

# 1、緒論

## 1.1 可靠度分析與加速壽命實驗

可靠度 (Reliability) 通常定義為在一段特定的時間內，一個系統或機器設備在正常操作使用的狀態下將會表現出的功用。先進的生產技術、實驗設計以及品質管制等統計方法的幫助大大降低了生產產品的失敗機率。因此，現今許多產品的壽命通常是相當長的，所以要評估高可靠度產品的壽命不是一件容易的事。除此之外，在大量的競爭下，對於要如何更好且更快地設計、研發及評估新的產品，將使生產者面臨越來越大的壓力。

加速壽命實驗 (Accelerated Life Test, 以下簡稱為 ALT) 是一種經常被用來解決高可靠度產品壽命估計的實驗方法 (Meeker and Escobar, 1998; Nelson, 1990)。ALT 通常在一個較嚴格的條件下進行，例如，在較高的溫度或較高的壓力的環境下進行高可靠度產品壽命試驗，如此可增加產品損壞的機率，也就縮短了壽命試驗的時間，而此溫度或壓力稱之為加速變數。

## 1.2 研究動機

Hooper and Amster (1990) 分析一份以溫度做為加速變數的 ALT 實驗資料，並以其中一個特定的機器為研究對象(我們稱之為設備

A)。這個實驗的目的在於得到設備 A 在操作的正常使用環境 10°C 時

的產品壽命狀況，由於設備 A 在正常使用溫度時壽命很長，所以三

個較高溫度 40°C、60°C 以及 80°C，的實驗環境被用來加速產品的

失效時間。由資料可以看出(表一)，設定操作環境溫度越高者，其設備 A 越快損壞，能夠使用的時間就越短。

表一 設備 A 的溫度加速實驗資料

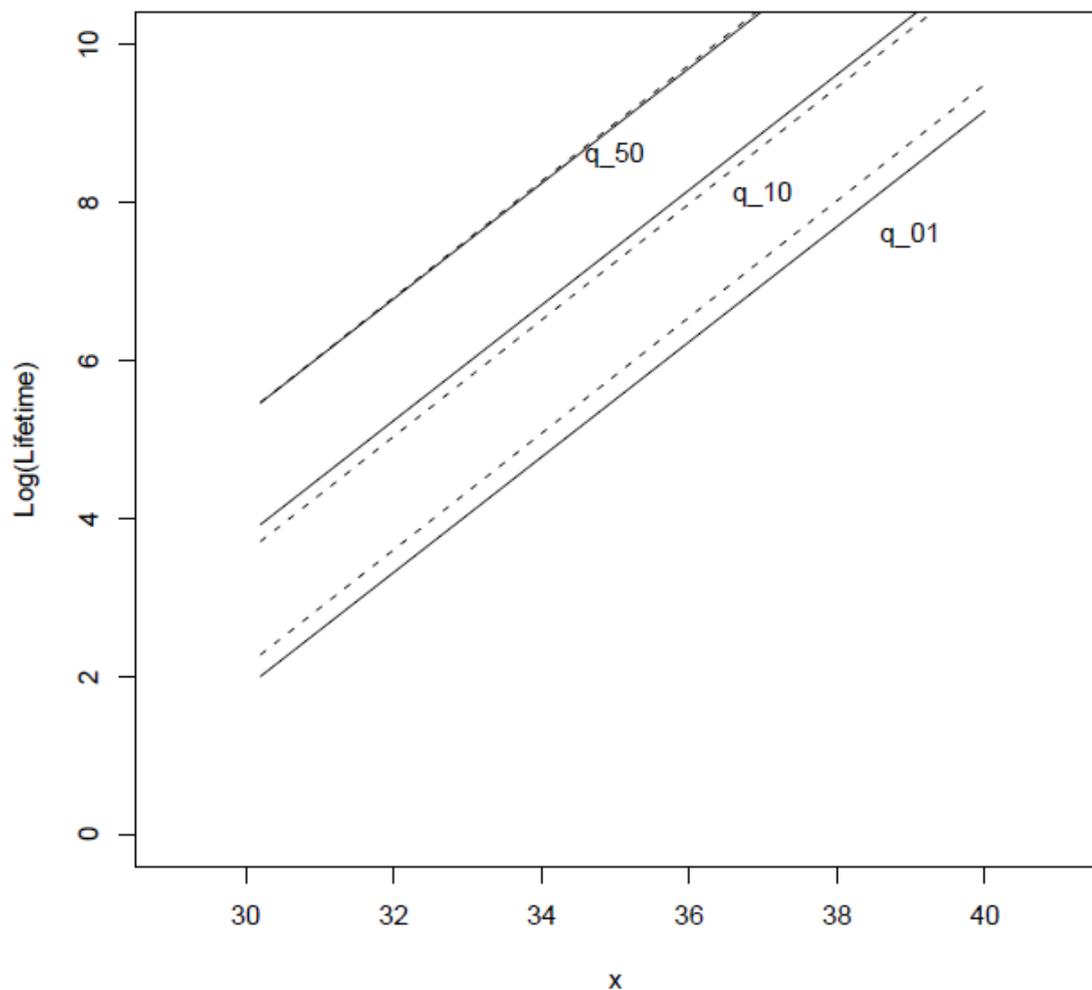
Hours	Status	# of Devices	Temperature(°C)
5000	Censored	30	10
1298	Failed	1	40
1390	Failed	1	40
3187	Failed	1	40
3241	Failed	1	40
3261	Failed	1	40
3313	Failed	1	40
4501	Failed	1	40
4568	Failed	1	40
4841	Failed	1	40
4982	Failed	1	40
5000	Censored	90	40
581	Failed	1	60
925	Failed	1	60
1432	Failed	1	60
1586	Failed	1	60
2452	Failed	1	60
2734	Failed	1	60

