Tunghai Science Vol. 5: 55−70
July, 2003


# 用MATHEMATICA對自然數之負次方和的探討

沈淵源Yuan-Yuan Shen*

## Abstract

透過數學運算大師MATHEMATICA所提供的$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 之值，我們一起來探討這個無窮級數之和的公式。當$s=2m$ 爲正偶數之時，MATHEMATICA告訴我們$\zeta(2m)$ 爲$\pi^{2m}$ 的有理數倍。在數學運算大師MATHEMATICA的協助之下，我們將帶領你由這些個別的函數值$\zeta(2m)$ 來拼裝出整個公式的形式圖樣。至於$s$ 爲正奇數之時，MATHEMATICA卻不作任何的表態。事實上，連最簡單的$\zeta(3)$ 到目前爲止還是沒有一個公式如$\zeta(2m)$ 者存在。這有待您來繼續努力，無限的機會就擺在你面前，不是嗎？

## 1 無限多片的拼圖遊戲

談完自然數的正冪次方和 [13]之後，很自然的希望看看負冪次方和的情況。前者當然是發散級數，因此所謂的和指的是部分和，這已在前文 [13] 探討過了並得到一個很漂亮的公式：

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+(k-1)^n=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n+1\\ i\end{array}\right)B_ik^{n+1-i}\text{，}$$

此處$B_i$ 爲Bernoulli數($B_0=1,\ B_1=-1/2,\ B_2=1/6,\ B_3=B_5=\cdots=0,$
$B_4=-1/30,\ B_6=1/42,\ B_8=-1/30,\ B_{10}=5/66,\ B_{12}=-691/2730,$
$B_{14}=7/6,\ B_{16}=-3617/510,\ B_{18}=43867/798,\ B_{20}=-174611/330$)。

至於後者，那更是眾所皆知；只要是學過微積分的人都知道$p$級數收斂的充分而且必要條件爲$p>1$，亦即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\quad\text{是收斂的}\iff p>1\text{。}$$

*東海大學數學系

所以我們可以用這個無窮級數來定義一個在區間$(1,\infty)$ 上的函數且可將其定義域推廣至複數平面中實部大於1的那個半平面，通常稱之爲RIEMANN* ZETA 函數。

傳統上，我們用符號$\zeta(s)$來表示這個無窮級數的和，亦即

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\qquad s\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s)>1\text{。}$$

經解析延拓(continued analytically)之後，此函數是一個半純函數(meromorphic function)。現在先將此$s$限制在大於1的整數上，讓我們一起來探討這個級數的和是多少？

一般而言，求和的第一步就是先求其部分和$\zeta_N(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}$ 的公式，然後再經由此公式求其極限值$\lim_{N\to\infty}\zeta_N(s)$，此即$\zeta(s)$。在此我們逆向思考，利用數學運算大師MATHEMATICA所提供的$\zeta(s)$之值來探討此級數之和的公式。

當$s$爲一正偶數$2m$ 之時，MATHEMATICA告訴我們$\zeta(2m)$爲$\pi^{2m}$ 的有理數倍。怎麼樣從這些個別的函數值$\zeta(2m),\ m\in\mathbb{N}$來拼裝出原先整個公式的形式圖樣呢？這好比是在玩一盤具有無限多片的拼圖遊戲。每一個函數值$\zeta(2m),\ m\in\mathbb{N}$的本身都代表一片圖片，而將這些無限多的圖片拼成一幅圖畫，就相當於找出$\zeta(2m)$的公式。這不僅僅需要有源源不絕的靈感，更需要有活潑充沛的聯想力與豐富無比的想像力。在數學運算大師MATHEMATICA的協助之下，我們將帶領您透過這些個別的函數值$\zeta(2m),\ m\in\mathbb{N}$ 來拼裝出整個公式的形式圖樣。至於$s$ 爲正奇數之時，MATHEMATICA 卻不作任何的表態。事實上，連最簡單的$\zeta(3)$ 到目前爲止，還是沒有一個公式如$\zeta(2m)$者存在。這有待您繼續的努力與殷勤的探索，並可藉此來開闢一片新天地。無限的機會就擺在你面前，不是嗎？

