{18\alpha^2 + 18\alpha r_2} = \frac{(-3 + 3\alpha)^2}{18 + 18\alpha} ,$$

$$(\alpha^3 - 2\alpha^2 r_2 + \alpha r_2^2)(1 + \alpha) = (\alpha^2 - 2\alpha + 1)(\alpha^2 + \alpha r_2) ,$$

$$\alpha(1 + \alpha)r_2^2 - \alpha(3\alpha^2 + 1)r_2 + \alpha^2(3\alpha - 1) = 0 ,$$

$$[(1 + \alpha)r_2 - \alpha(3\alpha - 1)](r_2 - 1) = 0 ,$$

$$r_2 = \frac{\alpha(3\alpha - 1)}{1 + \alpha} , r_2 = 1(\text{不合}) .$$

令  $r_2 = A(\alpha) = \frac{\alpha(3\alpha - 1)}{1 + \alpha}$ , 得

$$s = c_1 = c_2 = \frac{-5 + (2 + 3\alpha)}{\sqrt{6 + 6(2 + 3\alpha)}} = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{2(\alpha + 1)}} ,$$

由(2.48)可知  $r_3 c_{13} = 2 + 3\alpha \Rightarrow c_{13} = \frac{2 + 3\alpha}{\alpha} = 3 + \frac{2}{\alpha}$  ,

由(2.46)可知  $r_2 c_{32} = 2\alpha + 3r_2 \Rightarrow c_{32} = \frac{2\alpha}{r_2} + 3 = \frac{2\alpha}{A(\alpha)} + 3$  ,

$$c_{31} = 5 + 5r_3 - r_3 c_{13} = 5 + 5\alpha - (2 + 3\alpha) = 3 + 2\alpha ,$$

$$\begin{aligned} c_{23} &= \frac{5r_3 + 5r_2 - c_{32}r_2}{r_3} = \frac{5\alpha + 5A(\alpha) - (2\alpha + 3A(\alpha))}{\alpha} \\ &= \frac{3\alpha + 2A(\alpha)}{\alpha} = 3 + \frac{2A(\alpha)}{\alpha} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{r_2}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{r_3 + r_2 c_{32}}}{2\sqrt{6}r_3} qz \right) \right]^2 \\
&= \frac{A(\alpha)}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{\alpha + 2\alpha + 3A(\alpha)}}{2\sqrt{6\alpha}} \times \sqrt{\frac{\alpha}{1}} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{A(\alpha)}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{\alpha + A(\alpha)}}{8} z \right) \right]^2, \\
w_L &= \frac{r_3}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{r_3 + r_2 c_{32}}}{2\sqrt{6}r_3} qz \right) \right]^2 \\
&= \frac{\alpha}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{\alpha + 2\alpha + 3A(\alpha)}}{2\sqrt{6\alpha}} \times \sqrt{\frac{\alpha}{1}} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{\alpha}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{\alpha + A(\alpha)}}{8} z \right) \right]^2, \\
u_0 &= \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{1 + r_3 c_{13}}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{1 + 2 + 3\alpha}}{\sqrt{24}} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \sqrt{\frac{1 + \alpha}{8}} z \right) \right]^2, \\
w_R &= \frac{r_3}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{1 + r_3 c_{13}}}{2\sqrt{6}} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{\alpha}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{1 + 2 + 3\alpha}}{\sqrt{24}} z \right) \right]^2 \\
&= \frac{\alpha}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \sqrt{\frac{1 + \alpha}{8}} z \right) \right]^2.
\end{aligned}$$

分別得到(2.40)和(2.41)。

以下證明 $c_{12} > \frac{1}{A(\alpha)} + 1$ ， $c_{21} > A(\alpha) + 1$ ：

由(2.36)、(2.37)和 $\lambda_u^{1,-} < \max\{\lambda_v^{1,-}, \lambda_w^{1,-}\} < 0 < \min\{\lambda_v^{1,+}, \lambda_w^{1,+}\} < \lambda_u^{1,+}$ ：

(1) 因爲 $\lambda_u^{1,-} < \lambda_w^{1,-}$ (同理， $\lambda_u^{1,+} < \lambda_w^{1,+}$ )，由特徵方程解得

$$\begin{aligned} \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4(1 - c_{12}r_2)}}{2} &< \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4d_w(r_3 - c_{32}r_2)}}{2d_w}, \\ \Rightarrow c_0^2 - 4(1 - c_{12}r_2) &> c_0^2 - 4d_w(r_3 - c_{32}r_2), \\ \Rightarrow 1 - c_{12}A(\alpha) &< \alpha - (3 + \frac{2\alpha}{A(\alpha)})A(\alpha), \\ \Rightarrow 1 - c_{12}A(\alpha) &< \alpha - 3A(\alpha) - 2\alpha, \\ \Rightarrow c_{12}A(\alpha) &> 3A(\alpha) + \alpha + 1 \Rightarrow c_{12} > \frac{3A(\alpha) + \alpha + 1}{A(\alpha)}, \end{aligned}$$

(2) 因爲 $\lambda_u^{1,-} < \lambda_v^{1,-}$ (同理， $\lambda_u^{1,+} < \lambda_v^{1,+}$ )，由特徵方程解得

$$\begin{aligned} \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 + 4(c_{12}r_2 - 1)}}{2} &< \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 + 4d_v r_2}}{2d_v}, \\ \Rightarrow c_0^2 + 4(c_{12}r_2 - 1) &> c_0^2 + 4r_2, \\ \Rightarrow c_{12}A(\alpha) - 1 &> A(\alpha) \Rightarrow c_{12} > \frac{A(\alpha) + 1}{A(\alpha)} = \frac{1}{A(\alpha)} + 1. \end{aligned}$$

比較(1)、(2)且 $\frac{3A(\alpha) + \alpha + 1}{A(\alpha)} > \frac{1}{A(\alpha)} + 1$ ，所以 $c_{12} > \frac{1}{A(\alpha)} + 1$ 。

由(2.37)、(2.38)和 $\lambda_v^{3,-} < \max\{\lambda_u^{3,-}, \lambda_w^{3,-}\}$ ， $\lambda_u^{3,-} \neq \lambda_w^{3,-}$ ， $\min\{\lambda_u^{3,+}, \lambda_w^{3,+}\} < \lambda_v^{3,+}$ ， $\lambda_u^{3,+} \neq \lambda_w^{3,+}$ ：



(3) 因爲  $\lambda_v^{3,-} < \lambda_u^{3,-}$  (同理,  $\lambda_v^{3,+} < \lambda_u^{3,+}$ ), 由特徵方程解得

$$\begin{aligned} -c_0 - \sqrt{c_0^2 + 4(c_{21} - r_2)} &< -c_0 - \sqrt{c_0^2 + 4} , \\ \Rightarrow c_0^2 + 4(c_{21} - r_2) &> c_0^2 + 4 . \\ \Rightarrow c_{21} > r_2 + 1 &\Rightarrow c_{21} > A(\alpha) + 1 . \end{aligned}$$

(4) 因爲  $\lambda_v^{3,-} < \lambda_w^{3,-}$  (同理,  $\lambda_v^{3,+} < \lambda_w^{3,+}$ ), 由特徵方程解得

$$\begin{aligned} \frac{-c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4d_v(r_2 - c_{21})}}{2d_v} &< \frac{c_0 - \sqrt{c_0^2 - 4d_w(r_3 - c_{31})}}{2d_w} , \\ \Rightarrow \sqrt{c_0^2 - 4(A(\alpha) - c_{21})} &> \sqrt{c_0^2 - 4(\alpha - 3 - 2\alpha)} , \\ \Rightarrow c_0^2 - 4A(\alpha) + 4c_{21} &> c_0^2 + 4\alpha + 12 , \\ \Rightarrow c_{21} > \alpha + A(\alpha) + 3 . \end{aligned}$$

比較(3)和(4), 且  $\alpha + A(\alpha) + 3 > A(\alpha) + 1$ , 所以取  $c_{21} > A(\alpha) + 1$ 。

### 3 三物種行波的弱交互作用

我們改寫(1.1)為

$$U_t = DU_{xx} + F(U; k) , \quad (3.1)$$

其中  $U = (u, v, w)^T$  ,  $D = \text{diag}(1, d_v, d_w)$  ,  $k$  為參數且  $k \in \{r_2, r_3, c_{ij}\}$  。  $F(U; k)$  是(1.1)的非線性項:

$$\begin{aligned} f_1 &= u(1 - u - c_{12}v - c_{13}w) , \\ f_2 &= v(r_2 - c_{21}u - v - c_{23}w) , \\ f_3 &= w(r_3 - c_{31}u - c_{32}v - w) . \end{aligned}$$

假設存在  $k = k_c$  使得(3.1)存在有相同速度  $c_0$  的  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  (如Figure 3.1)

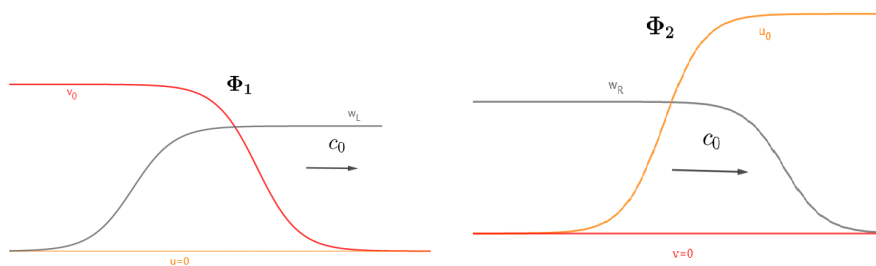


Figure 3.1:

我們希望利用  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  黏出 *Lotka - Volterra* 三物種行波解，如Figure 1.1。根據 *Rodrigo* 和 *Mimura* [6] 的理論結果，我們可以知道當  $c_1 = c_2 = c_0 = 0$  時(詳見 *Proposition 2.2*)和  $d_v = d_w = 1$  時(詳見 *Proposition 2.3*)，存在有速度為  $c_0$  的  $\Phi_1$ ， $\Phi_2$  可得  $k_c$  的存在性。

因爲 $\Phi_1$ 、 $\Phi_2$ 是(1.1)的行波解，所以

$$D\Phi_1'' + c_1\Phi_1' + F(\Phi_1; k) = 0 \quad , \quad (3.2)$$

$$D\Phi_2'' + c_2\Phi_2' + F(\Phi_2; k) = 0 \quad . \quad (3.3)$$

令 $L_j(j = 1, 2)$ 是(3.2)，(3.3)對 $\Phi_j$ 的線性化算子(the linearized operators)，即

$$L_1P = DP'' + c_0P' + \partial_U F(\Phi_1; k_c)P \quad ,$$

$$L_2P = DP'' + c_0P' + \partial_U F(\Phi_2; k_c)P \quad .$$

令

$$L_i^*P = DP'' - c_0P' + \partial_U F(\Phi_i; k_c)^T P \quad ,$$

所以 $L_i^*$ 是 $L_i$ 的伴隨算子(adjoint operator)，令 $\Phi_i^* \in \ker(L_i^*)$ ，即 $L_i^*\Phi_i^* = 0$ 。

令(3.1)的解爲 $U(x, t) = \Phi_1(x - c_0t - b_1(t)) + \Phi_2(x - c_0t - b_2(t)) - (0, 0, r_3)^T + V(x, t)$ ，其中 $b_1(t)$ 是 $\Phi_1$ 的平移， $b_2(t)$ 是 $\Phi_2$ 的平移， $V(x, t)$ 爲小擾動項。

