

東海大學數學系研究所

碩士論文

指導教授：胡馨云 博士

再生函數質點法解特徵值問題

Reproducing Kernel Particle Method
for Eigenvalue Problem

研究生：吳育漩

中華民國九十九年七月

Abstract

The development of meshfree methods can be traced back from two branches, one based on weak form and other based on strong form. In this work, we use the reproducing kernel particle method (RKPM) for solving eigenvalue problem under weak form. We concentrate on the convergence analysis; the basis function of this method is local. So the eigen system is sparse and band after discrete, similarly as finite element method. However the band width of RKPM is more widely than finite element method and the convergence of RKPM is better than finite element method.

A result extracted from the analysis is that the convergence about the errors of eigen functions is related to the degrees and radius of RKPM. The errors of eigenvalues are present square relations to the errors of eigen functions under one norm. Some numerical experiments provided to validate the results of error analysis, we found out that the best effect when we chose the degree of two, $p=2$. We could chose higher of degree, for example $p=3$, but its waste much time to compute. RKPM is more flexible than finite element method, as a whole and it can be viewed as a generalized finite element method.

摘 要

無網格法大致上可分為兩類，一類是由弱型式衍生出來的，而另一類是由強型式衍生而出。此論文使用弱型式中的再生核心質點法求解特徵值問題，著重於收斂性分析，此法的基底函數是局部基底，所以離散後的特徵系統是稀疏帶狀的，相似於有限元素法的結構，其帶寬較有限元素法的寬一些，收斂情形比有限元素法好。

從理論分析上得知，特徵函數誤差的收斂率與再生核心基底函數的階及半徑有關，特徵值的誤差與特徵函數在一範數下的誤差成平方關係。在數值結果與理論相吻合，可知選用二階， $p=2$ ，效果最好，當然可選再高階，例如 $p=3$ ，但相對計算時間需更多、更具彈性。國際間，再生核心質點法被視為廣泛型有限元素法。

致 謝 辭

可以完成這篇論文，首先要感謝胡馨云教授一直以來的教導，從我大學到研究所的期間不斷的給我指導與協助，不僅是研究論文的方向與做學問該有的態度，在胡老師身上我還學習到做事的謹慎態度，使我受益良多。接著感謝陳淑珍教授與鄭博文教授撥空費心審查，並提供了此論文許多意見與需修正的地方，還有一些該注意的地方，使此論文更臻完善。

在研究所期間，感謝在我失落的時候總是陪伴我、鼓勵的家人以及朋友們，在精神上給我很大的支持，讓我得以完成這篇論文。真的非常感謝幫助我的人，我會銘記在心。

符 號 表

$\psi_I(x)$	再生核心基底函數
$C(x; x - x_I)$	修正函數
x_I	質點
ξ_i	配置點
S	質點集
h	最大的質點間距
N_p	質點數
N_c	配置點數
$\phi_a(x - x_I)$	核心函數
a	核心函數的半徑
p	再生基底函數的階數
δ_{ij}	Kronecker delta
Ω	定義域
Γ	Ω 之邊界
$E(\square)$	連續泛函
$\hat{E}(\square)$	離散泛函
$\ \cdot \ $	範數
A	N_p 乘 N_p 大小的矩陣
\mathbf{b}	N_p 維度的已知向量
F	N_c 乘 N_p 大小的矩陣
\mathbf{r}	N_c 維度的已知向量
P	投影算子
F^+	F 的偽逆矩陣
$\ v\ _{2,\Omega}$	標準 Sobolev 二範數

目 錄

一、前言	1
二、再生核心逼近	2
(一) 再生核心函數介紹及推導	2
(二) 再生核心函數的微分	5
(三) 再生核心函數之基本性質	6
(四) 再生核心函數之反估計式	8
三、再生核心質點法	9
(一) 方程式及弱型式	9
(二) 收斂性研究	12
四、數值範例	19
(一) 特徵系統	19
(二) 收斂結果	21
五、結論	27
參考文獻	28

第一章 前言

無網格法[1,2]是近二十年來數值方法的新趨勢，而它大致上可分成兩類：一類是由弱型式 (weak form) 衍生出來[3,4]，而另一類則是由強型式 (strong form) 衍生而出[5,6]。此論文使用弱型式中的再生核心質點法 (Reproducing Kernel Particle Method, 簡寫 RKPM) 去求解特徵值問題 (Eigenvalue Problem)，著重於收斂性分析。

此法的基底函數是局部基底，所以離散後的特徵系統是稀疏帶狀的，相似於有限元素法的結構，其帶寬較有限元素的寬一些，收斂情形比有限元素法好。從理論分析結果可知：特徵函數誤差的收斂率與再生核心基底函數的階及半徑有關，特徵值的收斂行為是特徵函數的平方倍。數值的結果驗證了理論分析。

第二章 再生核心逼近理論

第一節 再生核心函數介紹及推導

假設連續函數 $f(x)$ 可由下面的近似函數 $f^h(x)$ 逼近

$$f^h(x) = \sum_{l=1}^{Np} d_l \psi_l(x) \quad (2.1)$$

此近似函數是由一組局部的基底函數線性組合而成，這組基底函數由下列質點集

$$S = \{x_l\}_{l=1}^{Np} = \{x_1, x_2, \dots, x_{Np}\}$$

為中心建構而成，最大的質點間距是 h ，函數形式如下[4,9]

$$\psi_l(x) = H^T(0)M^{-1}(x)H(x-x_l)\phi_a(x-x_l) \quad (2.2)$$

此種基底稱之為『再生核心基底函數』，其中矩陣及向量為

$$M(x) = \sum_{l=1}^{Np} H(x-x_l)H^T(x-x_l)\phi_a(x-x_l) \quad (2.3)$$

$$H^T(x-x_l) = [1, x-x_l, (x-x_l)^2, \dots, (x-x_l)^p] \quad (2.4)$$

$$H^T(0) = [1, 0, \dots, 0] \quad (2.5)$$

函數 $\phi_a(x-x_l)$ 稱為核心函數 (kernel function) 可選用三次 B-spline

$$\phi_a(z) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4z^2 + 4z^3, & 0 \leq z < \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4z + 4z^2 - \frac{4}{3}z^3, & \frac{1}{2} \leq z < 1 \\ 0, & z \geq 1 \end{cases}, \quad z = \frac{|x-x_l|}{a} \quad (2.6)$$

或五次 B-spline

$$\phi_a(z) = \begin{cases} \frac{11}{20} - \frac{9z^2}{2} + \frac{81z^4}{4} - \frac{81z^5}{4}, & 0 \leq z < \frac{1}{3} \\ \frac{17}{40} + \frac{15z}{8} - \frac{63z^2}{4} + \frac{135z^3}{4} - \frac{243z^4}{8} + \frac{81z^5}{8}, & \frac{1}{3} \leq z < \frac{2}{3} \\ \frac{81}{40} - \frac{81z}{8} + \frac{81z^2}{4} - \frac{81z^3}{4} + \frac{81z^4}{8} - \frac{81z^5}{40}, & \frac{2}{3} \leq z < 1 \\ 0, & z \geq 1 \end{cases}, \quad z = \frac{|x-x_l|}{a} \quad (2.7)$$

