

東海大學統計研究所

碩士論文

指導教授:黃愉閔 博士

Poisson Integer Autoregressive 時間序列模型
的分析與探討

研究生：黃鼎舜 撰

中華民國一百年七月

摘要

時間序列模型的選取一直是時間序列分析的一個重要關鍵，本文闡述由 Alzaid, A. A. and Al-Osh, M.A. (1990) 所提出的 Poisson Integer Autoregressive 模型，並參照 Cardinal M, Roy R, Lambert J. (1999) 的文獻作為分析模擬資料與真實資料的依據；本文將模擬數個符合 Poisson INAR 模型條件的模擬資料，藉以探討模型在各個情形下估計方法的合適性；另外，在闡述 Poisson INAR 模型時，本文使用較為簡單的證明方式，證明當 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ，可寫成 Poisson Distribution 的隨機變數再加上 Poisson Distribution 的產物。

關鍵詞: Poisson Distribution，Poisson Integer Autoregressive，時間序列，模型選取。

目錄

摘要.....	1
第一章、研究背景與動機	3
第二章、研究方法.....	4
2-1 模型觀念.....	4
2-1-1 平穩型時間序列	5
2-1-2 Integer Autoregressive model.....	6
2-1-3 Branching Processes with Immigration.....	7
2-1-4 Probability generating function.....	8
2-1-5 Poisson Distribution.....	9
2-2 模型介紹.....	9
2-2-1 Poisson INAR model.....	10
2-2-2 Autoregressive model	15
第三章、資料介紹	17
3-1 模擬資料.....	17
3-2 真實資料.....	18
第四章、資料分析步驟及結果.....	20
4-1 分析步驟	20
4-2 輸出與比較	24
第五章、結論.....	35
參考文獻	36
附錄	37

第一章、研究背景與動機

傳統的時間序列計量模型，如自我回歸模型(AR)、移動平均模型(MA)及自我回歸移動平均模型(ARMA)等，都是假設殘差項呈現常態分配且變異數為固定常態下之分析模型。在此假設下，這些時間序列模型的邊際分配(marginal distribution)以及條件分配(conditional distribution)皆會呈現常態。然而，在實務上可以發現，許多的時間序列資料經常是不符合常態分配，而這些資料在進行分析預測或模擬時，配適更適當的模型就顯得十分重要。

在研究非常態的時間序列模型，模型的分配從常態分配推廣到一些有特殊性質的分配，本文就 Alzaid, A. A. and Al-Osh, M.A. (1990) 的文獻中所提到有 Poisson 性質的分配模型：Poisson Integer Autoregressive 模型進行時間序列相關的研究。

在本文主要是介紹 Poisson Integer Autoregressive 模型，於第二章第一小節介紹一些與 Poisson Integer Autoregressive 模型相關的觀念與理論，關於 Poisson Integer Autoregressive 模型的推導還有參數估計的方法在第二小節呈現，且第二小節將會一併介紹一般常被使用的 AR 模型；在第三章及第四章，主要介紹與比較一些符合 Poisson Integer Autoregressive 模型條件但不同情形的模擬資料，並介紹一個真實的資料做為 Poisson Integer Autoregressive 模型和 AR 模型比較。

第二章、研究方法

在此章節中，主要介紹本文所討論的 Poisson Integer Autoregressive model，在介紹此模型之前，將先於第一小節介紹一些與此模型相關的觀念與理論，內容包含：平穩型時間序列、Integer Autoregressive model、Branching Processes with Immigration、Probability generating function、Poisson Distribution；在第二小節介紹 Poisson Integer Autoregressive model 及一般常被使用的 Autoregressive model，關於兩模型的比較將在往後章節討論。

2-1 模型觀念

在 Alzaid, A. A. and Al-Osh, M.A. (1990)文獻中提到的 Poisson Integer Autoregressive model 是 Integer Autoregressive 滿足 Poisson Distribution 性質的一個例子，而 Branching Processes with Immigration 可用於 Integer Autoregressive(1) model 時間序列模型的一種解釋；然而，在時間序列的模型中，一個重要的特徵就是對統計均衡關係做某種形式的假設，其中最特殊的假設就是平穩性的假設，若平穩性的假設能成立，將有一些好性質有助於在時間序列模型的推導；在推導的過程中，欲證明某變數來自於 Poisson Distribution，Probability generating function 扮演著重要的角色。

2-1-1 平穩型時間序列

在自然現象的變化過程中，常發現有許多不規則的擾動，經研究後，察知這種擾動是根據機率分配函數而變化，因此而發展出來的統計理論稱為隨機過程；在機率論概念中，隨機過程是隨機變數的集合。若一個隨機系統的樣本點是隨機函數，則稱此函數為樣本函數，這一隨機系統全部樣本函數的集合是一個隨機過程。設 (Ω, \mathcal{F}, P) 為一機率空間，另設集合 T 為一指標集合，通常指標集合 T 代表時間，以實數或整數表示。如果對於所有 $t \in T$ ，均有一隨機變量 $\xi_t(\omega)$ 定義於機率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) ，則集合 $\{\xi_t(\omega) | t \in T\}$ 為一隨機過程。然而，依時間排序觀測到的一組隨機變數則稱為時間序列，也就是說一個時間序列就是一個特殊的隨機過程。一般而言，所謂時間序列係指以時間順序型態出現之一連串觀測值集合，或更確切的說，對某動態系統隨時間連續觀察所產生有順序的觀測值集合。假若這種集合屬於連續型，則稱為連續型時間序列，例如：地震儀所記錄的地震波。假若這種集合屬於離散型，則稱為離散型時間序列，例如：每年之降雨量，每日股價等。所謂平穩型時間序列，係指一個時間序列其統計特性將不隨時間變化而改變者，例如：若一個隨機過程，在任何時間點 t_1, t_2, \dots, t_n ，假設 n 個隨機變數 $Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_n}$ 之聯合機率密度函數與另 n 個隨機變數 $Z_{t_1+k}, Z_{t_2+k}, \dots, Z_{t_n+k}$ 之聯合機率密度函數恆等者，即

$f(Z_{t1}, Z_{t2}, \dots, Z_{tm}) = f(Z_{t1+k}, Z_{t2+k}, \dots, Z_{tm+k})$ ，式中 k 為任何整數，則該隨機過程被稱之為嚴格平穩(Strictly Stationary)。根據平穩的條件， Z_{t1} 的機率密度函數必須等於隨機變數 Z_{t1+k} 的機率密度函數， k 為任何整數值；所以機率密度函數 $f(Z_t)$ 在所有時間點 t 時均相同，故 Z_t 之平均值與變異數，對所有時間點 t 時均相同。

2-1-2 Integer Autoregressive model (簡稱 INAR model)

在 Steutel and Van Harn(1979)文獻中提到，假設 X 是一個非負整數隨機變數，且令 $\alpha \in (0,1)$ ，thinning operator 標記為 “ \circ ”，定義：

$$\alpha \circ X = \sum_{i=1}^X Y_i \quad (1)$$

其中， $Y_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Bernoulli}(\alpha)$ 且 sequence $\{Y_i\}$ 是一個 counting series 並與 X 獨立， α 為 Bernoulli 試驗成功的機率；給定 X 下，隨機變數 $\alpha \circ X$ 是 Binomial 試驗成功的次數。

在 Alzaid, A. A. and Al-Osh, M.A. (1990)文獻中提到，當 X_t 是非負整數時間序列，令 $\alpha \in (0,1)$ ，並令 $\{\varepsilon_t\}$ 是一個 independent and identically distributed 的非負整數隨機變數序列， $E[\varepsilon_t] = \mu$ ， $\text{Var}[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2$ ，INAR(1) 的模型定義為：

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t=1, \dots, N \quad (2)$$

也就是說，時間點 $t-1$ 觀測到的值與時間點 t 觀測到的值是有關係的。

在 Du Jin-Guan, Li Yuan(1991)文獻中提到，在不失一般性的情況

下，延伸(2)式，可得 INAR(P)的模型：

$$X_t = \alpha_1 \circ X_{t-1} + \dots + \alpha_p \circ X_{t-p} + \varepsilon_t \quad (3)$$

其中， $\{\varepsilon_t\}$ 的假設與(2)式中的假設是相同的獨立於所有 counting series，且 $\alpha_j \in (0,1)$ ， $j=1,2,\dots,p$ 。

2-1-3 Branching Processes with Immigration

對 INAR(1) model 而言，Branching Processes with Immigration 可用於 INAR(1) model 等號左式與等號右式關係的一種解釋，定義為：

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Y_{n,i} + I_n \quad n=1,2,3,\dots \quad (4)$$

其中， $\{X_n\}$ 是一個非負整數情況的馬可夫鏈(Markov chain)，最初的值 X_0 即是一個非負整數隨機變數，且 $\{Y_{n,i}\}$ 和 $\{I_n\}$ 相互獨立，獨立於 X_0 ；其中， $\sum_i^0 \equiv 0$ 。一般的說法， X_n 表示第 n 個世代族群的數量，也就是說第 n 個世代有 X_n 個個體； $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,x_{n-1}}$ 表示第 $(n-1)$ 個世代的個體存留與否；舉例來說，第 $(n-1)$ 個世代有 X_{n-1} 個個體， $Y_{n,1}$ 表示第 $(n-1)$ 世代的第一個個體存留與否， $Y_{n,2}$ 表示第 $(n-1)$ 世代的第二個個體存留與否， $Y_{n,x_{n-1}}$ 表示第 $(n-1)$ 世代的第 X_{n-1} 個個體存留與否； I_n 表示第 n 個世代外來族群所造成的貢獻數量；也就是說，第 n 個世代族群的數量與第 $n-1$ 個世代族群的數量兩者的關係是透過(4)式。

令 $m=E[Y_{n,i}]$ ，如果 $m<1$ ， $\{X_n\}$ 是一個 limiting stationary distribution。

令 $\lambda = E[I_n]$ ，並令 F_n 是過去時間點的資訊 X_0, X_1, \dots, X_n ，再給定過去時

間點的資訊(F_{n-1})， X_n 的條件期望值為：

$$E[X_n | F_{n-1}] = mX_{n-1} + \lambda \quad (5)$$

然而，令 $\varepsilon_n \equiv X_n - E[X_n | F_{n-1}]$ 及綜合(2)式、(3)式，可得：

$$X_n = mX_{n-1} + \lambda + \varepsilon_n, \quad n=1,2,3,\dots \quad (6)$$

參數 m 和 λ 的估計，使用最小平方法估計(least squares estimators)，

經由最小化 $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - mX_{i-1} - \lambda)^2$ ，可得：

$$\tilde{m} = (\sum X_i \sum X_{i-1} - n \sum X_i X_{i-1}) / ((\sum X_{i-1})^2 - n \sum X_{i-1}^2) \quad (7)$$

$$\tilde{\lambda} = (\sum X_{i-1} X_i \sum X_{i-1}^2 \sum X_i) / ((\sum X_{i-1})^2 - n \sum X_{i-1}^2) \quad (8)$$

2-1-4 Probability generating function(簡稱 pgf)

在推導的過程中，欲證明某變數來自於相同的機率分配，pgf 扮演著重要的角色。

定義：設 X 為一個非負整數隨機變數，其機率質量函數(pmf)為

$$P_i = P(x = i), \quad i=0,1,2,\dots$$

$$P_X(Z) = E[Z^x] = \sum_{i=0}^{\infty} P_i Z^i, \quad -1 \leq Z \leq 1 \quad (9)$$

稱為隨機變數 X 的 pgf。

定理：若兩個非負整數隨機變數有相同的 pgf，他們必有相同的機率分配。

2-1-5 Poisson Distribution

若離散隨機變數 X ，具有下列之機率密度函數(pdf)則稱之為 Poisson Distribution:

$$f(x) = e^{-\lambda} \lambda^x / X!, X=0,1,2,\dots \quad (10)$$

λ :單位時間（區域）內事件發生之平均次數。

基本假設：

- (1) 某一段時間或特定區域的成功次數之平均值 λ 為已知。
- (2) 不論起始點，在某一段時間或特定區域內，事件發生之機率相同，而且各時段或區域中事件之發生彼此獨立。
- (3) 在極短時間或很小的區域內，事件只有發生或不發生兩種現象。
- (4) λ 與所選擇的時間或區域之大小成正比。

2-2 模型介紹

介紹完 Poisson INAR (P) model 相關的觀念及理論，這個小節首先將介紹在 Alzaid, A. A. and Al-Osh, M.A. (1990)文獻中提到 Poisson INAR model，這是 INAR model 的一個特例，隨機變數 X 必須滿足 Poisson Distribution，不同於文獻，本文使用較為簡單的方式證明 Poisson INAR model 是來自 Poisson Distribution，並簡述其模型架構及參數估計方法；其次，將介紹一般常被使用的 Autoregressive model，並在往後章節討論兩模型的比較。

2-2-1 Poisson INAR model

當隨機變數 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 時, 此隨機變數可以表示成:

$$X = \alpha \circ X + X_\alpha \quad (11)$$

其中 $\alpha \circ X$ 及 X_α 互相獨立, $\alpha \circ X = \sum_{j=1}^X N_j$, $N_j \sim \text{Bernoulli}(\alpha)$ 。

而 $\alpha \circ X$ 及 X_α 都是服從 Poisson distribution 的隨機變數。

證明:

令 $X \sim$ probability function 而且 X 的 pgf 是 $P_X(Z)$,

$$\begin{aligned} \text{令 } Y = \alpha \circ X \Rightarrow P_Y(Z) &= E(Z^Y) = E[E(Z^Y | X)] = E[E(Z^{\sum_{j=1}^X N_j} | X)] \\ &= E[E(\prod_{j=1}^X Z^{N_j} | X)] = E[\prod_{j=1}^X E(Z^{N_j} | X)] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\alpha \circ X = \sum_{j=1}^X N_j, N_j \sim \text{Bernoulli}(\alpha) \Rightarrow f(N_j | X) = \alpha^{N_j} (1-\alpha)^{1-N_j}$$

$$E[Z^{N_j} | X] = \sum_{j=0}^1 \alpha^{N_j} (1-\alpha)^{1-N_j} Z^{N_j} = (1-\alpha) + Z\alpha \quad (13)$$

將(13)式代入(12)式, 得

$$\begin{aligned} P_Y(Z) &= E[\prod_{j=1}^X E(Z^{N_j} | X)] = E[\prod_{j=1}^X (\alpha Z + (1-\alpha))] = E[(\alpha Z + (1-\alpha))^X] \\ &= P_X[\alpha Z + (1-\alpha)] \end{aligned} \quad (14)$$

如果 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $f(x) = e^{-\lambda} \lambda^x / X!$, $X=0,1,2,\dots$

$$P_X(Z) = E[Z^X] = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x Z^x}{X!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} (\lambda Z)^x e^{-\lambda X} e^{\lambda X}}{X!} = e^{\lambda Z} e^{-\lambda} = e^{-\lambda(1-Z)} \quad (15)$$

將(15)式代入(14)式, 可得:

$$P_Y(Z) = P_X(\alpha Z + (1-\alpha)) = e^{-\lambda(1-(\alpha Z + (1-\alpha)))} = e^{-\lambda(1-\alpha)(1-Z)} \quad (16)$$

根據 pgf 定理, $Y = \alpha \circ X \sim \text{Poisson}(\alpha\lambda)$ 。

$$\text{令 } P_{X_\alpha}(Z) = \frac{P_X(Z)}{P_X(1-\alpha + \alpha Z)} \quad (17)$$

(17)式是 X_α 的 probability generating function，將(15)及(16)式代入(17)

式，可得：

$$P_{X_\alpha}(Z) = \frac{P_X(Z)}{P_X(1-\alpha + \alpha Z)} = \frac{e^{-\lambda(1-Z)}}{e^{-\lambda(1-(1-\alpha+\alpha Z))}} = e^{-\lambda(1-\alpha)(1-Z)} \quad (18)$$

根據 pgf 定理， $X_\alpha \sim \text{Poisson}((1-\alpha)\lambda)$

得證，當 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ，則可寫成 Poisson Distribution 的隨機變數

$\alpha \circ X$ 再加上 Poisson Distribution 的產物 X_α 。 □

在平穩的時間序列下，假設 X_t 是 Poisson Distribution，Poisson

INAR(1)為：

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + X_\alpha \quad (19)$$

解釋上可以這樣說明， X_t 表示時間 t 的個體數， X_{t-1} 表示時間 $t-1$ 的

個體數， X_α 表示一個普遍存在的個體數。

給定 X_{t-1} 及 $\alpha \circ X_{t-1} = \sum_{j=1}^{X_{t-1}} N_j = N_1 + \dots + N_{X_{t-1}}$ ，(19)式可改寫成：

$$X_t = N_1 + \dots + N_{X_{t-1}} + X_\alpha \quad (20)$$

$N_1, \dots, N_{X_{t-1}}$ 分別表示時間 $t-1$ 第 1 個到第 X_{t-1} 個個體存活與否，也就是

說時間 $t-1$ 的個體與時間 t 的個體數是關係的。以上模型簡稱為

Poisson INAR(1)。

以下說明 Poisson INAR(P)模型。

在平穩的時間序列下，當 $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ，平穩的 Poisson 時間序

列對於過去觀測值可以表示為：

$$X_t = \alpha_1 \circ X_{t-1} + \alpha_2 \circ X_{t-2} + \dots + \alpha_p \circ X_{t-p} + X_\alpha \quad (21)$$

其中 $\alpha_i \circ X_{t-i} = \sum_{j=1}^{X_{t-i}} N_j$, $N_j \sim \text{Bernoulli}(\alpha_i)$, $i=1, \dots, p$

令 $Y_1 = \alpha_1 \circ X_{t-1}, Y_2 = \alpha_2 \circ X_{t-2}, \dots, Y_p = \alpha_p \circ X_{t-p}$

令 $Y^* = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_p = \alpha_1 \circ X_{t-1} + \alpha_2 \circ X_{t-2} + \dots + \alpha_p \circ X_{t-p} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \circ X_{t-i}$

其中， Y_1, Y_2, \dots, Y_p 與 X_α 相互獨立，並且 $\sum_{i=1}^p \alpha_i \circ X_{t-i}$ 及 X_α 都是服從

Poisson Distribution 的隨機變數。

證明：

令 $X_t \sim$ probability function 而且 X 的 pgf 是 $P_X(Z)$ ，對所有的 X_0, \dots, X_t 皆

滿足。

令 $Y_1 = \alpha_1 \circ X_{t-1}$

$$\begin{aligned} P_{Y_1}(Z) &= E(Z^{Y_1}) = E[E(Z^{Y_1} | X_{t-1})] = E[E(Z^{\sum_{j=1}^{X_{t-1}} N_j} | X_{t-1})] \\ &= E[E(\prod_{j=1}^{X_{t-1}} Z^{N_j} | X_{t-1})] = E[\prod_{j=1}^{X_{t-1}} E(Z^{N_j} | X_{t-1})] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\alpha_1 \circ X_{t-1} = \sum_{j=1}^{X_{t-1}} N_j, N_j \sim \text{Bernoulli}(\alpha_1) \Rightarrow f(N_j | X) = \alpha_1^{N_j} (1-\alpha_1)^{1-N_j}$$

$$E[Z^{N_j} | X_{t-1}] = \sum_{j=0}^1 \alpha_1^{N_j} (1-\alpha_1)^{1-N_j} Z^{N_j} = (1-\alpha_1) + Z\alpha_1 \quad (23)$$

將(23)式代回(22)式，得

$$\begin{aligned} P_{Y_1}(Z) &= E[\prod_{j=1}^{X_{t-1}} E(Z^{N_j} | X_{t-1})] = E[\prod_{j=1}^{X_{t-1}} (\alpha_1 Z + (1-\alpha_1))] = E[(\alpha_1 Z + (1-\alpha_1))^{X_{t-1}}] \\ &= P_{X_{t-1}}[\alpha_1 Z + (1-\alpha_1)] \end{aligned} \quad (24)$$

如果 $X_t \sim \text{Poisson}(\lambda)$ 則 $P_{X_t}(Z) = e^{-\lambda(1-Z)}$ ，對所有的 X_0, \dots, X_t 皆滿足。

代入(24)式可得:

$$P_{Y_1}(Z) = E[E(Z^{Y_1} | X_{t-1})] = P_{X_{t-1}}[\alpha_1 Z + (1 - \alpha_1)] = e^{-\lambda(1 - (\alpha_1 Z + (1 - \alpha_1)))} = e^{-\lambda \alpha_1 (1-Z)} \quad (25)$$

$$\text{同理， } P_{Y_2}(Z) = E[E(Z^{Y_2} | X_{t-2})] = P_{X_{t-2}}[\alpha_2 Z + (1 - \alpha_2)] = e^{-\lambda \alpha_2 (1-Z)}$$

⋮

$$P_{Y_p}(Z) = E[E(Z^{Y_p} | X_{t-p})] = P_{X_{t-p}}[\alpha_p Z + (1 - \alpha_p)] = e^{-\lambda \alpha_p (1-Z)} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} P_{Y^*}(Z) &= E[Z^{Y^*}] = E[E[Z^{Y^*} | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}]] = E[E[Z^{Y_1} \cdot Z^{Y_2} \dots Z^{Y_p} | X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}]] \\ &= E[E[Z^{Y_1} | X_{t-1}]] \cdot E[E[Z^{Y_2} | X_{t-2}]] \dots E[E[Z^{Y_p} | X_{t-p}]] \\ &= e^{-\lambda \alpha_1 (1-Z)} \cdot e^{-\lambda \alpha_2 (1-Z)} \dots e^{-\lambda \alpha_p (1-Z)} = e^{-\lambda \sum_{i=1}^p \alpha_i (1-Z)} \end{aligned} \quad (28)$$

根據 pgf 定理， $Y^* = \sum_{i=1}^p \alpha_i \circ X_{t-i} \sim \text{Poisson}(\lambda \sum_{i=1}^p \alpha_i)$

$$\text{令 } P_{X_\alpha} = \frac{P_X(Z)}{P_{Y^*}(Z)} \quad (29)$$

(29)式是 X_α 的 pgf，將(15)(28)式代入(29)式，可得:

$$P_{X_\alpha} = \frac{P_X(Z)}{P_{Y^*}(Z)} = \frac{e^{-\lambda(1-Z)}}{e^{-\lambda \sum_{i=1}^p \alpha_i (1-Z)}} = e^{-\lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i)(1-Z)} \quad (30)$$

根據 pgf 定理， $X_\alpha \sim \text{Poisson}(\lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i))$

得證，當 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ，則可寫成 Poisson Distribution 的隨機變數

$\sum_{i=1}^p \alpha_i \circ X_{t-i}$ 再加上 Poisson Distribution 的產物 X_α 。 □

在時間序列下，假設 $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p} \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ，可得:

$$X_t = \alpha_1 \circ X_{t-1} + \dots + \alpha_p \circ X_{t-p} + X_\alpha, \quad \alpha_i \in (0,1) \quad (31)$$

除了參數上的限制，Du Jin-Guan, Li Yuan(1991) 文獻中也提到 Poisson

INAR(P)的平穩條件與一般 AR(P)，ARMA(p,q)的平穩條件相同，假設 X_t 是平穩的時間序列下，將(31)式取期望值，可得：

$$E[X_t] = E[\alpha_1 \circ X_{t-1}] + \dots + E[\alpha_p \circ X_{t-p}] + E[X_\alpha] \quad (32)$$

經(32)式可得：

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha_1 \circ \lambda + \dots + \alpha_p \circ \lambda + E[X_\alpha] \Rightarrow E[X_\alpha] = \lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) \\ \Rightarrow X_\alpha &= \lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) + \varepsilon_t, \text{ 其中 } \varepsilon_t \equiv X_\alpha - \lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) \end{aligned} \quad (33)$$

Du Jin-Guan, Li Yuan(1991) 文獻中提到，並滿足 $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$ 。

將(33)式代回(31)式，可得 Poisson INAR(P)模型為：

$$X_t = \alpha_1 \circ X_{t-1} + \dots + \alpha_p \circ X_{t-p} + \lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) + \varepsilon_t \quad (34)$$

本文所使用的 Poisson INAR(P)模型型式為(34)式。

給定 X_{t-1}, \dots, X_{t-p} 下：

$$E(\alpha_1 \circ X_{t-1} | X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) = E(\alpha_1 \circ X_{t-1} | X_{t-1}) = \alpha_1 X_{t-1} \quad (35)$$

$$E(X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) = \alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) \quad (36)$$

往後分析上的依據將使用(36)式； $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 參數估計的方法使用最小平方方法，此方法所得到的 $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p$ 為最小變異數不偏線性估計量。按最小平方方法求得使誤差的平方和 $\sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2$ 為最小，亦即經由最小化

$$\sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=p+1}^n [X_t - (\alpha_1 X_{t-1} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + \mu)]^2 \text{ 可得 } \alpha_1, \dots, \alpha_p \text{ 的估計值 } \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p \text{。}$$

為了滿足 $\alpha_i \in (0,1)$ 且 $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$ ，若 $\hat{\alpha}_i \in (0,1)$ 取 $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i$ ；若 $\hat{\alpha}_i \leq 0$ 取 $\hat{\alpha}_i \rightarrow 0^+$ ；