---

***黎曼** BERNHARD RIEMANN (1826–1866)德國數學家。他是十九世紀數學的主要人物。在許多方面，他可以說是高斯(CARL FRIEDRICH GAUSS1777–1855)的傳人。冠上他名字的有Cauchy-Riemann方程式、Riemann曲面、Riemann幾何、Riemann微分方程式、Riemann積分、Riemann zeta函數以及Riemann假設。而這些正是他在數學上主要的工作。他1845年有名的演講「論幾何學之基礎假說」 [12]，呈現出他在幾何學上基本的理念，由此發展出一套「非歐幾何學」。進而成爲日後愛因斯坦(ALBERT EINSTEIN 1879–1955)拿來當成他描述我們這個宇宙的工具以及發展成爲二十世紀的流形理論(the theory of manifolds) 。

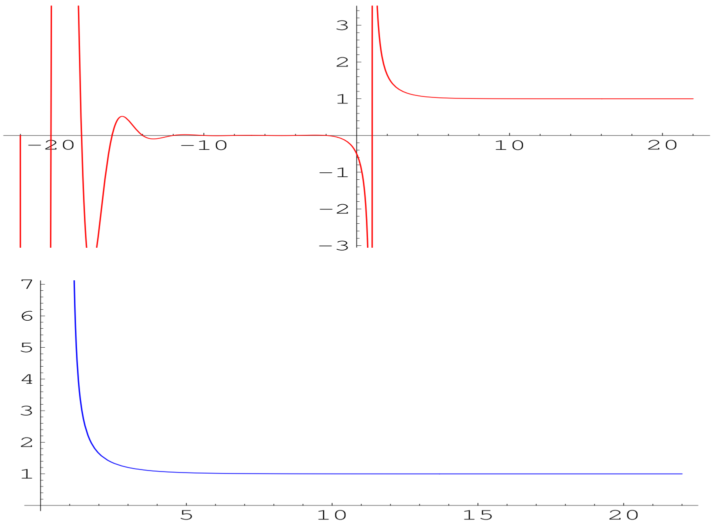


Figure 1: 函數$\zeta(s)$在區間$[-22,22]$與區間$[1,22]$的圖形。

## 2 一瞥$\zeta(s)$之值—MATHEMATICA管用嗎？

在MATHEMATICA中，盡可能的它會給你確定(exact)值。譬如在下面的例子當中，你輸入計算函數值$\zeta(3)$的指令`Zeta[3]`，而輸出呢也同樣是$\zeta(3)$；此乃因爲$\zeta(s)$爲其內建的函數，而$\zeta(3)$又沒有其他的表示法，所以MATHEMATICA認爲只有$\zeta(3)$能表達其確定值。若是要得到估計值，你只能用指令`N[Zeta[3],30]`來達成你的願望。

(a) 同時列出$\zeta(s)$, $s=2,3,4,\cdots 20$ 的確定值與近似值。

```
In[1]:= m={Table[Zeta[s],{s,2,20}],N[Table[Zeta[s],
        {s,2,20}],30]};Transpose[m]//MatrixForm
```

(b) 請問你有何發現？你能看出一般$\zeta(s)$ 的公式嗎？困難何在？

(c) 試試圖形又如何？你能看出一般$\zeta(s)$ 的公式嗎？困難何在？

```
In[2]:= pic1=Plot[Zeta[s],{s,-22,22},PlotStyle->
        RGBColor[1,0,0]];pic2=Plot[Zeta[s],{s,1,22},
        PlotStyle->RGBColor[0,0,1]];
        Show[GraphicsArray[{{pic1},{pic2}}]]
```