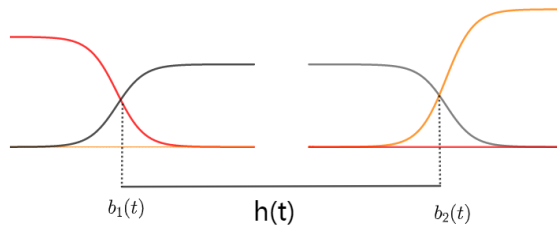


Figure 3.2:  $h(t) = b_2(t) - b_1(t)$

令 $k = k_c + \eta$ 使得

$$F(U; k) = F(U; k_c + \eta) = F(U; k_c) + \eta F_1(U; \eta) \quad . \quad (3.4)$$

令  $h(t) = b_2(t) - b_1(t)$ ，由[1]可以得到

$$h'(t) = M_1 e^{-\beta_- h} - M_2 e^{\alpha_+ h} + c_2 - c_1 + h.o.t := H(h) . \quad (3.5)$$

其中  $\alpha_+ > 0$ 、 $\beta_- > 0$  且  $\mathbf{a}_+^*$ 、 $\mathbf{b}_-^*$ 、 $\mathbf{a}_+$ 、 $\mathbf{b}_-$  為不為零的向量，與  $\Phi_1, \Phi_2$  的漸進行為有關。

$$M_1 := 2\beta_- \langle D\mathbf{b}_-, \mathbf{a}_+^* \rangle + \mathbf{c}_0 \langle \mathbf{b}_-, \mathbf{a}_+^* \rangle ,$$

$$M_2 := 2\alpha_+ \langle D\mathbf{a}_+, \mathbf{b}_-^* \rangle - \mathbf{c}_0 \langle \mathbf{a}_+, \mathbf{b}_-^* \rangle ,$$

$$c_1 = c_0 - \eta \langle F_1(\Phi_1(z); \eta), \Phi_1^*(z) \rangle_{L^2} , \quad (3.6)$$

$$c_2 = c_0 - \eta \langle F_1(\Phi_2(z); \eta), \Phi_2^*(z) \rangle_{L^2} , \quad (3.7)$$

$c_i$  (常數) 為  $\Phi_i$  的速度， $\eta \neq 0$  且非常小。可以清楚的知道當  $\eta = 0$ ， $c_i = c_0$ ， $i = 1, 2$ 。這意味著  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  有相同的速度  $c_0$ 。

**Corollary 3.1.** ([1]) 如果存在  $h_*$  滿足  $h_* > \bar{h}$  且  $H'(h_*) < 0$  ( $> 0$ )，則存在一個常數  $b_*$  且有一個穩定(或不穩定)的行波解  $U_*(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z - h_*) - P_2 + O(\delta(h) + |\eta|)$ ，其中  $P_2 = (0, 0, r_2)$ ， $z = x - c_0 t - \eta b_* t$ ， $\delta(h) \rightarrow 0$  當  $h \rightarrow \infty$ 。

根據 *Corollary 3.1*，可以得出，若  $h' = H(h)$  存在穩定平衡態 (Stable equilibrium)  $h_*$ ，則(1.1)存在穩定三物種行波解，即當  $t \rightarrow \infty$ ，則  $h(t) \rightarrow h_*$ 。若  $h' = H(h)$  存在不穩定平衡 (unstable equilibrium)  $h_*$ ，則(1.1)存在不穩定三物種行波解。

關於  $h$  的行為，有以下八種情況，討論(3.5)是否存在平衡解  $h_*$ ：

令  $f(h) = M_1 e^{-\beta h} - M_2 e^{-\alpha h} + c_2 - c_1$ ，可得  $f'(h) = -\beta M_1 e^{-\beta h} + \alpha M_2 e^{-\alpha h}$ ，

若  $f(h_0) = 0$ ，則

$$M_1 e^{-\beta h_0} - M_2 e^{-\alpha h_0} + c_2 - c_1 = 0, \quad (3.8)$$

$$\Rightarrow M_1 e^{-\beta h_0} = M_2 e^{-\alpha h_0} - (c_2 - c_1), \quad (3.9)$$

將(3.9)帶入  $f'(h_0)$  中，可得

$$f'(h_0) = (-\beta + \alpha)M_2 e^{-\alpha h_0} + \beta(c_2 - c_1). \quad (3.10)$$

1.  $c_2 - c_1 < 0$ ， $M_1 > 0$ ， $M_2 < 0$ ：

(a) 若  $\alpha = \beta$ ：

$$\begin{aligned} f(h_0) &= (M_1 - M_2)e^{-\beta h_0} + c_2 - c_1 = 0 \\ \Rightarrow h_0 &= -\frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{-(c_2 - c_1)}{M_1 - M_2} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

(b) 若  $\alpha > \beta$ ：

$$\begin{aligned} f(h_0) &\sim M_1 e^{-\beta h_0} + c_2 - c_1 = 0 \\ \Rightarrow h_0 &= -\frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{-(c_2 - c_1)}{M_1} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

(c) 若  $\alpha < \beta$ ：

$$\begin{aligned} f(h_0) &\sim -M_2 e^{-\alpha h_0} + c_2 - c_1 = 0 \\ \Rightarrow h_0 &= -\frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{-(c_2 - c_1)}{M_2} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

在(a)、(b)、(c)中，得  $f'(h_0) = -\beta M_1 e^{-\beta h_0} + \alpha M_2 e^{-\alpha h_0} < 0 \Rightarrow h_0$  是穩定。

2.  $c_2 - c_1 < 0$ ,  $M_1 > 0$ ,  $M_2 > 0$  :

(a) 若  $\alpha = \beta$  :

i. 若  $M_1 > M_2$ , 由1(a), 可得 $h_0$ 為(3.11)。

則  $f'(h_0) = \beta(c_2 - c_1) < 0 \Rightarrow h_0$ 是穩定。

ii. 若  $M_1 \leq M_2$   $f(h_0) = c_2 - c_1 < 0 \Rightarrow h_0$ 不存在。

(b) 若  $\alpha < \beta$  :  $f(h_0) \sim -M_2 e^{-\alpha h_0} + c_2 - c_1 < 0 \Rightarrow h_0$ 不存在。

(c) 若  $\alpha > \beta$  : 由1(b), 可得 $h_0$ 為(3.12), 但 $f'(h_0)$ 無法確定正負。

3.  $c_2 - c_1 < 0$ ,  $M_1 < 0$ ,  $M_2 < 0$  :

(a) 若  $\alpha = \beta$  :

i. 若  $M_1 \leq M_2 \Rightarrow f(h_0) < 0 \Rightarrow h_0$ 不存在。

ii. 若  $M_1 > M_2$ , 由1(a), 可得 $h_0$ 為(3.11)。

$f'(h_0) = \beta(c_2 - c_1) < 0 \Rightarrow h_0$ 是穩定。

(b) 若  $\alpha > \beta$  : 但  $f(h_0) \sim M_1 e^{-\beta h_0} + c_2 - c_1 < 0 \Rightarrow h_0$ 不存在。

(c) 若  $\alpha < \beta$  : 由1(c), 可得 $h_0$ 為(3.13),  $f'(h_0)$ 無法確定正負。

4.  $c_2 - c_1 < 0$ ,  $M_1 < 0$ ,  $M_2 > 0$  :

(a) 若  $\alpha = \beta$  :  $f(h_0) = (M_1 - M_2)e^{-\beta h_0} + c_2 - c_1 < 0 \Rightarrow h_0$ 不存在。

(b) 若  $\alpha > \beta$  :  $f(h_0) = -M_2 e^{-\alpha h_0} + c_2 - c_1 < 0 \Rightarrow h_0$ 不存在。

(c) 若  $\alpha < \beta$  : 由1(c), 可得 $h_0$ 為(3.13),  $f'(h_0)$ 無法確定正負。

5.  $c_2 - c_1 > 0$ ,  $M_1 < 0$ ,  $M_2 > 0$  :

(a) 若  $\alpha = \beta$  :

$$f(h_0) = (M_1 - M_2)e^{-\alpha h_0} + c_2 - c_1 = 0 \Rightarrow h_0 = -\frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{-(c_2 - c_1)}{M_1 - M_2} \right) .$$

(b) 若  $\alpha > \beta$  : 由1(b), 可得 $h_0$ 為(3.12)。

(c) 若  $\alpha < \beta$  : 由1(c), 可得 $h_0$ 為(3.13)。

在(a)、(b)、(c)中, 得 $f'(h_0) > 0 \Rightarrow h_0$ 是不穩定。

6.  $c_2 - c_1 > 0$ ,  $M_1 < 0$ ,  $M_2 < 0$  :

(a) 若  $\alpha = \beta$  :

i.  $M_1 \geq M_2 \Rightarrow f(h_0) > 0 \Rightarrow h_0$ 不存在.

ii.  $M_1 < M_2$ , 由1(a), 可得 $h_0$ 為(3.11), 但  $f'(h_0) > 0 \Rightarrow h_0$ 是不穩定。

(b) 若  $\alpha > \beta$  : 由1(b), 可得 $h_0$ 為(3.12), 但 $f'(h_0)$ 無法確定正負。

(c) 若  $\alpha < \beta$  :  $f(h_0) \sim -M_2 e^{-\alpha h_0} + c_2 - c_1 > 0 \Rightarrow h_0$ 不存在.

7.  $c_2 - c_1 > 0$ ,  $M_1 > 0$ ,  $M_2 > 0$  :

(a) 若  $\alpha = \beta$  :

i.  $M_1 \geq M_2 \Rightarrow f(h_0) > 0 \Rightarrow h_0$ 不存在.

ii.  $M_1 < M_2$ , 由1(a), 可得 $h_0$ 為(3.11), 但 $f'(h_0) < 0 \Rightarrow h_0$ 是不穩定。

(b) 若  $\alpha > \beta$  :  $f(h_0) \sim M_1 e^{-\beta h_0} + c_2 - c_1 > 0 \Rightarrow h_0$ 不存在.

(c) 若  $\alpha < \beta$  : 由1(c)可得 $h_0$ 為(3.13), 但 $f'(h_0)$ 無法確定正負。

8.  $c_2 - c_1 > 0, M_1 > 0, M_2 < 0$  :

(a) 若  $\alpha = \beta$  :  $f(h_0) = (M_1 - M_2)e^{-\beta h_0} + c_2 - c_1 > 0 \Rightarrow h_0$ 不存在.

(b) 若  $\alpha > \beta$  :  $f(h_0) \sim -M_2e^{-\alpha h_0} + (c_2 - c_1) > 0 \Rightarrow h_0$ 不存在.