若 $\hat{\alpha}_i \geq 1$ 取 $\hat{\alpha}_i \rightarrow 1^-$ ；若 $\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i \geq 1$ ，則將原有估計的 α 參數值投射到

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = 0.99999$ 的平面，所得到投射的值便是參數的估計。在假設 X_t 為平穩的時間序列下，參數 λ 的估計值 $\hat{\lambda}$ 使用 X_t 的平均值估計。

在 Cardinal M, Roy R, Lambert J. (1999) 文獻中亦使用最小平方法估計參數 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 。

2-2-2 Autoregressive model (AR model)

假設隨機過程中，每個觀測值 (Z_t) 可以表示為多個相互獨立，且具有相同機率分配之隨機變數序列 $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$ 之線性組合，而這些隨機變數通常假設為白噪音 (常態分配，期望值為 0，變異數為 σ_a^2)， $\{a_t\}$ 的線性組合可表示為：

$$Z_t = \mu + \psi_0 a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \quad (37)$$

其中 μ 與 ψ_i 為固定的參數值 (通常假設 $\psi_0 = 1$)， μ 為平均值；將 $\psi_0 = 1$ 代入 (37) 式，並將 a_t 移到式之左邊，而其他項均在式之右邊，即：

$$a_t = Z_t - \mu - \psi_1 a_{t-1} - \psi_2 a_{t-2} - \dots \quad (38)$$

若 (38) 式對所有時間 t 均成立，例如在時間 $t-1$ 時：

$$a_{t-1} = Z_{t-1} - \mu - \psi_1 a_{t-2} - \psi_2 a_{t-3} - \dots \quad (39)$$

將 (39) 式代入 (38) 式可消去 a_{t-1} 項，並將 Z_t 移到式之左邊，而其他項均在式之右邊，得：

$$Z_t = \mu(1 - \psi_1) + \psi_1 Z_{t-1} + a_t + (\psi_2 - \psi_1^2) a_{t-2} + (\psi_3 - \psi_1 \psi_2) a_{t-3} + \dots \quad (40)$$

同理可將 a_{t-2}, a_{t-3}, \dots 等，逐項消去，而產生：

$$Z_t = C + a_t + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots \quad (41)$$

其中， ϕ_i 為 ψ_i 的函數， C 為 μ 與 ψ_i 的函數；

當 $i > p$ 時， $\phi_i = 0$ ，則(41)式為：

$$Z_t = C + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \quad (42)$$

當 $\mu = 0$ 時，(42)式可改寫成：

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \quad (43)$$

(43)式則稱為 P 階自我回歸過程，簡稱 $AR(P)$ 。

假如 $\{Y_i\}$ 是一個 $\mu \neq 0$ 的時間序列，倘若 $\{Z_t = Y_t - \mu\}$ 是一個 $\mu = 0$ 的

$AR(P)$ process，則(43)式可改寫為：

$$(Y_t - \mu) = \phi_1 (Y_{t-1} - \mu) + \phi_2 (Y_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p (Y_{t-p} - \mu) + a_t \quad (44)$$

在本文，主要使用(44)式的型式；參數 $\phi_1, \dots, \phi_p, \mu$ 的估計，是利用統計

軟體 R 中的 function `arima()` 來進行參數估計。

第三章、資料介紹

在此章節中，將先介紹給符合 Poisson INAR (P) model 條件的模擬資料，並考慮一些可能發生的情形，詳細的參數設定將在下一章節呈現；其次介紹由農業試驗所嘉義分所提供的真實資料。

3-1 模擬(Simulation)資料:

模擬資料產生步驟如下:

(步驟 1) 給定 Poisson Distribution 的 λ 值。

(步驟 2) 經由統計軟體 R function rpois() 創造出 p 個隨機的 Poisson(λ) 值(X_1, \dots, X_p)。

(步驟 3) 給定符合 $\alpha_i \in (0,1)$ 且 $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$ 條件的 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 。

(步驟 4) 經由 $Y_1 = \alpha_1 X_p + \dots + \alpha_p X_1 + \lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i)$ 產生出 Y_1 。

(步驟 5) 創造一個隨機的 Poisson(Y_1) 做為一個新的 X_{p+1} 值。

(步驟 6) 經由 $Y_2 = \alpha_1 X_{p+1} + \dots + \alpha_p X_2 + \lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i)$ 產生出 Y_2 。

(步驟 7) 創造一個隨機的 Poisson(Y_2) 做為一個新的 X_{p+2} 值。

依此類推產生 $X_{p+1}, \dots, X_{p+1000}$ 共 1000 筆資料，為了滿足時間序列上的關係，取後 500 筆($X_{p+501}, \dots, X_{p+1000}$) 做為模擬的資料；操作上，考慮不同的 Poisson INAR (P) model 參數 α 、 λ 及 Order(參數 P 的個數)；在參數 α 的設定，我們考慮以下幾種可能發生的情形:

α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1(情形 1)、

α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1 (情形 2)、

α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1 (情形 3)、

α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1 (情形 4)、

α 係數主要出現在頭尾(α_1 和 α_p)且 α 係數加總趨近於 1 (情形 5)、

α 係數主要出現在頭尾(α_1 和 α_p)且 α 係數加總明顯小於 1 (情形 6)、

α 係數主要出現在最後面(α_p)且 α 係數較大(情形 7)、

α 係數主要出現在最後面(α_p)且 α 係數較小(情形 8)、

α 係數逐漸變小(情形 9)、 α 係數逐漸變大(情形 10);在參數 λ 的設定，我們考慮 $\lambda=2$ 、 $\lambda=20$ 、 $\lambda=200$;在參數 Order 的設定，我們考慮 Order=5、Order=15;因此，總共會有六十筆不同的模擬資料，而詳細的參數設定值，將在下一個章節呈現;實際操作上，配適模型時，我們考慮使用不同的模擬資料筆數 100 筆、450 筆，並利用所配適的模型預測未來 15 筆資料(詳細預測的方法，將在下一章節做詳細說明);因此，總共會產生 120 種不同的結果。

3-2 真實資料

褐飛蝨為台灣最重要的水稻害蟲之一，褐飛蝨聚集吸食水稻汁液的結果，往往在短時間造成水稻植株枯萎，形成「蝨燒」，如防治不當則導致水稻品質及產量降低，造成莫大的損失。由於台灣每年會遭受海外蝨源之遷入，每年遷入時間及族群大小不一，且害蟲可長距離

遷移，遷入台灣之害蟲來源區域甚廣，再加上大環境氣候異常，以往常常發生褐飛蝨入侵時期也可能有所變動，造成水稻不同生育時期之危害。

真實資料的數據為嘉義農業試驗所溪口農場所設立的兩具吸式誘蟲燈(suction light trap)，每日收集及調查褐飛蝨的蟲數(收集的褐飛蝨以長翅短翅的成蟲為主)，針對蟲數的變化使用 AR 模型及 Poisson INAR 模型配適並且比較分析結果；此資料為 2005 年每日所收集到的蟲數；由於上半年蟲數明顯多數為零，因此在分析上取 6 月 1 日至 10 月 15 日，共計 137 筆資料，作為模型的配適，再依照所配適的模型預測未來 15 日，並將 AR 模型及 Poisson INAR 模型所推估的預測值與真實值(10 月 16 日至 10 月 30 日)比較，做為真實資料在使用 AR 模型及 Poisson INAR 模型的一個範例。

第四章、資料分析步驟及結果

4-1 分析步驟

(i) 建立配適模型所使用的資料及未來 15 筆資料的時間序列圖；經由時間序列圖，可初步了解資料的走向。

(ii) 參照 Cardinal M, Roy R, Lambert J. (1999) 文獻，建立 autocorrelation function (ACF) 圖和 partial autocorrelation function (PACF) 圖；當 ACF 圖及 PACF 圖有向 0 收斂的趨勢時，時間序列資料為平穩的時間序列(圖中上下兩條虛線最為判斷是否顯著的依據，若 ACF 值未落在虛線內，則稱之為顯著；同樣道理，若 PACF 值未落在虛線內，則稱之為顯著)。

(iii) 在時間序列分析中，有許多的情況會加入過多的參數來描述時間序列資料，使得時間序列模型的參數估計及配適後的模型變得複雜且不容易估計。建模的過程中，在達到一個最精簡的模型 (parsimonious model)，亦即在模型配適為最佳的情況下，所使用的參數個數為最少，這樣的模型即為最精簡的模型。一般在模型選取的過程中，都是透過一些訊息準則 (information criterion) 來判斷模型是否被選取；在本文，主要參照 Cardinal M, Roy R, Lambert J. (1999) 文獻，使用 PACF 圖做為模型選取的依據之一，若 PACF 值為顯著可判斷出

模型 Order 值(例如:圖形顯示 Lag=5 時, PACF 值為顯著, 而 Lag 大於 5 時 PACF 值皆不顯著, 則可判斷出模型 Order 值為 5), 由於使用 PACF 圖有時並不能判斷出模型 Order 值或是無法判斷最精簡的 Order 值, 因此考慮使用 Akaike(1973)所提出的 AIC(Akaike Information Criterion)做為模型選取的依據之一, 是利用 AIC 值取小的方式來選擇最適合的模型, 其等式如下:

$$AIC = n \log\left(\frac{RSS}{n}\right) + 2p \quad (45)$$

其中, n 為觀測值個數, p 為參數個數, RSS 為 residual sum of squares 亦即 $\sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2$, $\log(\cdot)$ 是以自然數 e 為底的對數; 將模型不同的 Order 值所對應的 AIC 值製作成圖, 稱為 AIC 趨勢圖。

在實際操作, 首先選取 PACF 顯著值與 AIC 趨勢圖所呈現的 Order 值較為接近者做分析, 其次選取 AIC 趨勢圖所呈現的 Order 值做分析, 若兩者所選出的 Order 值相同則只做一次分析, 若 PACF 圖顯示皆不顯著導致無法選取, 則考慮使用 AIC 趨勢圖所呈現的 Order 值做分析; 在各個模擬資料的比較上, 主要採用 PACF 圖選取的模型為依據。

(iv) 估計參數: 經由統計軟體 R 中的 function `arima()` 來進行參數 $\phi_1, \dots, \phi_p, \mu$ 的估計, 可得參數估計值 $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\mu}$; 經由最小平方法進行參數 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 的估計, 可得參數估計值 $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p$, 若 $\hat{\alpha}_i \in (0,1)$ 取

$\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i$; 若 $\hat{\alpha}_i \leq 0$ 取 $\hat{\alpha}_i \rightarrow 0^+$; 若 $\hat{\alpha}_i \geq 1$ 取 $\hat{\alpha}_i \rightarrow 1^-$; 若 $\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i \geq 1$ 取 $\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i \rightarrow 1^-$; 經由過去已知的 X 取平均值進行參數 λ 的估計，可得參數估計值 $\hat{\lambda}$ 。

(v) 建立所選取模型的殘差(ε_t)QQ-PLOT 圖;QQ-PLOT 圖是將殘差值的 percentile 與常態分布的 percentile 做對應，如果殘差值很接近常態分配，軟體所繪製的點會很接近軟體所繪製的直線，如果殘差值不是常態分配，軟體所繪製的點則不會很接近軟體所繪製的直線，可用來判斷模型所產生的殘差值是否為常態分配。

(vi) 預測值的計算:

AR(P) model:

$$(Y_t - \mu) = \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + a_t \quad (46)$$

在已知過去真實值 Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p} 及參數估計值 $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\mu}$ 下，第一天的預測值 \hat{Y}_t 可經由下式求得:

$$\hat{Y}_t = \hat{\phi}_1(Y_{t-1} - \hat{\mu}) + \hat{\phi}_2(Y_{t-2} - \hat{\mu}) + \dots + \hat{\phi}_p(Y_{t-p} - \hat{\mu}) + \hat{\mu} \quad (47)$$

第二天的預測值 \hat{Y}_{t+1} 可經由下式求得:

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{\phi}_1(\hat{Y}_t - \hat{\mu}) + \hat{\phi}_2(Y_{t-1} - \hat{\mu}) + \dots + \hat{\phi}_p(Y_{t-p+1} - \hat{\mu}) + \hat{\mu} \quad (48)$$

依此類推至 \hat{Y}_{t+14} 可得預測的未來 15 日的值($\hat{Y}_t, \dots, \hat{Y}_{t+14}$)

Poisson INAR(P) model:

$$X_t = \alpha_1 \circ X_{t-1} + \dots + \alpha_p \circ X_{t-p} + \lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i) + \varepsilon_t \quad (49)$$

在已知過去真實值 X_{t-1}, \dots, X_{t-p} 及參數估計值 $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p, \hat{\lambda}$ 下，第一天的預測值 \hat{X}_t 可經由(52)式求得：

$$\hat{X}_t = \hat{\alpha}_1 X_{t-1} + \dots + \hat{\alpha}_p X_{t-p} + \hat{\lambda} \left(1 - \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i\right) \quad (50)$$

第二天的預測值 \hat{X}_{t+1} 可經由下式求得：

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{\alpha}_1 \hat{X}_t + \hat{\alpha}_2 X_{t-1} + \dots + \hat{\alpha}_p X_{t-p+1} + \hat{\lambda} \left(1 - \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i\right) \quad (51)$$

依此類推至 \hat{X}_{t+14} 可得預測的未來 15 日的值 ($\hat{X}_t, \dots, \hat{X}_{t+14}$)

(vii) 殘差平方和：將預測值與對應的觀測值相減取平方並加總所有的平方值，目的在探討觀測值與預測值的距離平方加總，若殘差平方和較小，則表示觀測值與預測值的距離較為接近。

(viii) RFE 值：參照 Cardinal M, Roy R, Lambert J (1999) 文獻中所提到的 relative forecast error (RFE)，其等式如下：

$$\text{RFE} = \frac{|\text{觀測值加總} - \text{預測值加總}|}{\text{觀測值加總}} ; \text{其中 } |\bullet| \text{ 為絕對值；在條件上，觀測值}$$

加總需大於 0 才可以使用；目的在探討觀測值與預測值的趨勢是否接近，若 RFE 值較小則表示未來 15 筆資料觀測值與預測值的趨勢較為接近。

4-2 輸出與比較

模擬資料參數設定:

Poisson INAR model 在考慮配適模型使用不同的模擬資料筆數，不同的 order、不同的參數 λ 及不同的參數 α 發生情形，而模擬資料的參數設定將呈現在下列各表；參照上一小節的分析方法，經由這些模擬資料所得到的結果於附錄 A 中做呈現；下列各表中的附錄皆指附錄 A；在附錄 A 中 3-1 情形 1 到 3-3 情形 10 與 2-1 情形 1 到 2-3 情形 10 的參數設定完全相同，唯一差別為:3-1 情形 1 到 3-3 情形 10 配適模型所使用的模擬資料筆數為 450 筆而 2-1 情形 1 到 2-3 情形 10 是 100 筆，因此只列出 2-1 情形 1 到 2-3 情形 10 參數設定表；相同道理，5-1 情形 1 到 5-3 情形 10 與 4-1 情形 1 到 4-3 情形 10 的參數設定完全相同，唯一差別為配適模型所使用的模擬資料筆數為 450 筆而不是 100 筆，因此只列出 4-1 情形 1 到 4-3 情形 10 參數設定表。

附錄2-1情形1	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$
參數設定	5	2	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.1
附錄2-1情形2	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$
參數設定	5	2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1
附錄2-1情形3	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$
參數設定	5	2	0.3	0.0001	0.3	0.0001	0.3	0.1996
附錄2-1情形4	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$
參數設定	5	2	0.1	0.0001	0.1	0.0001	0.1	1.3996
附錄2-1情形5	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$
參數設定	5	2	0.5	0.0001	0.0001	0.0001	0.45	0.0944
附錄2-1情形6	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$
參數設定	5	2	0.1	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	1.5994
附錄2-1情形7	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$
參數設定	5	2	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.8	0.3974
附錄2-1情形8	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$
參數設定	5	2	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	1.7974
附錄2-1情形9	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$
參數設定	5	2	0.28	0.2	0.14	0.1	0.08	0.4
附錄2-1情形10	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$
參數設定	5	2	0.08	0.1	0.14	0.2	0.28	0.4

表一、附錄 A 中，配適模型使用模擬資料筆數 100 筆之參數設定值。

附錄2-2情形1	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	20	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	1
附錄2-2情形2	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	20	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	10
附錄2-2情形3	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	20	0.3	0.0001	0.3	0.0001	0.3	1.966
附錄2-2情形4	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	20	0.1	0.0001	0.1	0.0001	0.1	13.996
附錄2-2情形5	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	20	0.5	0.0001	0.0001	0.0001	0.45	0.944
附錄2-2情形6	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	20	0.1	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	15.994
附錄2-2情形7	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	20	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.8	3.974
附錄2-2情形8	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	20	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	17.974
附錄2-2情形9	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	20	0.28	0.2	0.14	0.1	0.08	4
附錄2-2情形10	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	20	0.08	0.1	0.14	0.2	0.28	4

表二、附錄 A 中，配適模型使用模擬資料筆數 100 筆之參數設定值。

附錄2-3情形1	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	200	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	10
附錄2-3情形2	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	200	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	100
附錄2-3情形3	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	200	0.3	0.0001	0.3	0.0001	0.3	19.66
附錄2-3情形4	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	200	0.1	0.0001	0.1	0.0001	0.1	139.96
附錄2-3情形5	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	200	0.5	0.0001	0.0001	0.0001	0.45	9.44
附錄2-3情形6	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	200	0.1	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	159.94
附錄2-3情形7	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	200	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.8	39.74
附錄2-3情形8	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	200	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	179.74
附錄2-3情形9	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	200	0.28	0.2	0.14	0.1	0.08	40
附錄2-3情形10	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$\lambda(1-\frac{\sum \alpha_i}{2})$
參數設定	5	200	0.08	0.1	0.14	0.2	0.28	40

表三、附錄 A 中，配適模型使用模擬資料筆數 100 筆之參數設定值。

附錄4-1情形1	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	2	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)$
0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.05
附錄4-1情形2	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)$
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1.7
附錄4-1情形3	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	2	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)$
0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.0786
附錄4-1情形4	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	2	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)$
0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	1.8386
附錄4-1情形5	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	2	0.48	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.48	0.0774
附錄4-1情形6	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	2	0.1	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	1.5974
附錄4-1情形7	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	2	0.001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.8	0.3954
附錄4-1情形8	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	2	0.001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	1.7954
附錄4-1情形9	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	2	0.2	0.15	0.1	0.08	0.06	0.05	
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)$
0.04	0.03	0.02	0.01	0.008	0.006	0.004	0.002	0.001	0.478
附錄4-1情形10	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	2	0.001	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01	
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)$
0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	0.1	0.15	0.2	0.478

表四、附錄 A 中，配適模型使用模擬資料筆數 100 筆之參數設定值。

附錄4-2情形1	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	20	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda^{10} - \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$
0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.5
附錄4-2情形2	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	20	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda^{10} - \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	17
附錄4-2情形3	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	20	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda^{10} - \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$
0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.786
附錄4-2情形4	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	20	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda^{10} - \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$
0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	18.386
附錄4-2情形5	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	20	0.48	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda^{10} - \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.48	0.774
附錄4-2情形6	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	20	0.1	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda^{10} - \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	15.974
附錄4-2情形7	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	20	0.001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda^{10} - \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.8	3.954
附錄4-2情形8	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	20	0.001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda^{10} - \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	17.954
附錄4-2情形9	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	20	0.2	0.15	0.1	0.08	0.06	0.05	
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda^{10} - \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$
0.04	0.03	0.02	0.01	0.008	0.006	0.004	0.002	0.001	4.78
附錄4-2情形10	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	20	0.001	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01	
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda^{10} - \sum_{i=1}^{10} \alpha_i$
0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	0.1	0.15	0.2	4.78

表五、附錄 A 中，配適模型使用模擬資料筆數 100 筆之參數設定值。

附錄4-3情形1	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	200	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\frac{\sum_{i=1}^{15}\alpha_i}{200})$
0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	0.65	5
附錄4-3情形2	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	200	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\frac{\sum_{i=1}^{15}\alpha_i}{200})$
0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	170
附錄4-3情形3	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	200	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\frac{\sum_{i=1}^{15}\alpha_i}{200})$
0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	0.0001	0.12	7.86
附錄4-3情形4	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	200	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\frac{\sum_{i=1}^{15}\alpha_i}{200})$
0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	0.0001	0.01	183.86
附錄4-3情形5	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	200	0.48	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\frac{\sum_{i=1}^{15}\alpha_i}{200})$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.48	7.74
附錄4-3情形6	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	200	0.1	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\frac{\sum_{i=1}^{15}\alpha_i}{200})$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	159.74
附錄4-3情形7	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	200	0.001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\frac{\sum_{i=1}^{15}\alpha_i}{200})$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.8	39.54
附錄4-3情形8	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	200	0.001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\frac{\sum_{i=1}^{15}\alpha_i}{200})$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.1	179.54
附錄4-3情形9	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	200	0.2	0.15	0.1	0.08	0.06	0.05	
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\frac{\sum_{i=1}^{15}\alpha_i}{200})$
0.04	0.03	0.02	0.01	0.008	0.006	0.004	0.002	0.001	47.8
附錄4-3情形10	Order	λ	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	
參數設定	15	200	0.001	0.002	0.004	0.006	0.008	0.01	
α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	α_{15}	$\lambda(1-\frac{\sum_{i=1}^{15}\alpha_i}{200})$
0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	0.1	0.15	0.2	47.8

表六、附錄 A 中，配適模型使用模擬資料筆數 100 筆之參數設定值。

模擬資料分析結果:

由模擬資料所做的分析，我們不難發現這些符合 Poisson INAR model 條件的資料，大部份預測值的趨勢與觀測值的趨勢相同，然而從附錄 A 中的結果可以發現，下列 14 筆模擬資料的 RFE 值較為不理想：

附錄 2-1 情形 2、附錄 2-1 情形 5、附錄 2-1 情形 9、附錄 2-2 情形 5、
附錄 3-1 情形 1、附錄 3-1 情形 5、附錄 3-1 情形 9、附錄 3-2 情形 9、
附錄 4-1 情形 5、附錄 4-1 情形 9、附錄 4-2 情形 2、附錄 5-1 情形 3、
附錄 5-1 情形 5、附錄 5-3 情形 5；

經由這 14 筆模擬資料可以發現，情形 5(α 係數主要出現在頭尾(α_1 和 α_p)且 α 係數加總趨近於 1)較可能發生 RFE 值不理想的狀況，也就是預測值的趨勢與觀測值的趨勢較不相同，其次是情形 9(α 係數逐漸變小)及情形 2(α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1)，在情形 3(α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1)也出現過一次較不理想；在附錄 4-1 情形 1，由於觀測值皆為 0，無法滿足計算 RFE 值的條件，因此參考殘差平方和，發現數值僅有 0.21，表示預測值與觀測值的距離是接近的。

在發現情形 5 較常發生 RFE 值不理想的狀況同時，亦發現情形 5 的 ACF 圖常發生不平穩的狀況；因此，我們將附錄 A 中，明顯較為

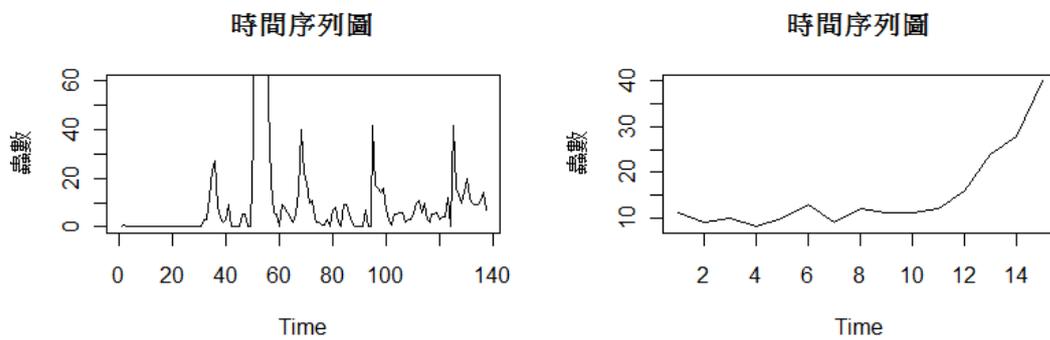
不平穩的情形做個整理，可得：

情形 2 和情形 8 在模擬資料皆無明顯不平穩的情形發生，情形 1 有五種參數設定下的模擬資料明顯較為不平穩，情形 3 有三種參數設定下的模擬資料明顯較為不平穩，情形 4 有一種參數設定下的模擬資料明顯較為不平穩，情形 5 有八種參數設定下的模擬資料明顯較為不平穩，情形 6 有一種參數設定下的模擬資料明顯較為不平穩，情形 7 有九種參數設定下的模擬資料明顯較為不平穩，情形 9 有兩種參數設定下的模擬資料明顯較為不平穩，情形 10 有五種參數設定下的模擬資料發生明顯較為不平穩，並發現這些不平穩情形普遍發生在參數 λ 值設定較小的時候，不過情形 5 和情形 7 不平穩情形較為嚴重，在參數 λ 值設定較大時也會發生不平穩情形；在情形 7 (α 係數主要出現在最後面 (α_p) 且 α 係數較大) 發生不平穩的參數設定種數最多，但經由 PACF 圖所選取的 Order 值皆為正確的，參數估計值與其他情形相比也估計的較為準確，可能是這些原因，使得 RFE 值不至於不理想。