2772	Failed	1	60
4106	Failed	1	60
4674	Failed	1	60
5000	Censored	11	60
283	Failed	1	80
361	Failed	1	80
515	Failed	1	80
638	Failed	1	80
854	Failed	1	80
1024	Failed	1	80
1030	Failed	1	80
1045	Failed	1	80
1767	Failed	1	80
1777	Failed	1	80
1856	Failed	1	80
1951	Failed	1	80
1964	Failed	1	80
2884	Failed	1	80
5000	Censored	1	80

在資料的分析上面，若考慮以韋伯分配 (Weibull distribution) 或者對數常態分配 (lognormal distribution) 去配適這筆資料，藉由機率圖 (probability plot) 我們可以看出以對數常態分配來配適這筆資料是較好的(Meeker and Escobar, 1998)。若我們將利用此兩種分配

找出來的一些百分位數(第 1、10、50 個百分位數)畫在圖一，

$(x=11605(273.15+temp))$ 。



圖一

我們可以發現當我們選擇不同模型時，對不同百分位數的影響是不一樣的。從圖一我們可以看出，兩個模型所得到的第 50 百分位數幾乎是一致的，並無太多差異；但當百分位數漸漸向下選擇，第 10 百分位數，甚至於第 1 百分位數，兩者之間的差距慢慢顯現出

來，而且在時間軸上我們用的單位是取對數後的時間，所以轉換回正常時間單位的時，差距會更為明顯。而在可靠度研究方面，我們所在意的是低百分位數，因為在產品使用時，如果一開始就損壞的話，會影響其出產公司的商譽，且在保固期間損壞的話，公司可能又得負擔維修費用，所以一開始的品質控管是相當重要的。所以模型的選取對可靠度研究來說是一個相當重要的課題。

在本文中我們將考慮利用貝氏模型平均法（Bayesian model averaging）來處理 ALT 實驗資料的分析。我們的研究動機主要來自 Draper (1995)，Draper 利用貝氏模型平均法分析對造成挑戰者號於 1986 年升空爆炸的 O-ring 失效機率。該資料的特色在於資料中解釋變數溫度收集的區間與當天發射的溫度相差甚遠，所以要利用外插法(Extrapolation)來進行推估，然而，外插法常常會因為所使用的統計模型不同而造成差異很大的結果。一般只考慮選定特定模型後的統計推論所得到的預測區間太過於狹窄而高度樂觀預測的結果。而這種解釋變數在資料收集與實際要推論狀態相差甚遠的情況就是 ALT 實驗所常見的。相同的，在預測一般使用狀態下產品的壽命時需要用到外插法，所以，一樣會有以上太過自信預測結果的問題。然而，在可靠度文獻中很少有提到利用貝氏模型平均法來分析資料，因此，本研究的目的是探討貝氏模型平均法在 ALT 資料上的應用。

### 1.3 文章架構

本文的架構如下：第一章的緒論中，我們討論何謂可靠度分析以及加速壽命實驗，並且說明此篇文章的研究動機與目的；第二章說明一些可靠度常用的模型以及如何使用這些可靠度模型來分析

ALT 資料；第三章描述本文中所提到的貝氏模型平均法的理論基礎與在可靠度分析上如何應用貝氏模型平均法；第四章針對兩筆模擬資料進行分析，比較傳統上的分析方法與貝氏模型平均法的不同；第五章我們將貝氏模型平均法用來分析緒論中的資料，並且與傳統的分析方法比較；最後，在第六章的部分為結論。