(d) 感覺上，圖形(見圖1) 似乎是不會有任何的幫助，所以只好專注在(a)部份之列表。用矩陣形式顯示如下：

$$
\begin{pmatrix}
\frac{\pi^2}{6} & 1.6449340668482264364724151666 5 \\
\texttt{Zeta[3]} & 1.2020569031595942853997381615 1 \\
\frac{\pi^4}{90} & 1.0823232337111381915160036965 4 \\
\texttt{Zeta[5]} & 1.0369277551433699263313654864 6 \\
\frac{\pi^6}{945} & 1.0173430619844491397145179297 9 \\
\texttt{Zeta[7]} & 1.0083492773819228268397975498 5 \\
\frac{\pi^8}{9450} & 1.0040773561979443393786852385 1 \\
\texttt{Zeta[9]} & 1.0020083928260822144178527692 3 \\
\frac{\pi^{10}}{93555} & 1.0009945751278180853371459589 0 \\
\texttt{Zeta[11]} & 1.0004941886041194645587022825 3 \\
\frac{691\pi^{12}}{638512875} & 1.0002460865533080482986379980 5 \\
\texttt{Zeta[13]} & 1.0001227133475784891467518365 3 \\
\frac{2\pi^{14}}{18243225} & 1.0000612481350587048292585451 1 \\
\texttt{Zeta[15]} & 1.0000305882363070204935517285 1 \\
\frac{3617\pi^{16}}{325641566250} & 1.0000152822594086518717325714 9 \\
\texttt{Zeta[17]} & 1.0000076371976378997622736002 9 \\
\frac{43867\pi^{18}}{38979295480125} & 1.0000038172932649998398564616 4 \\
\texttt{Zeta[19]} & 1.0000019082127165539389256569 6 \\
\frac{174611\pi^{20}}{1531329465290625} & 1.0000009539620338727961131520 4
\end{pmatrix}
$$

一眼即可看出，我們有下面的結論：

- $\zeta(s)$為一遞減的函數且函數值永遠比1大。
- 當$s$ 為一正奇數時MATHEMATICA不做任何的回應。
- 當$s$ 為一正偶數時則出現了一些有趣的東西。令$s=2m$，我們有$\zeta(2m)=r_m\pi^{2m}$， 此處$r_m$ 為一有理數，亦即$\zeta(2m)$與$\pi^{2m}$之間的比例為一有理數。

試探討此一數列$\{r_m\}$ 的公式。

```
In[3]:= r[m_]:= Zeta[2m]/Pi^(2m);
Table[Print["r[",m,"] =",r[m]],{m,15}];
```

(e) 或許你可以列出更多項來觀察，如前三十項

$$r_m=\zeta(2m)/\pi^{2m},\qquad m=1,2,3,\cdots,30，$$

看看能否歸納出什麼東西來!

# 3 愈看愈有趣—展現你那豐富的想像力

上述(d)的輸出結果如下:

$$
\begin{aligned}
r[1] &= \frac{1}{6}\\
r[2] &= \frac{1}{90}\\
r[3] &= \frac{1}{945}\\
r[4] &= \frac{1}{9450}\\
r[5] &= \frac{1}{93555}\\
r[6] &= \frac{691}{638512875}\\
r[7] &= \frac{2}{18243225}\\
r[8] &= \frac{3617}{325641566250}\\
r[9] &= \frac{43867}{38979295480125}\\
r[10] &= \frac{174611}{1531329465290625}\\
r[11] &= \frac{155366}{13447856940643125}\\
r[12] &= \frac{236364091}{201919571963756521875}\\
r[13] &= \frac{1315862}{11094481976030578125}\\
r[14] &= \frac{6785560294}{564653660170076273671875}\\
r[15] &= \frac{6892673020804}{5660878804669082674070015625}
\end{aligned}
$$

如果你已經理出一個頭緒來了，那麼恭喜你囉！否則的話也不用氣餒，展現你那豐富想像力的時刻終於到臨。數列$\{r_m\}$給人的第一個感覺是每一項的分母都比分子大而且大很多，所以就讓我們先把注意力放在分子上。一路看來如下所示：

$$1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\quad 691,\quad 2,\quad 3617,\quad 43867,\cdots。$$

首先映入眼簾的是691這個數，好熟悉又好陌生。不管如何，先看看691是否爲質數？有MATHEMATICA 侍候在旁，這可是簡單之至。

```
In[4]:= PrimeQ[691]
Out[4]= True
```

答案是肯定的。691這個數雖然不大，但一個三位數的質數對我們來說，可是非比尋常。再仔細想一想，原來這個質數出現在引言中所提到的Bernoulli數的分子中$B_{12} = -\frac{691}{2730}$。這就有意思了！再往下看$B_{16} = -\frac{3617}{510}$, $B_{18} = \frac{43867}{798}$。這下子就更有意思了！不僅僅是愈看愈有趣而且很直覺地，我們有如下的**臆測**： $r_m$當中包含有$B_{2m}$，此$B_{2m}$就是第$2m$ 個Bernoulli 數。且看下面的實驗來確認此臆測。