其中 a 表示核心函數的半徑。此半徑可隨不同位置改變，可令 x_l 位置之核心函數的半徑為 a_l ，此組核心函數的半徑大小不可太過懸殊（稱之為擬一致分佈）。

接下來將介紹如何推導出形式如(2.2)的再生核心基底函數。

假設基底函數由修正函數 $C(x; x - x_l)$ 及核心函數 $\phi_a(x - x_l)$ 組合而成

$$\psi_l(x) = C(x; x - x_l) \phi_a(x - x_l), \quad x_l \in S \quad (2.8)$$

修正函數再經由多項式函數建構出來，可進一步表示成向量內積形式如下

$$C(x; x - x_l) = \sum_{i=0}^p (x - x_l)^i b_i(x) =: H^T(x - x_l) b(x) \quad (2.9)$$

其中 $b_i(x)$ 為係數，稍後可推導出。

基底函數(2.8)滿足下列再生性 (reproducing conditions)

$$\sum_{l=1}^{Np} \psi_l(x) x_l^i = x^i, \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (2.10)$$

或寫成

$$\sum_{l=1}^{Np} C(x; x - x_l) \phi_a(x - x_l) x_l^i = x^i, \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (2.11)$$

由數學歸納法可證明(2.11)式是等價於下列式子

$$\sum_{l=1}^{Np} C(x; x - x_l) \phi_a(x - x_l) (x - x_l)^i = \delta_{i0}, \quad i = 0, 1, \dots, p \quad (2.12)$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker delta。

可進一步將(2.12)寫成向量形式，如下

$$\sum_{l=1}^{Np} C(x; x - x_l) \phi_a(x - x_l) H(x - x_l) = H(0) \quad (2.13)$$

若將修正函數(2.9)放入式(2.13)中，可得到

$$\sum_{l=1}^{Np} H(x - x_l) H^T(x - x_l) \phi_a(x - x_l) b(x) = H(0) \quad (2.14)$$

簡記為矩陣形式

$$M(x) b(x) = H(0) \quad (2.15)$$

其中 $M(x)$ 矩陣為

$$M(x) = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{Np} \phi_a(x-x_l) & \sum_{l=1}^{Np} (x-x_l)\phi_a(x-x_l) & \cdots & \sum_{l=1}^{Np} (x-x_l)^p \phi_a(x-x_l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{l=1}^{Np} (x-x_l)^p \phi_a(x-x_l) & \sum_{l=1}^{Np} (x-x_l)^{p+1} \phi_a(x-x_l) & \cdots & \sum_{l=1}^{Np} (x-x_l)^{2p} \phi_a(x-x_l) \end{bmatrix}$$

其規模為 $(p+1) \times (p+1)$ ，通常 p 取 2 或 3，因此反矩陣很容易被計算出來。

從式(2.15)，我們得到係數向量，如下

$$b(x) = M^{-1}(x)H(0) \quad (2.16)$$

再將此結果代入修正函數(2.9)式中，得到

$$\begin{aligned} C(x; x-x_l) &= H^T(x-x_l)M^{-1}(x)H(0) \\ &= H^T(0)M^{-1}(x)H(x-x_l) \end{aligned} \quad (2.17)$$

因此，逼近函數(2.1)變成

$$\begin{aligned} f^h(x) &= \sum_{l=1}^{Np} d_l C(x; x-x_l) \phi_a(x-x_l) \\ &= \sum_{l=1}^{Np} d_l H^T(x-x_l) b(x) \phi_a(x-x_l) \\ &= \sum_{l=1}^{Np} d_l H^T(x-x_l) M^{-1}(x) H(0) \phi_a(x-x_l) \\ &= \sum_{l=1}^{Np} d_l H^T(0) M^{-1}(x) H(x-x_l) \phi_a(x-x_l) \\ &=: \sum_{l=1}^{Np} d_l \psi_l(x) \end{aligned}$$

其中基底函數定義如下

$$\psi_l(x) = H^T(0) M^{-1}(x) H(x-x_l) \phi_a(x-x_l) \quad (2.18)$$

其中心點為 x_l ，核心函數半徑為 a 之局部函數。

第二節 再生核心函數的微分

前一節已介紹核心基底函數由修正函數及核心函數組成

$$\psi_l(x) = C(x; x - x_l) \phi_a(x - x_l) \quad (2.19)$$

所以，再生核心基底函數其一階微分可根據乘法原理得到

$$\psi_{l,x}(x) = C_{,x}(x; x - x_l) \phi_a(x - x_l) + C(x; x - x_l) \phi_{a,x}(x - x_l) = \psi'_l(x) \quad (2.20)$$

修正函數及其導函數分別為

$$C(x; x - x_l) = H^T(0) M^{-1}(x) H(x - x_l) \quad (2.21)$$

$$C_{,x}(x; x - x_l) = H^T(0) M^{-1}_{,x}(x) H(x - x_l) + H^T(0) M^{-1}(x) H_{,x}(x - x_l) \quad (2.22)$$

其中 $M(x)$ 矩陣及其導函數如下

$$M(x) = \sum_{l=1}^{NP} H(x - x_l) H^T(x - x_l) \phi_a(x - x_l) \quad (2.23)$$

$$M_{,x}(x) = \sum_{l=1}^{NP} \{ H_{,x}(x - x_l) H^T(x - x_l) \phi_a(x - x_l) + H(x - x_l) H_{,x}^T(x - x_l) \phi_a(x - x_l) + H(x - x_l) H^T(x - x_l) \phi_{a,x}(x - x_l) \} \quad (2.24)$$

$M(x)$ 矩陣之反矩陣的一階微分，即式中之 $M^{-1}_{,x}(x)$ ，可利用隱微分技巧推導出來。因為

$$M(x) M^{-1}(x) = \mathbf{I} \quad (2.25)$$

其中 \mathbf{I} 是單位矩陣。我們在兩端取微分可得

$$\frac{d}{dx} (M(x) M^{-1}(x)) = \frac{d}{dx} \mathbf{I} \quad (2.26)$$

再根據乘法原理

$$M_{,x}(x) M^{-1}(x) + M(x) M^{-1}_{,x} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

其中 $\mathbf{0}$ 為零矩陣。移項整理可得

$$M^{-1}_{,x} = -M^{-1}(x) M_{,x}(x) M^{-1}(x) \quad (2.28)$$

導函數(2.28)在建立基底之導函數(2.20)時需用到。

第三節 再生核心函數之基本性質

接下來看再生核心函數之基本性質。考慮一維定義域 $\Omega = \{x | 0 < 1 < x\}$ ，在 $\bar{\Omega}$ 中取 Np 個質點，此組質點可為等距點集亦可為不等距質點。若不等距，其原則是點分佈不可太過懸殊（擬一致分布）。選用三階 B-spline 如(2.6)當核心函數，核心函數半徑將隨其基底的階數變化。在第一節中已介紹過核心基底是透過再生性推導出來的，在此我們先檢視此項性質。此組基底函數本身滿足

$$\sum_{l=1}^{Np} \psi_l(x) x_l^k = x^k, \quad k=0,1,\dots,p \quad (2.29)$$

而其一階導函數滿足

$$\sum_{l=1}^{Np} \psi_l'(x) x_l^k = kx^{k-1}, \quad k=0,1,\dots,p \quad (2.30)$$