(c) 若  $\alpha < \beta$  : 由1(c), 可得 $h_0$ 為(3.13), 但 $f'(h_0)$ 無法確定正負。

在下一節中, 我們將用數值方法(matlab), 具體看出不穩定的現象, 進而知道 *Proposition 2.2* 和 *Proposition 2.3* 的行波解皆為不穩定。



## 4 數值分析

此篇論文採用chebfun (<https://www.chebfun.org/>)

### 4.1 $d_v = d_w = 1$

**Example 4.1.** 由 *Proposition 2.3* ( $d_w = d_v = 1$ )，取  $\alpha = 1$ ，得出

$A(\alpha) = 1$ 、 $c_0 = 0$ 、 $r_2 = r_3 = 1$ 、 $c_{31} = c_{32} = c_{23} = c_{13} = 5$ ，  
取  $c_{12} = c_{21} = \frac{5}{2}$ ，代入(1.1)得到

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \left( 1 - u - \frac{5}{2}v - 5w \right) \\ v_t = v_{xx} + v \left( 1 - \frac{5}{2}u - v - 5w \right) \\ w_t = w_{xx} + w(1 + \eta - 5u - 5v - w) \end{cases} \quad (4.1)$$

根據邊界條件和初始條件( $U(x, 0) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x - h(0)) - P_2$ )，由(2.10)，(2.11)可得

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{x - h(0)}{2} \right) \right]^2 \\ v(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 \\ w(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 + \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x - h(0)}{2} \right) \right]^2 - 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

由(4.1)知，因 $w$ 的成長率為 $1 + \eta$ ，而 $u$ 和 $v$ 的成長率皆為1，則 $\eta > 0$ 或 $\eta < 0$ 將造成不同的情況，以下分兩個部份來探討。

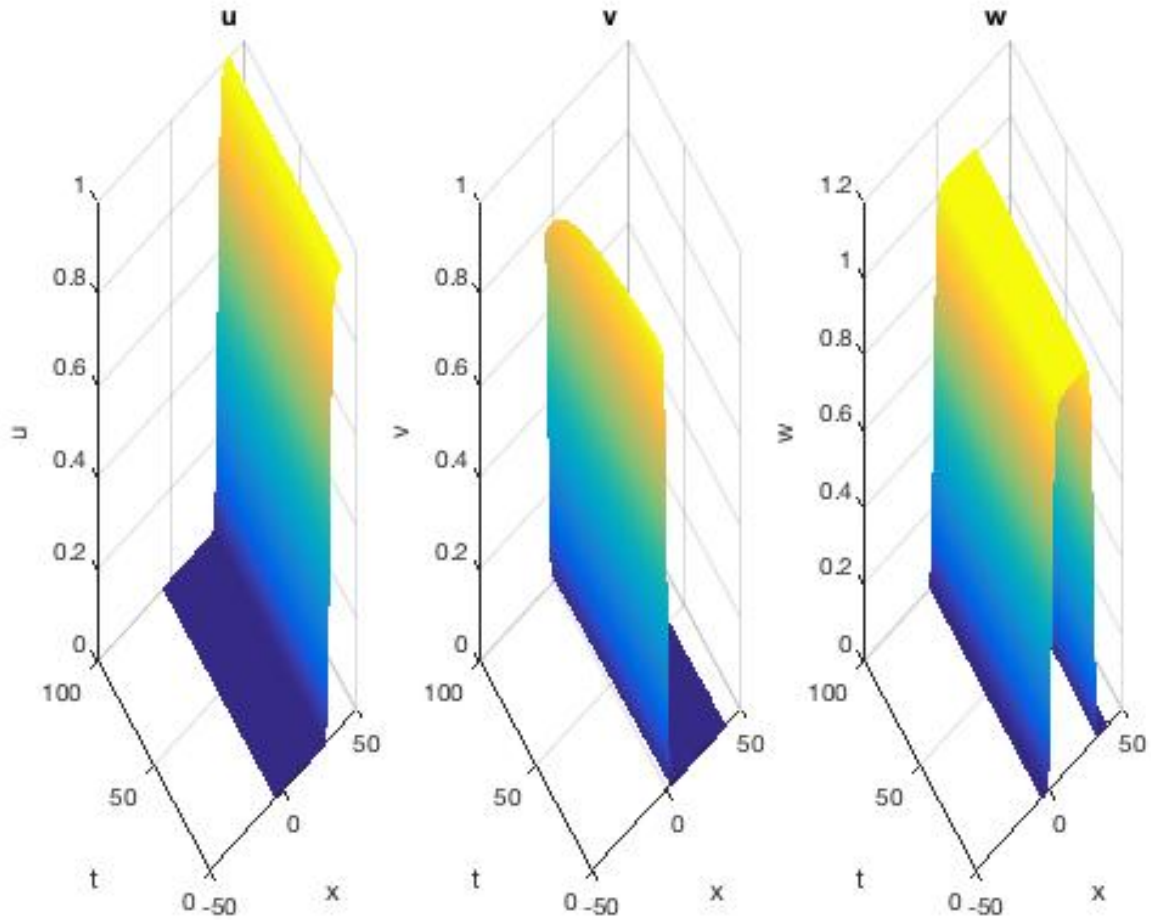


Figure 4.1:  $\eta = 0.02$ ,  $h(0)=30$

在(4.1)中，當 $\eta = 0.02$ ，雖然 $w$ 對 $u$ 和 $v$ 或是 $u$ 和 $v$ 對 $w$ 的傷害都是5，但 $w$ 的成長率比 $u$ 和 $v$ 都要大，所以可以預測 $w$ 的領域會越來越大。而由matlab的數據和Figure4.1，確實 $w$ 的領域逐漸擴大，漸漸佔領 $u$ 和 $v$ 的領域，與我們預期的結果相同，可看出 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 黏出的解為不穩定平衡狀態。

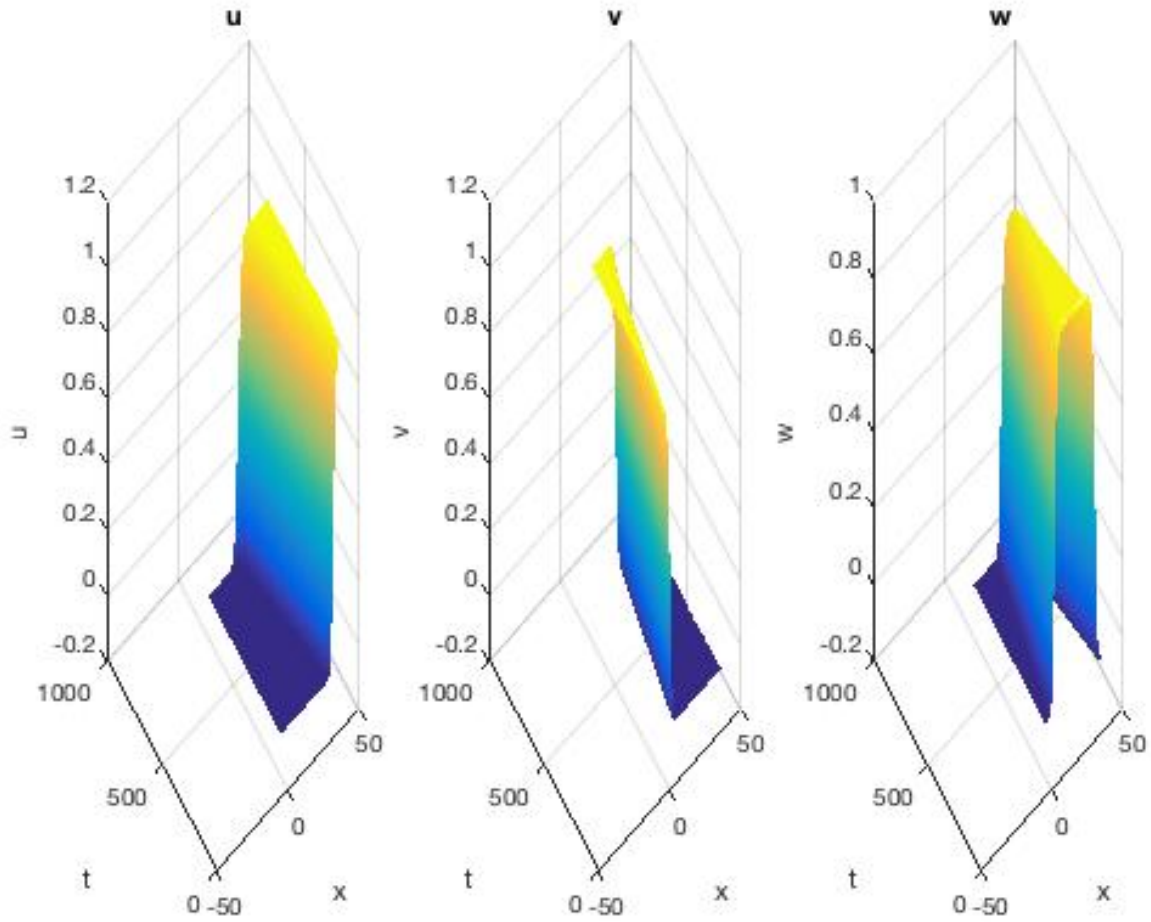


Figure 4.2:  $\eta = -0.02$ ,  $h(0)=30$

在(4.1)中，當 $\eta = -0.02$ ， $w$ 的成長率比 $u$ 和 $v$ 都要小，代表 $u$ 、 $v$ 對 $w$ 的傷害比 $w$ 的成長要來的大，我們預測 $w$ 將會消散，而產生滅絕，藉由matlab的數據分析，在Figure4.2中可以看出 $w$ 會逐漸消散，與我們預期的結果相同，可看出 $\Phi_1$ 和 $\Phi_2$ 黏出的解為不穩定平衡狀態。

**Example 4.2.** 由 *Proposition 2.3* ( $d_w = d_v = 1$ )，令  $\alpha > 1$ ，取  $\alpha = \frac{3}{2} = r_3$  得出

$$r_2 = A(\alpha) = \frac{21}{10}, c_0 = \frac{\sqrt{5}}{10}, c_{31} = 6$$

$$c_{32} = \frac{31}{7}, c_{23} = \frac{29}{5}, c_{13} = \frac{13}{3}$$

取  $c_{12} = \frac{3}{2}, c_{21} = \frac{7}{2}$ ，代入(1.1)得到

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \left( 1 - u - \frac{3}{2}v - \frac{13}{3}w \right) \\ v_t = v_{xx} + v \left( \frac{21}{10} - \frac{7}{2}u - v - \frac{29}{5}w \right) \\ w_t = w_{xx} + w \left( \frac{3}{2} + \eta - 6u - \frac{31}{7}v - w \right) \end{cases} \quad (4.3)$$

根據邊界條件和初始條件( $U(x, 0) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x - h(0)) - P_2$ )，由(2.10)，(2.11)可得

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sqrt{5}}{4}(x - h(0)) \right) \right]^2 \\ v(x, 0) = \frac{21}{40} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{3\sqrt{5}}{10}x \right) \right]^2 \\ w(x, 0) = \frac{3}{8} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{3\sqrt{5}}{10}x \right) \right]^2 + \frac{3}{8} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{\sqrt{5}}{4}(x - h(0)) \right) \right]^2 - \frac{3}{2} \end{cases} \quad (4.4)$$