## 4 果眞如此？又見BERNOULLI數

一般而言，我們可用比較法來解決上述的問題。

- 首先對BERNOULLI數作多一點的了解。其實，在MATHEMATICA 中BERNOULLI數列爲內建的數列。其指令爲`BernoulliB[n]` 指的就是$B_n$。那麼現在就請你列出前一百個Bernoulli 數，並觀察其分子與分母的大小。

```
In[5]:= Table[Print["B[",m,"] = ",
        BernoulliB[m]],{m,2,100,2}];
```

- 爲了確認上面的臆測，我們可將$r_m$ 及$B_{2m}$的分子分解成質因數的乘積，然後並列比較其異同，如此一來就一目了然。

```
In[6]:= r[m_]:= Zeta[2m]/Pi^(2m);
        Table[{FactorInteger[Numerator[r[m]]],2m,
        FactorInteger[Numerator[(-1)^(m+1)
        BernoulliB[2m]]]},{m,20}]//MatrixForm
```

其輸出結果如下：

| | | |
|---|---|---|
| {} | 2 | {} |
| {} | 4 | {} |
| {} | 6 | {} |
| {} | 8 | {} |
| {} | 10 | {{5, 1}} |
| {{691, 1}} | 12 | {{691, 1}} |
| {{2, 1}} | 14 | {{7, 1}} |
| {{3617, 1}} | 16 | {{3617, 1}} |
| {{43867, 1}} | 18 | {{43867, 1}} |
| {{283, 1}, {617, 1}} | 20 | {{283, 1}, {617, 1}} |
| {{2, 1}, {131, 1}, {593, 1}} | 22 | {{11, 1}, {131, 1}, {593, 1}} |
| {{103, 1}, {2294797, 1}} | 24 | {{103, 1}, {2294797, 1}} |
| {{2, 1}, {657931, 1}} | 26 | {{13, 1}, {657931, 1}} |
| {{2, 1}, {9349, 1}, {362903, 1}} | 28 | {{7, 1}, {9349, 1}, {362903,1}} |
| {{2, 2}, {1721, 1}, {1001259881, 1}} | 30 | {{5, 1}, {1721, 1}, {1001259881, 1}} |
| {{37, 1}, {683, 1}, {305065927, 1}} | 32 | {{37, 1}, {683, 1}, {305065927, 1}} |
| {{151628697551, 1}} | 34 | {{17, 1}, {151628697551, 1}} |
| {{26315271553053477373, 1}} | 36 | {{26315271553053477373, 1}} |
| {{2, 1}, {154210205991661, 1}} | 38 | {{19, 1}, {154210205991661, 1}} |
| {{137616929, 1}, {1897170067619, 1}} | 40 | {{137616929, 1},{1897170067619, 1}} |

所以現在我們可以很放心的接受上述的臆測；雖然無法去證明，但計算上强烈的提示我們這臆測的眞實性。

## 5 得寸進尺及初步分析

接著下來，我們有一股很大的衝動想要觀察$r_m$ 除掉$B_{2m}$ 之後的那個有理數。這個有理數應該是比$r_m$ 簡單許多，而其樣式應該是比$r_m$ 更凸顯更容易看出。首先令$s_m = r_m/B_{2m}$ 亦即

$$s_m = \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m} B_{2m}}\text{。}$$

再請MATHEMATICA 幫你列出此有理數列的前十六項並探討其公式。

```
In[7]:= r[m_]:= Zeta[2m]/Pi^(2m);
        s[m_]:= Zeta[2m]/(Pi^(2m)*BernoulliB[2m]);
        Table[Print["s[",m,"] = ", s[m]],{m,1,16}];
```

其輸出結果如下:

$$
\begin{aligned}
s[1] &= 1\\
s[2] &= -\frac{1}{3}\\
s[3] &= \frac{2}{45}\\
s[4] &= -\frac{1}{315}\\
s[5] &= \frac{2}{14175}\\
s[6] &= -\frac{2}{467775}\\
s[7] &= \frac{4}{42567525}\\
s[8] &= -\frac{1}{638512875}\\
s[9] &= \frac{2}{97692469875}\\
s[10] &= -\frac{2}{9280784638125}\\
s[11] &= \frac{4}{2143861251406875}\\
s[12] &= -\frac{2}{147926426347074375}\\
s[13] &= \frac{4}{48076088562799171875}\\
s[14] &= -\frac{4}{9086380738369043484375}\\
s[15] &= \frac{8}{3952575621190533915703125}\\
s[16] &= -\frac{1}{1225298442569065513867968750}
\end{aligned}
$$