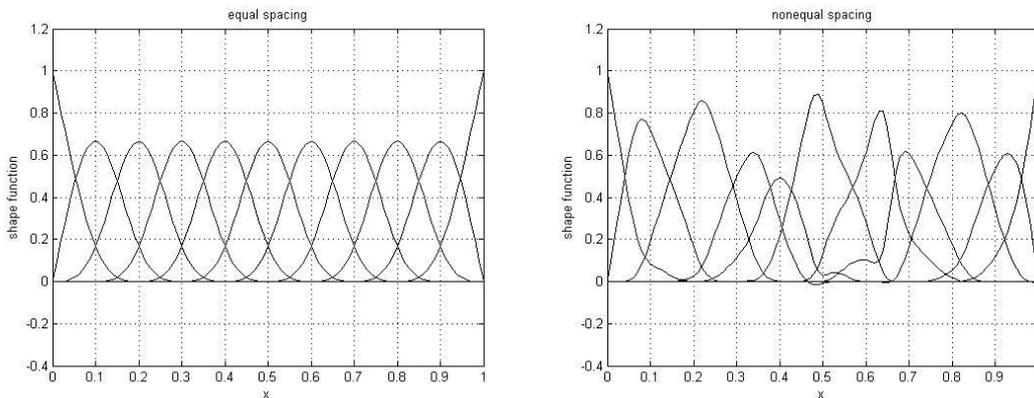
下面各圖考慮 $Np=11$ ，在 $\bar{\Omega}$ 中，左圖是取

$$\{x_l\}_{l=1}^{Np} = \{0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$$

為等距質點，而右邊是取

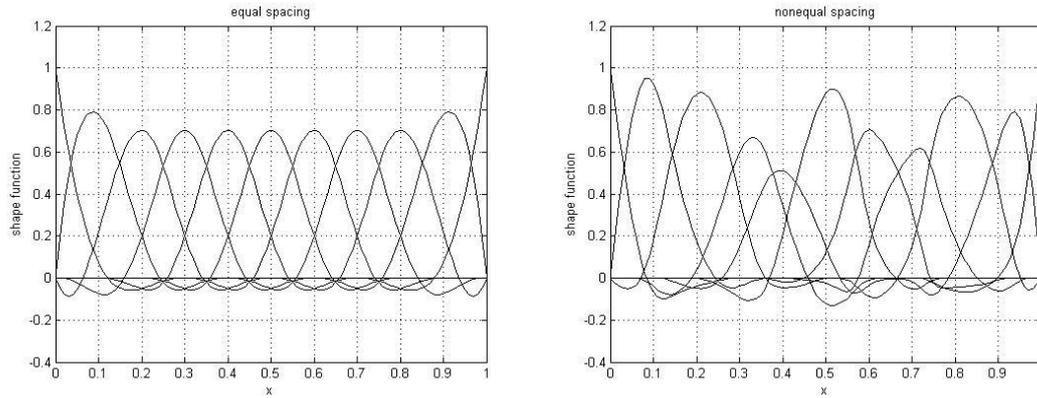
$$\{x_l\}_{l=1}^{Np} = \{0.0, 0.08, 0.22, 0.34, 0.4, 0.48, 0.64, 0.69, 0.82, 0.93, 1.0\}$$

為非等距質點。如圖一是當核心函數半徑為 $a=0.2$ ，修正函數是一階， $p=1$ 。



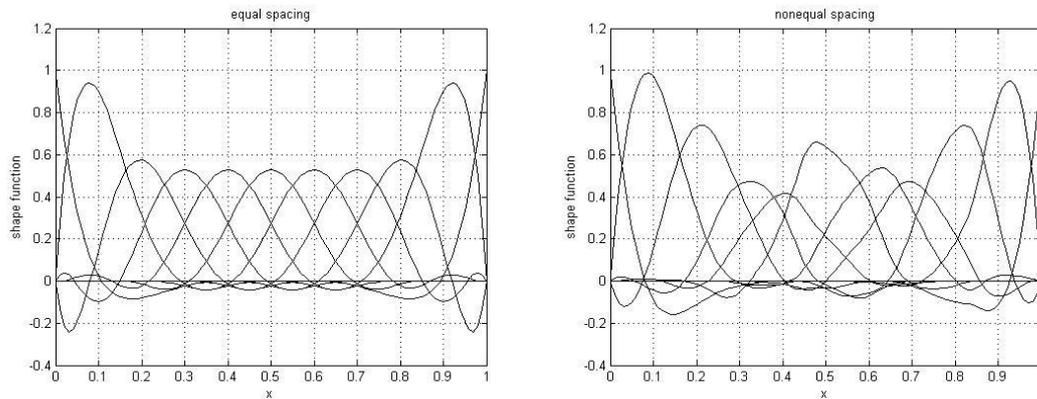
圖一：一階再生核心函數 ($p=1, a=0.2$)

如圖二是當核心函數半徑為 $a=0.3$ ，修正函數是二階， $p=2$ 。



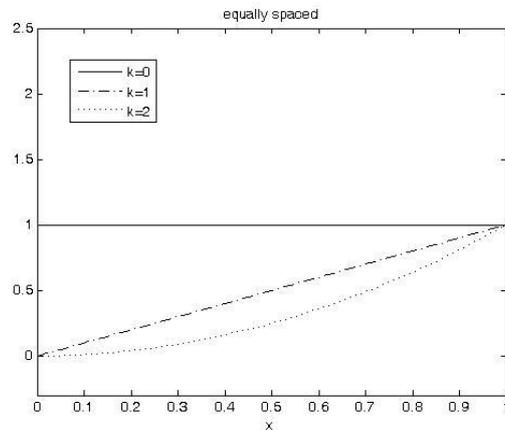
圖二：二階再生核心函數 ($p=2$, $a=0.3$)

如圖三是當核心函數半徑為 $a=0.4$ ，修正函數是三階， $p=3$ 。



圖三：三階再生核心函數 ($p=3$, $a=0.4$)。

由圖一至圖三可觀察到：當階數增加，半徑選取隨之增大，每個基底形狀變寬且變矮。但都滿足再生性，見下面圖四。



圖四：再生核心函數之再生性 ($p=2$, $a=0.3$)。

另外核心函數另具有二個性質如下述：

- (i) 再生基底函數的可微性是依賴於核心函數的平滑性。
- (ii) 核心函數的半徑不可太小，否則將導致矩陣 M 變得奇異，其反矩陣不存在，因此無法建構出一組適合的基底來。若核心函數的半徑過大也不好，會使得離散系統的穩定性變差。

第四節 再生核心函數之反估計式

此章最後來探討基底函數的高階微分之反估計。

假設函數 $v(x)$ 是由一組再生核心基底函數線性組合而成

$$v(x) = \sum_{I=1}^{N_p} b_I \psi_I(x), \quad V = \text{span} \{ \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_p} \} \quad (2.31)$$