## 2、可靠度模型

### 2.1 對數位置尺度族可靠度模型

一般而言，大多數的可靠度資料為產品壽命或者時間性資料例如使用次數，其數值皆大於零，並且根據經驗資料型態大多呈現右偏。所以，一般傳統統計方法中所使用的常態分配並不適用於分析可靠度資料，通常會使用一些右偏的機率分配來配適可靠度資料，常用的機率分配有：

#### A. 指數分配

$$f(t; \mu) = \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right)$$

#### B. 對數常態分配

$$f(t; \mu, \sigma) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

#### C. 韋伯分配

$$f(t; \mu, \sigma) = \exp\left\{-\frac{t}{\mu}\right\} \left(\frac{t}{\mu}\right)^{\sigma-1} \frac{\sigma}{\Gamma(\sigma)}$$

其中指數分配為韋伯分配的特殊狀況，而韋伯分配與對數常態分配皆屬於對數位置尺度族（log-location-scale family）的機率分配，所以在分析可靠度資料時，我們通常會使用對數位置尺度族來配適資料。

對數位置尺度族分配的模型可以用以下的方式來表示，假設  $T$  為產品的壽命，令  $Z = \log(T)$ ，而  $Z$  的機率密度函數 (probability density function) 可以用以下的方式表示

$$f_Z = \lambda \exp\{-\lambda(z - \mu)\}$$

其中， $\mu$  為位置參數， $\lambda$  為一般尺度參數的倒數（以上的參數化的方法經常被貝氏的學者所使用），而  $\phi(\cdot)$  為不含未知參數的機率密度函數。所以當  $\phi(t) = \phi_{\text{norm}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\}$ ， $\lambda = 1/\sigma$  時可以推導出  $T$  會服從以上的對數常態分配；而當  $\phi(t) = \phi_{\text{sev}} = \exp\{-t - \exp(-t)\}$ ， $\lambda = 1/\sigma$  時我們可以得到以上的韋伯分配。所以在分析可靠度資料時我們可以將產品壽命取對數後再利用以上位置尺度族 (location-scale family) 來配適資料。因此對於以上的對數常態分配和韋伯分配，我們可以考慮將產品壽命取對數後再假設它們具有常態分配及最小極端值分配 (smallest value extreme distribution)，這樣可以得到相同的結果。

## 2.2 對數位置尺度族可靠度迴歸模型

當有其他解釋變數會影響產品壽命時，例如在加速壽命實驗時的溫度、壓力等加速因子，在統計資料分析上是迴歸分析的問題。而在可靠度的迴歸模型中，我們最常使用的方法為將 2.1 節中對數位置尺度族裡的位置參數寫成解釋變數的函數(有時候是尺度參數)，舉例來說，在 Arrhenius 關係的溫度加速模型下，我們會取  $\mu = \beta_0 + \beta_1 \ln(\text{Temp})$ ；而在電壓加速模型下的 inverse power 關係下，我們會取  $\mu = \beta_0 + \beta_1 \log(Volt)$ 。所以，我們可以得到以下概似函數：

$$f_Z(\beta_0, \beta_1, \lambda) = \lambda \exp\{-\lambda(z_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)\}$$

那麼，我們就能夠使用一些分配去配適出適合資料的模型。調整這些候選的分配，我們根據一些判斷的準則去挑選“最佳的”模型，如 AIC。最後，我們使用這個模型再利用外插法來推估一般環境下產品的壽命分配。

### 3、 貝氏模型平均法在可靠度迴歸模型上的應用

#### 3.1 貝氏模型平均法

正如之前所敘述的，如果針對單一個“最佳的”模型做推論的話必定會忽略了模型不確定性，也會導致我們低估了不確定性對於推論出來的資訊的影響。Leamer (1978) 就提出了一套標準的貝氏方法去解決這個問題。如果  $M = \{M_1, M_2, \dots, M_K\}$  為所有我們考慮模型所成的集合而  $\Delta$  是我們所想要知道的資訊(例如產品壽命平均數或一些分位數)，那麼  $\Delta$  在給定資料  $y$  的後驗分配 (posterior distribution) 可表示為

$$\Pr \Delta | y = \sum_{k=1}^K \Pr \square(\Delta | M_k, y) \Pr \square(M_k | y)$$