至此，我們可能會感覺到用實驗的方式要去臆測$\zeta(2m)$的公式，其難度是挺高的。所以公式越複雜，MATHEMATICA 能效勞的地方就越有限了，這需要有更豐富的靈感與更活潑的想像力。

不管如何，從上面的資料當中，我們至少可以得到底下幾個結論：

- 第一個觀察到的是其符號有正負交錯的規則，所以$\zeta(2m)$ 的公式中應包含$(-1)^{m+1}$。
- 第二個觀察到的是$s_m$的分子都是2的次方，但似乎是沒有什麼規則可言。
- 若有更多的數據讓我們來觀察歸納，會有幫助嗎？
- 也許更可行的是將其分子與分母分別列出來觀察，分析其質因子的結構，說不定可以得到更多的訊息。

# 6 細部觀察與分析

現在我們就根據上面所得到的結論，將有理數$(-1)^{m+1}s_m$當中的分子與分母作細部分解，藉著觀察其內之質因子的結構，看看能否理出一個頭緒，因而得到更多相關的訊息。

(a) 首先觀察$(-1)^{m+1}s_m$的分子中2的次冪有無規則可尋。

```
In[8]:= r[m_]:= Zeta[2m]/Pi^(2m);
        s[m_]:= Zeta[2m]/(Pi^(2m)*BernoulliB[2m]);
        Table[{m,FactorInteger[Numerator[(-1)^(m+1)*s[m]]]},
        {m,1,128}]//ColumnForm
```

輸出`Out[8]`的部分結果如下：

```
{ 1,    {}    }
{ 2,    {}    }
{ 3,{{2, 1}}}
{ 4,    {}    }
{ 5,{{2, 1}}}
{ 6,{{2, 1}}}
{ 7,{{2, 2}}}
{ 8,    {}    }
{ 9,{{2, 1}}}
{10,{{2, 1}}}
{11,{{2, 2}}}
{12,{{2, 1}}}
{13,{{2, 2}}}
{14,{{2, 2}}}
{15,{{2, 3}}}
{16,    {}    }
```

(b) 我們發現當$m$ 爲2的次冪時，$(-1)^{m+1}s_m$ 的分子反而沒有任何2的次冪存在。且看多一些的例子來確認此事：

```
In[9]:= r[m_]:= Zeta[2m]/Pi^(2m);
        s[m_]:= Zeta[2m]/(Pi^(2m)*BernoulliB[2m]);
        Table[{2^k,FactorInteger[Numerator[(-1)^(2^k+1)*s[2^k]]]},
        {k,1,10}]//ColumnForm
```

輸出`Out[9]`的結果如下：

```
{    2, {}}
{    4  {}}
{    8, {}}
{   16, {}}
{   32, {}}
{   64, {}}
{  128, {}}
{  256, {}}
{  512, {}}
{1024, {}}
```

我們有如下的結論：

- 分子非常單純！放眼望去空白處點點，原來就是那些$m$ 爲2的次冪的故鄉。到底是怎麼一回事呢？說也說不上來。
- 分子雖然單純，看起來也似乎是有一點規則可循；但就是抓不住眞正的規則性在那裏？唉！眞是『剪不斷，理還亂！』抑是『看似平常最奇絕，成如容易卻艱難。』

(c) 其次觀察$(-1)^{m+1}s_m$分母的質因子，是否跟$m$ 或$2m$ 有關係？

```
In[10]:= r[m_]:= Zeta[2m]/Pi^(2m);
         s[m_]:= Zeta[2m]/(Pi^(2m)*BernoulliB[2m]);
         d[m_]:= Denominator[(-1)^(m+1)*s[m]];
         Table[{m,FactorInteger[d[m]]},{m,1,18}]//ColumnForm
```