假設質點集為擬一致分佈[4]，則函數 $v(x)$ 具有下列關係

$$\|v\|_{\ell, \Omega} \leq C_1 a^{-\ell} n^{2\ell} \|v\|_{0, \Omega}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (2.32)$$

$$\|v\|_{\ell, \Gamma} \leq C_2 \bar{a}^{\ell} \bar{h}^{2\ell} \|v\|_{\ell, \Omega}, \quad \ell = 1, 2, 3, \dots \quad (2.33)$$

$$\|v_x\|_{\ell, \Gamma} \leq C_3 a^{-(\ell+1)} n^{2(\ell+1)} \|v\|_{1, \Omega}, \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

其中 Γ 表示 Ω 之邊界，而 C_1, C_2 和 C_3 是與 a, n 及 ℓ 無關之常數。 $\|\cdot\|$ 是標準 Sobolev 範數。在後面的收斂性及穩定性分析中，將需引用這些不等式去做詳細估計。

第三章 再生核心質點法

第一節 方程式及弱型式

考慮下列橢圓特徵問題

$$-u'' = \lambda u \quad \text{in } \Omega = (0, 1) \quad (3.1)$$

邊界條件

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (3.2)$$

它的特徵值為

$$\lambda_k = k^2 \pi^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

而特徵函數為

$$u_k = \sqrt{2} \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

特徵函數具有下列性質

$$(u_j, u_k) = \int_0^1 u_j(x) u_k(x) dx = \delta_{jk} \quad (3.5)$$

特徵問題(3.1)-(3.2)的弱型式如下

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad u, v \in H^1(\Omega) \quad (3.6)$$

其中雙線性型式定義為

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx \quad (3.7)$$

而泛函空間 $H^1(\Omega)$ 定義如下

$$H^1(\Omega) = \{v \mid v, v' \in L^2(\Omega), v(0) = v(1) = 0\} \quad (3.8)$$

它是標準 Sobolev 空間，相應的一範數如下：

$$\|v\|_{1,\Omega} = \left\{ \int_0^1 (v^2 + (v')^2) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

此外，另一重要 Rayleigh 商型式為[7,8]

$$Q(v) = \frac{a(v, v)}{(v, v)}, \quad v \in H^1(\Omega) \quad (3.10)$$

其中 $a(\cdot, \cdot)$ 及 (\cdot, \cdot) 定義如(3.7)及(3.5)式。

雙線性型式 $a(\cdot, \cdot)$ 與一範數(3.9)具下列關係，我們令 $u, v \in H^1(\Omega)$

$$a(u, v) \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (3.11)$$

$$a(v, v) \geq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (3.12)$$

接下來我們選用 N_p 個再生核心函數形成一個有限維空間，記為 V_h^p 如下：

$$V_h^p = \text{span} \{ \psi_1, \dots, \psi_{N_p} \} \quad (3.13)$$

其中 ψ_j 是以 x_j 為中心點的再生核心函數，其階為 p ，而 $p \geq 1$ 。

再令 P 是 Rayleigh-Ritz 投影，可得

$$Pu \in V_h^p, \quad u \in H^1(\Omega) \quad (3.14)$$

以及投影性

$$a(u - Pu, v^h) = 0 \quad \forall v^h \in V_h^p \quad (3.15)$$

和插值估計[9]如下

$$\|u - Pu\|_{s, \Omega} \leq C \alpha^{p+1-s} \|u\|_{p+1, \Omega} \quad (3.16)$$

其中 $s = 0, 1, 2, \dots$ 。

由弱型式(3.6)可衍生再生核心質點法如下：

$$a(u^h, v^h) = \lambda^h (u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h^p \quad (3.17)$$

其中 (λ^h, v^h) 是近似的特徵對，我們令近似特徵函數可以表成

$$u^h = \sum_{j=1}^{N_p} b_j \psi_j \quad (3.18)$$

及令 $v^h = \psi_k$ ，則(3.17)可進一步寫成

$$a\left(\sum_{j=1}^{Np} b_j \psi_j, \psi_k\right) = \lambda^h \cdot \left(\sum_{j=1}^{Np} b_j \psi_j, \psi_k\right), \quad \forall k \quad (3.19)$$

再整理成

$$\sum_{j=1}^{Np} b_j a(\psi_j, \psi_k) = \lambda^h \cdot \sum_{j=1}^{Np} b_j (\psi_j, \psi_k), \quad \forall k \quad (3.20)$$

寫成矩陣型式

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{K}^h \\ \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{Np} \end{array} \right] \end{array} \right] = \lambda^h \left[\begin{array}{c} \mathbf{M}^h \\ \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{Np} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (3.21)$$

其中矩陣元素分別為

$$[\mathbf{K}^h]_{k,j} = a(\psi_k, \psi_j) = \int_0^1 \psi_k' \psi_j' dx, \quad k, j = 1, 2, \dots, Np \quad (3.22)$$

$$[\mathbf{M}^h]_{k,j} = (\psi_k, \psi_j) = \int_0^1 \psi_k \psi_j dx, \quad k, j = 1, \dots, Np \quad (3.23)$$

若將係數向量記為 \mathbf{x}

$$\mathbf{x}^T = [b_1, b_2, \dots, b_{Np}] \quad (3.24)$$

矩陣特徵問題(3.21)表為

$$\mathbf{K}^h \mathbf{x} = \lambda^h \mathbf{M}^h \mathbf{x} \quad (3.25)$$

矩陣 \mathbf{K}^h 及 \mathbf{M}^h 皆為帶狀的稀疏矩陣，分別稱為剛度矩陣 (Stiffness matrix) 及質量矩陣 (Mass matrix)。此兩矩陣的帶寬皆為 $2\omega-1$ ，而 ω 是一覆蓋數，是每兩質點所形成的區域中，被核心基底函數覆蓋的數目。

若考慮再生核心階 $p=1$ ，且質點均勻分佈，半徑 a 選取不同，帶寬將會隨之改變。例如：

$$2\omega-1 = \begin{cases} 3, & \text{當 } a = 1.0001h \\ 7, & \text{當 } h < a \leq 2h \\ 11, & \text{當 } 2h < a \leq 3h \end{cases} \quad (3.26)$$

解特徵系統(3.25)則採用 QZ algorithm[10]

第二節 收斂性研究

解離散系統(3.25)所得到近似的特徵對 (Eigenpair) 與真實的特徵對(3.3)及(3.4)的誤差多大，是接下來我們要探討的重點。

由矩陣理論可知，最小特徵值為

$$\lambda_1 = \min_{v \in H^1(\Omega)} Q(v) \quad (3.27)$$

而近似的最小特徵值為

$$\lambda_1^h = \min_{v^h \in V_h^p} Q(v^h) \quad (3.28)$$

因 $V_h^p \subseteq H^1(\Omega)$ ，所以

$$\lambda_1^h \geq \lambda_1 \quad (3.29)$$

其他的特徵值，也具有相同的關係，我們稍後介紹。

推導估計式之前需一些新的定義。我們考慮另一有限維空間 E_k ，假設它是由正交的特徵函數所構成

$$E_k = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_k\}, \quad k \geq 1 \quad (3.30)$$