其中， $\Pr \square(\Delta | M_k, y)$  為在一般貝氏統計方法中給定模型  $M_k$  的情況

下， $\Delta$  的後驗分配；而  $\Pr M_k | y \propto \pi M_k f(y | M_k)$  是模型  $M_k$  的後驗分

配。

所以  $\Pr\Delta y$  可以看成是後驗分配  $\Pr\Delta(\Delta|M_k,y)$  的混合分配。而

$\Pr\Delta(M_k|y)$  為其權數。就是利用在每一個不同的模型底下的後驗分

配經過加權之後相加所得到的後驗模型機率，我們稱這個方法為貝氏模型平均法。

根據貝氏定理，在  $M_k$  給定資料  $y$ ，模型  $M_k$  的後驗機率為

$$\Pr M_k y = \Pr\Delta(y|M_k) \Pr\Delta(M_k) / \sum_{k=1}^K \Pr\Delta(y|M_k) \Pr\Delta(M_k)$$

其中， $\Pr\Delta(M_k)$  是  $M_k$  的先驗機率（prior probability），而  $y$  的邊際

分配（marginal distribution）可以以下的方式來計算

$$\Pr(y|M_k) = \int \Pr(y|\theta_k, M_k) \Pr(\theta_k|M_k) d\theta_k,$$

其中， $\theta_k$  是模型  $M_k$  的參數向量， $\Pr(\theta_k|M_k)$  是在模型  $M_k$  之下  $\theta_k$

的先驗機率， $\Pr(y|\theta_k, M_k)$  為在模型  $M_k$  下的概似函數，以上的積分

通常沒有辦法直接算出，所以常常利用蒙第卡羅 (Monte Carlo) 或者一些數值積分的方式來處理，也可以利用一些大樣本的方式來近似 (Kass and Raftery, 1995)。

有關貝氏模型平均法的其他文獻，讀者可以參考 Hoeting et al.(1999) 或 Raftery et al(1997)

### 3.2 可靠度迴歸模型的貝氏模型平均法

在本文中，我們考慮利用貝氏模型平均法來分析可靠度資料，在 3.1 節所提到的候選模型方面，我們只考慮以下兩種狀況，

$M_1: \mu = \mu_{nor}$

$$M2: \theta_k = \beta_{0k} + \beta_{1k} x_0 + \lambda_k \Phi_{\text{sev}}^{-1}(p)$$

也就是我們假設產品資料具有對數常態分配以及韋伯分配，以上兩個分配是可靠度資料中最常使用的兩種機率分配，而且大多數的統計軟體都有提供相關的計算。所以，

$$\theta_k = \beta_{0k} + \beta_{1k} x_0 + \lambda_k, \quad k=1, 2$$

在可靠度分析中，由於產品壽命不具有對稱性，所以我們通常有興趣的量為產品壽命的一些百分位數(尤其是一些較低的百分位數)，根據以上兩個模型，分別可以導出

$$M1: q_p = \beta_{01} + \beta_{11} x_0 + \lambda_1 \Phi_{\text{nor}}^{-1}(p)$$

$$M2: q_p = \beta_{02} + \beta_{12} x_0 + \lambda_2 \Phi_{\text{sev}}^{-1}(p)$$

也就是說，如果我們可以產生  $\theta_k$  之後驗分配，就可以利用以

上式子求得產品壽命百分位數的後驗分配。

所以，以下我們將介紹在給定以下先驗分配的情況下，

$$f_{\beta} = \text{nor}(\beta; \mu_0, \Sigma)$$

$$f_{\lambda} = \Gamma(\lambda; a, s)$$

其中  $\text{nor}(t; \mu, \Sigma)$  為平均數為  $\mu$  與變異數矩陣為  $\Sigma$  且為  $t$  的多重常態密

度函數；而

$$\Gamma(t; a, s) = a \Gamma(a) s^{a-1} \exp(-ts)$$

其中， $a, s, \mu_0, \Sigma$  為超參數（hyperparameters），如何利用馬可夫鏈

蒙第卡羅方法（Markov chain Monte Carlo, MCMC）產生  $\theta_k$  的後驗

分配，在給定以下的先驗分配，由於在馬可夫鏈蒙第卡羅方法進行的過程中沒有考慮跨模型的運算，所以在以下的推導中為求表示方法的簡潔，我們將忽略下標  $k$ 。

我們考慮以下兩種狀況。

<Case1>M1

在第一個情況下，我們假設產品壽命取對數後服從常態性分

配，因此，我們就可以推導出  $\beta$  以及  $\lambda$  的完全條件（full condition）

機率分配為

$$f(\beta|\cdot) = \phi_{\text{nor}}(\beta; \tau, V)$$

$$f(\lambda) = \Gamma(\lambda; a + n/2, 2s^2 + s_i = 1/n(z_i - X_i\beta)^2)$$

其中，

$$V = (\sum_{i=1}^n -1 + \lambda_i = 1/n X_i' X_i)^{-1}, \tau = V(\sum_{i=1}^n -1 \mu_0 + \lambda_i = 1/n z_i X_i')$$