輸出`Out[10]`的結果如下：

```
{ 1,{}}
{ 2,{{3, 1}}}
{ 3,{{3, 2},{5,1}}}
{ 4,{{3, 2},{5,1},{7,1}}}
{ 5,{{3, 4},{5,2},{7,1}}}
{ 6,{{3, 5},{5,2},{7,1},{11,1}}}
{ 7,{{3, 5},{5,2},{7,2},{11,1},{13,1}}}
{ 8,{{3, 6},{5,3},{7,2},{11,1},{13,1}}}
{ 9,{{3, 8},{5,3},{7,2},{11,1},{13,1},{17,1}}}
{10,{{3, 8},{5,4},{7,2},{11,1},{13,1},{17,1},{19,1}}}
{11,{{3, 9},{5,4},{7,3},{11,2},{13,1},{17,1},{19,1}}}
{12,{{3,10},{5,4},{7,3},{11,2},{13,1},{17,1},{19,1},{23,1}}}
{13,{{3,10},{5,6},{7,3},{11,2},{13,2},{17,1},{19,1},{23,1}}}
{14,{{3,13},{5,6},{7,4},{11,2},{13,2},{17,1},{19,1},{23,1}}}
{15,{{3,14},{5,7},{7,4},{11,2},{13,2},{17,1},{19,1},{23,1},{29,1}}}
{16,{{3,14},{5,7},{7,4},{11,2},{13,2},{17,1},{19,1},{23,1},{29,1},{31,1}}}
{17,{{3,15},{5,7},{7,4},{11,3},{13,2},{17,2},{19,1},{23,1},{29,1},{31,1}}}
{18,{{3,17},{5,8},{7,5},{11,3},{13,2},{17,2},{19,1},{23,1},{29,1},{31,1}}}
```

(d) 這樣的觀察有沒有幫助呢？

由上面的結果得知，分母在表面上看起來似乎是有點複雜，規則性卻是有的。怎麼說呢？且看下面的分析：

- 當你好好觀察相鄰兩個$m$所對應的分母時，即知其差異不大。
- 不僅此也，其實前一項包含在後一項裡面，如$-s_{18}$的分母比$s_{17}$的分母多出$3^2 \times 5 \times 7$，而這些都出現在$35 \times 36 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$當中。
- 所以當務之急應該是去觀察後一項與前一項之比，看看是否有特別的形式顯現出來？且看：

```
In[11]:= r[m_]:= Zeta[2m]/Pi^(2m);
         s[m_]:= Zeta[2m]/(Pi^(2m)*BernoulliB[2m]);
         d[m_]:= Denominator[(-1)^(m+1)*s[m]];
         Table[Print["m=",m,", 2m+1=",2m+1,", 2m+2=",2m+2,
         ", ", FactorInteger[d[m+1]/d[m]]],
         {m,1,28}]//ColumnForm;
```

其輸出結果如下:

```
m=1, 2m+1=3, 2m+2=4, {{3,1}}
m=2, 2m+1=5, 2m+2=6, {{3,1},{5,1}}
m=3, 2m+1=7, 2m+2=8, {{7,1}}
m=4, 2m+1=9, 2m+2=10, {{3,2},{5,1}}
m=5, 2m+1=11, 2m+2=12, {{3,1},{11,1}}
m=6, 2m+1=13, 2m+2=14, {{7,1},{13,1}}
m=7, 2m+1=15, 2m+2=16, {{3,1},{5,1}}
m=8, 2m+1=17, 2m+2=18, {{3,2},{17,1}}
m=9, 2m+1=19, 2m+2=20, {{5,1},{19,1}}
m=10, 2m+1=21, 2m+2=22, {{3,1},{7,1},{11,1}}
m=11, 2m+1=23, 2m+2=24, {{3,1},{23,1}}
m=12, 2m+1=25, 2m+2=26, {{5,2},{13,1}}
m=13, 2m+1=27, 2m+2=28, {{3,3},{7,1}}
m=14, 2m+1=29, 2m+2=30, {{3,1},{5,1},{29,1}}
```

- 2 的次方非常特別，有可能被分子消掉了，而這說不定就是分子之所以不容易被看出其規則的原因。

- 現在終於可以看出：$\boxed{\text{分母很有可能就是}\quad (2m)\,!}$

所以接下來我們有一股非常强烈的慾望，要好好的觀察一下將$(2m)\,!$乘上$(-1)^{m+1}s_m$之後的結果。

## 7 水落石出—美妙無比的公式重現

令$t_m$爲$(2m)\,!$與$(-1)^{m+1}s_m$的乘積，亦即

$$t_m = (-1)^{m+1}s_m \cdot (2m)\,! = (-1)^{m+1}\frac{(2m)\,!\,\zeta(2m)}{\pi^{2m}B_{2m}}$$