相應的投影空間為

$$S_k = PE_k = \text{span}\{Pu_1, Pu_2, \dots, Pu_k\} \quad (3.31)$$

可擴張成無窮維度空間 S

$$S_k \subseteq S \quad (3.32)$$

利用 minmax 原理[7]，可得

$$\lambda_k^h = \min_{S_k \subset S} \max_{v^h \in S_k} Q(v^h) \quad (3.33)$$

進一步可得下列引理。

引理 1 令 λ_k 為特徵問題(3.1)-(3.2)的特徵值，而 λ_k^h 定義如(3.33)是近似的特徵

值，則存在下列關係

$$\lambda_k^h \leq \frac{\lambda_k}{1-\gamma} \quad (3.34)$$

其中

$$\gamma = \max_{u \in E_k} |a(u, u - Pu) - (u - Pu, u - Pu)| \quad (3.35)$$

若此 γ 值滿足 $\gamma < \frac{1}{2}$ ，則(3.34)可再表成下式

$$\lambda_k^h \leq \lambda_k + 2\gamma \quad (3.36)$$

證明： 由(3.33)，我們可得

$$\begin{aligned} \lambda_k &\leq \max_{v^h \in S_k} Q(v^h) \\ &= \max_{Pu \in S_k} \frac{a(Pu, Pu)}{(Pu, Pu)} \\ &\leq \max_{\substack{Pu \in S_k \\ u \in E_k}} \frac{a(u, u)}{(Pu, Pu)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

因為 $u \in E_k$ ，所以 $(u, u) = 1$ 。再利用下面等式

$$Pu = u - u + Pu = u - (u - Pu) \quad (3.38)$$

估計式(3.37)的分子和分母改變成

$$\begin{aligned} \lambda_k^h &\leq \max_{u \in E_k} \frac{\lambda_k(u, u)}{(u, u) - 2(u, u - Pu) + (u - Pu, u - Pu)} \\ &= \max_{u \in E_k} \frac{\lambda_k \cdot 1}{1 - 2a(u, u - Pu) + (u - Pu, u - Pu)} \\ &\leq \max_{u \in E_k} \frac{\lambda_k}{1 - \gamma} \end{aligned} \quad (3.39)$$

其中 γ 定義為

$$\gamma = \max_{u \in E_k} |a(u, u - Pu) - (u - Pu, u - Pu)| \quad (3.40)$$

值比 1 小。根據級數性質

$$\frac{1}{1-\gamma} = 1 + \gamma + \gamma^2 + \gamma^3 + \dots \leq 1 + 2\gamma \quad (3.41)$$

估計式(3.39)可寫成

$$\lambda_k^h \leq \lambda_k + 2\gamma \quad ; \quad (3.42)$$

得證。■

接下來得對 γ 值做估計，從下面兩個引理開始。

引理 2 令 $u = \sum b_k u_k$ ， $u_k \in E_k \subseteq H^1(\Omega)$ ，及投影性

$$a(u - Pu, u - Pu) \quad (3.43)$$

可得到下列結果

$$(u_k, u - Pu) = a(\sum b_k \lambda_k^{-1} (u_k - Pu_k), u - Pu) \quad (3.44)$$

證明： 因為 $u = \sum b_k u_k$ ，考慮單一項的弱型式如下：

$$a(u_k, u - Pu) = \lambda_k^{-1} a(u_k - Pu_k, u - Pu) \quad (3.45)$$

移項可得

$$(u_k, u - Pu) = \lambda_k^{-1} a(u_k, u - Pu) \quad (3.46)$$

利用投影性

$$a(Pu_k, u - Pu) \quad (3.47)$$

因此，(3.46)變成

$$\begin{aligned} (u_k, u - Pu) &= \lambda_k^{-1} \{ a(u_k, u - Pu) - 0 \} \\ &= \lambda_k^{-1} \{ a(u_k, u - Pu) - a(Pu_k, u - Pu) \} \\ &= \lambda_k^{-1} a(u_k - Pu_k, u - Pu) \end{aligned} \quad (3.48)$$

合併所有項及利用(3.48)式，可得

$$\begin{aligned} (u - Pu, u - Pu) &= \sum b_k (u_k - Pu_k, u - Pu) \\ &= \sum b_k a(u_k - Pu_k, u - Pu) \\ &= \sum b_k \lambda_k^{-1} a(u_k - Pu_k, u - Pu) \end{aligned} \quad (3.49)$$

得證。■

接下來估計上述引理的上界，此處我們需利用下面的不等式：

$$\|u\|_{p+1,\Omega} \leq \left\| \sum b_k \lambda_k^{p+1/2} u_k \right\|_{0,\Omega} \quad (3.50)$$

其實上式(3.50) 利用了 $-u_k'' = \lambda_k u_k$ 的關係推得的。

引理 3 令 $u \in E_k$ 及引理 2 成立，可得下面估計

$$|(u, u - Pu)| \leq C_2 a^{2p} \lambda_k^p \quad (3.51)$$

其中是 a 核心半徑，而 p 是核心函數的階，而 C_2 是一個常數。

證明： 首先利用(3.11)雙線性型式的不等關係，插值估計(3.16)，以及不等式(3.50)，我們可得

$$\begin{aligned} |(u, u - Pu)| &= \left| a \left(\sum b_k \lambda_k^{-1} (u_k - Pu_k), u - Pu \right) \right| \\ &\leq C_1 \left\| \sum b_k \lambda_k^{-1} (u_k - Pu_k) \right\|_{1,\Omega} \cdot \|u - Pu\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_1 a^{p+1} \cdot \left\| \sum b_k \lambda_k \bar{u}_k \right\|_{p+1,\Omega} \cdot a^{p+1} \|u\|_{p+1,\Omega}^2 \\ &= C_1 a^{2p} \left\| \sum b_k \lambda_k \bar{u}_k \right\|_{p+1,\Omega} \cdot \left\| \sum b_k u_k \right\|_{p+1,\Omega} \\ &\leq C_1 a^{2p} \left\| \sum b_k \lambda_k^{-1} \lambda_k^{p+1/2} u_k \right\|_{0,\Omega} \cdot \left\| \sum b_k \lambda_k^{p+1/2} u_k \right\|_{0,\Omega} \\ &\leq C_2 a^{2p} \lambda_k^{p+1} \cdot \lambda_k^{-1} \|u_k\|_{0,\Omega}^2 \\ &= C_2 a^{2p} \cdot \lambda_k^p \end{aligned} \quad (3.52)$$

其中 $\|u_k\|_{0,\Omega} = 1$ ，因此(3.51)得證。■

接下列估計 γ 值中第二項，見下面引理。

引理 4 令 $u \in E_k$ ，利用(3.16)插值估計式可得

$$(u - \mathbb{P}u, u - \mathbb{P}u) \leq C_3 a^{2(p+1)} \lambda_k^{p+1} \quad (3.53)$$

其中是 a 核心半徑， p 是核心函數的階，而 C_3 是一常數。

證明： 因為

$$(u - \mathbb{P}u, u - \mathbb{P}u) = \|u - \mathbb{P}u\|_{0,\Omega}^2 \quad (3.54)$$

再利用插值估計(3.16)如下

$$\|u - \mathbb{P}u\|_{0,\Omega} \leq C a^{p+1} \|u\|_{p+1,\Omega} \quad (3.55)$$