以上多重常態分配與伽瑪分配皆為常用的標準機率分配，我們可以利用一般的統計軟體，例如 R 來直接取得樣本，因此，我們可以利用 gibbs sampler 方式很容易的得到參數的後驗分配。

<Case2>M2

如果假設產品壽命取對數後服從最小極端值分配，我們無法經由推導得到  $\beta$  以及  $\lambda$  確切的完全條件機率分配(積分常數不易獲得)，但我們可以知道其  $\beta$

$\lambda$  的完全條件機率分配正比於某一些分配形式，但卻不是能夠很容易知道其真正的分配形式，因此參數的後驗分配只能以下列正比的方式呈現。

$$f(\beta|\cdot) \propto \phi_{\text{nor}}(\beta; \mu_0, \Sigma) \prod_{i=1}^n \phi(\lambda^{1/2}(z_i - X_i\beta))$$

$$f(\lambda|\cdot) \propto \Gamma(\lambda; a, s) \prod_{i=1}^n \phi(\lambda^{1/2}(z_i - X_i\beta))$$

我們可以利用 Metropolis-Hastings within gibbs 的方法抽取參數的後驗分配。經過  $s$  次疊代後，參數目前的狀態為  $\theta_s = (\beta_s, \lambda_s)$ 。

(1) 抽取  $\beta$  的部分

先從多重常態分配， $\phi_{\text{nor}}(\beta'; \mu(\beta_s), \Sigma(\beta_s))$ ，抽出一個  $\beta'$ ，用

以下的機率接受所抽出的  $\beta'$ ，

$$\min\{1, \phi_{\text{nor}}(\beta'; \mu_0, \Sigma) / \phi_{\text{nor}}(\beta_s; \mu_0, \Sigma) \exp(\lambda' (z_i -$$

$$X_i \beta') \phi_{\text{nor}}(\beta_s; \mu \beta', \Sigma(\beta')) / \phi_{\text{nor}}(\beta_s; \mu_0, \Sigma) \exp(\lambda' (z_i -$$

$$X_i \beta_s) \phi_{\text{nor}}(\beta'; \mu \beta_s, \Sigma(\beta_s))\}$$

如果我們選擇  $\mu \beta_s = \beta_s$  以及  $\Sigma(\beta_s) = V$ ，這樣的話，以上的接受機率可以簡化為

$$\min_{\lambda} \{1, \phi_n(\beta'; \mu_0, \Sigma) \prod_{i=1}^n \phi_{\text{sev}}(\lambda^{1/2}(z_i -$$

$$X_i)\beta') \phi_n(\beta; \mu_0, \Sigma) \prod_{i=1}^n \phi_{\text{sev}}(\lambda^{1/2}(z_i - X_i\beta))\}$$

(2) 抽取  $\lambda$  的部分

接著從伽碼分配， $\Gamma(\lambda'; a, s, \lambda_s)$ ，抽出一個  $\lambda'$ ，用以下的機率接

受所抽出的  $\lambda'$

$$\min_{\lambda} \{1, \Gamma(\lambda'; a, s, \lambda_s) \prod_{i=1}^n \phi_{\text{sev}}(\lambda'^{1/2}(z_i -$$

$$X_i)\beta) \Gamma(\lambda; a, s, \lambda_s) \prod_{i=1}^n \phi_{\text{sev}}(\lambda^{1/2}(z_i - X_i\beta)) \Gamma(\lambda'; a, s, \lambda_s)\}$$

同理，選擇  $a(\lambda_s) = \frac{v_i^2}{v_s}$  以及  $s(\lambda_s) = \frac{v_s}{\lambda_s}$  同樣可將我們接受下一個抽出的樣本其機率值簡略為

$$\min_{\lambda_s} \{1, \Gamma \lambda_s; a, s \lambda_s n / 2i = 1 n \phi_{sev}(\lambda_s^{1/2} (z_i -$$

$$X_i \beta) \Gamma \lambda_s; a, s \lambda_s n / 2i = 1 n \phi_{sev}(\lambda_s^{1/2} (z_i - X_i \beta))\}$$