真實資料:

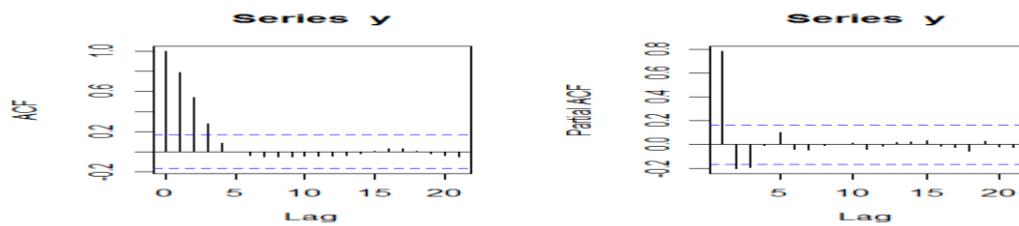
使用誘蟲燈在 2005 年 6 月 1 日至 10 月 15 日止每日所收集到的褐飛蝨蟲數，共計 137 筆資料，做為建構模型的資料；並使用 10 月 15 日至 10 月 30 日止，共計 15 筆資料，做為驗證預測值的資料。

(i) 建構模型使用的真實資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



在第 51 筆資料到第 55 筆資料，有不正常蟲數過大發生，蟲數最高增加至 537，為了清楚資料的走向，圖型的 Y 軸採區間 0 到 60。

(ii) 配適模型使用 137 筆真實資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=3

(iii) 參數估計值

Poisson INAR 模型之參數估計值:

$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\lambda}(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$
20.02985	0.904578	0.0001	0.0001	1.907291

AR 模型之參數估計值:

$\hat{\mu}$	$\hat{\phi}_1$	$\hat{\phi}_2$	$\hat{\phi}_3$
19.32083	0.898611	-0.02045	-0.18847

(iv) 殘差平方和及 RFE 值

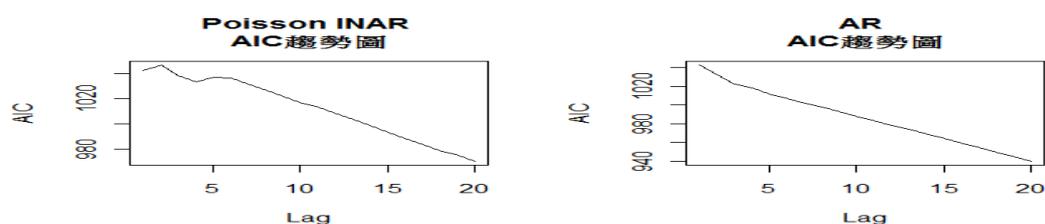
Poisson INAR 模型之觀測值與預測值的殘差平方和: 861.4667

AR 模型之觀測值與預測值的殘差平方和: 1311.453

Poisson INAR 模型之 RFE 值 0.04358825

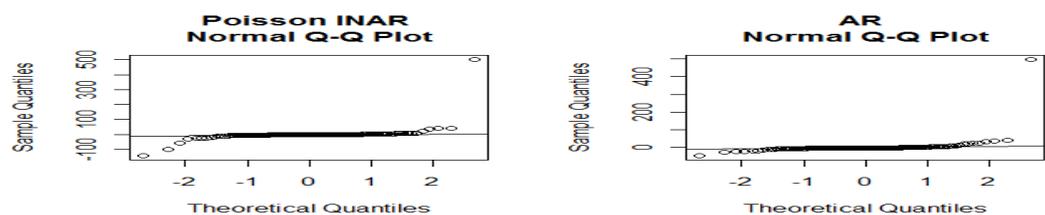
AR 模型之 RFE 值 0.2607242

(v)Poisson INAR 模型與 AR 模型之 AIC 趨勢圖:

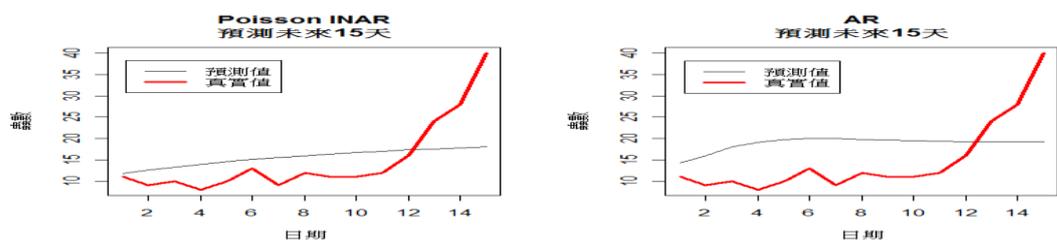


由於 AIC 趨勢圖都呈現遞減, 我們考慮使用 PACF 圖做為選模的標準。

(vi)模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖:



(vii)Poisson INAR 模型與 AR 模型之預測值與真實值的比較圖:

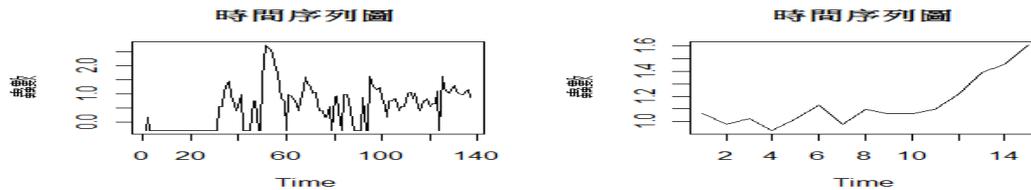


真實資料做轉換:

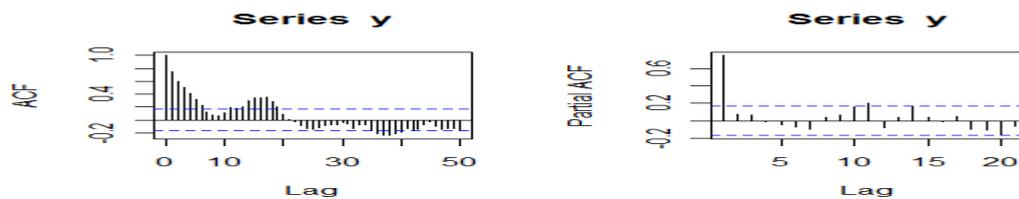
當真實資料不符合常態，常被使用的一種資料轉換技巧如下:

轉換函數: $\log_{10}(Y_t + 0.5)$ ，其中 Y_t 為時間 t 的真實蟲數。

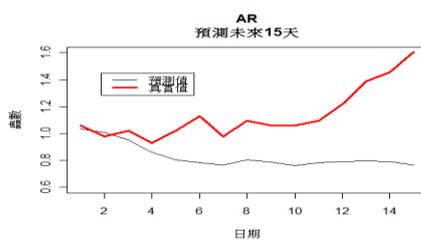
(i) 使用轉換後的真實資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



(ii) 配適模型使用 137 筆真實資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



(iii) AR 模型之預測值與真實值的比較圖:



(iv) RFE 值: 0.2695393

經由比較 Poisson INAR 模型與 AR 模型兩者之殘差平方和、RFE 值、預測值與真實值的比較圖可以發現，Poisson INAR 模型所配適的模型觀測值與預測值的距離比 AR 模型所配適的模型較為接近且觀測值與預測值的趨勢也較為接近。

第五章、結論

時間序列模型的選取一直是時間序列分析的一個重要關鍵，在本文闡述由 Alzaid, A. A. and Al-Osh, M.A. (1990) 所提出的 Poisson INAR 模型，並參照 Cardinal M, Roy R, Lambert J. (1999) 的文獻作為分析模擬資料與真實資料的依據。

在闡述 Poisson INAR 模型時，本文使用較為簡單的證明方式，證明當 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ，則可寫成 Poisson Distribution 的隨機變數

$\sum_{i=1}^p \alpha_i \circ X_{t-i}$ 再加上 Poisson Distribution 的產物 X_α 。

在進行分析模擬資料的結果中，使用 Poisson INAR 模型大部分皆能準確的預測未來真實值的趨勢，唯有一些情形尚需克服；在進行分析真實資料的結果中，發現 Poisson INAR 模型比 AR 模型在預測未來 15 日的表現較為好，也就是說若時間序列資料有呈現特殊的性質時，選取特殊的時間序列模型將有助於減少預測值與真實值的距離，更能較準確的預測未來的趨勢；並發現真實資料的 ACF 圖、PACF 圖、QQ-PLOT 圖與附錄 4-1 情形 1 有些類似，或許之間存在著關係。

時間序列的發展，推廣到了非常態分配，在本文為滿足 Poisson 分配的時間序列資料，在後續的研究或許能將模擬資料與真實資料做更進一步的結合與修正或將真實資料進行更接近 Poisson 分配的處理，將有助於進行更為準確的預測。

參考文獻

- Alzaid, A. A. and Al-Osh, M.A. (1990). An integer-valued p th order autoregressive structure (INAR(p)) process. *Journal of Applied Probability*, 27, 314-324.
- Cardinal M, Roy R, Lambert J. (1999). On the application of integer-valued time series models for the analysis of disease incidence. *Statist. Med.* 18, 2025-2039.
- Dion, J. -P., Gauthier, G. and Latour, A. (1995). Branching processes with immigration and integer-valued time series. *Serdica*, 21, 123-136.
- Du Jin-Guan, Li Yuan (1991). The integer-valued autoregressive (INAR(p)) model. *Journal of Time Series Analysis Volume 12, Issue 2*, 129–142.
- Latour, A. (1998). Existence and stochastic structure of non-negative integer-valued autoregressive processes. *Journal of Time Series Analysis*, 19, 439-455.
- Steutel, F. W. and Van Harn, K. (1979). Discrete analogues estimation for stochastic process. *Ann. Prob.* 7, 893-899.

附錄 A: Poisson INAR(P) model 在考慮建構模型使用不同的模擬資料筆數, 不同的 Order, 不同的參數 λ 及不同的參數 α 發生情形比較。

一、簡介:

Order 表示 Poisson INAR(P) model 中的參數 P 個數。

$\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 參數的估計值使用最小平方法, 可得 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 的估計值

$\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p$ 。為了滿足 $\alpha_i \in (0,1)$ 且 $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$, 若 $\hat{\alpha}_i \in (0,1)$ 取 $\hat{\alpha}_i = \hat{\alpha}_i$; 若 $\hat{\alpha}_i \leq 0$ 取

$\hat{\alpha}_i \rightarrow 0^+$; 若 $\hat{\alpha}_i \geq 1$ 取 $\hat{\alpha}_i \rightarrow 1^-$; 參數 λ 的估計值 $\hat{\lambda}$ 使用 X_t 的平均值估計。

RFE 值: 參考 [Cardinal M](#), [Roy R](#), [Lambert J](#) (1999) 文獻中所提到的

relative forecast error(RFE), 其等式如下:

$$RFE = \frac{|\text{觀測值加總} - \text{預測值加總}|}{\text{觀測值加總}}$$
; 其中 $|\bullet|$ 為絕對值; 在條件上, 觀測值

加總需大於 0 才可以使用。

預測值計算方法如下:

第一天的預測值 \hat{X}_t 可經由下式求得:

在已知真實值 X_{t-1}, \dots, X_{t-p} 下,

$$\hat{X}_t = \hat{\alpha}_1 \circ X_{t-1} + \dots + \hat{\alpha}_p \circ X_{t-p} + \hat{\lambda} \left(1 - \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i\right)$$

第二天的預測值 \hat{X}_{t+1} 可經由下式求得:

$$\hat{X}_{t+1} = \hat{\alpha}_1 \circ \hat{X}_t + \hat{\alpha}_2 \circ X_{t-1} \dots + \hat{\alpha}_p \circ X_{t-p+1} + \hat{\lambda} \left(1 - \sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i\right)$$

依此類推至 \hat{X}_{t+14} 可得預測的未來 15 日的值 ($\hat{X}_t, \dots, \hat{X}_{t+14}$)

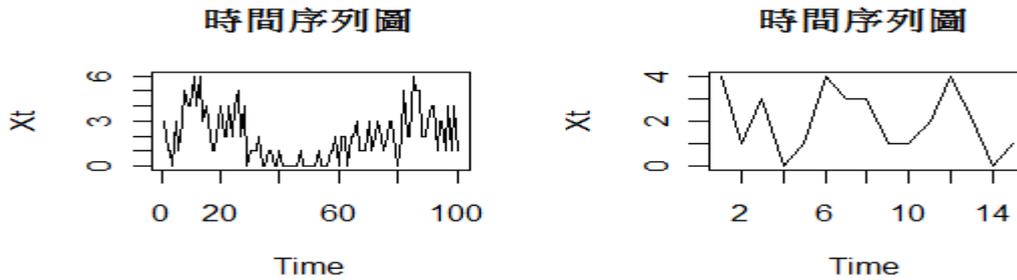
二、建構模型使用模擬資料筆數為 100 筆，Order=5。

2-1 模擬資料參數 $\lambda=2$ ，並預測未來 15 筆

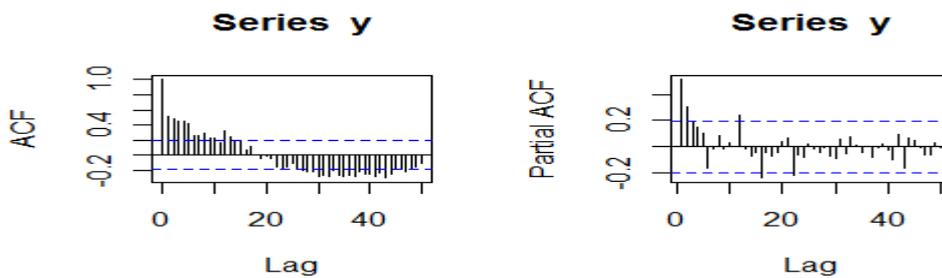
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.19 \quad \alpha_2=0.19 \quad \alpha_3=0.19 \quad \alpha_4=0.19 \quad \alpha_5=0.19 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.1$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=3。

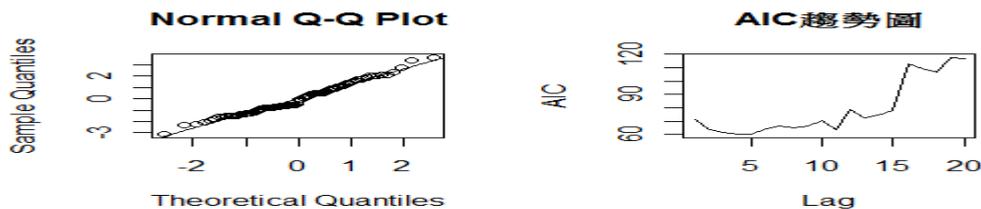
參數估計值：

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
0.531505	0.297779	0.237951	0.191487

觀測值與預測值的殘差平方和: 28.70682

RFE 值: 0.02430396

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=5

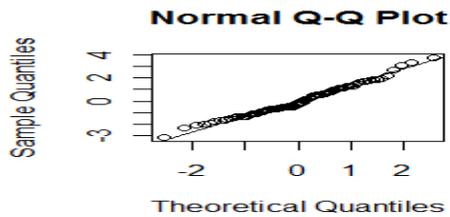
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.399786	0.262989	0.183838	0.149903	0.093563	0.105516

觀測值與預測值的殘差平方和: 28.75247

RFE 值: 0.01549064

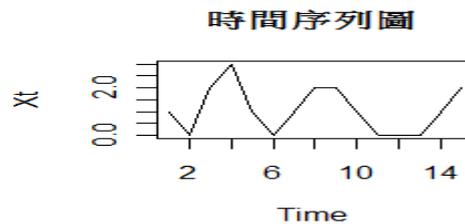
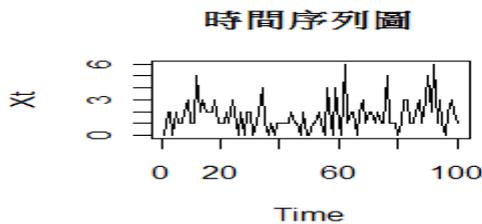
模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



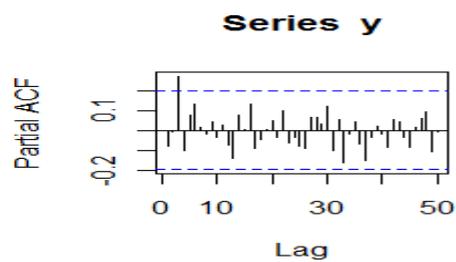
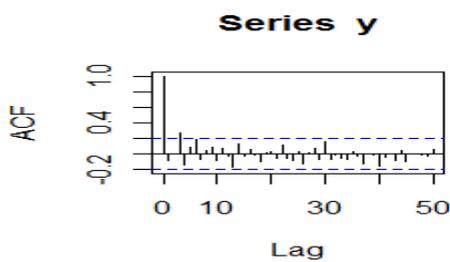
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=3

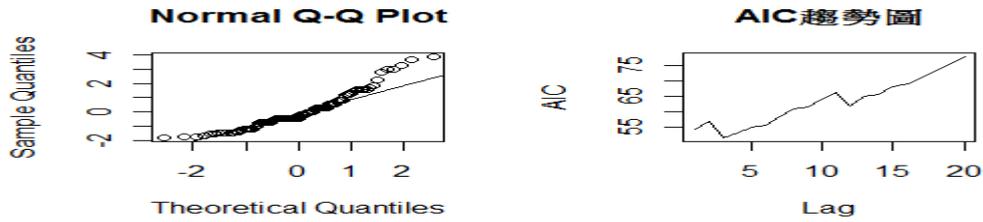
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
1.161315	0.0001	0.018993	0.276859

觀測值與預測值的殘差平方和: 18.64697

RFE 值: 0.5750448

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：

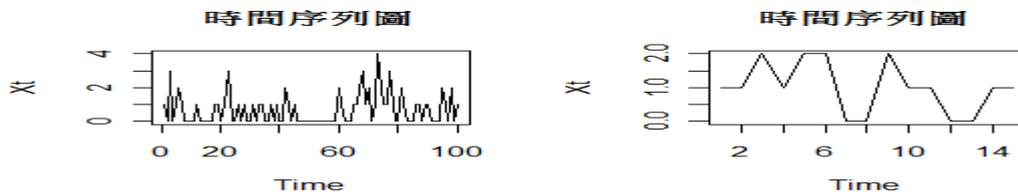


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=3。

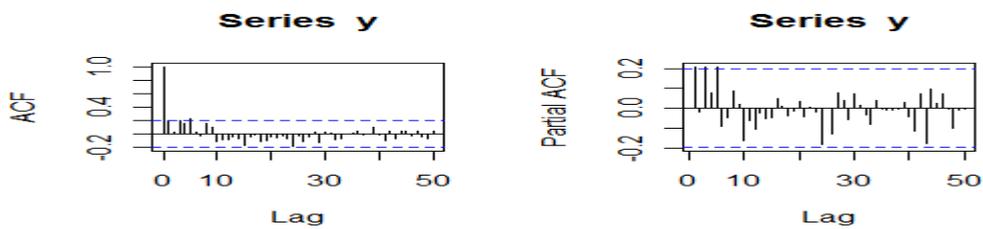
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.3 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.3 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.3 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.1996$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

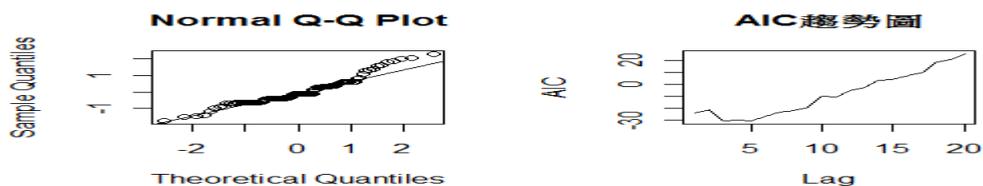
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.130784	0.29462	0.0001	0.268112	0.0001	0.239855

觀測值與預測值的殘差平方和: 8.104122

RFE 值: 0.2126948

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：

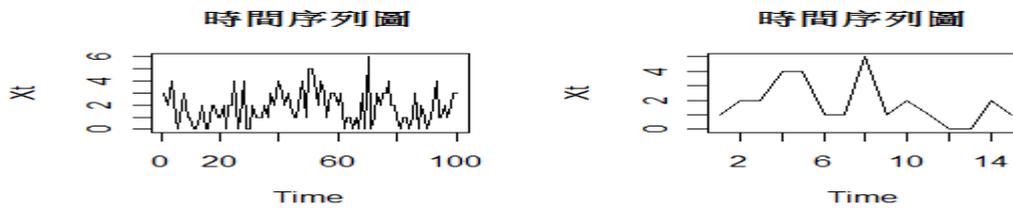


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5。

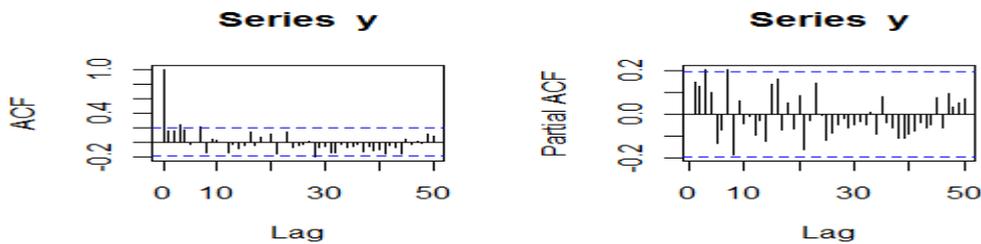
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1.3996$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=7

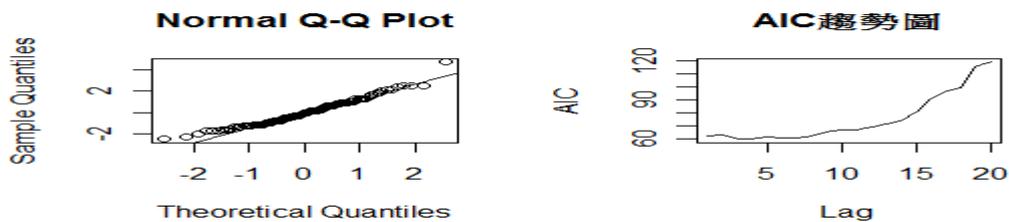
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^7 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$
0.426307	0.087198	0.182909	0.206473	0.082148	0.0001	0.0001	0.206477

觀測值與預測值的殘差平方和: 30.72619

RFE 值: 0.06609242

模型取 Order=7 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=4

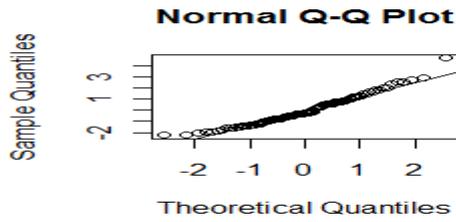
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^4 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
0.974424	0.070076	0.088007	0.191278	0.106775

觀測值與預測值的殘差平方和: 30.85336

RFE 值: 0.009536339

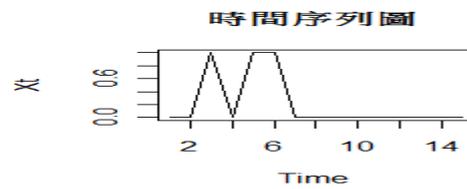
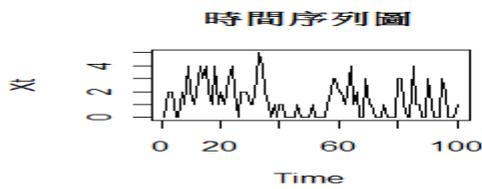
模型取 Order=4 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



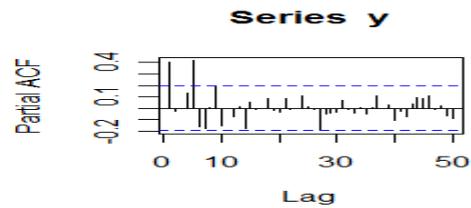
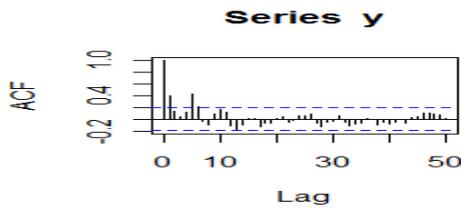
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=5) 且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.5 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.45 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.0944$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=4

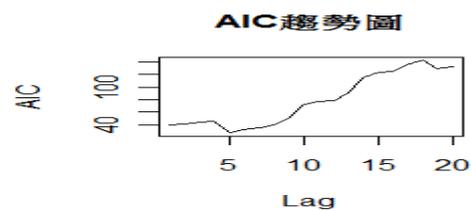
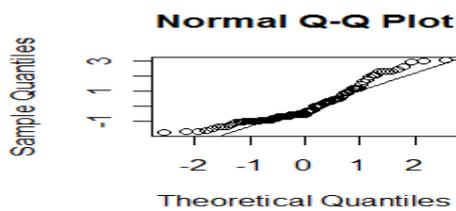
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
0.576626	0.422595	0.0001	0.0001	0.134356