則(3.54)變成

$$\begin{aligned} (u - \mathbb{P}u, u - \mathbb{P}u) &\leq C^2 a^{2(p+1)} \|u\|_{p+1,\Omega}^2 \\ &= C^2 a^{2(p+1)} \left\| \sum b_k u_k \right\|_{p+1,\Omega}^2 \\ &\leq C' a^{2(p+1)} \left\| \sum b_k \lambda_k^{p+1/2} u_k \right\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq C_3 a^{2(p+1)} \lambda_k^{p+1} \end{aligned} \quad (3.56)$$

因此，(3.53)式得證。■

結合上述引理 1 到引理 4，可得下面定理。

定理 1 令 λ_k 為特徵問題(3.1)–(3.2)的特徵值，而 λ_k^h 是近似特徵值，他們的誤差如下

$$\lambda_k^h - \lambda_k \leq C_4 a^{2p} \lambda_k^{p+1} \quad (3.57)$$

其中是 a 核心半徑， p 是核心函數的階，而 C_4 是一常數。

證明： 從引理 1 可知

$$\lambda_k^h \leq \lambda_k + 2 \gamma \quad (3.58)$$

再進一步把引理 3 和引理 4 結合，可得

$$\begin{aligned}
\gamma &\leq C_2 a^{2p} \lambda_k^p + C_3 a^{2h} \lambda_k^{p+h} \\
&\leq C_2 a^{2p} \lambda_k^{p+h} + C_3 a^{2h} (\lambda_k^{p+h}) \\
&\leq C_4 a^{2p} \lambda_k^{p+h}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

其中 $C_2' = \frac{C_2}{\lambda_k}$ ， $C_4 = \max\{C_2', C_3\}$ 。因此，不等式(3.58)變成

$$\lambda_k^h \leq \lambda_k + C_4 a^{2p} \lambda_k^{p+h} \tag{3.60}$$

得證。■

由上述定理 1 及(3.55)式可知：特徵值的誤差的收斂情形相當好，它是特徵函數誤差的平方倍。我們有下面一個推論。

推論 1 令 (λ_k, u_k) 為特徵問題(3.1)-(3.2)的真實特徵對，而 (λ_k^h, u_k^h) 是近似的特徵對，存在下列估計

$$\lambda_k^h - \lambda_k \approx O(\|u_k^h - u_k\|_{1,\Omega}^2) \tag{3.61}$$

其中

$$\|u_k - u_k^h\|_{1,\Omega} \leq C a^p \lambda_k^{p+1/2} \tag{3.62}$$

且 a 為核心半徑， p 為核心函數階而 C 為一常數。

當考慮不同核心函數階時，收斂不一樣，見下面的說明。

附註 1 近似特徵值 λ_k^h 收斂至 λ_k ，具下列性質

$$\frac{\lambda_k^h - \lambda_k}{\lambda_k} = \begin{cases} O(a^2 \cdot \lambda_k) & , \text{當 } p=1 \\ O(a^4 \cdot \lambda_k^2) & , \text{當 } p=2 \\ O(a^6 \cdot \lambda_k^4) & , \text{當 } p=3 \end{cases} \tag{3.63}$$

同為核心半徑 a 與質點距 h 成正比關係

$$a = (n + \delta)h, \quad a = O(h) \quad (3.64)$$

因此，收斂性(3.63)可寫成

$$\frac{\lambda_k^h - \lambda_k}{\lambda_k} = \begin{cases} O(h^2), & \text{當 } p=1 \\ O(h^4), & \text{當 } p=2 \\ O(h^6), & \text{當 } p=3 \end{cases} \quad (3.65)$$

此收斂情況相似於有限元素法。在下一章節我們將有數值結果來驗證我們這些理論的分析。

第四章 數值範例

第一節 特徵系統

在第三章第一節中有介紹過再生核心質點法是利用有限個再生核心基底組成一空間向量，再透過弱型式(3.17)在此有限維空間求出最優的特徵對，原特徵問題(3.1)-(3.2)轉變成矩陣特徵問題為

$$\mathbf{K}^h \mathbf{x} = \lambda^h \mathbf{M}^h \mathbf{x} \quad (4.1)$$

其中 \mathbf{K}^h 定義如(3.22) 稱為剛度矩陣，而 \mathbf{M}^h 定義如(3.23)稱為質量矩陣，此兩者皆為稀疏帶狀矩陣。

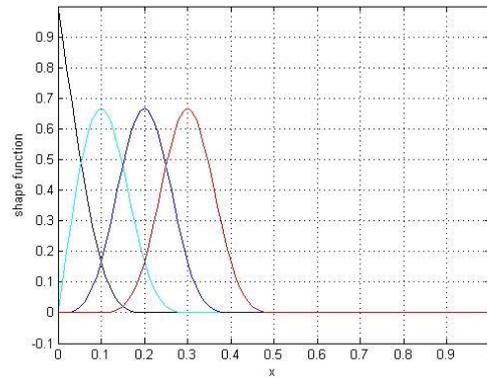
我們考慮一組均勻分布於[0,1]區間的質點，質點數 $Np=11$ ，作為再生核心函數的中心點，並選用一階 $p=1$ 且核心半徑 $a=2h$ ，其中 $h=1/(Np-1)$ ，其相應的剛度及質量矩陣如下：

$$\mathbf{K}^h = \begin{bmatrix} 13.355 & -4.693 & -1.319 & -0.003 & 0 & 0 \\ -4.693 & 12.036 & -4.696 & -1.319 & -0.003 & 0 \\ -1.319 & -4.696 & 12.036 & -4.696 & -1.319 & 0 \\ -0.003 & -1.319 & -4.696 & 12.036 & -4.696 & 0 \\ 0 & -0.003 & -1.319 & -4.696 & 12.036 & -4.696 \\ 0 & 0 & -0.003 & -1.319 & -4.696 & 12.036 \\ 0 & 0 & 0 & -0.003 & -1.319 & -4.696 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.003 & -1.319 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.003 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

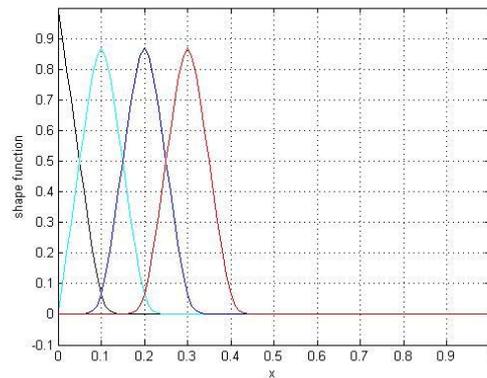
$$\mathbf{M}^h = \begin{bmatrix} 5.78E-2 & 2.03E-2 & 5.56E-4 & 3.00E-7 & 0 & 0 \\ 2.03E-2 & 5.83E-2 & 2.03E-2 & 5.56E-4 & 3.00E-7 & 0 \\ 5.56E-4 & 2.03E-2 & 5.83E-2 & 2.03E-2 & 5.56E-4 & 3.00E-7 \\ 3.00E-7 & 5.56E-4 & 2.03E-2 & 5.83E-2 & 2.03E-2 & 5.56E-4 \\ 0 & 3.00E-7 & 5.56E-4 & 2.03E-2 & 5.83E-2 & 2.03E-2 \\ 0 & 0 & 3.00E-7 & 5.56E-4 & 2.03E-2 & 5.83E-2 \\ 0 & 0 & 0 & 3.00E-7 & 5.56E-4 & 2.03E-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.00E-7 & 5.56E-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.00E-7 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