由(4.3)知，因  $w$  的成長率為  $\frac{3}{2} + \eta$ ，而  $u$  成長率皆為 1， $v$  的成長率為

$\frac{21}{10}$ ，則  $\eta$  取的值不同將造成不同的情況。

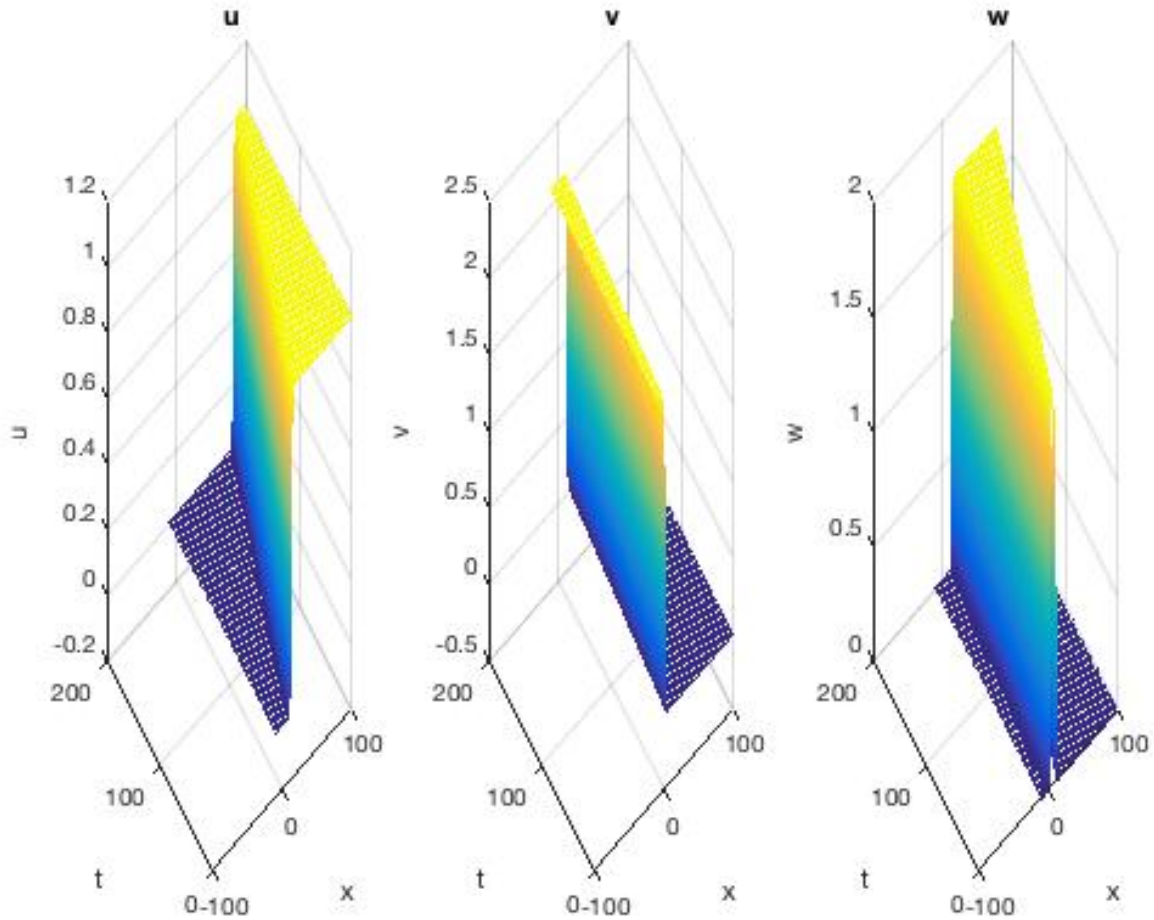


Figure 4.3:  $\eta = 0.02$ ,  $h(0)=30$

在(4.3)中，可以看出， $u$ 對 $w$ 的傷害( $c_{31} = 6$ )比 $w$ 對 $u$ 的傷害( $c_{13} = \frac{13}{3}$ )較大，但 $v$ 對 $w$ 的傷害比 $w$ 對 $v$ 的傷害較小，而在Figure4.3中，當 $\eta = 0.02$ ， $w$ 的成長率比 $v$ 小，但比 $u$ 要大，比較不同物種間的競爭率，由 matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸擴散，並向右移動，而 $u$ 逐漸變小， $v$ 則變化往右，得出 $w$ 會快速的占領 $u$ 的領域。

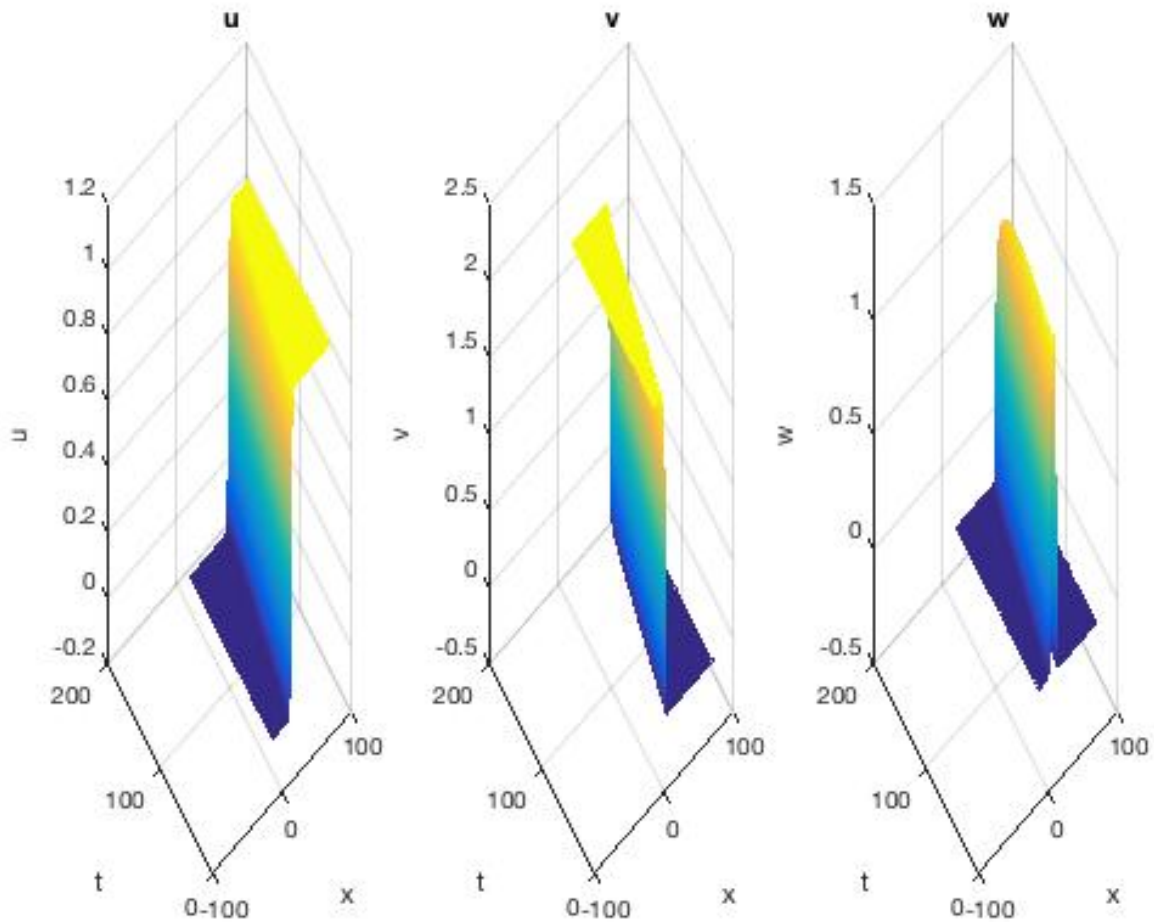


Figure 4.4:  $\eta = -0.02$ ,  $h(0)=10$

在Figure4.4中，當 $\eta = -0.02$ ， $w$ 的成長率比 $v$ 小，但比 $u$ 要大，比較不同物種間的競爭率，感覺會跟Figure4.3相同，但由 matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸消散，而 $u$ 會向右移動， $v$ 則變化較小，得出 $v$ 會快速的占領 $u$ 和 $w$ 的領域，且 $w$ 最後被滅絕。

**Example 4.3.** 由 *Proposition 2.3* ( $d_w = d_v = 1$ )，假設  $\frac{1}{3} < \alpha < 1$ ，取  $\alpha = \frac{2}{3} = r_3$ ，得出

$$r_2 = A(\alpha) = \frac{2}{5} \text{、} \Rightarrow c_{31} = \frac{13}{3}$$

$$c_{32} = \frac{19}{3} \text{、} c_{23} = \frac{21}{5} \text{、} c_{13} = 6$$

取  $c_{12} = 4$ 、 $c_{21} = \frac{8}{5}$ ，代入(1.1)得到

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u(1 - u - 4v - 6w) \\ v_t = v_{xx} + v\left(\frac{2}{5} - \frac{8}{5}u - v - \frac{21}{5}w\right) \\ w_t = w_{xx} + w\left(\frac{2}{5} + \eta - \frac{13}{3}u - \frac{19}{3}v - w\right) \end{cases} \quad (4.5)$$

根據邊界條件和初始條件 ( $U(x, 0) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x - h(0)) - P_2$ )，由(2.10)，(2.11)可得

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh\left(\sqrt{\frac{5}{24}}(x - h(0))\right) \right]^2 \\ v(x, 0) = \frac{1}{10} \left[ 1 - \tanh\left(\frac{2}{\sqrt{15}}x\right) \right]^2 \\ w(x, 0) = \frac{1}{6} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{2}{\sqrt{15}}x\right) \right]^2 + \frac{1}{6} \left[ 1 - \tanh\left(\sqrt{\frac{5}{24}}(x - h(0))\right) \right]^2 - \frac{2}{3} \end{cases} \quad (4.6)$$

由(4.5)知，因  $w$  的成長率為  $\frac{2}{5} + \eta$ ，而  $u$  成長率皆為 1， $v$  的成長率為

$\frac{2}{5}$ ，則  $\eta$  為正數、負數或大於  $\frac{3}{5}$  將造成不同的情況。

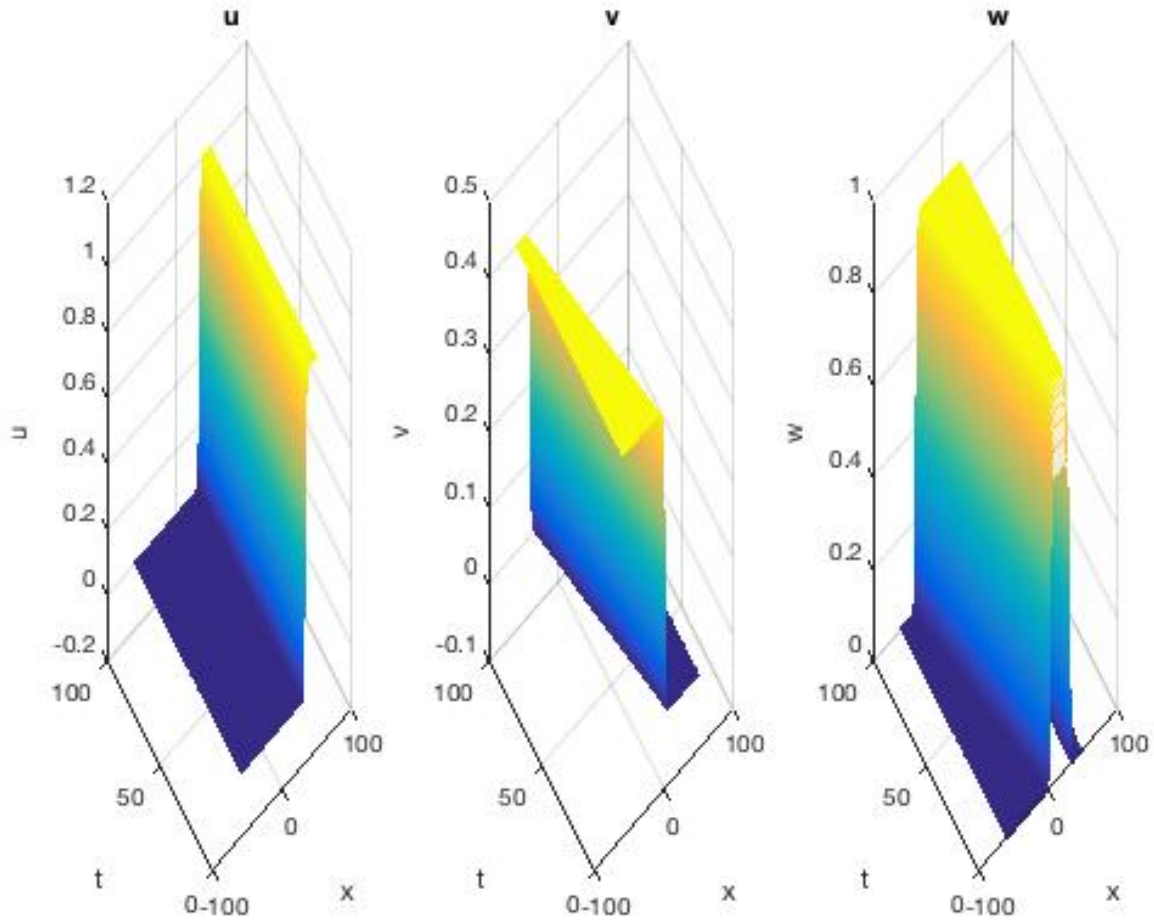


Figure 4.5:  $\eta = 0.2$  ,  $h(0)=30$

在(4.5)中，可以看出， $u$ 對 $w$ 的傷害( $c_{31} = \frac{13}{3}$ )比 $w$ 對 $u$ 的傷害( $c_{13} = 6$ )較小，但 $v$ 對 $w$ 的傷害( $c_{32} = \frac{19}{13}$ )比 $w$ 對 $v$ 的傷害( $c_{23} = \frac{21}{5}$ )較大，在Figure4.5中，當 $\eta = 0.02$ ， $w$ 的成長率比 $v$ 大，但比 $u$ 小，由 matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸擴散，而 $u$ 變化比較小， $v$ 則向左移動，得出 $w$ 會快速的占領 $v$ 的領域。