觀測值與預測值的殘差平方和: 16.44195

RFE 值: 4.681203

模型取 Order=4 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=5

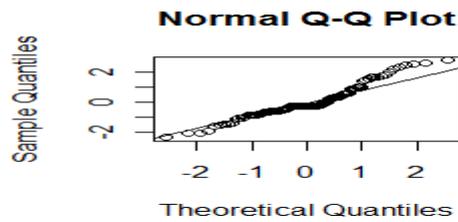
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.256844	0.369072	0.002591	0.0001	0.0001	0.432936

觀測值與預測值的殘差平方和: 13.67579

RFE 值: 4.157821

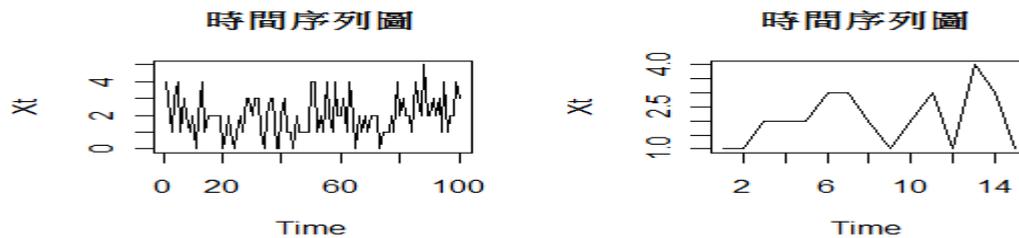
模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



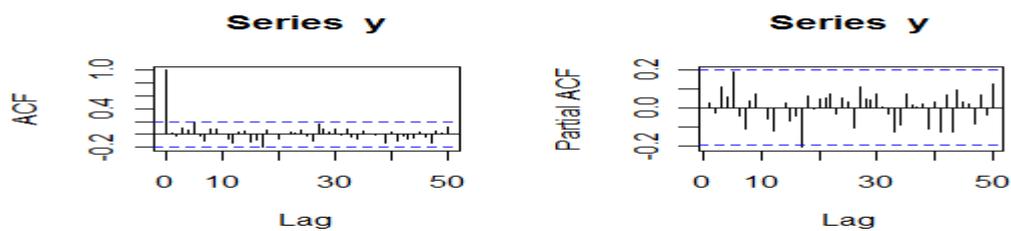
情形 6: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=5) 且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1.5994$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=17

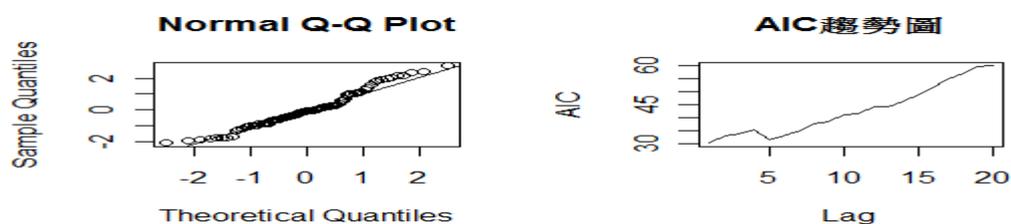
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.929419	0.028166	0.032064	0.067309	0.039439	0.127774
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.019946	0.11304	0.007945	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$
0.0001	0.024628	0.056852	0.0001	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 14.10512

RFE 值: 0.0567166

模型 Order=17 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=5

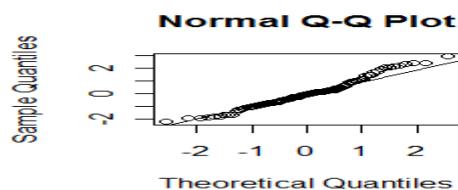
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
1.28369	0.003217	0.0001	0.102544	0.029847	0.194234

觀測值與預測值的殘差平方和: 14.60427

RFE 值: 0.05246262

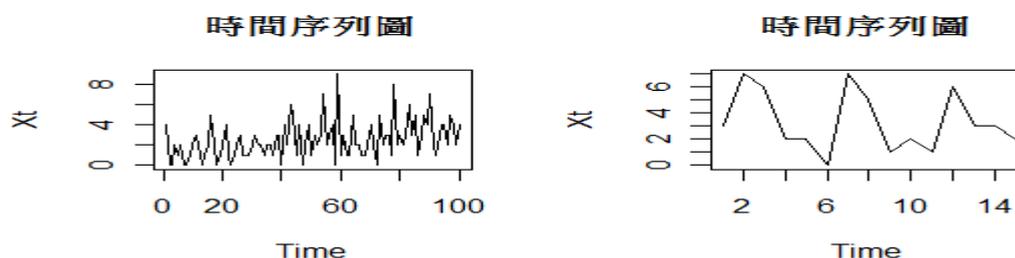
模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



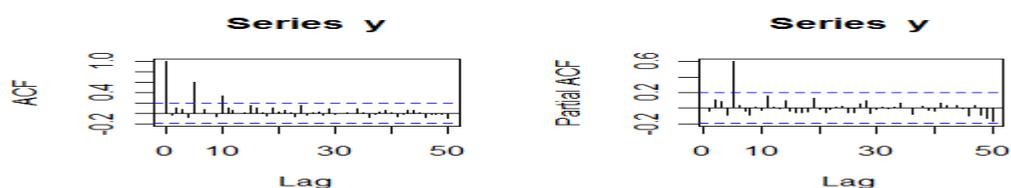
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數明顯較大。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.8 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.3974$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

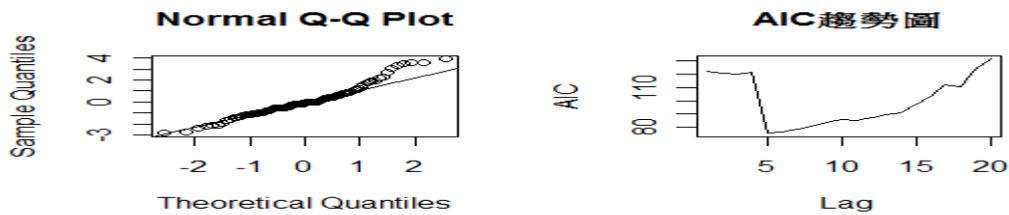
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.760469	0.005351	0.072944	0.002231	0.0001	0.620843

觀測值與預測值的殘差平方和: 94.3271

RFE 值: 0.1091443

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

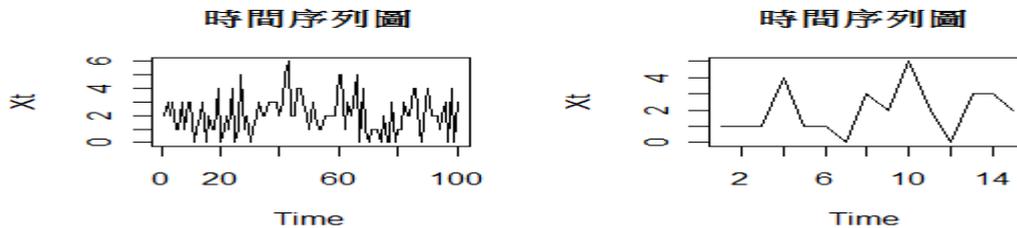


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

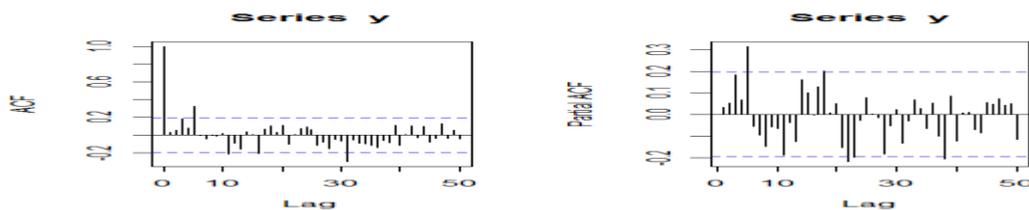
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1.7974$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

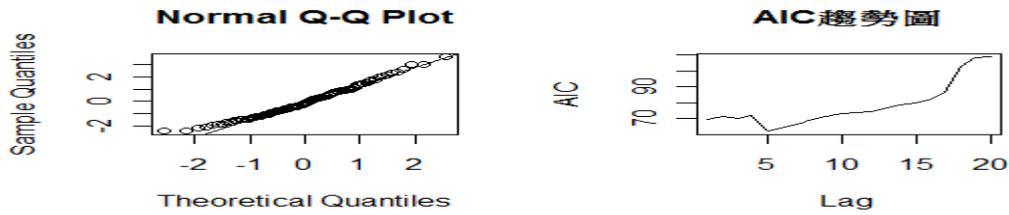
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.865927	0.000743	0.0001	0.196545	0.032297	0.350604

觀測值與預測值的殘差平方和: 33.10019

RFE 值: 0.06688754

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

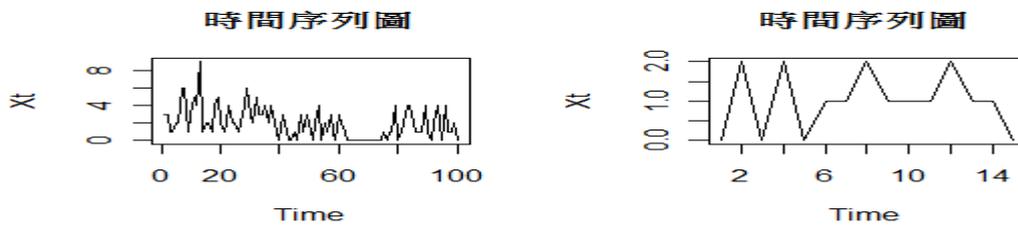


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

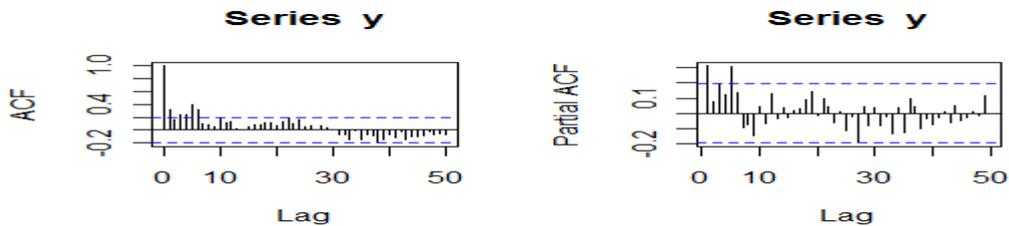
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.28 \quad \alpha_2=0.2 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.08 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.4$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

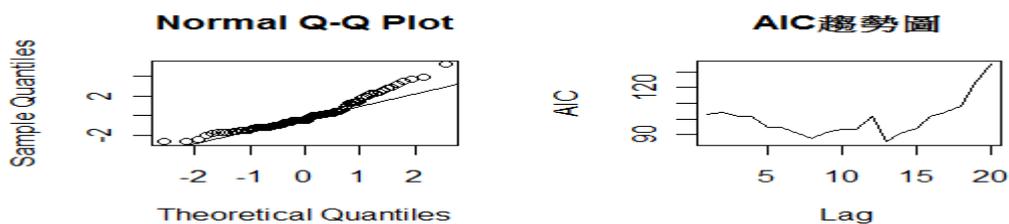
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.544076	0.208508	0.0001	0.154828	0.043138	0.312518

觀測值與預測值的殘差平方和: 22.5635

RFE 值: 0.916384

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=13

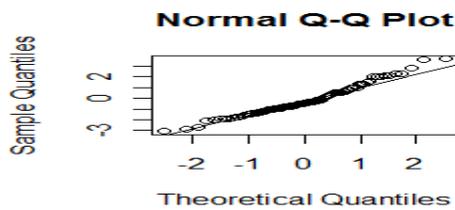
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.044494	0.128027	0.0001	0.171149	0.142154	0.220833	0.076817
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.101143	0.0001	0.133122	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 14.76064

RFE 值: 0.7489273

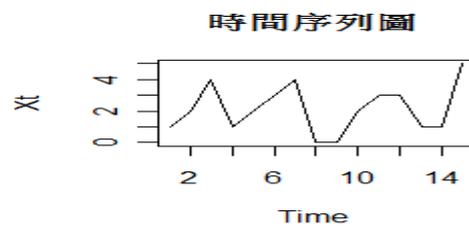
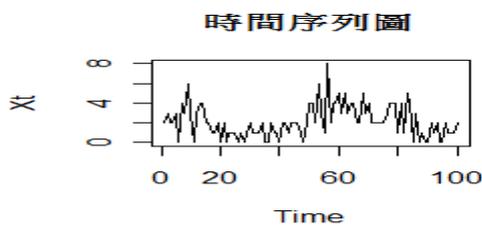
模型取 Order=13 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



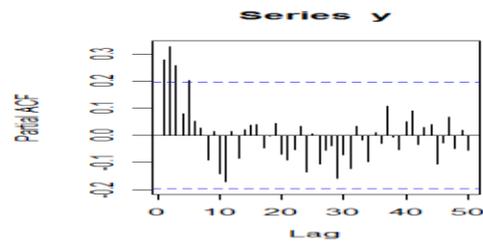
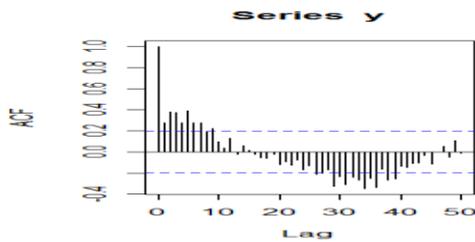
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.08 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.2 \quad \alpha_5=0.28 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.4$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

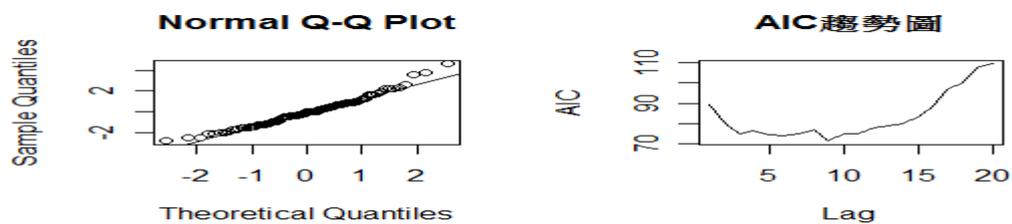
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.540772	0.064381	0.206279	0.197742	0.070074	0.205937

觀測值與預測值的殘差平方和: 33.21511

RFE 值: 0.1633281

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=9

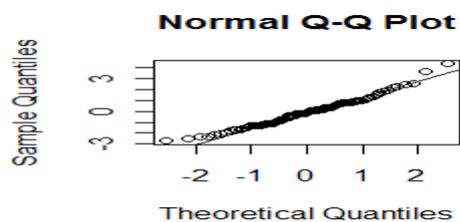
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
0.331289	0.050935	0.163167	0.244893	0.051733
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$
0.204876	0.069856	0.031294	0.0001	0.022789

觀測值與預測值的殘差平方和: 40.71147

RFE 值: 0.3441316

模型取 Order=9 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):

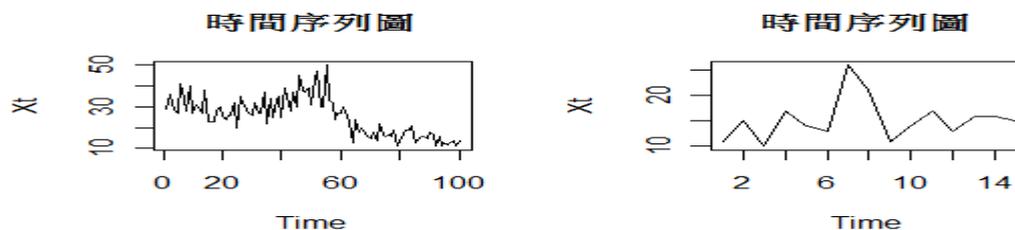


2-2 模擬資料參數 $\lambda=20$ ，並預測未來 15 筆

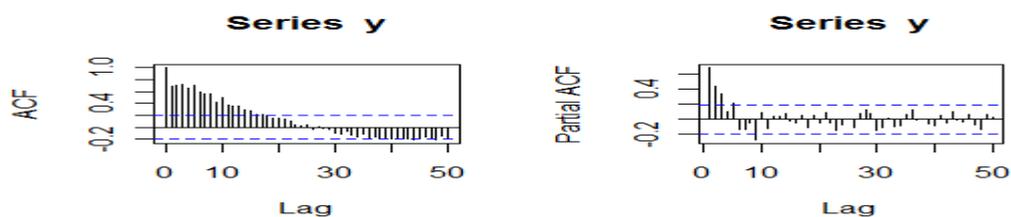
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.19 \quad \alpha_2=0.19 \quad \alpha_3=0.19 \quad \alpha_4=0.19 \quad \alpha_5=0.19 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1 \quad \text{Order}=5$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

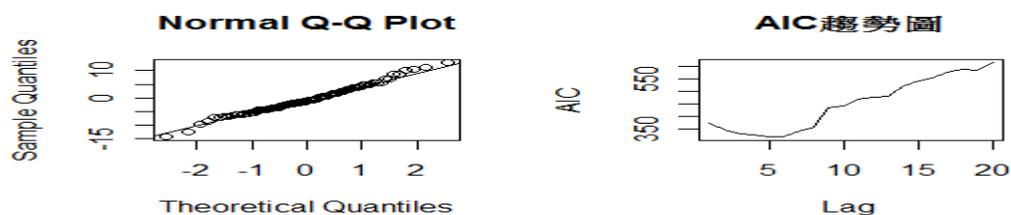
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.476115	0.061745	0.184537	0.302051	0.139759	0.292999

觀測值與預測值的殘差平方和: 288.3536

RFE 值: 0.1214850

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=6

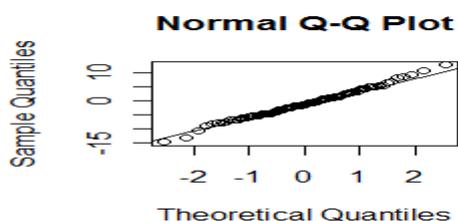
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.002501	0.096779	0.198015	0.30388	0.116234	0.300437	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 288.0412

RFE 值: 0.1326441

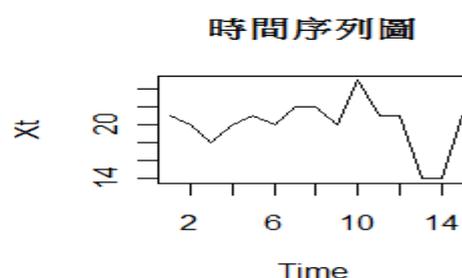
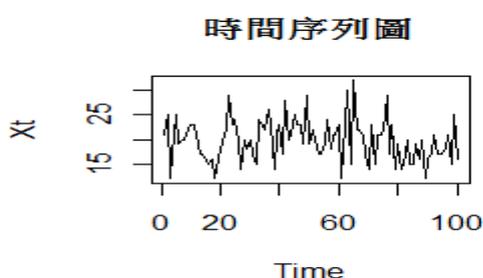
模型取 Order=6 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



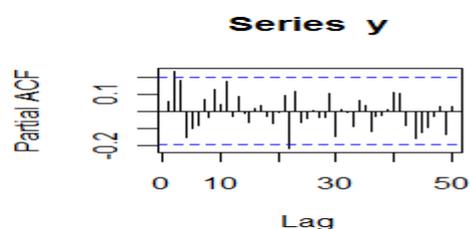
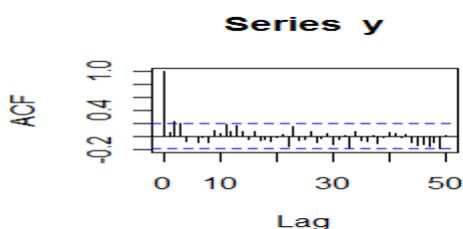
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 10$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=17

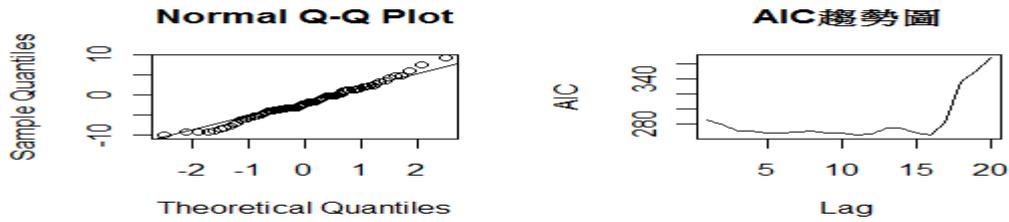
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.001987	0.0001	0.305946	0.263585	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.114279	0.0001	0.064243	0.0001	0.177428
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$
0.006572	0.103749	0.0001	0.0001	0.024254	0.039458

觀測值與預測值的殘差平方和: 166.2553

RFE 值: 0.01163044

模型取 Order=17 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=16

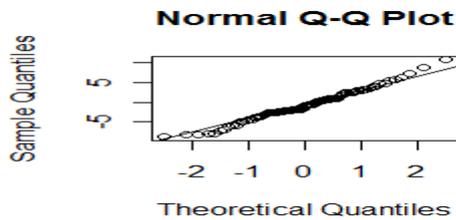
參數估計值

$\lambda(1 - \sum \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.001982	0.0001	0.306502	0.265226	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.10818	0.0001	0.068143	0.0001	0.167481
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	
0.0001	0.101549	0.00242	0.0001	0.017588	

觀測值與預測值的殘差平方和: 158.5924

RFE 值: 0.07805075

模型取 Order=16 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):

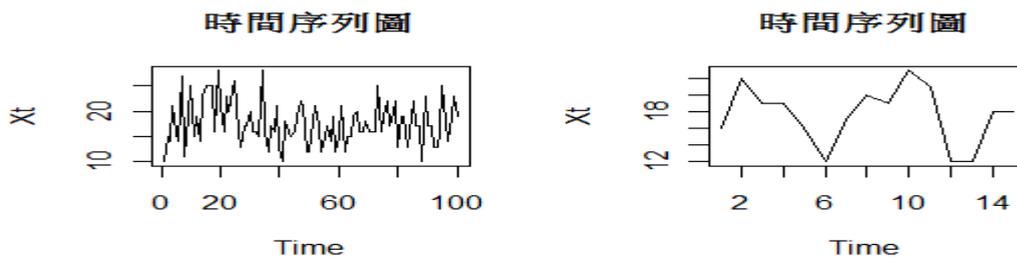


模擬資料: Poisson Integer Autoregressive $\lambda=20$ 使用筆數 150 筆 預測未來 15 天

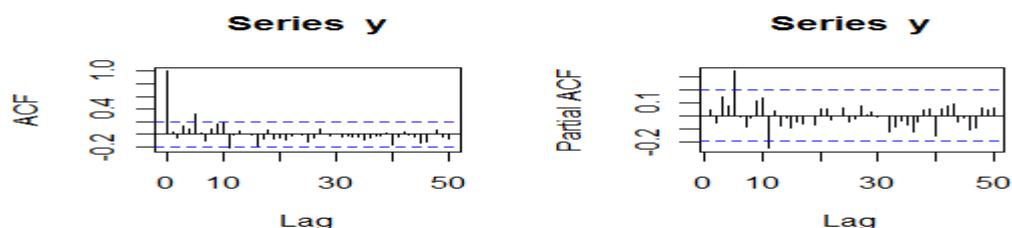
情形 3: α 係數大小跳動大且相加趨近於 1

$$\alpha_1=0.3 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.3 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.3 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1.996$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=11

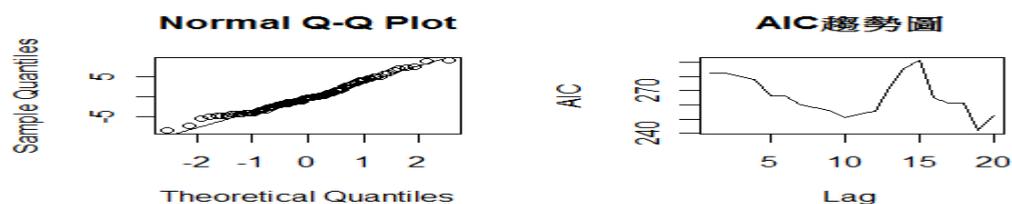
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.504669	0.090313	0.0001	0.115927	0.04926	0.263449
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.073232	0.0001	0.101752	0.143799	0.13356	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 191.1361

RFE 值: 0.0564433

模型取 Order=11 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=19

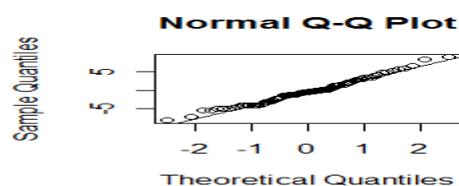
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.907778	0.0001	0.0001	0.085322	0.0001	0.207412	0.140261
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.133132	0.128639	0.159006	0.0001	0.017184	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	
0.075647	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 194.3843