可見此兩矩陣帶寬為 7，如第三章第一節(3.26)所述。

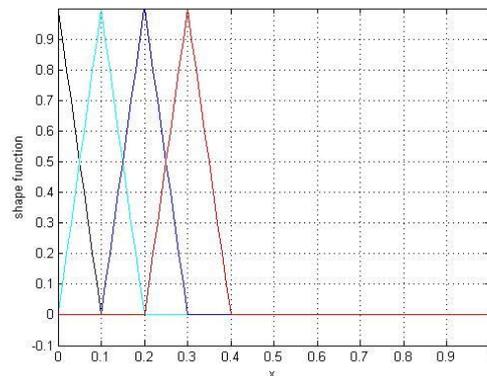
進一步我們發現，核心函數半徑逐漸縮小時，再生核心函數將變成有限元(線性元)的基底函數，可參考下圖五至圖七，其中核心半徑由 $a = 2h$ 變化為 $a = 1.5h$ 再變化為 $a = 1.0001h$ ，圖七可見，幾乎等於有限元的基底函數。



圖五：部分再生核心函數 ($n=1$ ， $h=0.1$ ， $a=2*h$)。



圖六：部分再生核心函數 ($n=1$ ， $h=0.1$ ， $a=1.5*h$)。



圖七：部分再生核心函數 ($n=1$ ， $h=0.1$ ， $a=1.0001*h$)。

對於 $a=1.0001h$ 為半徑的基底函數，我們得到相應的剛度及質量矩陣如下

$$\mathbf{K}^h = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{M}^h = \begin{bmatrix} 6.67E-2 & 1.67E-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.67E-2 & 6.67E-2 & 1.67E-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.67E-2 & 6.67E-2 & 1.67E-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.67E-2 & 6.67E-2 & 1.67E-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.67E-2 & 6.67E-2 & 1.67E-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.67E-2 & 6.67E-2 & 1.67E-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.67E-2 & 6.67E-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.67E-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

的確等同於有限元的矩陣。

其實再生核心質點法可視為推廣型的有限元素法，簡寫為 XFEM，它繼承了有限元素法的優點，其數學分析方法及線性系統建構模式與有限元素法，如出一轍。在有限元素法中，先透過單元分析，得出局部最優結果再整合成一個完整系統。而再生核心質點法中，也先對於局部小區域 (support) 作最優估計，再予以整合。在此特徵問題上，我們得到一個廣泛型矩陣特徵系統，所以用 QZ 演算法求出特徵對[10]，詳細結果於下一節討論。

第二節 收斂結果

上一節中我們已介紹過特徵系統中矩陣的結構，他們是帶狀的，帶寬隨核心半徑增大而增加。核心半徑加大雖可改進誤差值，但另一方面，捨入誤差也相對地增加，穩定性變差。所以，核心半徑的選取，原則是再生核心函數階數加 1 倍的質點距，亦即

$$a = (p+1) \cdot h, \quad p = \dots, 1 \quad (4.6)$$

下面我們就來了解特徵值及特徵函數的收斂狀況。我們考慮質點數等比加密如下 $Np = 6, 11, 21, 41, 81$ ，因此質點距為 $h = 1/5, 1/10, 1/20, 1/40$ 及 $1/80$ 。

表一是選用一階再生核心基底函數 ($p=1$ 且 $a=2h$) 的結果。我們僅列出前四個特徵對之誤差及誤差下降率供參考。

k	Np	$\ u_k^h - u_k\ _{0,\Omega}$	Ratio	$\lambda_k^h - \lambda_k$	Ratio
1	6	6.12E-2		3.54E-2	
	11	1.58E-2	3.87	8.02E-3	4.42
	21	3.93E-3	4.01	1.95E-3	4.11
	41	9.82E-4	4.00	4.85E-4	4.03
	81	2.45E-4	4.00	1.21E-4	4.00
2	6	2.63E-1		8.04E-1	
	11	6.12E-2	4.30	1.41E-1	5.67
	21	1.58E-2	3.87	3.21E-2	4.42
	41	3.93E-3	4.02	7.81E-3	4.11
	81	9.82E-4	4.00	1.94E-3	4.02
3	6	6.62E-1		6.22	
	11	1.49E-1	4.44	8.39E-1	7.41
	21	3.58E-2	4.17	1.70E-1	4.95
	41	8.87E-3	4.04	3.99E-2	4.23
	81	2.21E-3	4.01	9.85E-3	4.06
4	6	1.30		2.41E+1	
	11	2.63E-1	4.94	3.22	7.47
	21	6.12E-2	4.30	5.68E-1	5.67
	41	1.58E-2	3.87	1.28E-1	4.42
	81	3.93E-3	4.02	3.13E-2	4.11

表一：特徵函數及特徵值之誤差及變化率(RKPM, $p=1$)

在第三章第二節的結論 1 知道，特徵值誤差收斂行為比特徵向量的誤差好很多，如果特徵向量誤差用一範數估計，則特徵值誤差是它的平方倍，參見(3.61)式。當考慮一階再生核心函數時，理論上應有的收斂率如下：

$$\|u_k^h - u_k\|_{1,\Omega} \approx O(a^1) \approx O(h^1) \quad (4.7)$$

$$\|u_k^h - u_k\|_{0,\Omega} \approx O(a^2) \approx O(h^2) \quad (4.8)$$

以及

$$\lambda_k^h - \lambda_k \approx O(a^2) \approx O(h^2) \quad (4.9)$$

表一的數值結果顯示當質點數加倍時，特徵值及特徵函數誤差呈現 4 倍遞減，也就是具有 $O(h^2)$ 的收斂行為與理論(4.8)及(4.9)相吻合。

接下來看當選用二階再生核心基底函數 ($p=2$ 且 $a=3h$) 的結果。表列於表二，同樣介紹前 4 個特徵對。

k	Np	$\ u_k^h - u_k\ _{0,\Omega}$	Ratio	$\lambda_k^h - \lambda_k$	Ratio
1	6	9.06E-3		1.10E-2	
	11	8.12E-4	11.16	3.75E-4	29.19
	21	8.23E-5	9.87	1.21E-5	30.96
	41	9.90E-6	8.32	3.75E-7	32.27
	81	1.30E-6	7.62	1.09E-8	34.40
2	6	8.61E-2		3.54E-1	
	11	9.88E-3	8.72	2.10E-2	17.02
	21	7.84E-4	12.61	7.51E-4	27.72
	41	8.18E-5	9.58	2.42E-5	30.99
	81	9.89E-6	8.28	7.51E-7	32.28
3	6	1.78E-1		1.80	
	11	4.06E-2	4.39	1.87E-1	6.30
	21	3.27E-3	12.01	8.07E-3	23.21
	41	2.97E-4	11.03	2.73E-4	29.56
	81	3.36E-5	8.82	8.64E-6	31.60
4	6	8.75E-1		3.85	
	11	8.04E-2	10.88	7.59E-1	5.08
	21	9.41E-3	8.54	4.18E-2	18.15
	41	7.71E-4	12.21	1.50E-3	27.79
	81	8.16E-5	9.45	4.85E-5	31.01