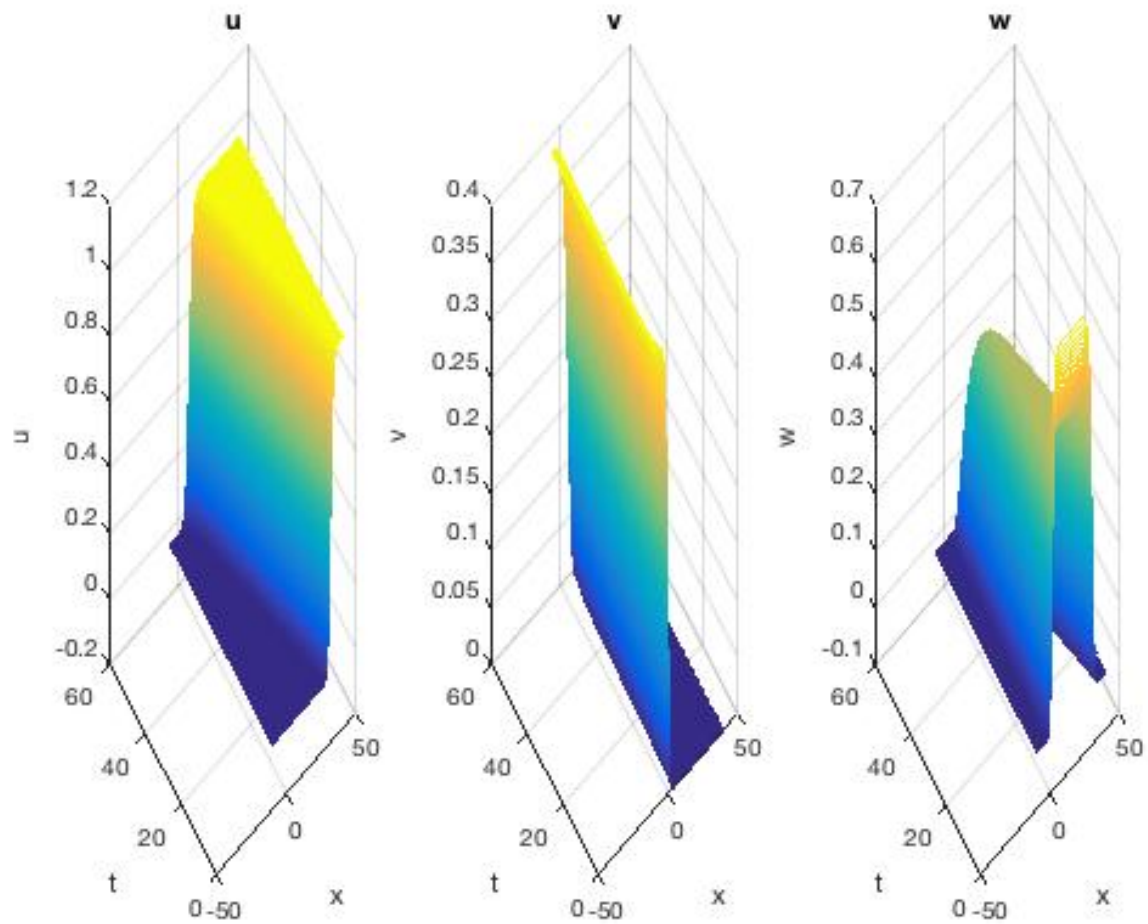


Figure 4.6:  $\eta = -0.2$  ,  $h(0)=30$

Figure4.6，當 $\eta = -0.02$ ， $w$ 的成長率比 $v$ 和 $u$ 都要小，由 matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸消散，而 $u$ 會向左移動， $v$ 則變化較小，得出 $u$ 會快速的占領 $w$ 和 $v$ 的領域，且 $w$ 最後被滅絕。

## 4.2 $c_0 = 0$

**Example 4.4.** 由 *Proposition 2.2* ( $d_w > d_v$ )，且  $r_1 = 1$ 、 $r_2 = 1$ 、 $r_3 = 1.5 + \eta > r_1, r_2$  ( $d_w = 1.5$ 、 $d_v = 1 = r_2$ )，得出

$$c_{31} = 7.5、c_{32} = 7.5、c_{23} = \frac{10}{3}、c_{13} = \frac{10}{3}$$

取  $c_{12} = \frac{5}{2}$ 、 $c_{21} = \frac{5}{2}$ ，帶入(2.1)得到

$$\begin{cases} u_t = & u_{xx} + u \left( 1 - u - \frac{5}{2}v - \frac{10}{3}w \right) \\ v_t = & v_{xx} + v \left( 1 - \frac{5}{2}u - v - \frac{10}{3}w \right) \\ w_t = & 1.5w_{xx} + w(1.5 + \eta - 7.5u - 7.5v - w) \end{cases} \quad (4.7)$$

根據邊界條件和初始條件 ( $U(x, 0) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x - h(0)) - P_2$ )，由(2.40)，(2.41)可得

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{x - h(0)}{2} \right) \right]^2 \\ v(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 \\ w(x, 0) = \frac{1.5}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 + \frac{1.5}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x - h(0)}{2} \right) \right]^2 - 1.5 \end{cases} \quad (4.8)$$

此種情況由於  $v$  和  $w$  空間移動率不同，所取的數值將會連帶影響結果，而 *Example 4.4*，取  $d_w = 1.5$ 、 $d_v = 1$ ，我們討論  $\eta = 0.2$  和  $\eta = -0.2$ ，分開討論由 matlab 所得出的結果。

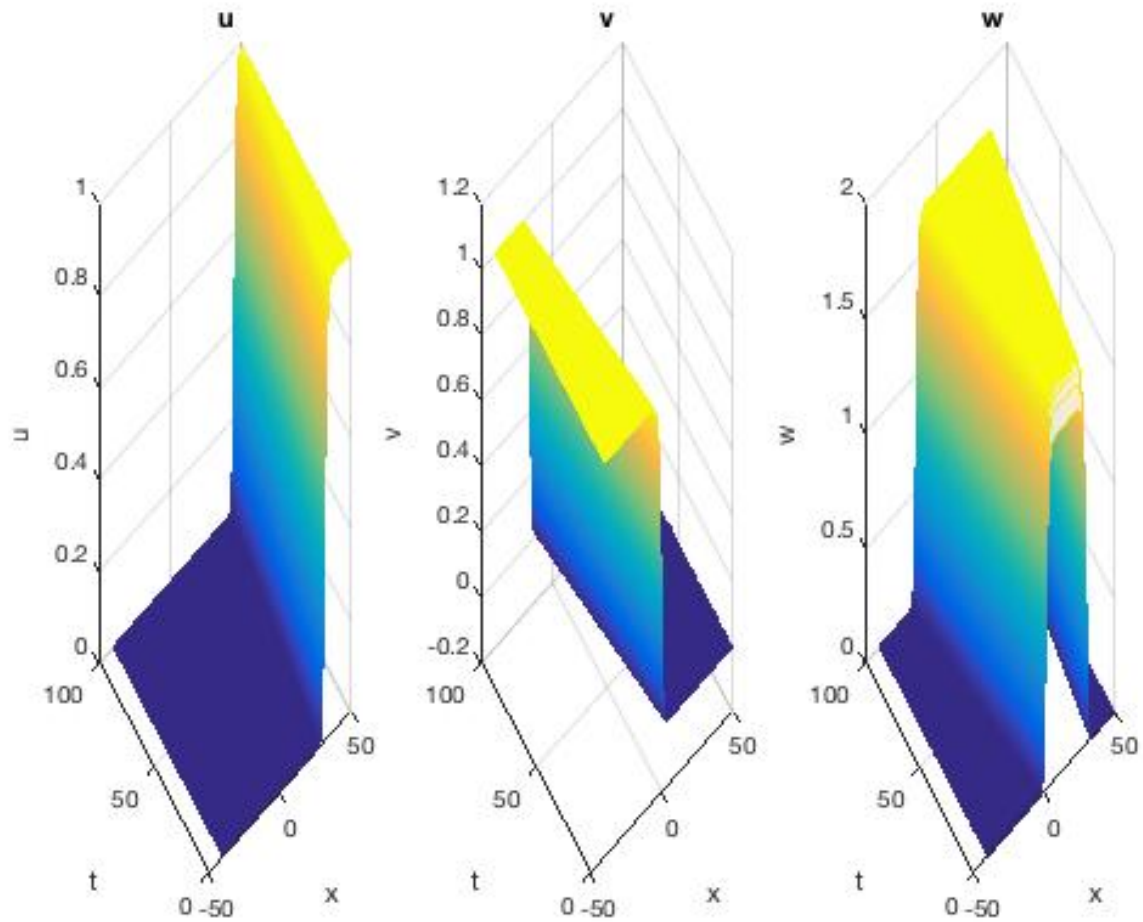


Figure 4.7:  $\eta = 0.2$  ,  $h(0)=30$

在(4.7)中，可以看出 $w$ 對 $u$ 和 $v$ 的傷害比 $u$ 和 $v$ 對 $w$ 的傷害要來的小，由Figure 4.7中，當 $\eta = 0.2$ ， $w$ 的成長率比 $v$ 和 $u$ 皆大，由 matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸擴散，而 $u$ 和 $v$ 則會被壓迫空間，分別向右、左移動，得出 $w$ 會快速的占領 $u$ 和 $v$ 的領域。