RFE 值: 0.02505466

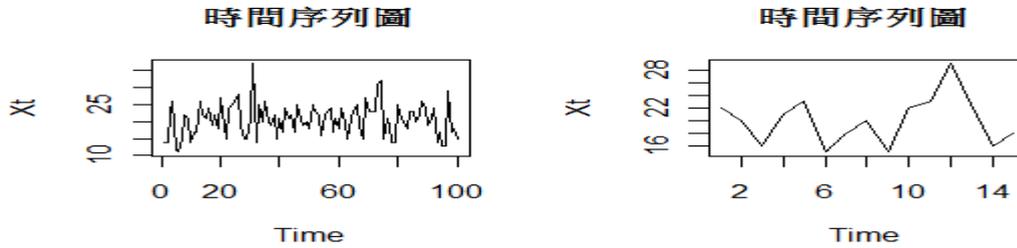
模型取 Order=19 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



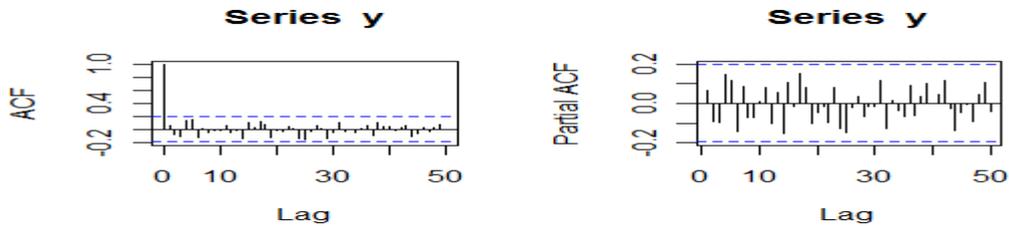
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 13.996$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

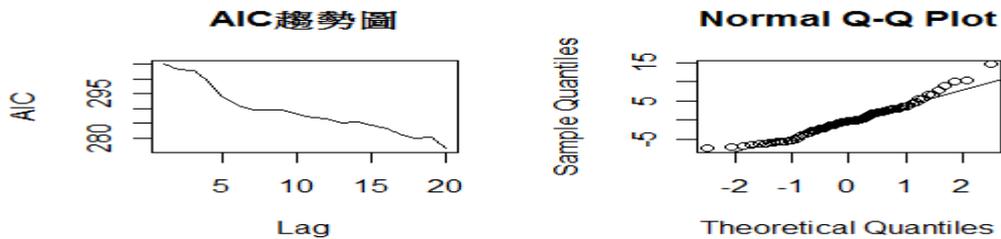


建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=20
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
9.0894	0.041302	0.0001	0.0001	0.036818	0.032219	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.012651	0.0001	0.0001	0.0001	0.025081	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.0001	0.178474	0.0001	0.128194	0.107857	0.0001	0.0001

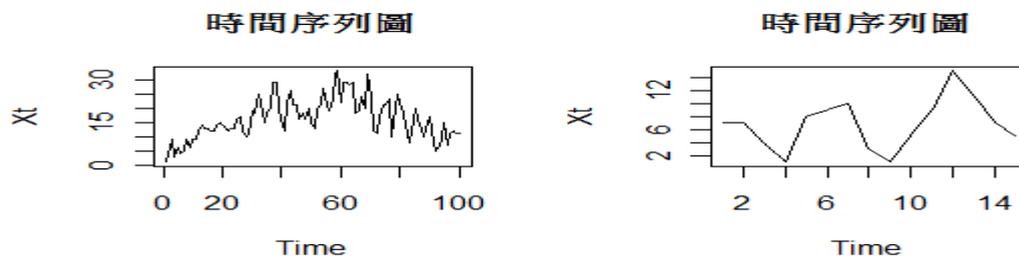
觀測值與預測值的殘差平方和: 194.3876

RFE 值: 0.03027021

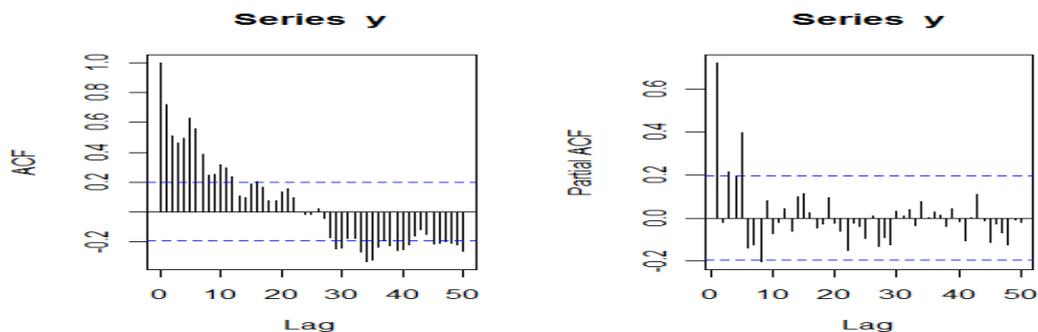
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=5) 且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.5 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.45 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.944$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

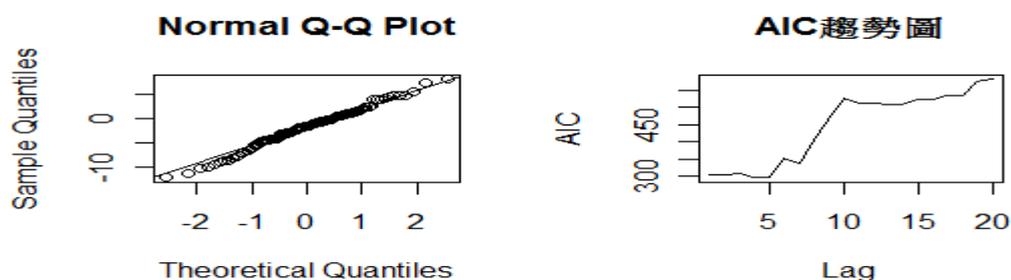
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.001679	0.582333	0.0001	0.087396	0.0001	0.450618

觀測值與預測值的殘差平方和: 1254.716

RFE 值: 1.188682

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

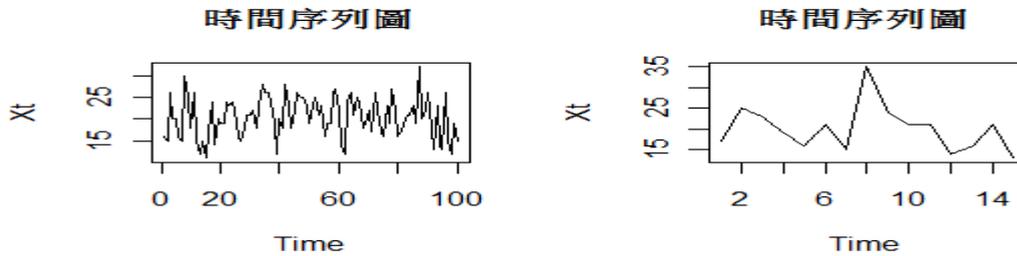


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

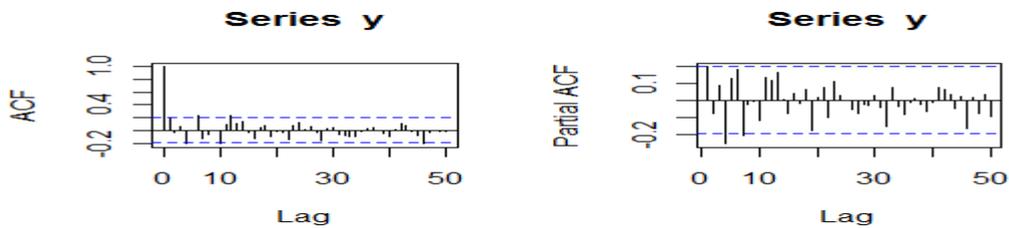
情形 6: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=5) 且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 15.994$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=7

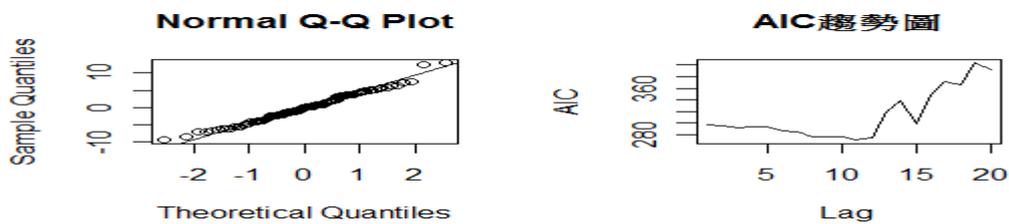
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^7 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$
6.110749	0.310296	0.0001	0.088301	0.0001	0.036011	0.268019	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 516.8718

RFE 值: 0.06194813

模型取 Order=7 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=11

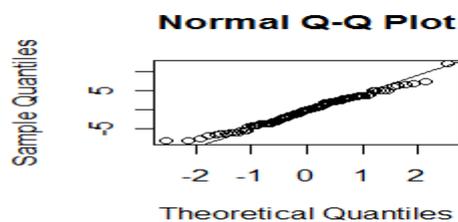
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{11} \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.690034	0.369622	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.291474	0.0001	0.0001	0.108913	0.0001	0.195436

觀測值與預測值的殘差平方和: 488.2105

RFE 值: 0.0884419

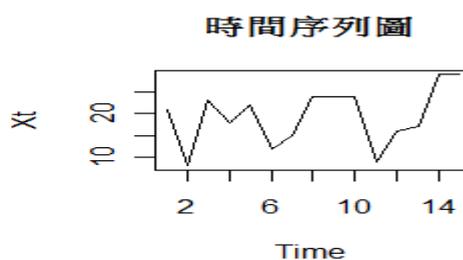
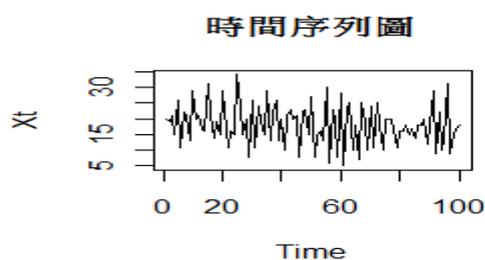
模型取 Order=11 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



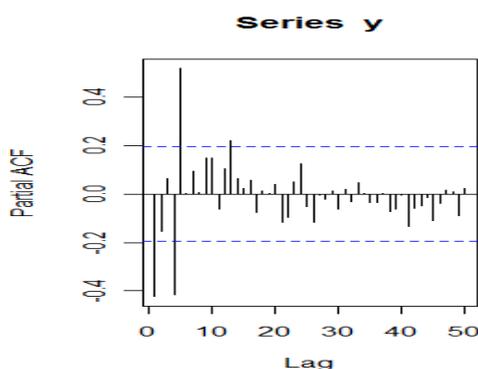
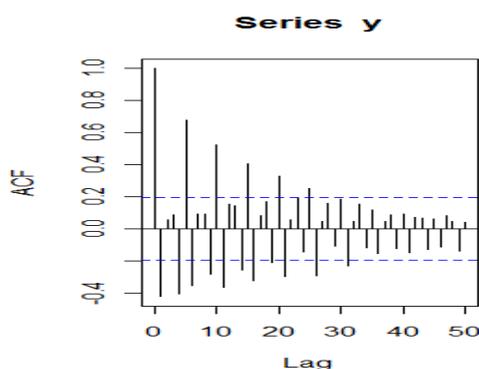
模擬資料: Poisson Integer Autoregressive $\lambda=20$ 使用筆數 150 筆 預測未來 15 天
情形 7: α 係數主要出現在後面 Order 而係數較大

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.8 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 3.974$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

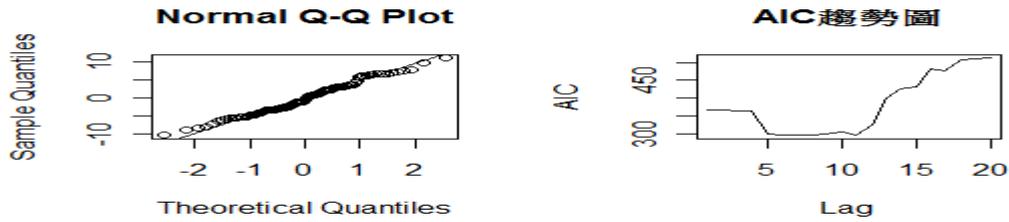
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
7.775287	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.566881

觀測值與預測值的殘差平方和: 674.0141

RFE 值: 0.0732031

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



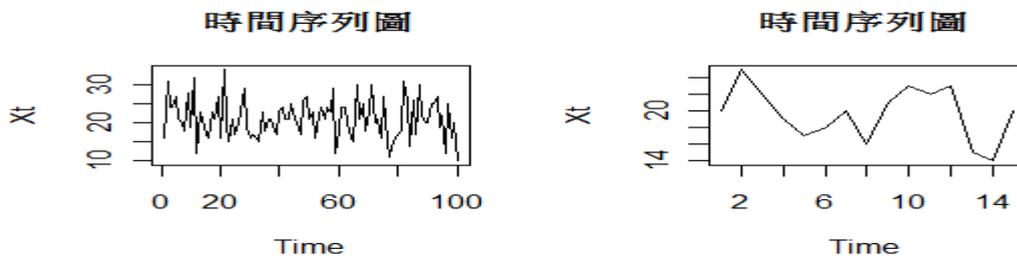
依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

模擬資料: Poisson Integer Autoregressive $\lambda=20$ 使用筆數 150 筆 預測未來 15 天

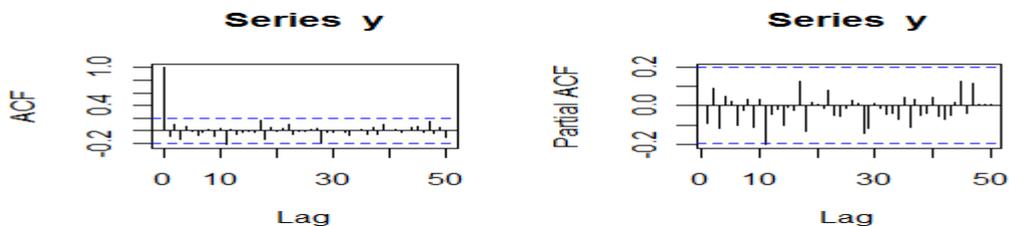
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 17.974$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=11

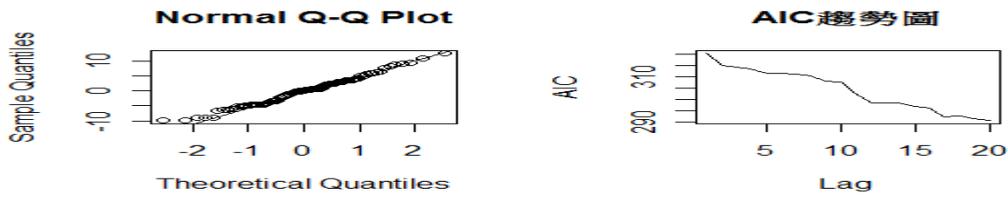
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
17.84014	0.0001	0.010214	0.0001	0.076683	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.000911	0.0001	0.049508	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 157.7342

RFE 值: 0.0574744

模型取 Order=11 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



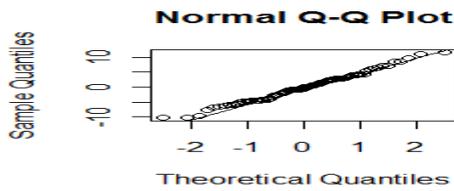
依據 AIC 取小法則選取 Order=20
 參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
11.88093	0.072863	0.0001	0.0001	0.076975	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.112982	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.0001	0.0001	0.005485	0.094436	0.0001	0.065347	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 195.0752

RFE 值: 0.07719888

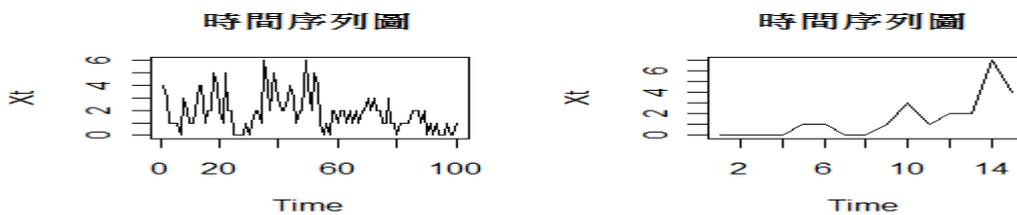
模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



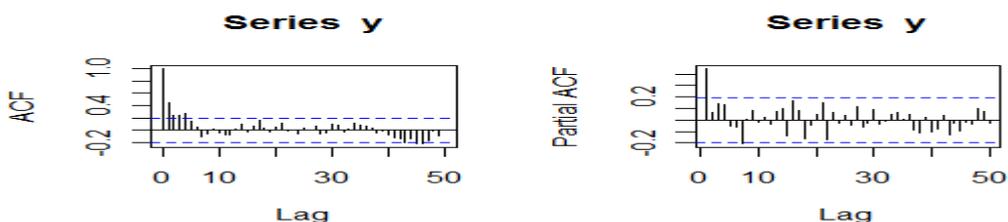
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.28 \quad \alpha_2=0.2 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.08 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 4$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=7

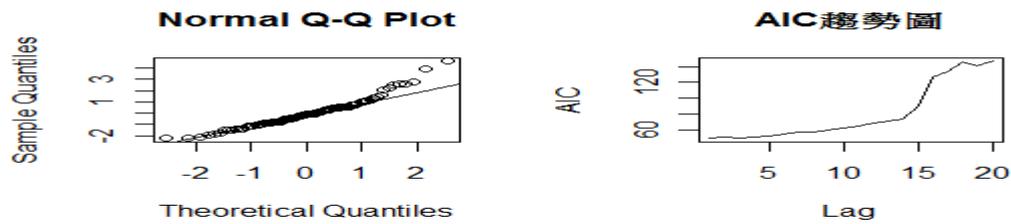
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$
0.492708	0.354434	0.023649	0.134818	0.186399	0.0001	0.034094	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 44.00454

RFE 值: 0.1716766

模型取 Order=7 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=1

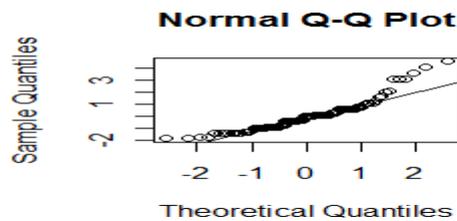
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$
0.999841	0.447016

觀測值與預測值的殘差平方和: 53.32784

RFE 值: 0.2030904

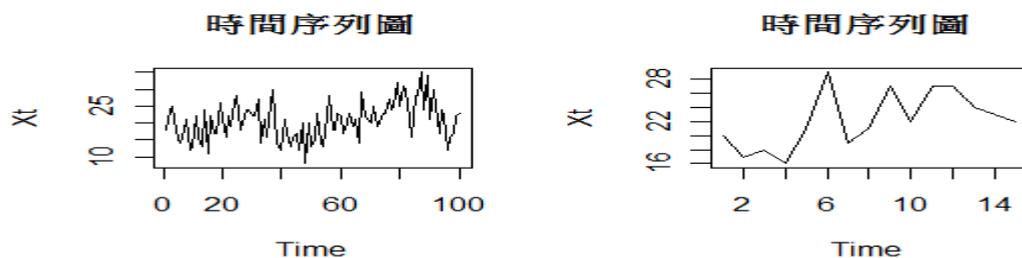
模型取 Order=1 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



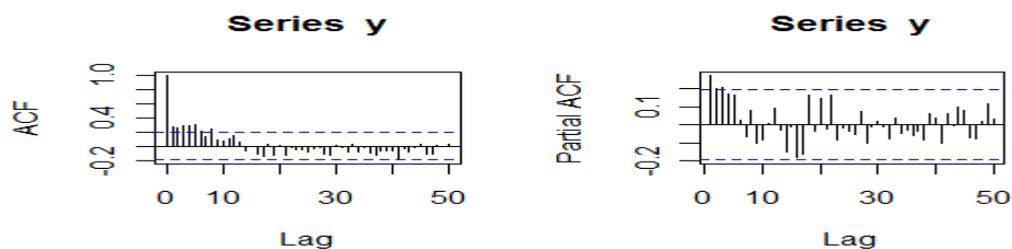
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.08 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.2 \quad \alpha_5=0.28 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 4$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=3

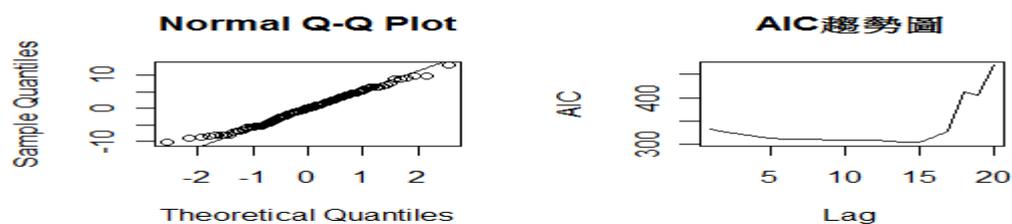
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
9.353186	0.172348	0.162117	0.210768

觀測值與預測值的殘差平方和: 260.3581

RFE 值: 0.07935965

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=15

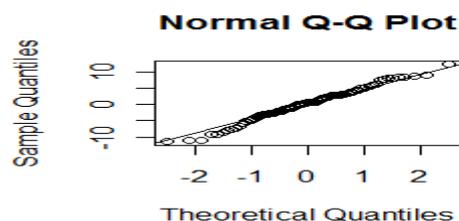
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.002112	0.101899	0.135716	0.11518	0.147339	0.196399
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.060882	0.0001	0.11184	0.0001	0.0001	0.027215
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.099444	0.004107	0.0001	0.0001		

觀測值與預測值的殘差平方和: 573.957

RFE 值: 0.2194297

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):

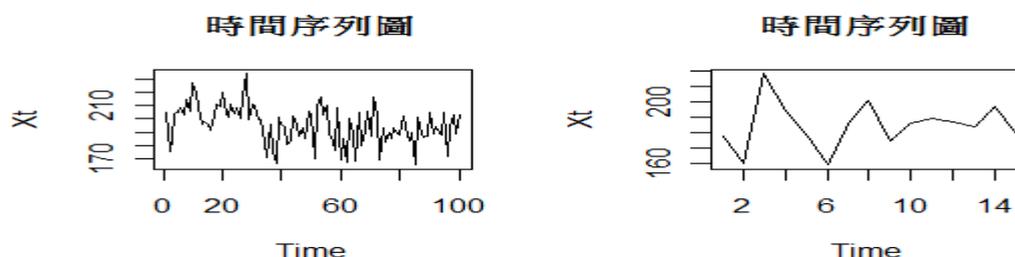


2-3 模擬資料參數 $\lambda=200$ ，並預測未來 15 筆

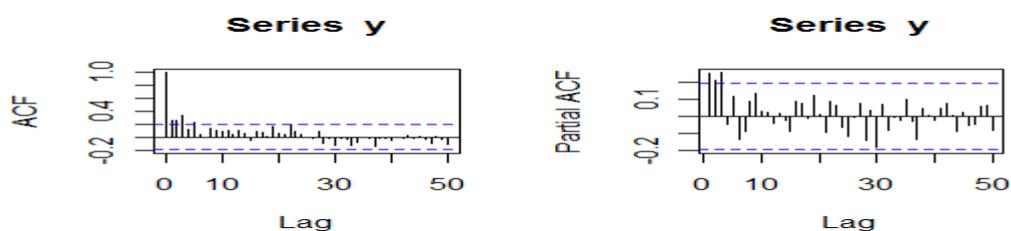
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.19 \quad \alpha_2=0.19 \quad \alpha_3=0.19 \quad \alpha_4=0.19 \quad \alpha_5=0.19 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 10 \quad \text{Order}=5$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=3

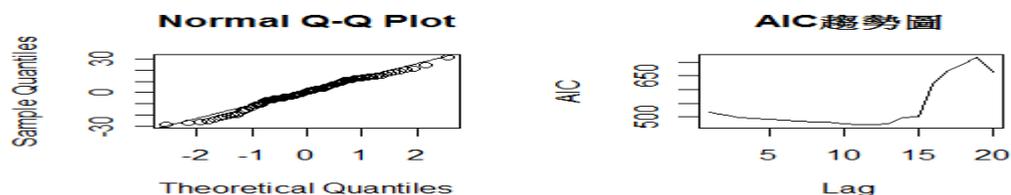
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
83.441111	0.145319	0.167792	0.260541

觀測值與預測值的殘差平方和: 4948.166

RFE 值: 0.0616788

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=12

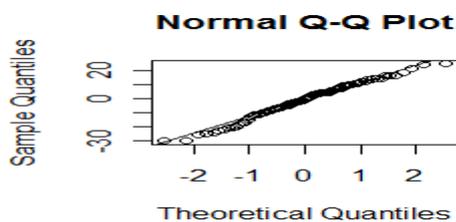
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
6.954694	0.09016	0.150089	0.283023	0.0001	0.111167	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	
0.0001	0.114997	0.160756	0.035853	0.01774	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 4004.95