以上為當我們可以觀察到產品壽命時獲得參數後驗分配的方法。然而，在很多可靠度實驗中，我們所得到的資料大多為右設限（right censor）或區間設限（interval censor）資料。但這並不會對我們的計算造成太大的困擾，我們只要在以上的演算法中將  $Z$  視為潛在變數（latent variable），而在每一次的疊代中加入抽取潛在變數的步驟。根據以上模型不難推導出潛在變數的完全條件機率分配為

$$z_i | \cdot \propto \phi_{nor}(z_i; X_i \beta, 1/\lambda) \Omega(y_i)$$

$$z_i | \cdot \propto \phi_{sev}(z_i; X_i \beta, 1/\lambda) \Omega(y_i)$$

其中， $\Omega(y_i)$ 為一指標函數（indicator function），其與資料型態有關。例如在右設限資料中，若設限時間為  $t_l$ ，則  $\Omega_{y_i} = I_{t_l, \infty}(z_i)$ ；在區間設限資料中，若設限時間為  $t_l$

$t_u$ ，則  $\Omega_{y_i} = I_{t_l, t_u}(z_i)$ 。我們可以很容易的用反累積機率函數法（inverse cumulative probability function method）抽取符合以上截取常態分配（truncated normal distribution）與截取最小極端值分配（truncated smallest extreme value distribution）。

在超參數的選擇方面，如果我們有一些先前的資訊或可以獲得一些專家的建議，我們將其轉換成超參數的設定。或者可以利用以下經驗貝氏法(Empirical Bayes)的方法來設定超參數。首先，我們可以利用最大概似計值獲得參數的估計值  $\beta, \lambda$ ；以及其變異數的估計值  $v\beta, v\lambda$  (訊息矩陣(observed Information matrix)的反矩陣)，在將超參數的數值設定如下。

$$\mu_0 = \beta$$

$$\Sigma = cv\beta$$

$$a = \lambda^2 cv\lambda$$

$$s = cv\lambda\lambda$$

以上的設定參數先驗分配的期望值為所求出的最大概似估計值，變異數為最大概似估計值的漸進變異數的  $c$

。

#### 4、統計模擬

本統計模擬的目的在比較利用貝氏模型平均法與一般只藉由單一模型的貝氏方法來分析緒論中資料的差異性。在樣本的產生方面，我們考慮以下兩種狀況

- (1)資料來自常態分配
- (2)資料來自最小極端值分配

在產生資料所需要的真實參數部分，我們分別針對以上兩種狀況先求出參數的最大概似估計值  $\beta_0$ 、 $\beta_1$  以及  $\lambda$ ，再將其設定為真實參

數。造出 1000 筆與緒論中例子資料相似的樣本，即在 10°C、

40°C、60°C、80°C 分別產生 30、100、20、15 個觀察值，在 MCMC

的實際執行方面，我們先丟棄 (burn-in) 前面所抽出的 1000 個樣本，之後再將後面的 10000 個樣本留下，而得到 10000 個  $\beta_0$ 、 $\beta_1$  以及  $\lambda$  樣本，再針對每一筆資料分別利用以下三種方法進行分析

- (1)假設資料是來自常態分配藉由單一模型的貝氏方法
- (2)假設資料是來自最小極端值分配藉由單一模型的貝氏方法
- (3)貝氏模型平均法

這三種方法找出其第 50 個百分位數，第 10 個百分位數，以及第 1 個百分位數的估計值  $q_P$ ，再以以下均方誤差（mean squared error, MSE）進行比較

$$E(q_P - q_{Ph})^2 \approx h = 11000(q_{Ph} - q_P)21000,$$

其結果如下表二

表三所示：

表二:真實模型為常態分配時三種方法對應的百分位數之均方誤差：

百分位數	常態分配	最小極端值分配	貝氏模型平均法
1	201.0979	715.6857	216.5697
10	246.1423	362.1730	261.2869
50	353.5217	558.3163	374.6657

表三:真實模型為最小極端值分配時三種方法對應的百分位數之均方誤差：

百分位數	常態分配	最小極端值分配	貝氏模型平均法
1	856.2988	272.9359	366.4883
10	400.2469	359.8368	353.7585
50	751.8080	555.4131	547.3369

由表二可以看出，在真實模型為常態分配時，當我們假設模型選擇為常態分配，因為模型的選擇是正確的，所以均方誤差會最小；但是如果我們利用最小極端值分配來配適模型，其均方誤差會大上許多，這也說明了假如我們選擇模型是錯誤的話，得到的結果

會相當不好。以貝氏模型平均法來看，以其均方誤差與這兩個模型的均方誤差相比，貝氏模型平均法雖然不及模型選擇正確的結果，但相去不遠，而且貝氏模型平均法比模型選擇錯誤的結果好很多，還可以避免因為模型選擇而使我們做出錯誤的分析。在表三中我們也可以觀察到相同的結果。