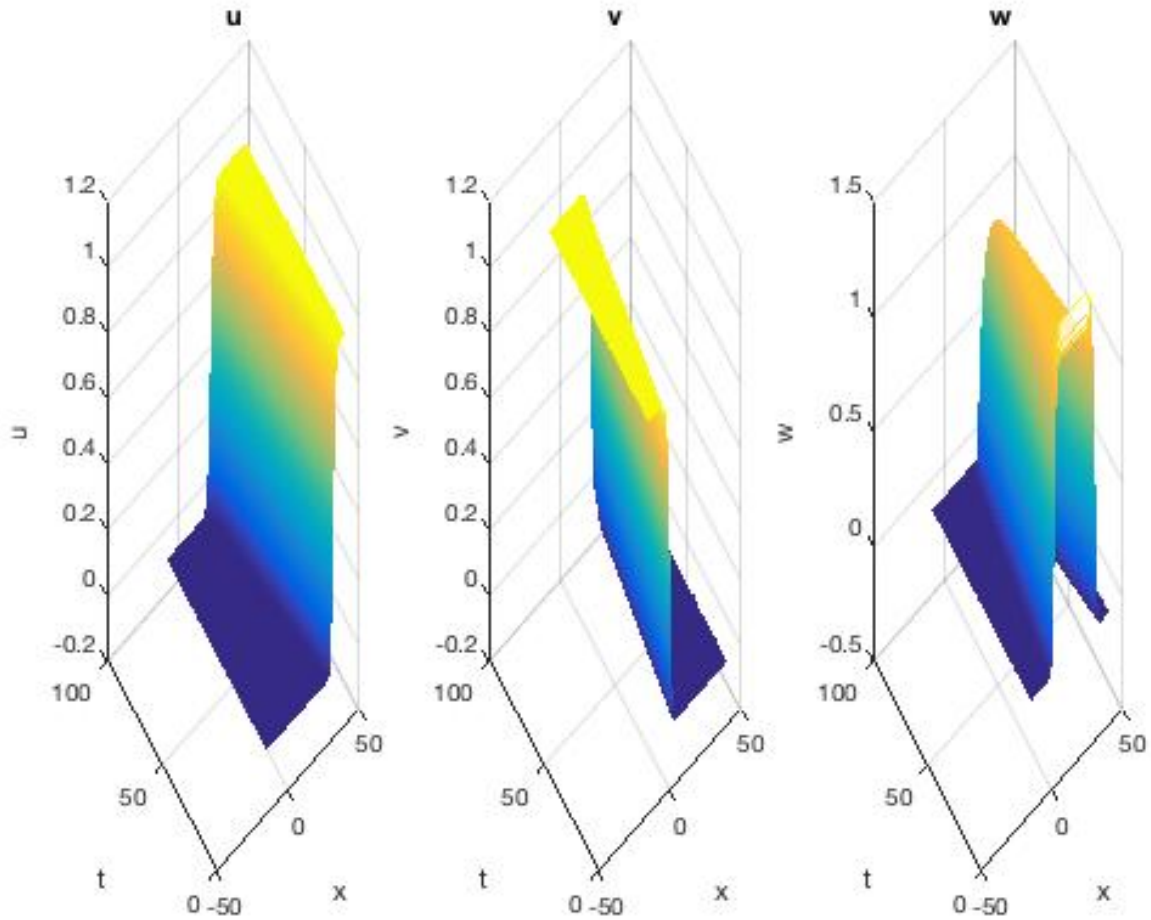


Figure 4.8:  $\eta = -0.2$  ,  $h(0)=30$

在Figure4.8中，當 $\eta = -0.2$ ，雖然 $w$ 的成長率比 $v$ 和 $u$ 都要大，但 matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸消散，得出 $u$ 和 $v$ 會快速的占領 $w$ 的領域，且 $w$ 最後被滅絕，這代表 $u$ 和 $v$ 對 $w$ 的傷害較大，即使 $w$ 的成長率較大也抵不過。

**Example 4.5.** 由 *Proposition 2.2* ( $d_w > d_v$ )，且  $r_1 = 1$ 、 $r_2 = 1$ 、 $r_3 = 1.1 + \eta$  ( $d_w = 1.1$ ， $d_v = 1 = r_2$ )，得出

$$c_{31} = 5.5、c_{32} = 5.5、c_{23} = \frac{50}{11}、c_{13} = \frac{50}{11}$$

取  $c_{12} = \frac{5}{2}$ 、 $c_{21} = \frac{5}{2}$ ，帶入(2.1)得到

$$\begin{cases} u_t = & u_{xx} + u \left( 1 - u - \frac{5}{2}v - \frac{50}{11}w \right) \\ v_t = & v_{xx} + v \left( 1 - \frac{5}{2}u - v - \frac{50}{11}w \right) \\ w_t = & 1.1w_{xx} + w(1.1 + \eta - 5.5u - 5.5v - w) \end{cases} \quad (4.9)$$

根據邊界條件和初始條件( $U(x, 0) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x - h(0)) - P_2$ )，由(2.40)，(2.41)可得

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{x - h(0)}{2} \right) \right]^2 \\ v(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 \\ w(x, 0) = \frac{1.1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 + \frac{1.1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x - h(0)}{2} \right) \right]^2 - 1.1 \end{cases} \quad (4.10)$$

*Example 4.5*，取  $d_w = 1.1$ 、 $d_v = 1$ ，我們討論  $\eta = 0.2$  和  $\eta = -0.2$ ，將造成  $w$  的成長率大於或是小於  $u$  和  $v$ ，分開討論由 matlab 所得出的結果。

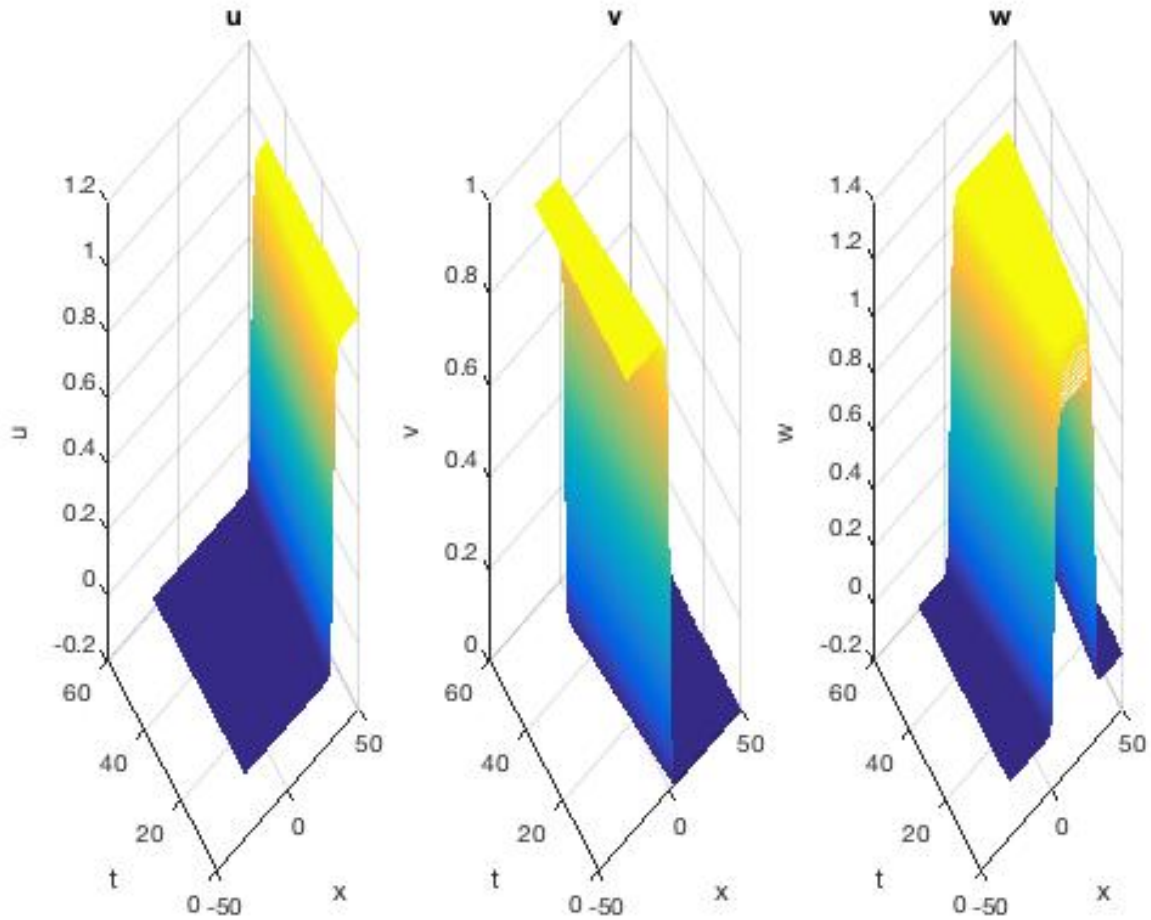


Figure 4.9:  $\eta = 0.2$  ,  $h(0)=30$

在(4.9)中，可以看出 $w$ 對 $u$ 和 $v$ 的傷害比 $u$ 和 $v$ 對 $w$ 的傷害要來的小，由Figure4.9中，當 $\eta = 0.2$ ， $w$ 的成長率比 $v$ 和 $u$ 皆大，由 matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸擴散，而 $u$ 和 $v$ 則會被壓迫空間，分別向右、左移動，得出 $w$ 會快速的占領 $u$ 和 $v$ 的領域。

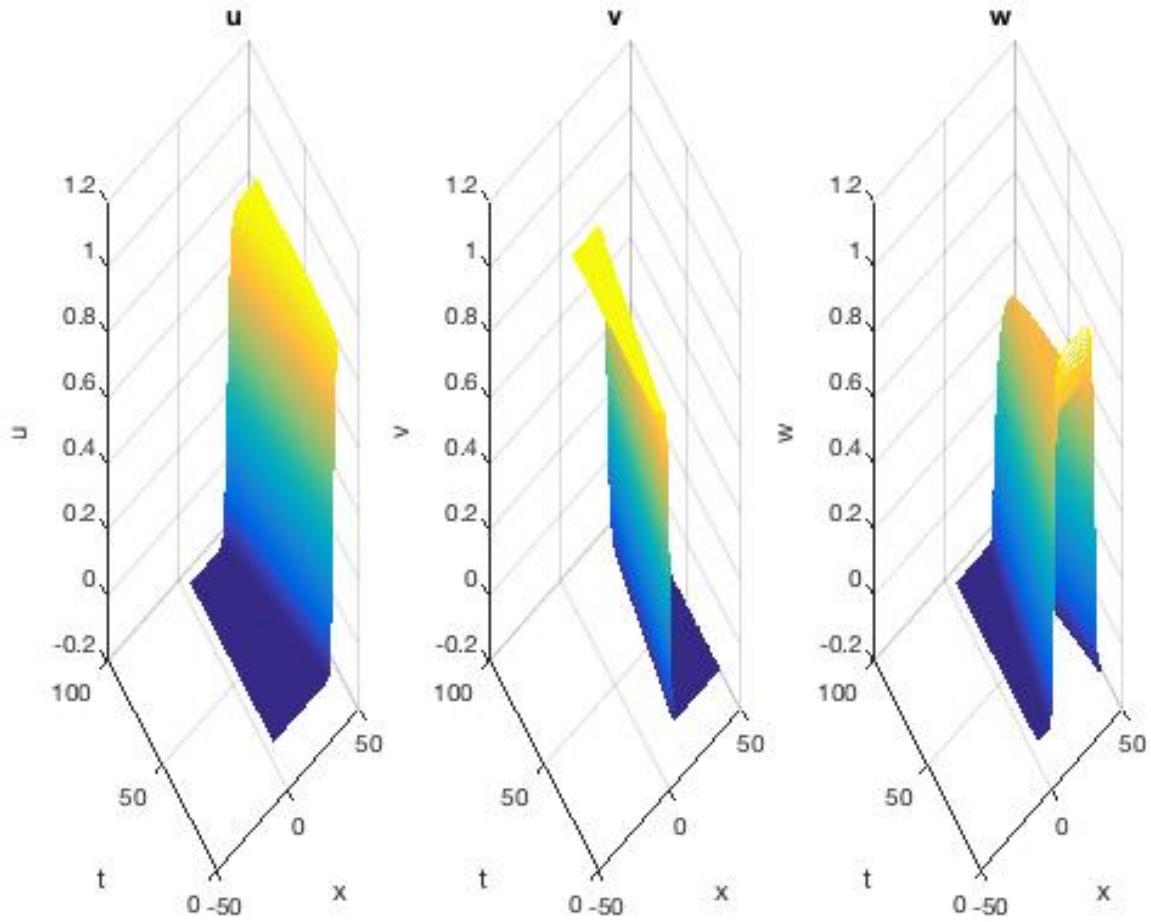


Figure 4.10:  $\eta = -0.2$ ,  $h(0)=30$

在Figure4.9中，當 $\eta = -0.2$ ，雖然 $w$ 的成長率比 $v$ 和 $u$ 都要小，但 matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸消散，得出 $u$ 和 $v$ 會快速的占領 $w$ 的領域，且 $w$ 最後被滅絕。

**Example 4.6.** 由 *Proposition 2.2* ( $d_w < d_v$ )，且  $r_1 = 1$ 、 $r_2 = 1$ 、 $r_3 = 0.5 + \eta$  ( $d_w = 0.5$ ， $d_v = 1 = r_2$ )，得出

$$c_{31} = 2.5、c_{32} = 2.5、c_{23} = 10、c_{13} = 10$$

取  $c_{12} = \frac{5}{2}$ 、 $c_{21} = \frac{5}{2}$ ，帶入(2.1)得到

$$\begin{cases} u_t = & u_{xx} + u \left( 1 - u - \frac{5}{2}v - 10w \right) \\ v_t = & v_{xx} + v \left( 1 - \frac{5}{2}u - v - 10w \right) \\ w_t = & 0.5w_{xx} + w(0.5 + \eta - 2.5u - 2.5v - w) \end{cases} \quad (4.11)$$