RFE 值: 0.04115146

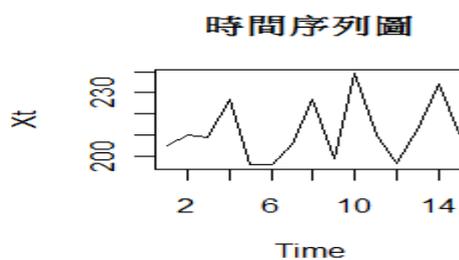
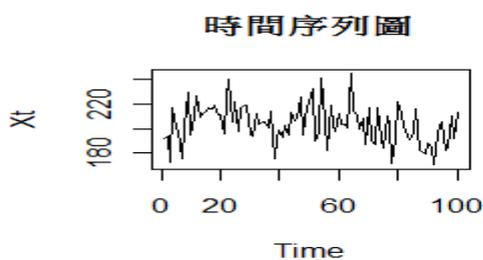
模型取 Order=12 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



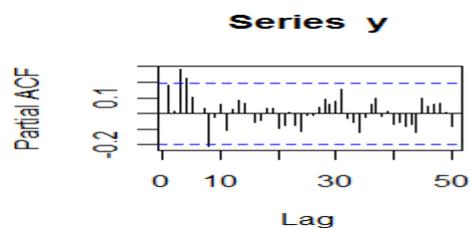
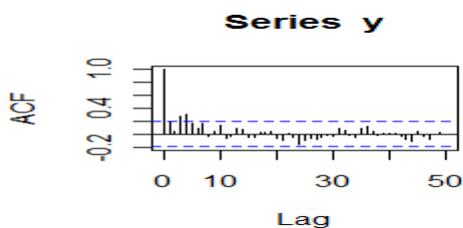
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 100$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=8

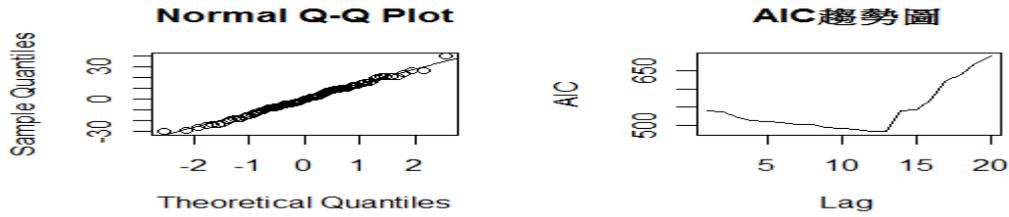
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
26.32727	0.11737	0.0001	0.317709	0.204558
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	
0.174978	0.0001	0.056332	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 5034.103

RFE 值: 0.05974308

模型取 Order=8 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=13

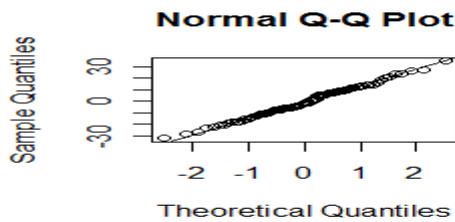
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
4.593676	0.10588	0.0001	0.235993	0.239019	0.178119	0.001011
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.056778	0.0001	0.0001	0.069937	0.0001	0.009453	0.080885

觀測值與預測值的殘差平方和: 12480.02

RFE 值: 0.1207050

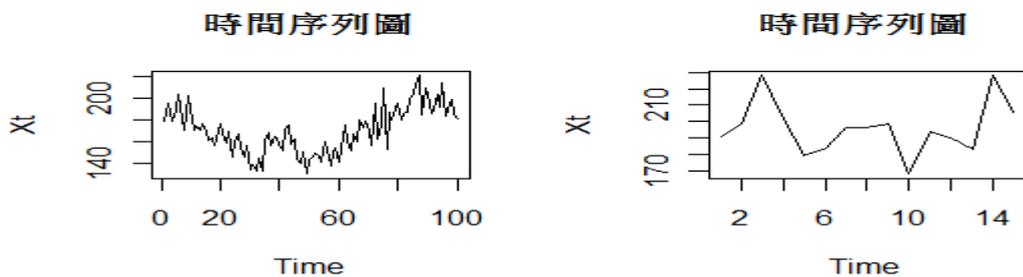
模型取 Order=13 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



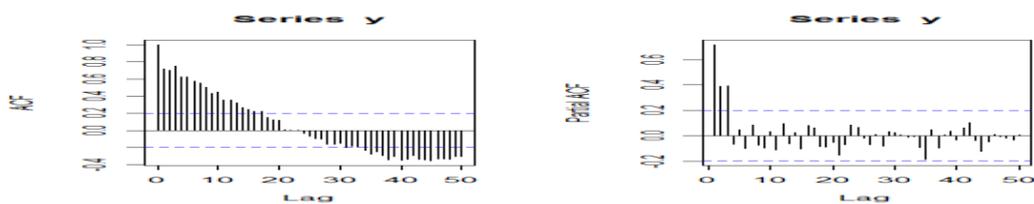
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.3 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.3 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.3 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 19.96$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=3

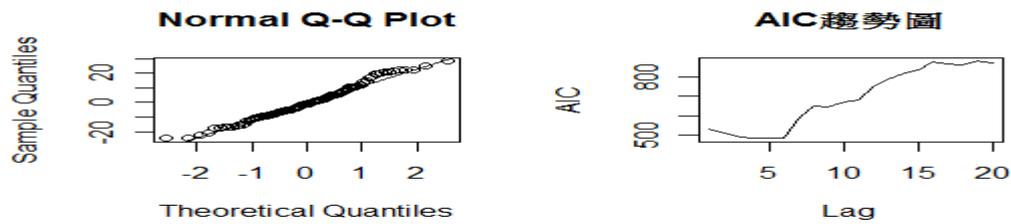
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
16.46861	0.246195	0.225144	0.431728

觀測值與預測值的殘差平方和: 5779.452

RFE 值: 0.06201716

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=6

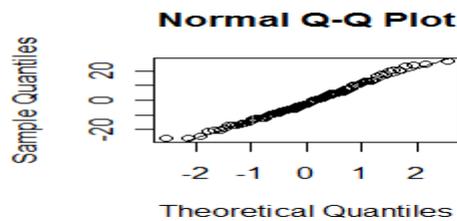
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.016923	0.270406	0.221072	0.442794	0.0001	0.072755	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 4313.849

RFE 值: 0.03635374

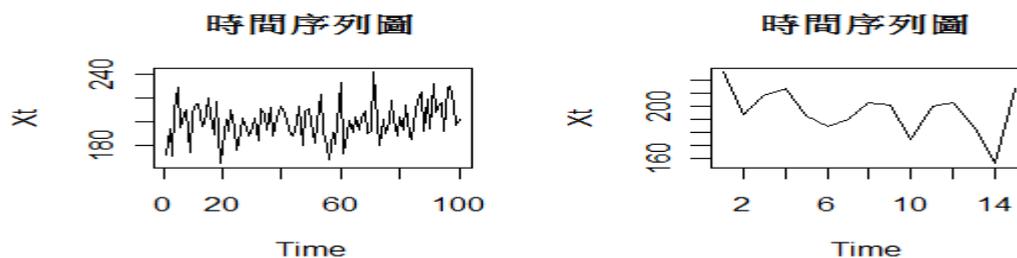
模型取 Order=6 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



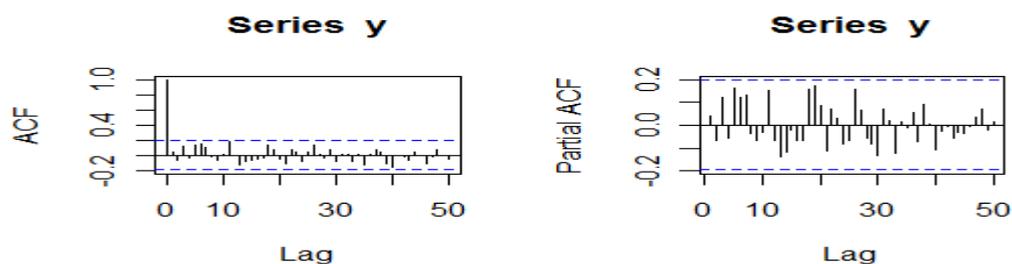
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 139.96$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

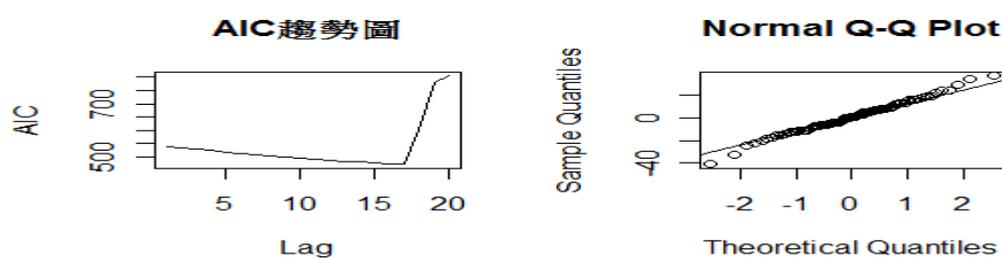


建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=17 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=17

參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
5.189169	0.0001	0.0001	0.155208	0.0001	0.235667
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.140429	0.18394	0.0001	0.039246	0.0001	0.21849
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

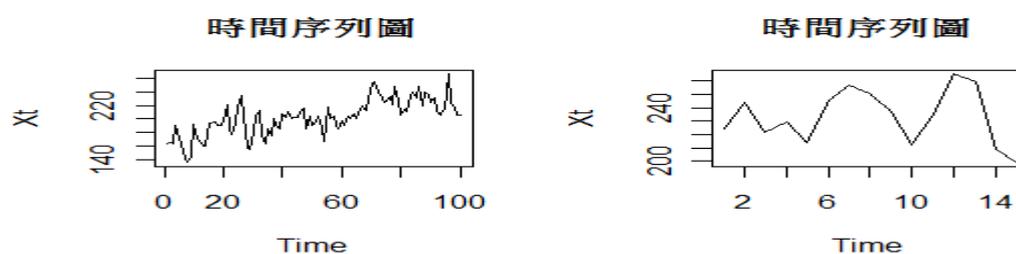
觀測值與預測值的殘差平方和: 6004.914

RFE 值: 0.05934833

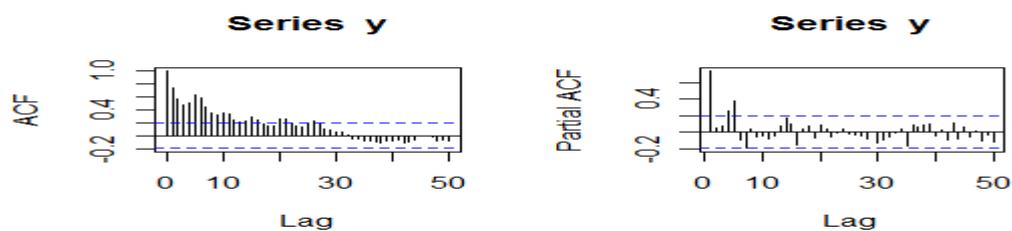
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=5) 且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.5 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.45 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 9.44$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

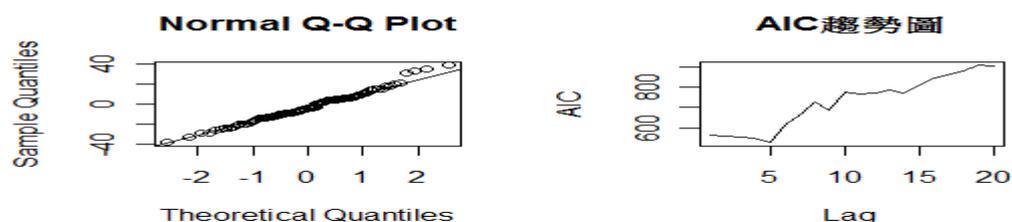
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.020373	0.538261	0.008285	0.0001	0.0001	0.476017

觀測值與預測值的殘差平方和: 11482.46

RFE 值: 0.06850706

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：

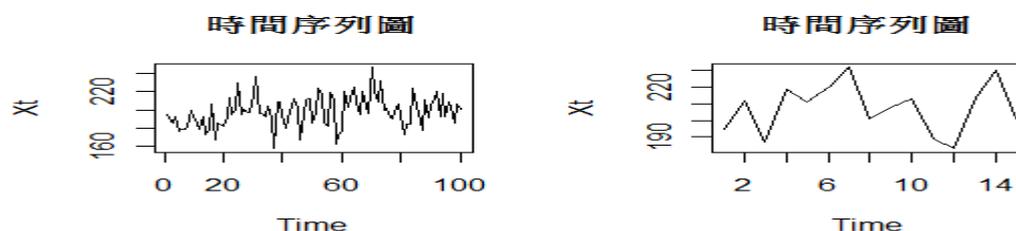


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

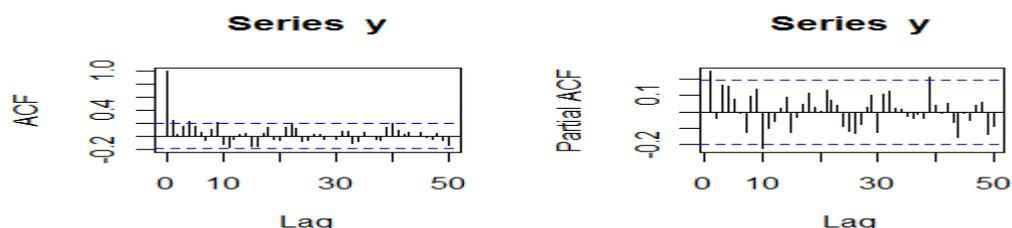
情形 6: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=5) 且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 159.94$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=10

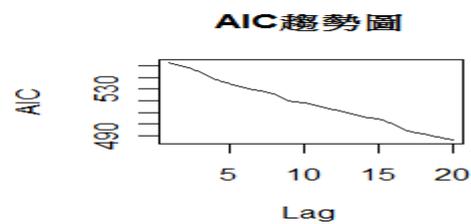
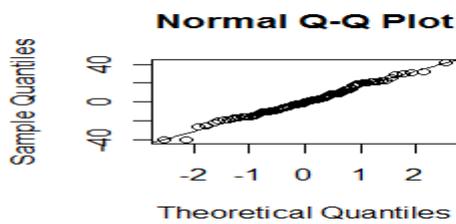
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
42.50773	0.229026	0.0001	0.079108	0.14267	0.029525
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	
0.054902	0.0001	0.041029	0.209989	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 3640.78

RFE 值: 0.02113612

模型取 Order=10 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

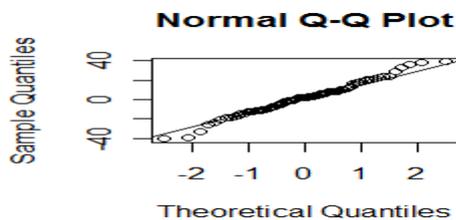
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
31.78274	0.132478	0.0001	0.03626	0.11056	0.0001	0.055528
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.073504	0.157365	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.083427	0.0001	0.0001	0.0001	0.111722	0.05141	0.02875

觀測值與預測值的殘差平方和: 4433.462

RFE 值: 0.04447641

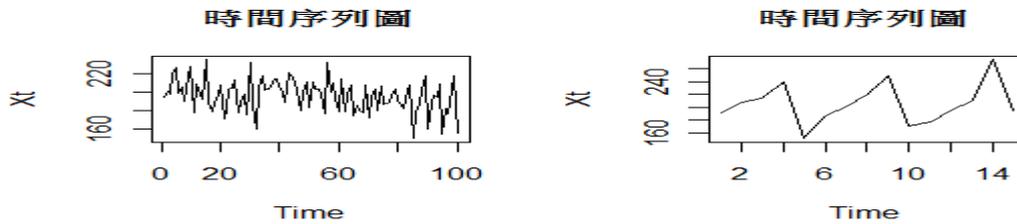
模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



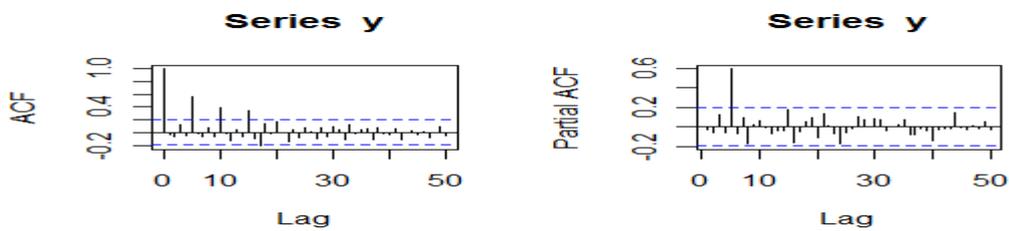
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數明顯較大。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.8 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 39.74$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

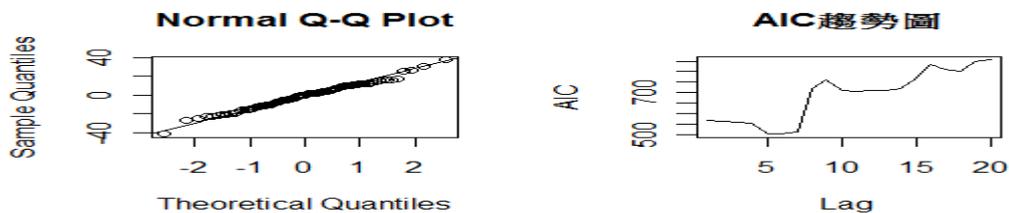
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
34.31691	0.01177	0.0001	0.157928	0.0001	0.654421

觀測值與預測值的殘差平方和: 19441.7

RFE 值: 0.07711743

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=6

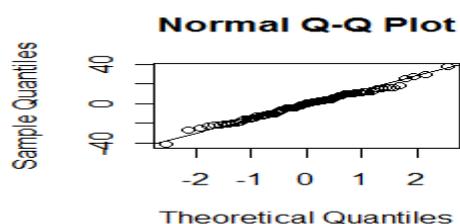
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
27.66634	0.035077	0.0001	0.16615	0.0001	0.656811	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 18053.03

RFE 值: 0.08510837

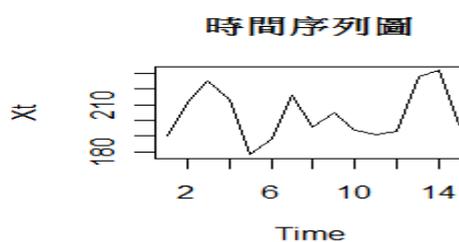
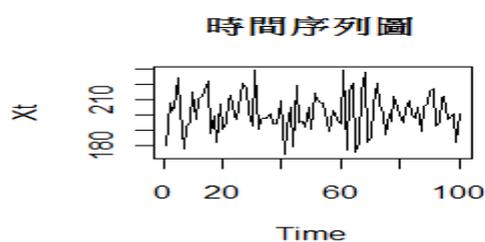
模型取 Order=6 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



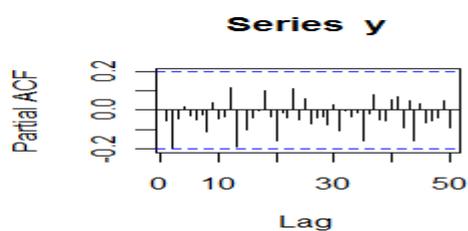
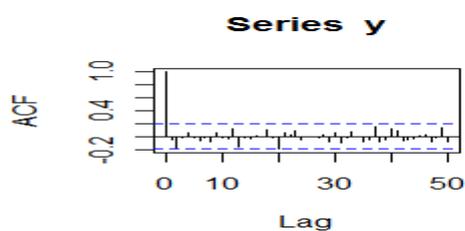
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 179.74$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

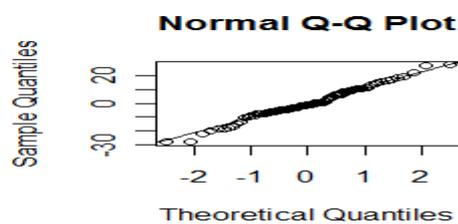
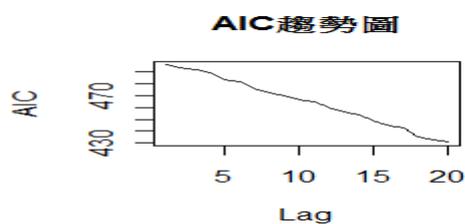


建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
103.5086	0.0001	0.0001	0.034993	0.122089	0.030971	0.026093
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.127514	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.019961	0.0001	0.012931	0.0001	0.110654	0.0001	0.0001

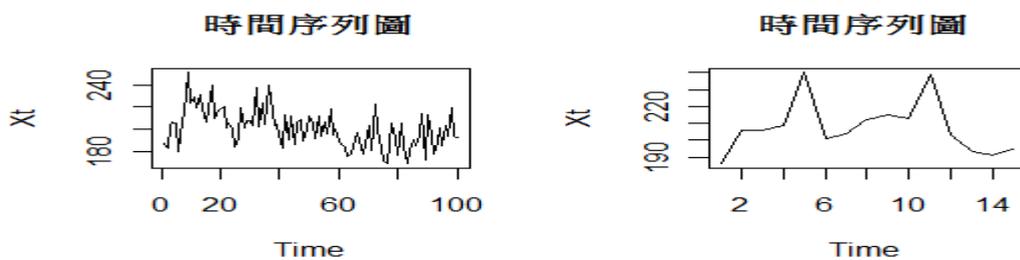
觀測值與預測值的殘差平方和: 3628.294

RFE 值: 0.008282513

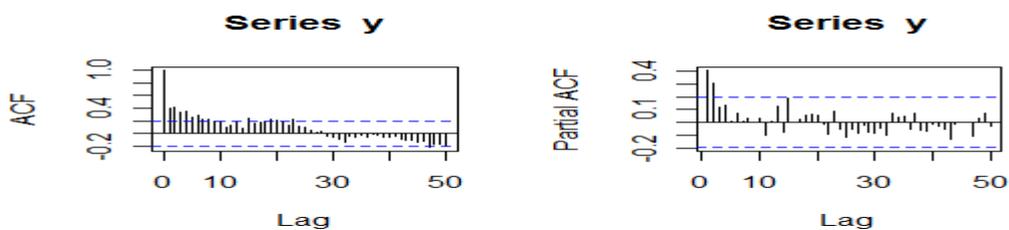
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.28 \quad \alpha_2=0.2 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.08 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 40$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=2

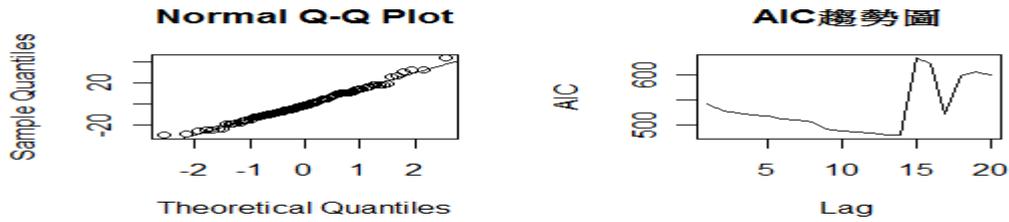
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^2 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$
83.14117	0.271982	0.314758

觀測值與預測值的殘差平方和: 4064.826

RFE 值: 0.03584093

模型取 Order=2 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

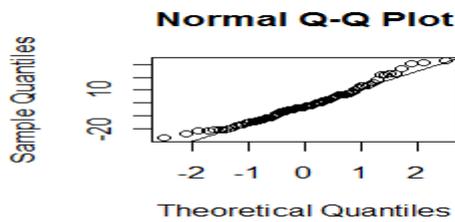
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
5.807054	0.125879	0.227884	0.121399	0.025934	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.062265	0.092166	0.098722	0.0001	0.054637	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.0001	0.161453	0.0001			

觀測值與預測值的殘差平方和: 5671.796

RFE 值: 0.05380693

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):

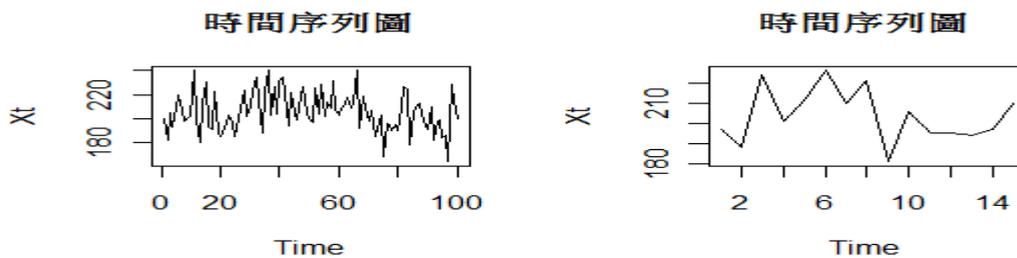


模擬資料: Poisson Integer Autoregressive $\lambda=200$ 使用筆數 150 筆 預測未來 15 天

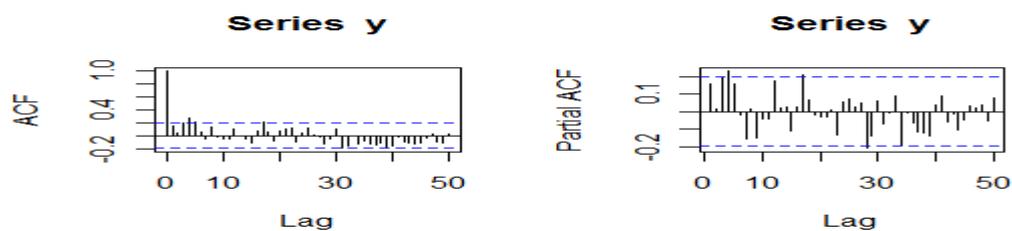
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.08 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.2 \quad \alpha_5=0.28 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 40$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=4