## 5、資料分析

我們同樣利用 Hooper and Amster (1990) 的這一份以時間做為加速實驗因子，並且以其中一個特定的機器設備 A 為對象的資料為我們分析資料的來源。由資料可以看出，設定操作環境溫度越高者，其設備 A 越快損壞，能夠使用的時間就越短。

一開始，我們考慮具有溫度這個解釋變數的兩種模型，分別為常態模型以及最小極端值模型。並且利用  $\Pr M_k y \propto \pi M_k f(y|M_k)$ ，此

積分式子是由馬可夫鏈蒙第卡羅方法得到解，並利用此方法取得兩種模型所佔之權數。我們一開始給定兩種模型的先驗機率都為 0.5，利用原先的資料去抽取 10000 筆新的資料，結果常態模型與最小極端值模型的權數分別為 0.8429 及 0.1571，結果顯示此筆資料較接近常態分配。

接著利用第三章的方法，去抽取出  $\beta$

$\lambda$  的後驗分配。因此，我們會先給定  $\mu$ 、 $\Sigma$ 、 $a$  以及  $s$  這幾個超參數。在假設是常態模型的情況下， $\mu$  的兩個參數利用最大概似估計值  $\beta$  當作起始值， $\Sigma$  是用  $25v\beta$  當作起始值， $a$  及  $s$  則分別利用估出來的變異數最大概似估計值，令其  $\lambda_{MLE} = as$

$\text{Var} \lambda_{MLE} = 25as^2$ ，因此得到  $a$

$s$  分別為  $\lambda 225v\lambda$  以及  $25v\lambda\lambda$ 。所以在常態模型我們得到以下超參數的設定為

$$\mu_0 = (-13.4698, 0.6279)$$

$$\Sigma = 206.4770 - 5.9138 - 5.91380.1699$$

$$a=2.1928$$

$$s=0.4663$$

我們利用相同的方法在最小極端值模型之下，我們可以得到以下的設定

$$\mu_0=(-13.3189, 0.6339)$$

$$\Sigma=26.3289-7.7177-7.71770.2257$$

$$a=1.9594$$

$$s=0.7218$$

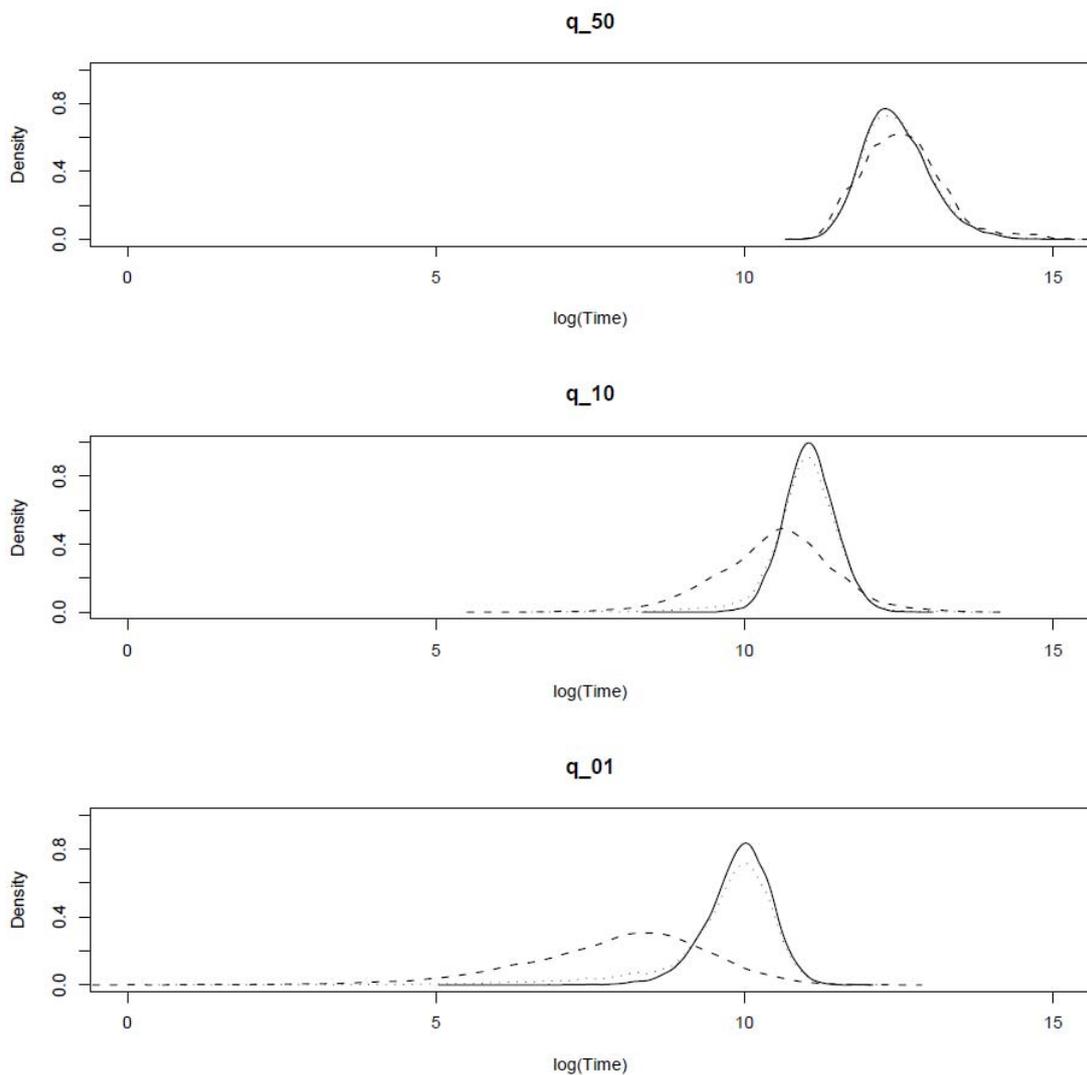
接著由前面所提到的方法抽取樣本，我們丟棄前面所抽出的 1000 個樣本，之後在將後面的 10000 個樣本留下。並且從這 10000 個  $\beta_0$