根據邊界條件和初始條件( $U(x, 0) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x - h(0)) - P_2$ )，由(2.40)，(2.41)可得

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{x - h(0)}{2} \right) \right]^2 \\ v(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 \\ w(x, 0) = \frac{0.5}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 + \frac{0.5}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x - h(0)}{2} \right) \right]^2 - 0.5 \end{cases} \quad (4.12)$$

*Example 4.6*，取  $d_w = 0.5$ 、 $d_v = 1$ ，我們討論  $\eta = 0.2$  和  $\eta = -0.2$ ，都將造成  $w$  的成長率小於  $u$  和  $v$  ( $\eta$  的值非常小)，討論由 matlab 所得出的結果。



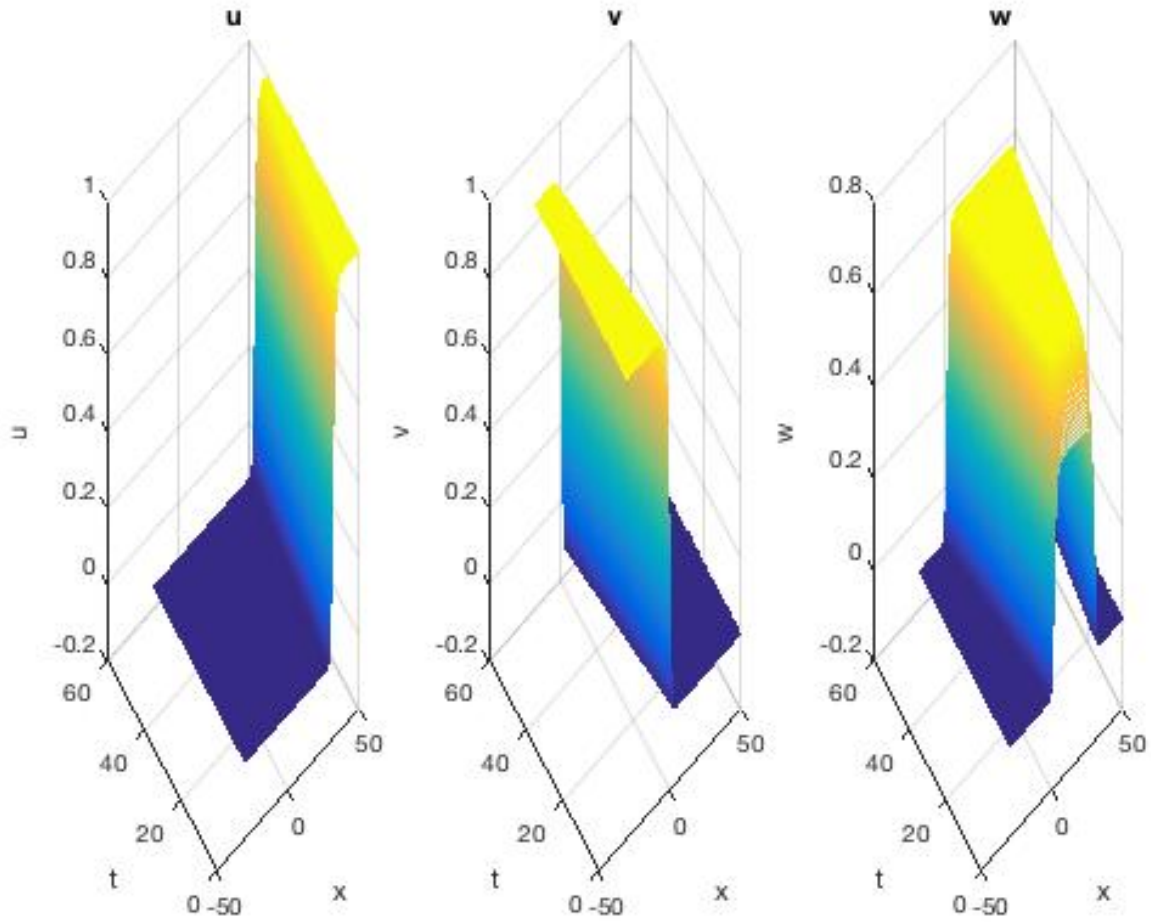


Figure 4.11:  $\eta = 0.2$ ,  $h(0)=30$

在(4.11)中，可以看出 $w$ 對 $u$ 和 $v$ 的傷害比 $u$ 和 $v$ 對 $w$ 的傷害要來的大，由Figure4.11中，當 $\eta = 0.2$ ， $w$ 的成長率比 $v$ 和 $u$ 皆小，無法由(4.11)中預測結果，由matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸擴散，而 $u$ 和 $v$ 則會被壓迫空間，分別向右、左移動，得出 $w$ 會快速的占領 $u$ 和 $v$ 的領域。

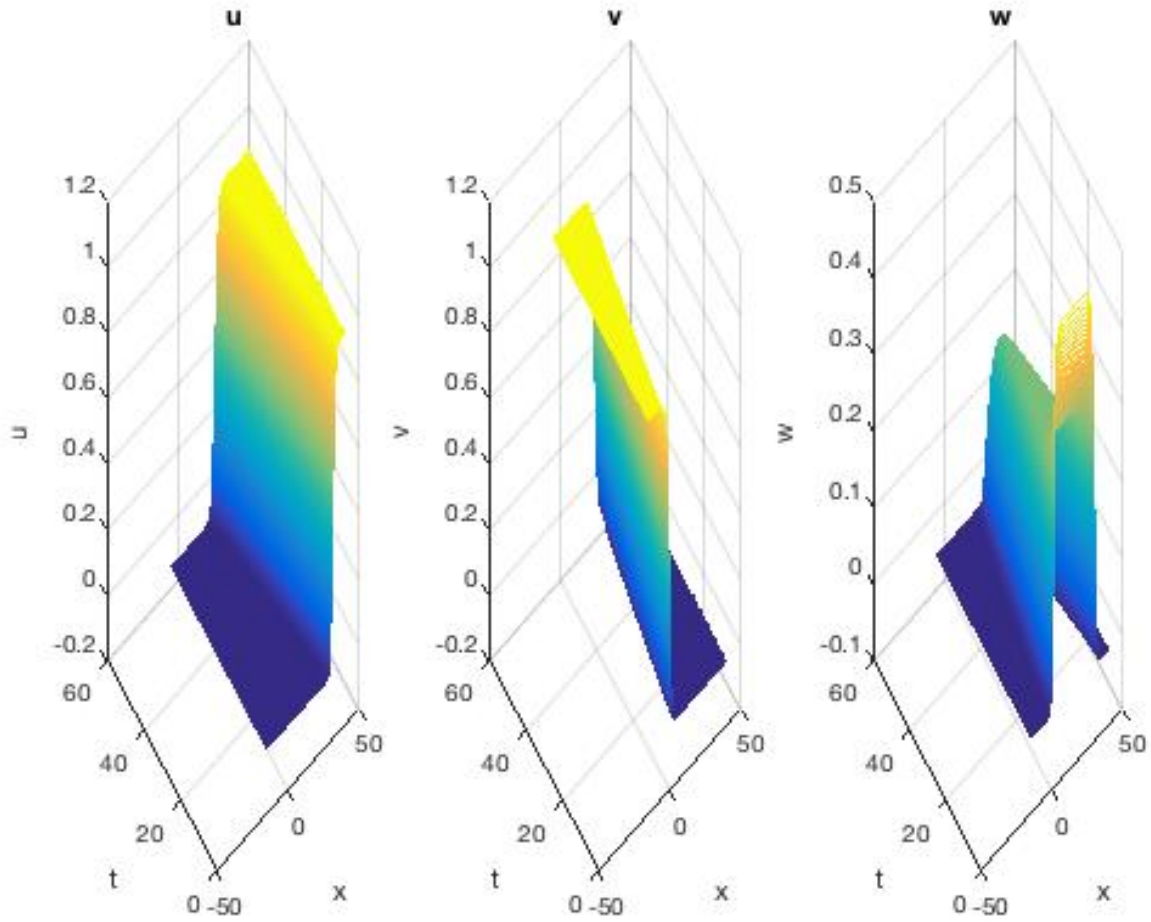


Figure 4.12:  $\eta = -0.2$ ,  $h(0)=30$

在Figure4.12中，當 $\eta = -0.2$ ，雖然 $w$ 的成長率比 $v$ 和 $u$ 都要小，雖然和 $\eta = 0.2$ 的形式很像，但matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸消散，得出 $u$ 和 $v$ 會快速的占領 $w$ 的領域，且 $w$ 最後被滅絕。

**Example 4.7.** 由 *Proposition 2.2* ( $d_w < d_v$ )，且  $r_1 = 1$ 、 $r_2 = 1$ 、 $r_3 = 0.9 + \eta$  ( $d_w = 0.9$ ， $d_v = 1 = r_2$ )，得出

$$c_{31} = 4.5、c_{32} = 4.5、c_{23} = \frac{50}{9}、c_{13} = \frac{50}{9}$$

取  $c_{12} = \frac{5}{2}$ 、 $c_{21} = \frac{5}{2}$ ，帶入(2.1)得到

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \left( 1 - u - \frac{5}{2}v - \frac{50}{9}w \right) \\ v_t = v_{xx} + v \left( 1 - \frac{5}{2}u - v - \frac{50}{9}w \right) \\ w_t = 0.9w_{xx} + w(0.9 + \eta - 4.5u - 4.5v - w) \end{cases} \quad (4.13)$$

根據邊界條件和初始條件 ( $U(x, 0) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x - h(0)) - P_2$ )，由(2.40)，(2.41)可得

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{x - h(0)}{2} \right) \right]^2 \\ v(x, 0) = \frac{1}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 \\ w(x, 0) = \frac{0.9}{4} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{x}{2} \right) \right]^2 + \frac{0.9}{4} \left[ 1 - \tanh \left( \frac{x - h(0)}{2} \right) \right]^2 - 0.9 \end{cases} \quad (4.14)$$

*Example 4.6*，取  $d_w = 0.5$ 、 $d_v = 1$ ，我們討論  $\eta = 0.2$  和  $\eta = -0.2$ ，都將造成  $w$  的成長率小於  $u$  和  $v$  ( $\eta$  的值非常小)，討論由 matlab 所得出的結果。