我們就勞駕數學運算大師MATHEMATICA列個表吧。

```
In[12]:= r[m_]:= Zeta[2m]/Pi^(2m);
         s[m_]:= Zeta[2m]/(Pi^(2m)*BernoulliB[2m]);
         t[m_]:= (-1)^(m+1)*s[m]*(2m)!;
         Table[{m,FactorInteger[t[m]]},{m,22}]//ColumnForm
```

其輸出結果如下：

```
{ 1,{{2,  1}}}
{ 2,{{2,  3}}}
{ 3,{{2,  5}}}
{ 4,{{2,  7}}}
{ 5,{{2,  9}}}
{ 6,{{2, 11}}}
{ 7,{{2, 13}}}
{ 8,{{2, 15}}}
{ 9,{{2, 17}}}
{10,{{2, 19}}}
{11,{{2, 21}}}
{12,{{2, 23}}}
{13,{{2, 25}}}
{14,{{2, 27}}}
{15,{{2, 29}}}
{16,{{2, 31}}}
{17,{{2, 33}}}
```

```
{18,{{2, 35}}}
{19,{{2, 37}}}
{20,{{2, 39}}}
{21,{{2, 41}}}
{22,{{2, 43}}}
```

在幾秒鐘之間，出現在我們眼前的是 $\boxed{t_m = 2^{2m-1}}$

實在是令人興奮無比！值得一提的是，在上面的細部觀察，分母中2的次冪消失得無影無蹤；但分子中卻只有2的次冪，而且似乎是沒有什麼規則可言。現在終於水落石出，原來這是因爲分子中的2的次冪與分母的$(2m)!$中的2的次冪抵消掉之後所呈現的結果。最後回到原先的$\zeta(2m)$，我們有

$$(-1)^{m+1}\frac{(2m)!\,\zeta(2m)}{\pi^{2m}B_{2m}} = 2^{2m-1}\text{。}$$

整理一下，這美妙無比的公式終於原形畢露

$$\boxed{\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}B_{2m}}{2(2m)!}}$$

# 8 更上一層樓–$\zeta(3)$ 有公式嗎？

結束了無限多片的拼圖遊戲，總覺得意猶未盡，好像有什麼事情還沒有完成似的。我們深知$\zeta(2m)$ 與$\pi^{2m}$ 是有關係的，且其比例爲一特別的有理數，其公式如上。其實，此等關係非比尋常。怎麼說呢？這個公式的左邊是Zeta函數在偶數點上的值，爲一收斂級數之和，而其中的每一項都是分子爲1的有理數。但公式的右邊卻有$\pi$ 的出現，眾所周知$\pi$ 是一個無理數。簡單說，無窮多個有理數的和變成一個無理數。此種量變產生質變的的現象在其它地方也看過，如交錯調和級數$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+-\cdots$ 收斂於$\log 2$ 。實際上，$\pi$ 不僅僅是一個無理數，乃是一超越數。$\pi$ 的出身來自圓周長，這表示圓和Zeta 函數是有關係的。我們可以感覺出來，這個公式背後所隱藏的豐盛是一言難盡的。另一方面，Zeta 函數在奇數點上的值，感覺上應該也會有一個如$\zeta(2m)$ 一樣美的公式存在才是。然而MATHEMATICA卻悶聲不響，不作任何的表示。事實上，這的確是一個相當困難的問題。不用說別的，就連第一個最簡單的$\zeta(3)$ 到目前爲止還是沒有一個公式如$\zeta(2m)$ 者存在。我們先針對此等怪現象來思考與探索。

(a) 你認爲可能的原因是什麼呢？

(b) 你認爲如何來探討$\zeta(2m+1)$ 的公式才比較會有結果出來呢？

(c) 可以確定的是$B_{2m+1}$ 不會在場，因爲根本沒有東西在$B_{2m+1}$。

(d) 是不是跟$\pi$ 仍然有關或跟其他的常數有關呢？事實上，有許多數學家曾經問過 [15]：$\zeta(2m+1)$ 與$\pi^{2m+1}$ 之間的比例是否爲一有理數呢？