$\beta_1$  以及  $\lambda$  可以分別得到 10000 個相對應的第 50 個百分位數，第 10 個百分位數，以及第 1 個百分位數，並將常態分配和最小極端值分配的三種百分位數繪製圖形於下；利用貝氏模型平均法，利用常態模型的權數以及最小極端值模型的權數為，從個別的 10000 個百分位數分別以 0.8429

0.1571 的權數抽取，也將這 10000 個利用貝氏模型平均法得到的百分位數繪製於圖二。實線代表的是常態分配的百分位數，虛線代表的是最小極端值分配的百分位數，點線代表的是利用貝氏模型平均法得到的百分位數。

由於權數的差異是相當明顯的，在利用貝氏模型平均法時，大部分的百分位數來自於常態分配，故不管是哪個百分位數的圖形都與常態分配極為相似。在高百分位數時，圖形並沒有太大的不同，

但在低百分位數時，圖形顯現出相當大的差異。在可靠度上，我們關心的是低百分位數，因此，我們可以知道模型的選取錯誤會產生相當大的差異，如果模型選取正確的話，所得到的結果當然是我們所樂見的，但若選取的模型是不好的，結果的差異是相當大的，而貝氏模型平均法能夠避免模型選取的難題，進而得到不錯的結果。



圖二

## 6、結論

由於分析 ALT 實驗要利用到外插法，所以模型的選取會對最後的結果有相當大的影響。一般只藉由單一模型所進行的統計分析由於沒有考慮到模型間的不確定性所以會有較大的風險，而貝氏模型平均法可以解決此一問題。貝氏模型平均法本文介紹如何利用貝氏模型平均法來分析 ALT 資料，我們藉由一個模擬研究與一組實際的資料分析發現貝氏模型平均法非常適用於分析 ALT 實驗。

## 參考資料

- [1]Draper, D. (1995). "Assessment and Propagation of Model Uncertainty (discussion, 71-97)," J. Royal Statist. Soc. B, 57, 45-70.
- [2]Hoeting, J.A., Madigan, D, Raftery, A.E. and Volinsky, C.T.. (1999). ."Bayesian Model Averaging: A Tutorial (with discussion)". Statistical Science 14, pp. 382-417.
- [3]Hopper, J. H. & Amster, Statisticcal Methods for Engineers and Scientists, Harrison M. Wadsworth, Editor. New York: McGrow Hill.
- [4]Kass, R.E. and Raftery, A.E. (1995)."Bayes Factors".Journal of the American Statistical Association , 90, pp. 773-795.
- [5] Leamer, E. E. (1978), *Specification Searches*, New York: Wiley.
- [6]Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998). Statistical Methods for Reliability Data, John Wiley & Sons, New York.
- [7]Nelson, W. (1990). Accelerated Testing :Statistical Models, Test Plans and Data Analysis, John Wiley & Sons, New York.
- [8]Raftery, A.E., Madigan, D and Hoeting, J.A. (1997)."Bayesian Model Averaging for Linear Regression Models".Journal of the American Statistical Association 92, pp. 179-191.