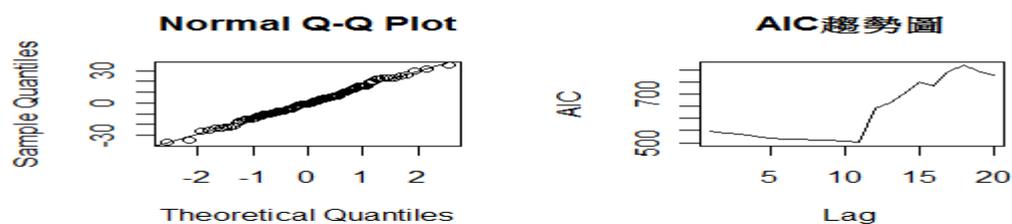
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
100.4937	0.102096	0.0001	0.156378	0.254135

觀測值與預測值的殘差平方和: 2752.619

RFE 值: 0.005522813

模型取 Order=4 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=11

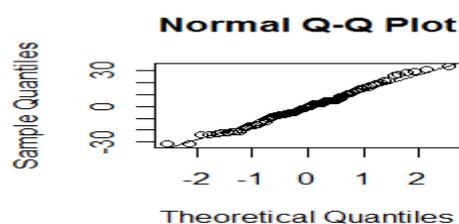
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
35.78297	0.043183	0.0001	0.23008	0.323138	0.211718
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.017444	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 2864.702

RFE 值: 0.02305221

模型取 Order=11 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



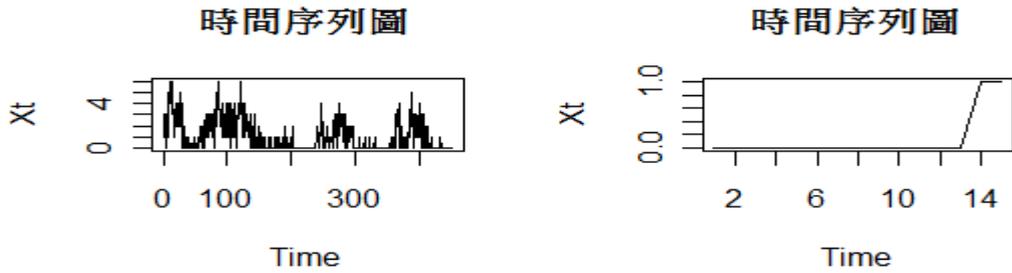
三、建構模型使用模擬資料筆數為 450 筆，Order=5。

3-1 模擬資料參數 $\lambda=2$ ，並預測未來 15 筆

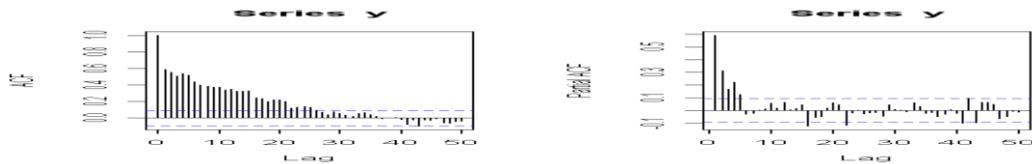
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.19 \quad \alpha_2=0.19 \quad \alpha_3=0.19 \quad \alpha_4=0.19 \quad \alpha_5=0.19 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.1 \quad \text{Order}=5$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

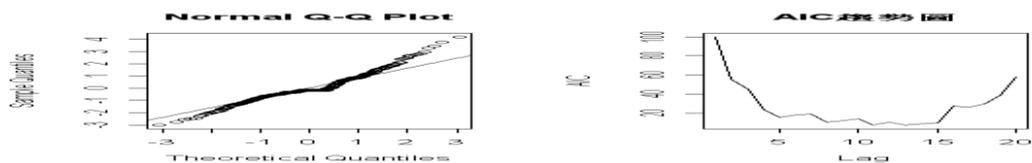
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.16516	0.29134	0.1779	0.07319	0.17439	0.12844

觀測值與預測值的殘差平方和: 2.753712

RFE 值: 2.374452

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=11

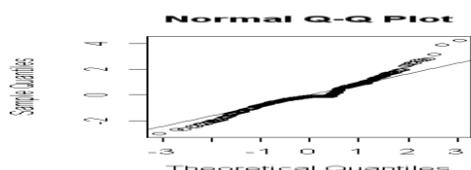
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.08838	0.263169	0.169052	0.056522	0.191652	0.15756
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.043454	0.032354

觀測值與預測值的殘差平方和: 1.499610

RFE 值: 0.7551924

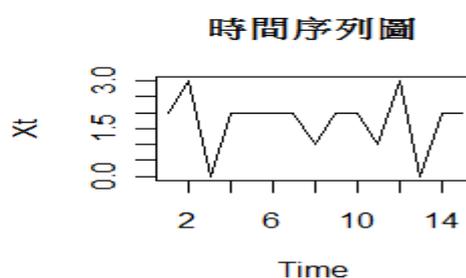
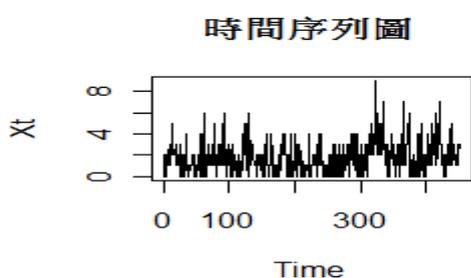
模型取 Order=11 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



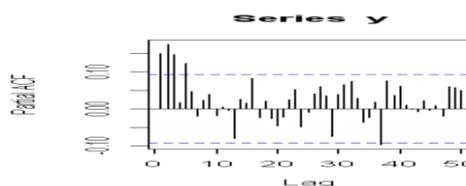
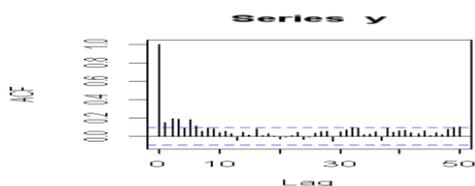
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$\alpha_1=0.1$ $\alpha_2=0.1$ $\alpha_3=0.1$ $\alpha_4=0.1$ $\alpha_5=0.1$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1$ 建構模型使用 450 筆資料

及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

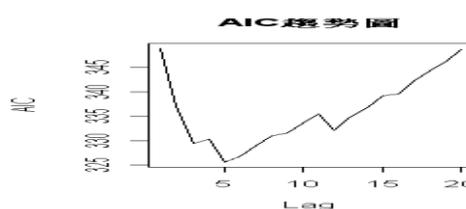
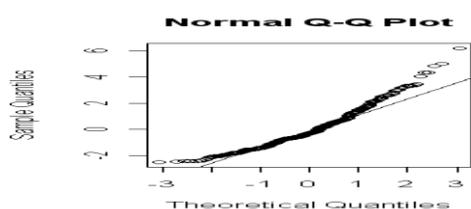
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.92557	0.09489	0.13766	0.12295	0.00591	0.12438

觀測值與預測值的殘差平方和: 11.19298

RFE 值: 0.07928835

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

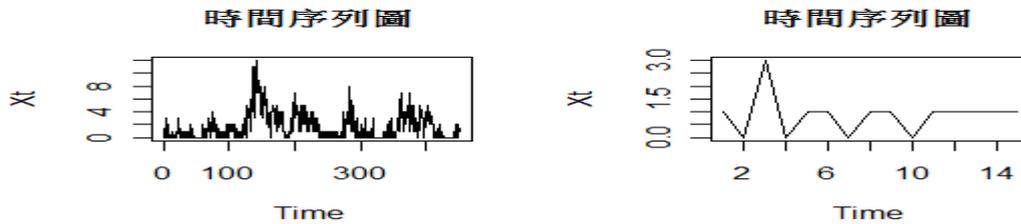


依據 AIC 取小法則選取也是 Order=5

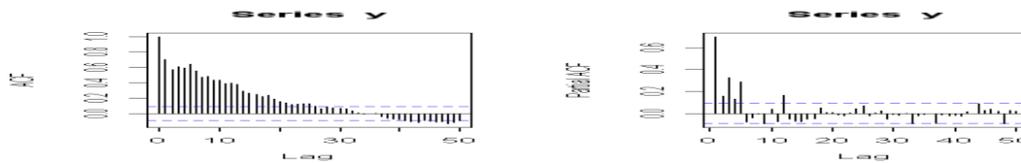
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.3 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.3 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.3 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.1996$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

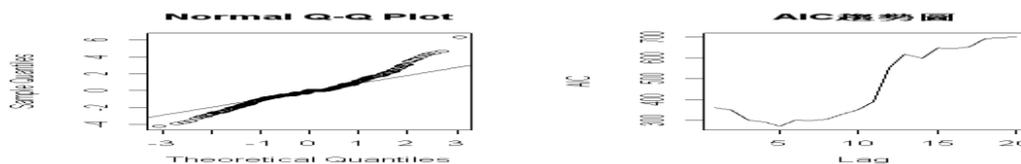
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.00017	0.46495	0.0001	0.26749	0.0001	0.28892

觀測值與預測值的殘差平方和: 7.411193

RFE 值: 0.1387388

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

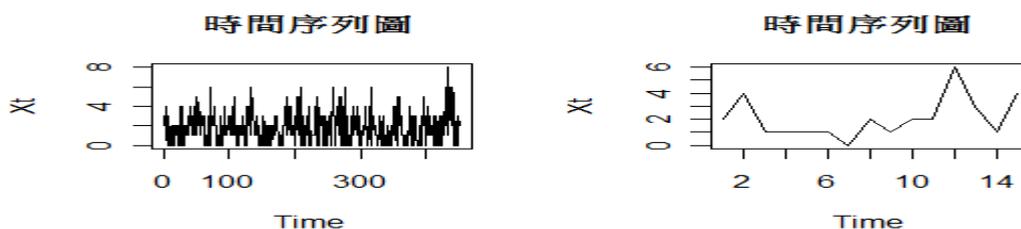


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

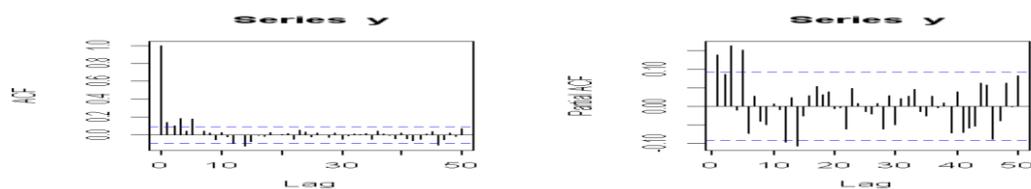
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1.3996$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

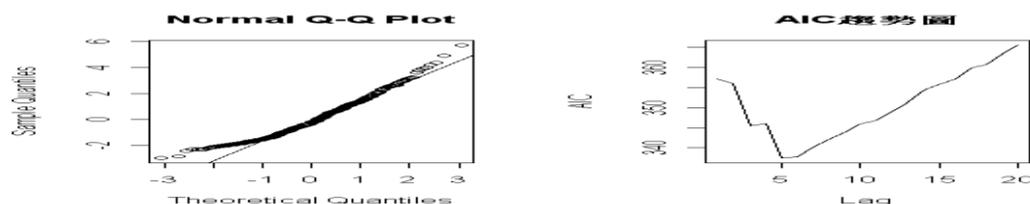
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.95879	0.1158	0.0404	0.15377	0.0001	0.15324

觀測值與預測值的殘差平方和: 35.35216

RFE 值: 0.09782696

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：

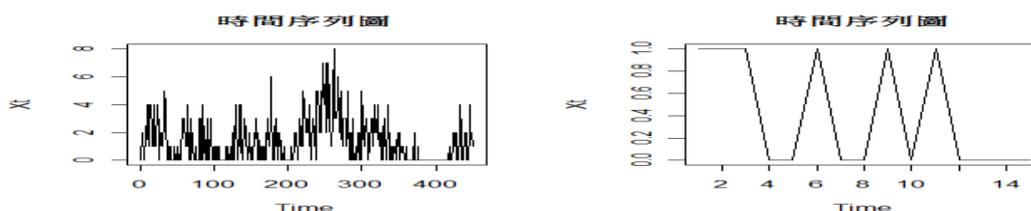


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

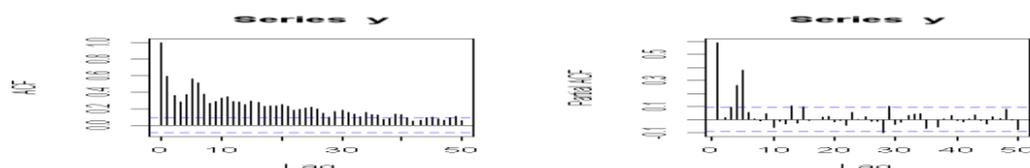
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=5) 且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.5 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.45 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.0944$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

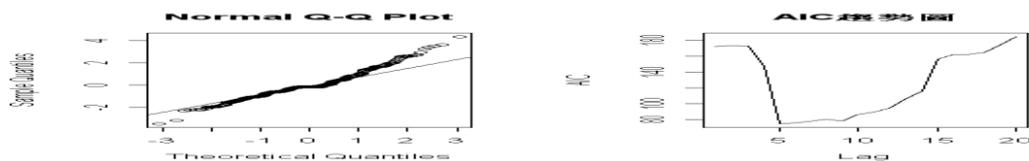
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.15065	0.45594	0.0001	0.0001	0.04328	0.38579

觀測值與預測值的殘差平方和: 48.73404

RFE 值: 4.329366

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

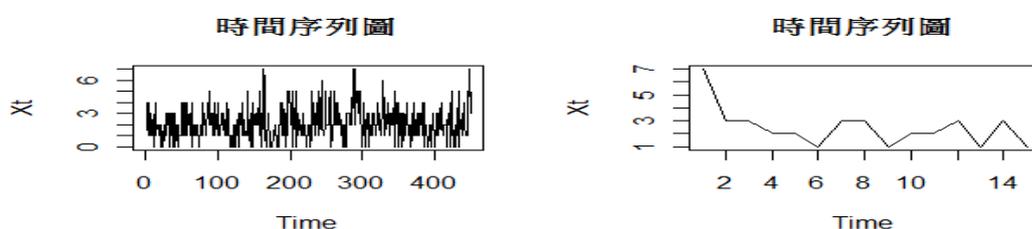


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

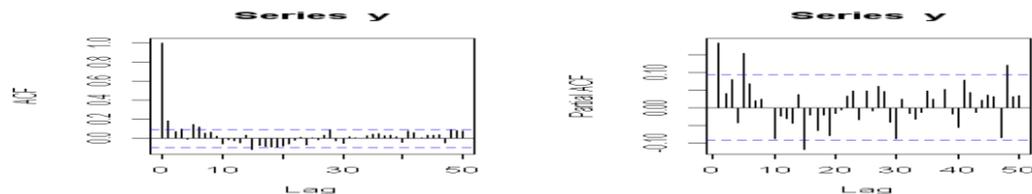
情形 6: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=5) 且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1.5994$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

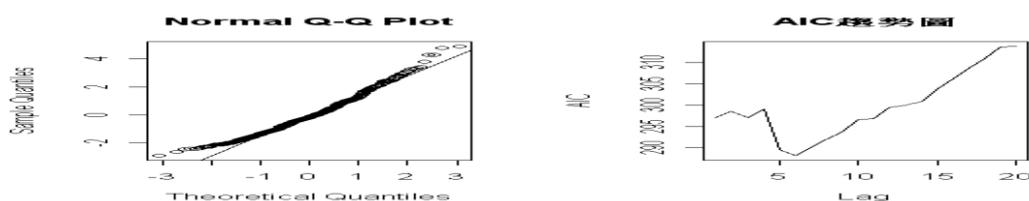
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
1.13643	0.18244	0.02348	0.08565	0.0001	0.16222

觀測值與預測值的殘差平方和: 25.38432

RFE 值: 0.01290876

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=6

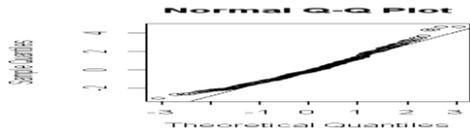
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
1.023025	0.174599	0.029173	0.077422	0.0001	0.154141	0.073514

觀測值與預測值的殘差平方和: 25.73052

RFE 值: 0.006908852

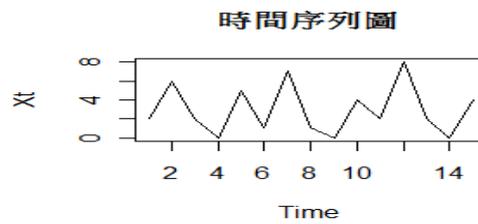
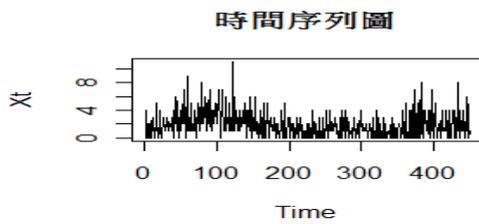
模型取 Order=6 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



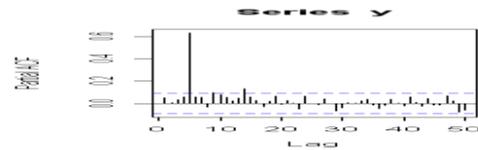
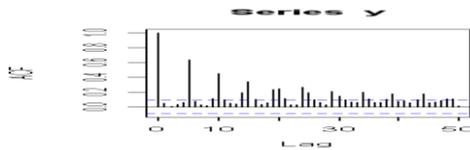
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數明顯較大。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.8 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.3974$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

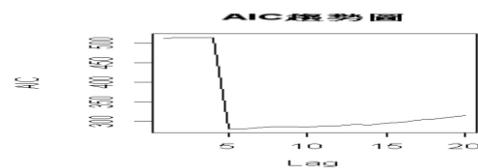
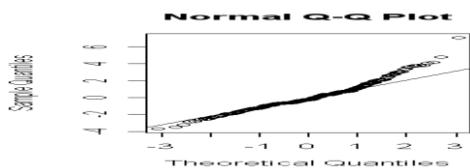
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.54498	0.01251	0.0001	0.02229	0.0304	0.64427

觀測值與預測值的殘差平方和: 174.6151

RFE 值: 0.2652278

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

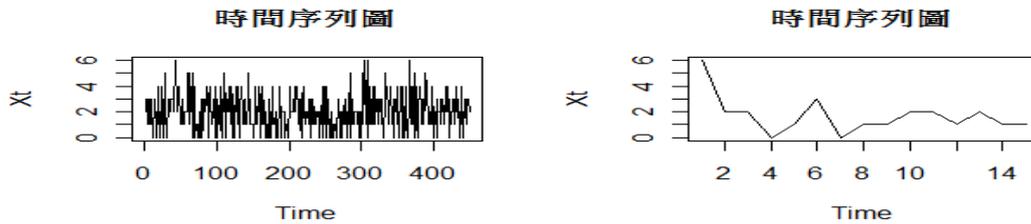


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

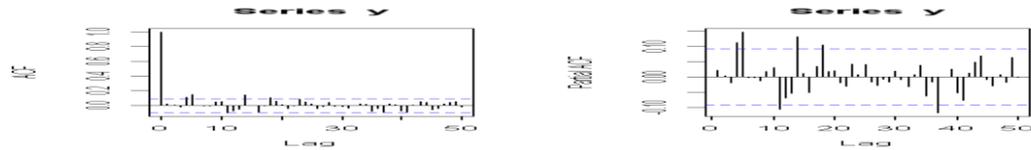
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1.7974$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

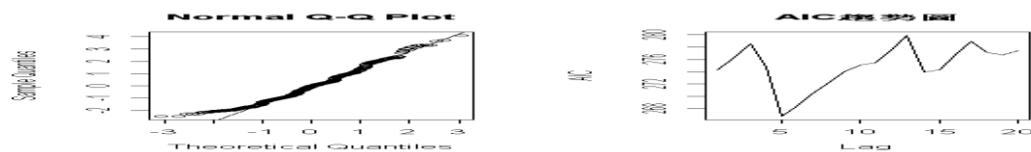
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
1.441461	0.008323	0.006012	0.0001	0.109508	0.147964

觀測值與預測值的殘差平方和: 31.04412

RFE 值: 0.2313354

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

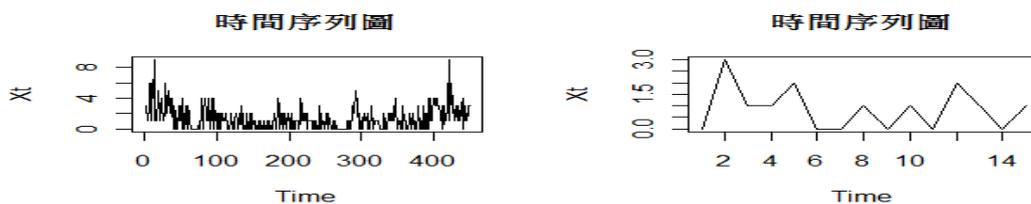


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

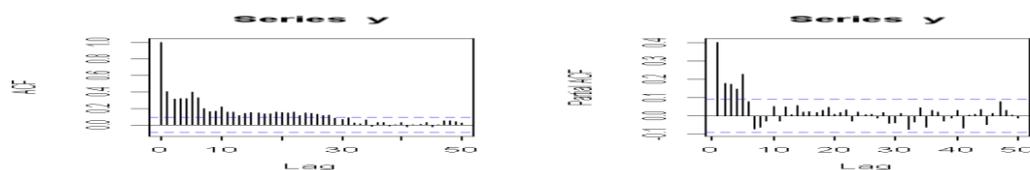
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.28 \quad \alpha_2=0.2 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.08 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.4$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

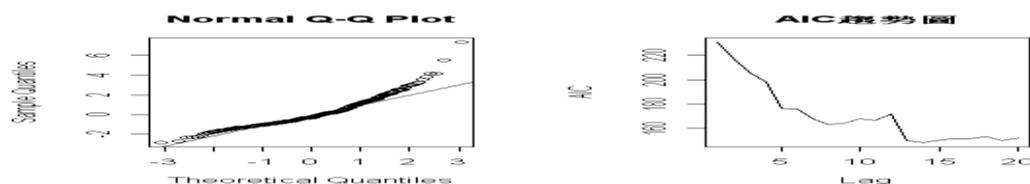
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.342815	0.239788	0.078356	0.107852	0.08234	0.230444

觀測值與預測值的殘差平方和: 19.80876

RFE 值: 0.8706035

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

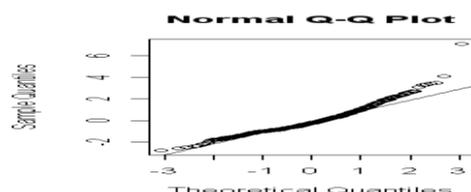
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$
0.085731	0.231321	0.076696	0.118002	0.104211	0.175229	0.074478	0.0001
$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	
0.0001	0.0001	0.056813	0.0001	0.037802	0.000481	0.056233	

觀測值與預測值的殘差平方和: 25.61235

RFE 值: 1.152204

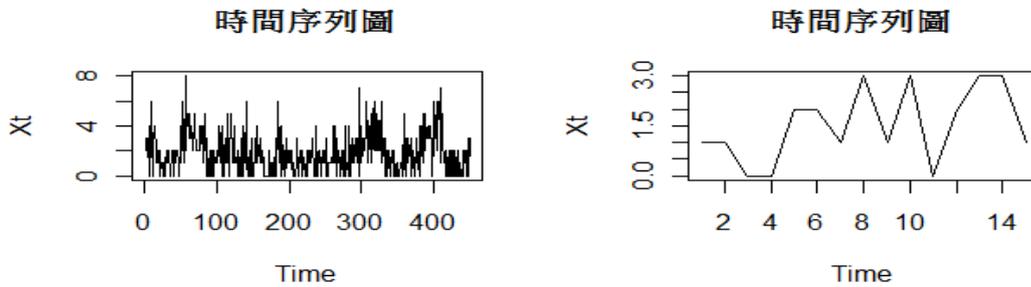
模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



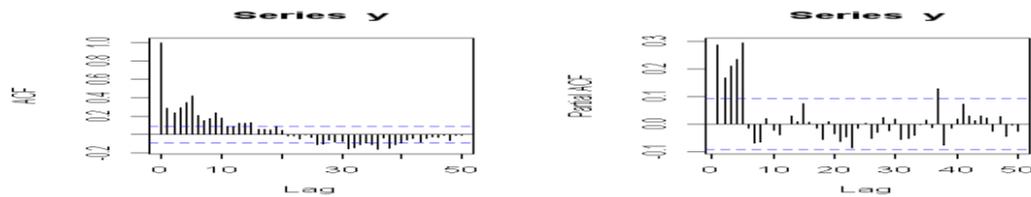
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.08 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.2 \quad \alpha_5=0.28 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.4$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