(e) 請就$\zeta(3)$ 來作實驗，或許圖形這次可幫得上忙，或許下面的式子給你一些啓發：

$$\zeta(3) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{1-xyz}\,dz\,dy\,dx$$

(f) 目前唯一知道的事是1978年法國數學家ROGER APÉRY† 證明出$\zeta(3)$ 爲一無理數。他之所以有辦法得到這個推論是因他有$\zeta(3)$ 的另一個級數表示法

$$\zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}}$$

此級數收斂的速度比原先的級數$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 快很多。試著由此級數來探討一下$\zeta(3)$的究竟。

## 9 你我仍須努力！

其實$\zeta(2m)$ 的公式早在RIEMANN之前一百年就被EULER所發現，但$\zeta(2m+1)$的公式不僅EULER不知道，直到今天我們仍然幾乎什麼都不知道，連$\zeta(5)$是不是有理數都還不清楚，其他更不用說了。一個較保守的猜測是$\zeta(2m+1)$可能跟$\pi^{2m+1}$ 一樣是超越數，但其間的比例不是一個有理數。

## References

[1] Abell, Martha L. and Braselton, James P. (1997): *Mathematica by Example*, 2nd Edition, Academic Press, San Diego.

[2] Apostol, T. (1986): *Introduction to Analytic Number Theory*, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York, (Third Printing).

†ROGER APÉRY (1916–1994)法國數學家。他在1978年所證明的定理爲：存在一正數$\varepsilon$ 及一個正整數數列$\{q_n\}$使得對所有的$n \geq 1$我們有$0 < \|q_n\zeta(3)\| < e^{-\varepsilon n}$。請見Astérisque 61(1979), 11-13。由此可以推論得到$\zeta(3)$ 爲一無理數。

[3] Bressoud, David M. (1994): *A Radical Approach to Real Analysis*, MAA, Washington D.C..

[4] Clapham, Christopher (1990): *A Concise Oxford Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford/New York.

[5] Daintith, John/Nelson, R.D. (1989): *The Penguin Dictionary of Mathematics*, Penguin Books Ltd..

[6] 余文卿，級數求和法，數學傳播第十五卷第四期(60)，80年12月。http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_15_4_14/index.html

[7] 余文卿，一些發散級數的求和法，數學傳播第二十二卷第四期 (88)，87年12月，第43-49頁。

http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/vol.phtml?voln=224

[8] Itô, Kiyosi (Editor)(1987): *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*, 2nd ed., by the Mathematical Society of Japan, The MIT Press, Cambridge, Massachusettes, and London, England .

[9] Gaylord, Richard J./Kamin, Samuel N./Wellin, Paul R. (1993): *Introduction to Programming with Mathematica*, 1st Edition, Springer-Verlag New York, Inc..

[10] 洪維恩，《數學運算大師MATHEMATICA4》，碁峰資訊股份有限公司，2001年5月。

[11] Ireland, K. and Rosen, M. (1982): *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York.

[12] Riemann (譯者張海潮、李文肇)，Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (論幾何學之基礎假說), 1845，數學傳播第十四卷第三期，79年9月。

[13] 沈淵源，登阿里山— 搭小火車或是直昇機？，數學傳播第二十五卷第二期(98)，90年6月，第78–87頁。

http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/vol.phtml?voln=252

[14] Washington, L. (1997): *Introduction to Cyclotomic Fields*, 2nd ed., Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York.

[15] 于靖，Zeta函數與超越不變量，數學傳播第二十四卷第一期(93)，89年3月，第9-16頁。

http://www.math.sinica.edu.tw/math_media/vol.phtml?voln=241

# Exploring the Sums of Negative Powers of Positive Integers with MATHEMATICA

Yuan-Yuan Shen*

## Abstract

We explore a formula for the sum of the infinite series $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ according to the values provided by MATHEMATICA. When $s = 2m$ is an even positive integer, MATHEMATICA tells us that $\zeta(2m)$ is just a rational multiple of $\pi^{2m}$. From these individual function values, with the help of MATHEMATICA, we will guide you to see the pattern of the whole formula. On the other hand, when $s$ is an odd positive integer, MATHEMATICA tells us nothing. In fact, there is no such formula exists even for the simplest $\zeta(3)$. The reason remains unknown, so still a lot of chances are waiting for you.

*Department of Mathematics, Tunghai University, Taichung 407, TAIWAN