表二：特徵函數及特徵值之誤差及變化率(RKPM, $p=2$)

選用二階再生核心基底函數，理論上應有的收斂率如下：

$$\|u_k^h - u_k\|_{1,\Omega} \approx O(a^2) \approx O(h^2) \quad (4.10)$$

$$\|u_k^h - u_k\|_{0,\Omega} \approx O(a^3) \approx O(h^3) \quad (4.11)$$

以及

$$\lambda_k^h - \lambda_k \approx O(a^4) \approx O(h^4) \quad (4.12)$$

我們從表二數據可知特徵函數誤差呈現 8 倍遞減，與理論(4.11)相吻合，而特徵值則有超收斂的行為，它們呈現 32 倍遞減，理論上 $O(h^4)$ ，如(4.12)所述。

此外，我們還用傳統網格法求解同一特徵問題。表三是利用有限元素法中線性元 (linear FEM) 所得的結果。

k	Np	$\ u_k^h - u_k\ _{0,\Omega}$	Ratio	$\lambda_k^h - \lambda_k$	Ratio
1	6	4.05E-2		3.29E-1	
	11	1.17E-2	3.85	8.14E-2	4.04
	21	2.91E-3	4.01	2.03E-2	4.01
	41	7.27E-4	4.00	5.07E-3	4.00
	81	1.82E-4	4.00	1.27E-3	4.00
2	6	1.88E-1		5.41	
	11	4.50E-2	4.18	1.32	4.11
	21	1.17E-2	3.85	3.26E-1	4.04
	41	2.91E-3	4.01	8.12E-2	4.00
	81	7.27E-4	4.00	2.03E-2	4.00
3	6	4.46E-1		2.73E+1	
	11	1.08E-1	4.11	6.75	4.04
	21	2.64E-2	4.12	1.66	4.08
	41	6.56E-3	4.03	4.12E-1	4.01
	81	1.64E-3	4.01	1.03E-1	4.00
4	6	7.90E-1		6.99E+1	
	11	1.88E-1	4.20	2.16E+1	3.23
	21	4.50E-2	4.18	5.26	4.11
	41	1.17E-2	3.85	1.30	4.04
	81	2.91E-3	4.01	0.32	4.01

表三：特徵函數及特徵值之誤差及變化率 (linear FEM)

有限差分法 (FDM) 所得的結果，表列於下面表四。

k	Np	$\max u_k^h(x) - u_k(x) $	$\lambda_k^h - \lambda_k$	Ratio
1	6	0	3.20E-1	
	11	1.33E-15	8.09E-2	3.96
	21	4.00E-15	2.03E-2	3.99
	41	2.86E-14	5.07E-3	4.00
	81	7.82E-14	0.27E-3	4.00
2	6	2.22E-16	4.93	
	11	1.55E-15	1.28	3.85
	21	9.51E-15	3.24E-1	3.96
	41	5.32E-14	8.11E-2	3.99
	81	1.28E-13	2.03E-2	4.00
3	6	0	2.34E+1	
	11	1.67E-15	6.38	3.66
	21	6.22E-15	1.63	3.91
	41	3.33E-14	4.10E-1	3.98
	81	8.45E-14	1.03E-1	3.99
4	6	6.66E-16	6.75E+1	
	11	1.55E-15	1.97E+1	3.42
	21	5.26E-15	5.13	3.85
	41	1.59E-14	1.29	3.96
	81	4.85E-15	3.24E-1	3.99

表四：特徵函數及特徵值之誤差及變化率 (FDM)

我們由表一至表四，可觀察得知，有限元素法與有限差分法，其誤差的數量級差不多，與再生核心質點法相比，稍差些。

下面表五是將其中選 $Np = 41$ ，三種方法作一比較。整體看來，再生核心質點法比傳統網格法好。

	FEM	FDM	RKPM ($p=1$)	RKPM ($p=2$)
$\lambda_1^h - \lambda_1$	5.07E-3	5.07E-3	4.85E-4	3.75E-7
$\lambda_3^h - \lambda_3$	4,12E-1	4,10E-1	3.99E-2	2.73E-4

表五：第一及第三特徵值誤差之比較

第五章 結論

本文主要研究無網格法中的再生核心質點法求解特徵值問題的收斂性。在計算上常使用有限元素法或有限差分法，它們具有什麼樣的收斂性呢？一般知道特徵值誤差比特徵函數誤差好很多，而再生核心質點法呢？我們的理論與數值結果顯示其實也是如此。無網格法求解特徵值問題於近十年有相當多的研究，但再生核心質點法的理論結果，尚未見到。

本論文重點在誤差分析，數值結果與理論相吻合，我們結果顯示特徵函數誤差收斂行為如下

$$\|u_k^h - u_k\|_{s,\Omega} \approx O(a^{p+1-s}) \quad p = 1, 2, \dots, s, \quad (5.1)$$

誤差與核心半徑 a 及核心基底的階 p 有密切關係。而特徵值的誤差與特徵函數在一範數下 ($s=1$) 的誤差成平方關係，因此，我們得到

$$\lambda_k^h - \lambda_k \approx O(a^{2p}) \quad , p = \dots, 1 \quad (5.2)$$

第四章數值結果表一及表二與上述理論相吻合，可知當選用二階核心基底函數時效果最好，當然可選再高階，例如 $p=3$ ，但相對計算時間需更多，整體來看比網格法好。

參考文獻

- [1] W. K. Liu, T. Belytschko and J. T. Oden (Eds.) , Special Issue on Meshless Methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, 1996.
- [2] J. S. Chen and W. K. Liu (Eds.) , Special Issue on Meshfree Methods: Recent Advances and New Applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 193, 2004.
- [3] W. K. Liu, S. Jun and Y. F. Zhang, Reproducing kernel particle methods, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 20, pp. 1081-1106, 1995.
- [4] J. S. Chen, W. Han, Y. You, and X. Meng, A reproducing kernel method with nodal interpolation property, *Int J Numer. Methods Eng.*, Vol. 56 (2003), 935-960.
- [5] E. J. Kansa, Multiquadrics -A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics I & II , *Computer Math. Applic*, Vol.19, pp. 127-161, 1990.
- [6] R. Schaback, Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation, *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 3, pp. 251-264, 1995.
- [7] G. Strang and G. J. Fix, **An Analysis of the Finite Element Method**, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [8] M. G. Larson, A posteriori and priori error analysis for finite element approximations of self-adjoint elliptic eigenvalue problems, *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 38, No. 2, pp. 608-625.
- [9] H. Y. Hu, J. S. Chen and W. Hu, Error analysis of collocation method based on reproducing kernel approximation, *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, to appear, 2010.
- [10] G. H. Golub and C. F. Van Loan, **Matrix Computations**, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.