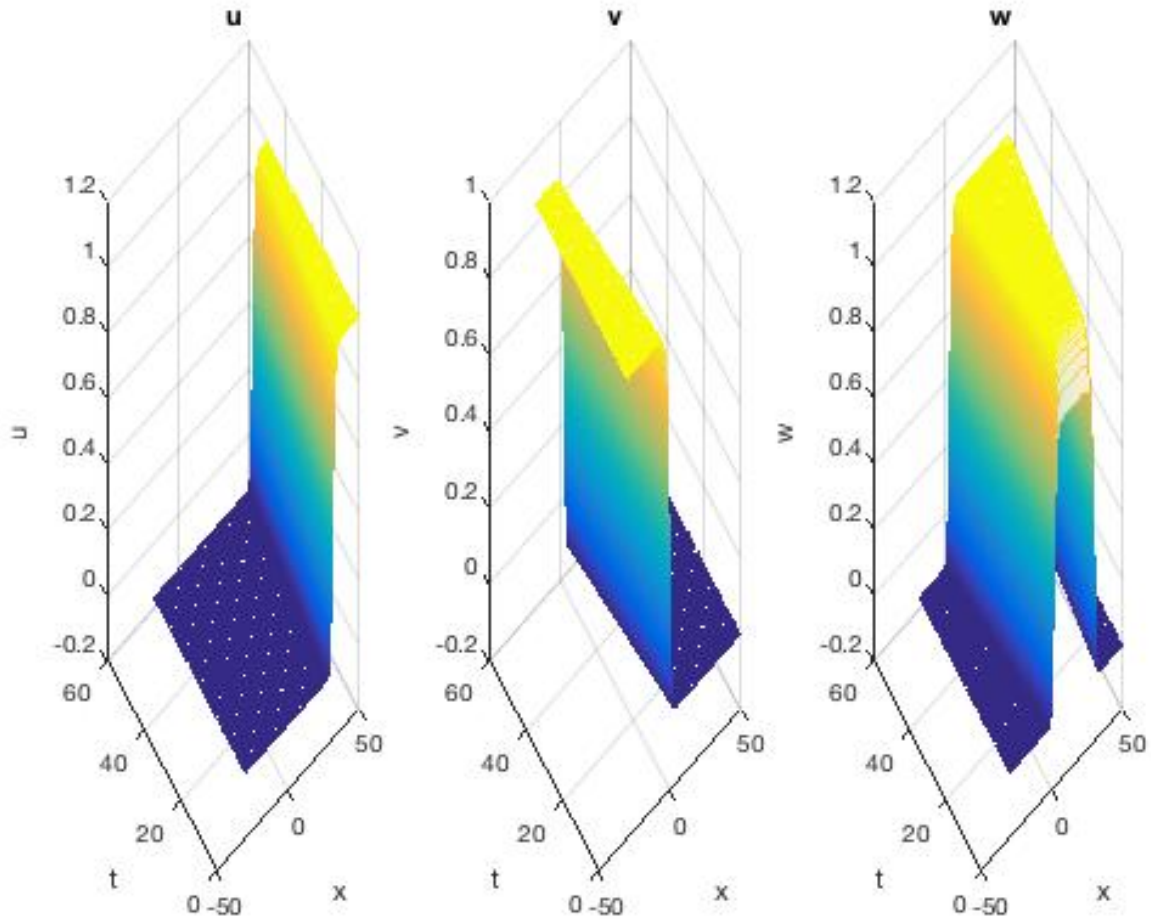


Figure 4.13:  $\eta = 0.2$ ,  $h(0)=30$

在(4.13)中，可以看出 $w$ 對 $u$ 和 $v$ 的傷害比 $u$ 和 $v$ 對 $w$ 的傷害要來的大，由Figure4.13中，當 $\eta = 0.2$ ， $w$ 的成長率比 $v$ 和 $u$ 皆大，預測結果 $w$ 會擴散，由matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸擴散，而 $u$ 和 $v$ 則會被壓迫空間，分別向右、左移動，得出 $w$ 會快速的占領 $u$ 和 $v$ 的領域。

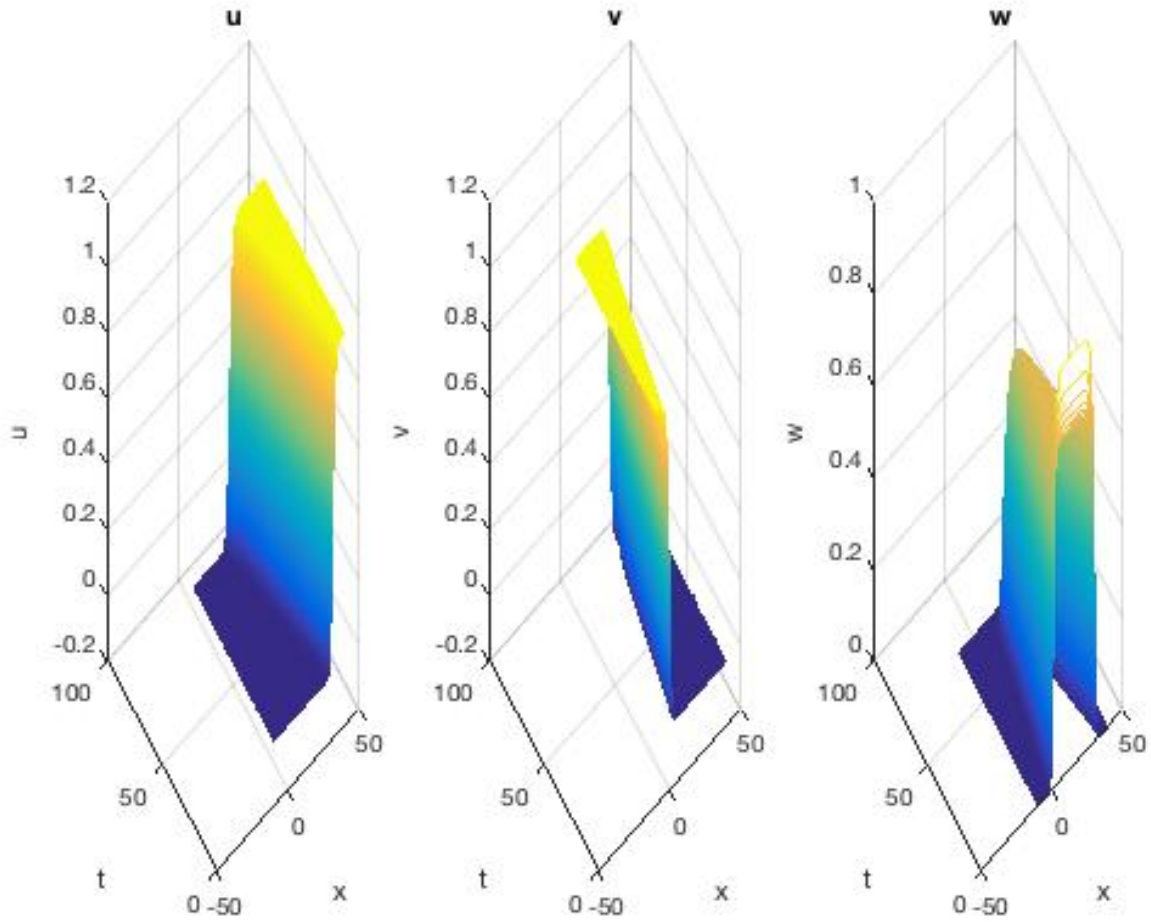


Figure 4.14:  $\eta = -0.2$ ,  $h(0)=30$

在Figure4.14中，當 $\eta = -0.2$ ，雖然 $w$ 的成長率比 $v$ 和 $u$ 都要小，但matlab的圖形可以看出， $w$ 會逐漸消散，得出 $u$ 和 $v$ 會快速的占領 $w$ 的領域，且 $w$ 最後被滅絕，而 $u$ 和 $v$ 則分別向左、右移動。

### 4.3 結論

1.  $d_w = d_v = 1$

$\alpha = 1$		$\alpha = \frac{3}{2}$		$\alpha = \frac{2}{3}$	
$\eta = -0.02$		$\eta = -0.02$		$\alpha = -0.2$	
$h(x)$	Time	$h(x)$	Time	$h(x)$	Time
10	115	10	155	10	17
20	380	20	450	20	37
30	650			30	57
40	920			40	77
50	1200			50	97

Table 1 :  $\eta < 0$ 時， $w$ 逐漸消散

	$\eta = 0.02$	$\eta = -0.02$
$\alpha = 1$	$w$ 逐漸擴散	$w$ 最後消散
$\alpha = \frac{2}{3}$	$w$ 逐漸擴散	$w$ 最後消散
	$\eta = 0.2$	$\eta = -0.2$
$\alpha = \frac{3}{2}$	$w$ 逐漸擴散	$w$ 最後消散

Table 2

2.  $c_0 = 0, d_v = 1$

$d_w = 1.5$		$d_w = 1.1$		$d_w = 0.5$		$d_w = 0.9$	
$\eta = -0.2$		$\eta = -0.2$		$\alpha = -0.2$		$\eta = -0.2$	
$h(x)$	Time	$h(x)$	Time	$h(x)$	Time	$h(x)$	Time
10	23	10	20	10	18	10	20
20	55	20	50	20	35	20	45
30	90	30	75	30	52	30	73
40	122	40	105	40	68	40	92
50	160	50	130	50	85	50	120

Table 3 :  $\eta < 0$ 時， $w$ 逐漸消散

	$\eta = 0.2$	$\eta = -0.2$
$d_w = 1.5$	$w$ 逐漸擴散	$w$ 最後消散
$d_w = 1.1$	$w$ 逐漸擴散	$w$ 最後消散
$d_w = 0.5$	$w$ 逐漸擴散	$w$ 最後消散
$d_w = 0.9$	$w$ 逐漸擴散	$w$ 最後消散

Table 4

由[1]的結果，可以得出 $(c, \eta)$ 的bifurcation diagram 如下圖

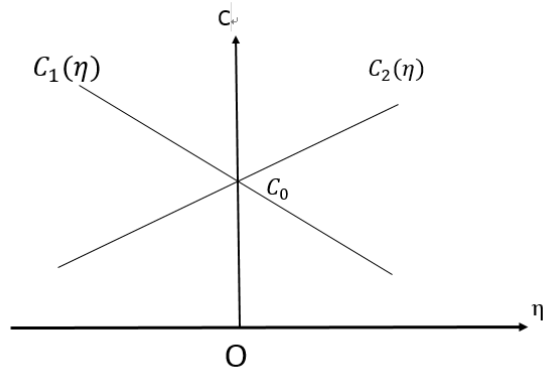


Figure 4.15: Bifurcation diagram of  $c$  and  $\eta$

所以透過對 $\eta$ 的選取，可得到 $c_1, c_2$ 的大小關係，由Corollary 3.1 以及 $M_1, M_2$ 正負號的計算(見[1])，可得出 $U_*(z)$ 穩定性的理論結果。



## 5 總結

由第四章數值分析可以知道，僅在[1]的建構方式之下，滿足(1.3)和(1.4)的行波解都是不穩定狀態，而三物種之間除了考慮成長率之外，物種內的競爭和對外的傷害都會影響是否滅絕或是共存。

由matlab可以知道不同情形三物種的行為，而在Table 1和Table 3中可以看出當擾動 $\eta$ 越小時，三物種之間的行為會不易看出，必須要有很長的時間才能清楚知道物種間的情形，所以 $\eta$ 若取得很小，需要很長時間才可看出結果。

第四章數值分析的結果下，不論是何種情形，當 $\eta > 0$ 時， $w$ 都將會擴散，而 $u$ 和 $v$ 將會有不同的結果，可能會因為 $w$ 過於強大而逐漸消散，或是和 $w$ 形成共存的情況。當 $\eta < 0$ 時， $w$ 都會消散，而 $u$ 和 $v$ 會比 $w$ 強大，逐漸將領域擴大。

## References

- [1] Chueh-Hsin Chang, Chiun-Chuan Chen and Shin-Ichiro Ei *Attractive interaction between trivial three-species traveling waves in the Lotka-Volterra competition-diffusion system, preprint.*
- [2] Chiun-Chuan Chen , Li-Chang Hung , M. Mimura and D. Ueycma. *Exact travelling wave solutions of three-species competition-diffusion systems.* Discrete and continuous dynamical systems series B, volume 17, Number 8, November 2012, pp. 2653-2669.
- [3] S. Ei. *The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems.* J. Dynam. Differential Equations 14 (2002), pp. 85-136.
- [4] Y. Kan-on. *Parameter dependence of propagation speed of traveling waves for competition-diffusion equations.* SIAM J. Math. Anal. 26 (1995), pp. 340-363.
- [5] Masayasu Mimura and Makoto Tohma. *Dynamic coexistence in a three-species competition-diffusion system.* Ecological complexity 21 (2015), pp. 215-232.
- [6] Marianito Rodrigo and Masayasu Mimura. *Exact solutions of a competition-diffusion system.* (Received June 11, 1999). Hiroshima Math. J. 30(2000) , pp. 257-270.