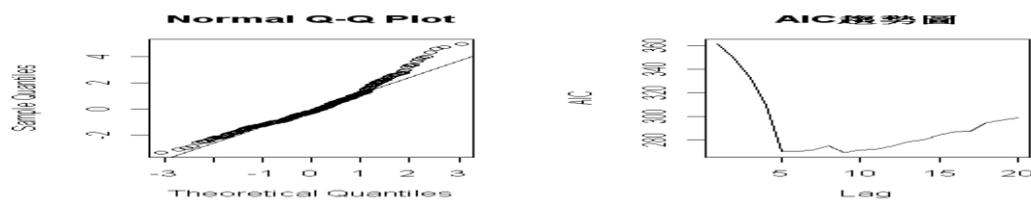
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.45011	0.08413	0.042296	0.134385	0.187453	0.298193

觀測值與預測值的殘差平方和: 18.09651

RFE 值: 0.01869361

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



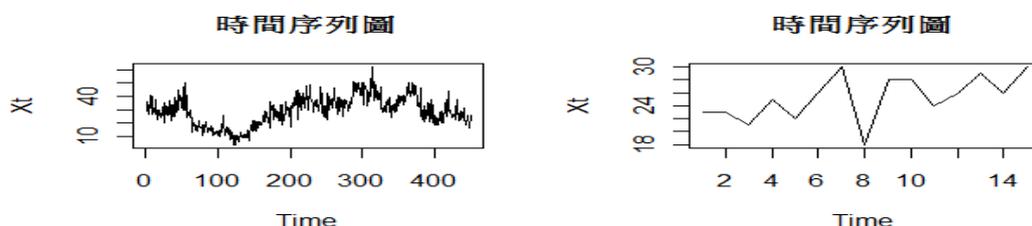
依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

3-2 模擬資料參數 $\lambda=20$ ，並預測未來 15 筆

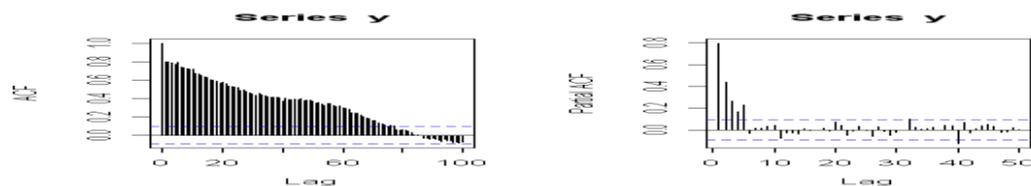
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.19 \quad \alpha_2=0.19 \quad \alpha_3=0.19 \quad \alpha_4=0.19 \quad \alpha_5=0.19 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1 \quad \text{Order}=5$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

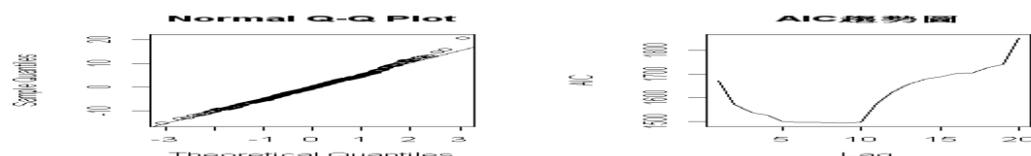
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
1.469564	0.24003	0.217136	0.156477	0.101788	0.23405

觀測值與預測值的殘差平方和: 174.2517

RFE 值: 0.05564439

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=9

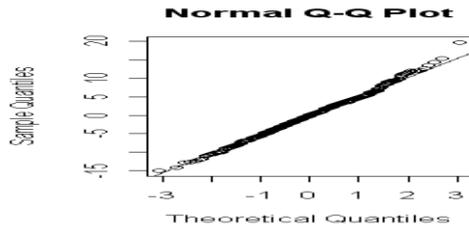
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
0.025216	0.254117	0.221295	0.143855	0.091295
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$
0.235207	0.0001	0.0001	0.013017	0.040146

觀測值與預測值的殘差平方和: 311.5447

RFE 值: 0.1226561

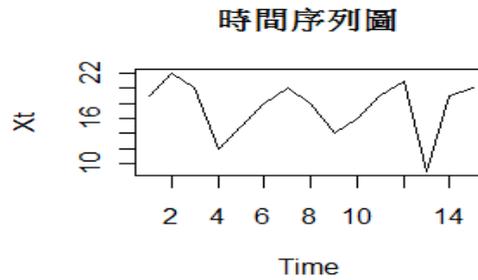
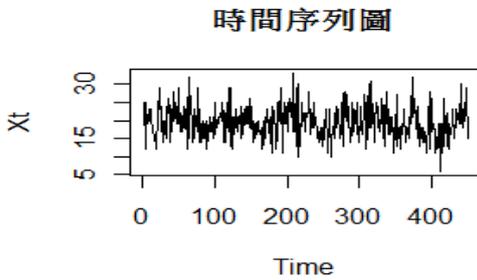
模型取 Order=9 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



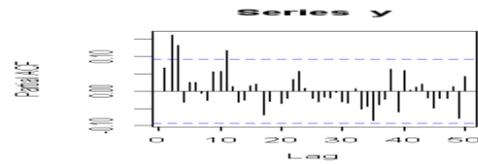
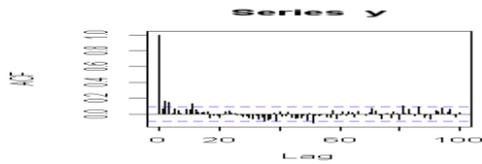
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 10$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=3

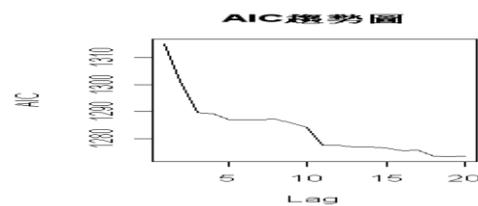
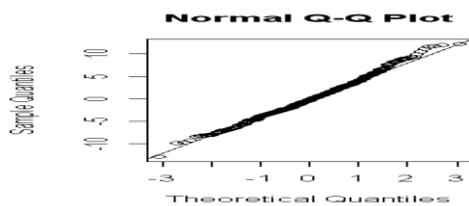
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
13.04046	0.037522	0.158363	0.134875

觀測值與預測值的殘差平方和: 256.9160

RFE 值: 0.1426118

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=19

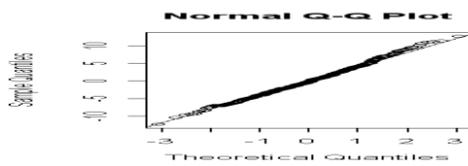
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
6.314247	0.01627	0.166734	0.133503	0.0001	0.021084	0.036022
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.0001	0.032086	0.050154	0.136285	0.022178	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	
0.0001	0.029533	0.031794	0.0001	0.0001	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 304.1449

RFE 值: 0.1633687

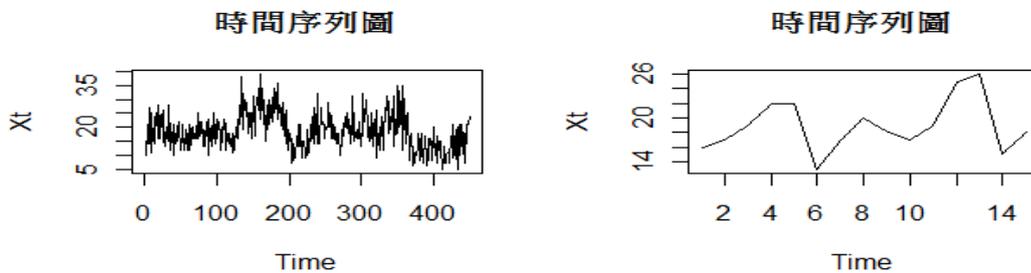
模型取 Order=19 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



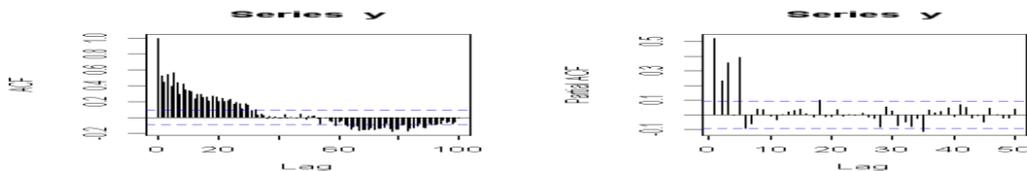
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.3 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.3 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.3 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 1.996$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

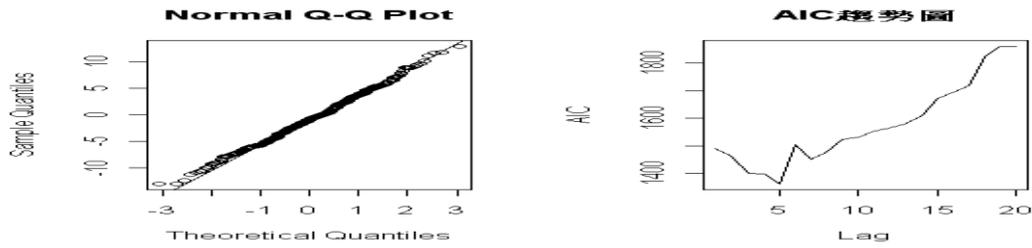
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.001851	0.324098	0.0001	0.326945	0.0001	0.395133

觀測值與預測值的殘差平方和: 349.5485

RFE 值: 0.1725492

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

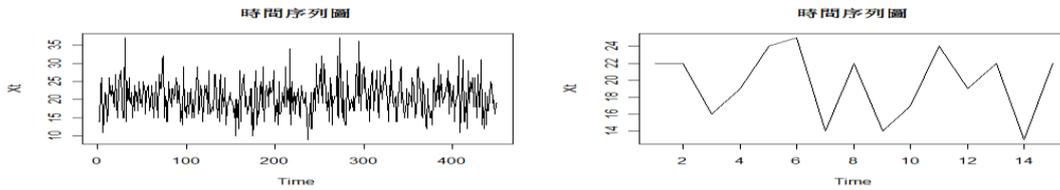


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

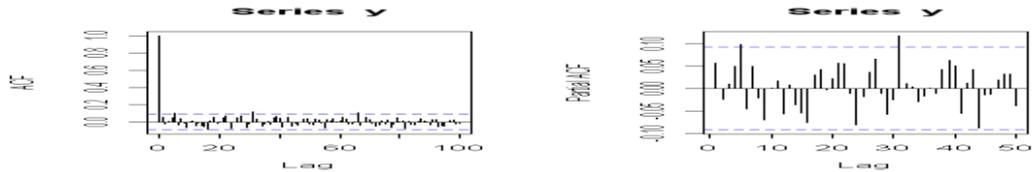
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 13.996$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

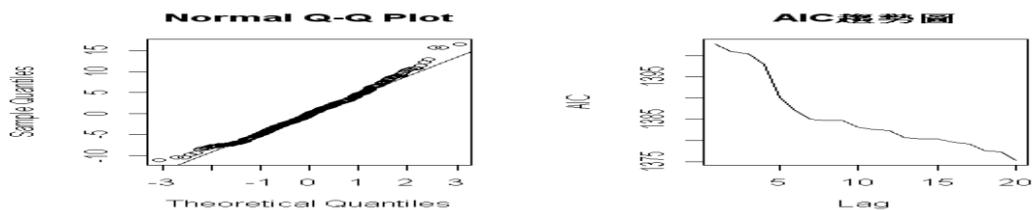
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
16.49001	0.054095	0.0001	0.007528	0.038883	0.098996

觀測值與預測值的殘差平方和: 232.5048

RFE 值: 0.04249395

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

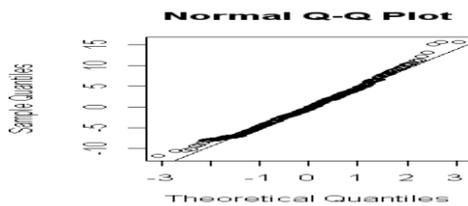
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
13.09802	0.047616	0.0001	0.008892	0.033087	0.093411	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.048185	0.0001	0.0001	0.001434	0.036399	0.0001	0.001838
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.02619	0.046168	0.0001	0.021058

觀測值與預測值的殘差平方和: 237.0616

RFE 值: 0.02530437

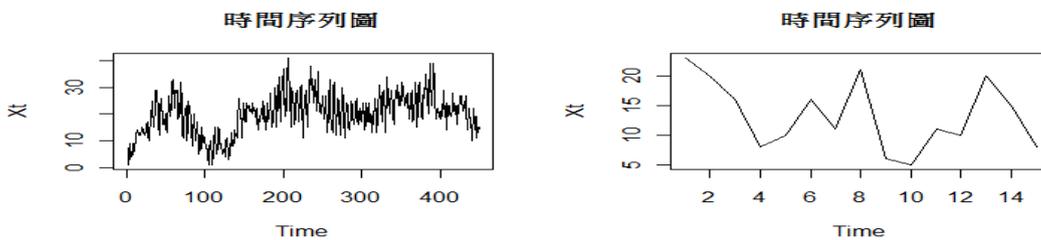
模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



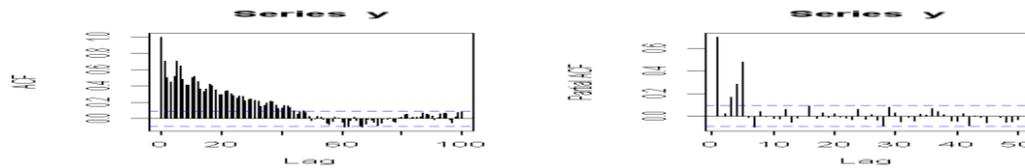
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=5) 且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.5 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.45 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 0.944$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

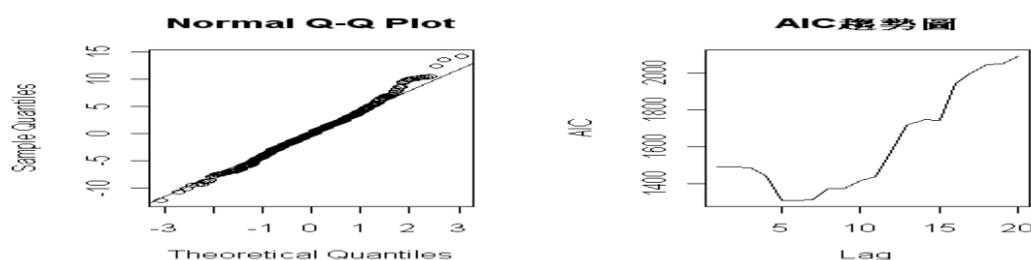
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.483325	0.477173	0.0001	0.0001	0.0001	0.49845

觀測值與預測值的殘差平方和: 504.2077

RFE 值: 0.1737397

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

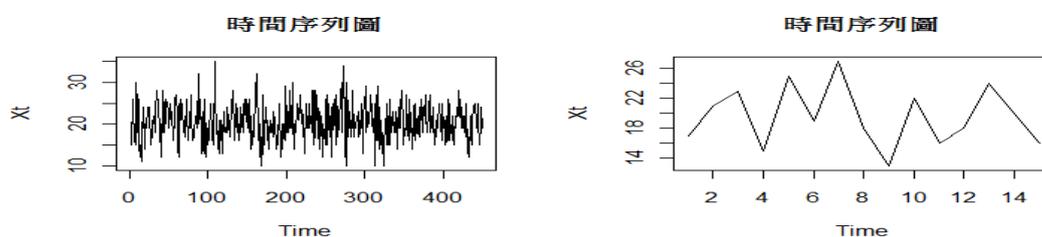


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

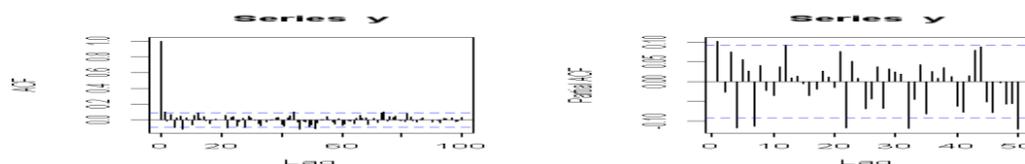
情形 6: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=5) 且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 15.994$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=7

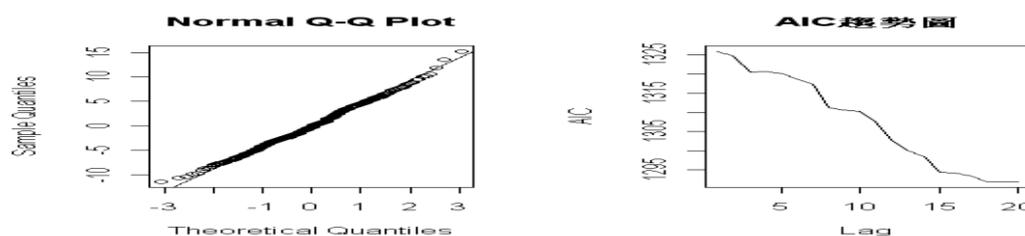
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^7 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$
14.68684	0.123525	0.0001	0.076247	0.0001	0.043189	0.038766	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 236.0119

RFE 值: 0.04439369

模型取 Order=7 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=18

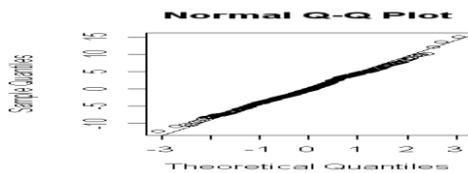
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
11.35905	0.11551	0.0001	0.061439	0.0001	0.047973	0.031574
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.038789	0.0001	0.0001	0.0283	0.08134	0.002669
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$		
0.013977	0.0001	0.0001	0.0001	0.023467		

觀測值與預測值的殘差平方和: 224.3725

RFE 值: 0.02273742

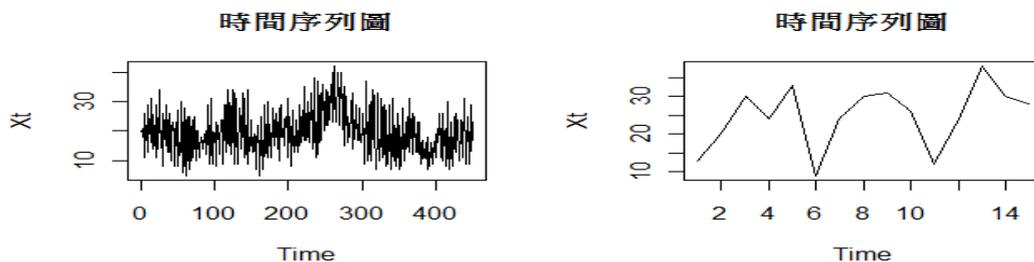
模型取 Order=18 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



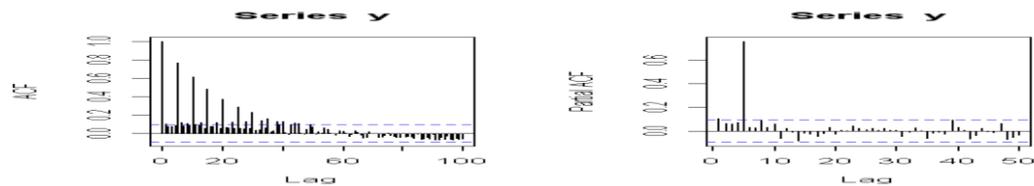
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數明顯較大。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.8 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 3.974$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

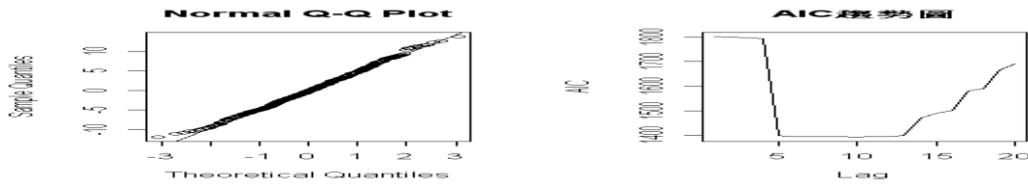
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
3.320351	0.033586	0.012783	0.011347	0.003352	0.767979

觀測值與預測值的殘差平方和: 1753.585

RFE 值: 0.2301299

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

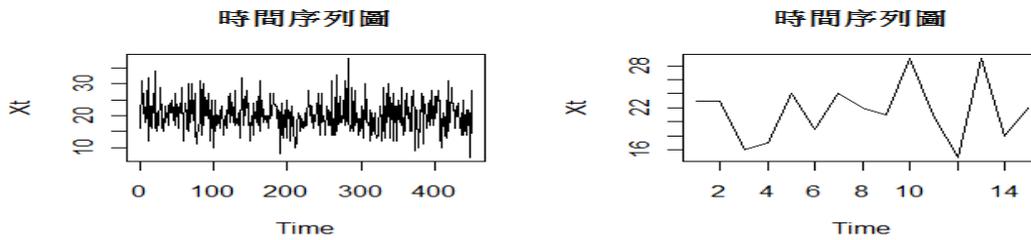


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

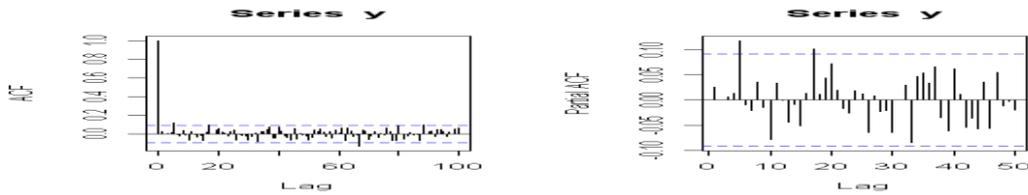
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 17.974$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

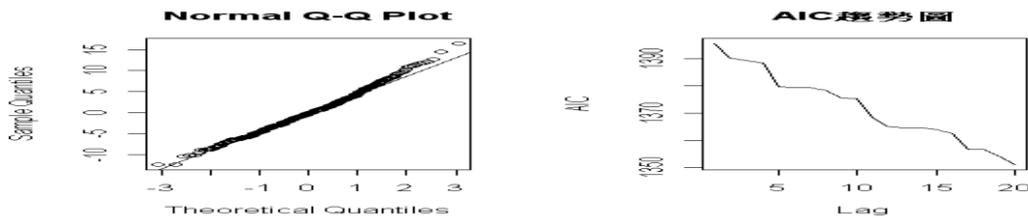
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
16.92796	0.020967	0.0001	0.0001	0.013854	0.121802

觀測值與預測值的殘差平方和: 258.6234

RFE 值: 0.06867846

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

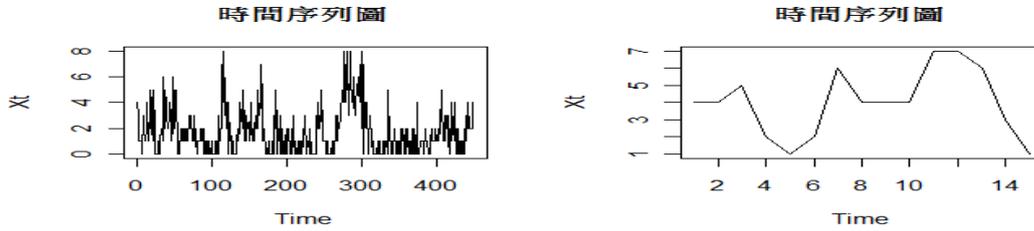


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5 (AIC 呈現遞減 ORDER=5 時有一明顯下降趨勢)

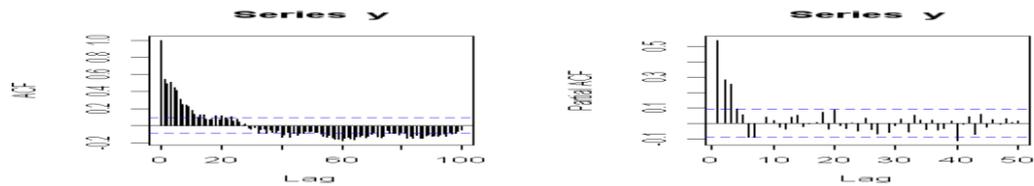
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.28 \quad \alpha_2=0.2 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.08 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 4$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=4

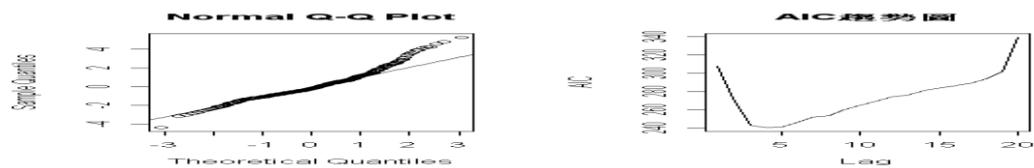
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
0.373724	0.288826	0.173027	0.228572	0.091976

觀測值與預測值的殘差平方和: 122.1655

RFE 值: 0.5294387

模型取 Order=4 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

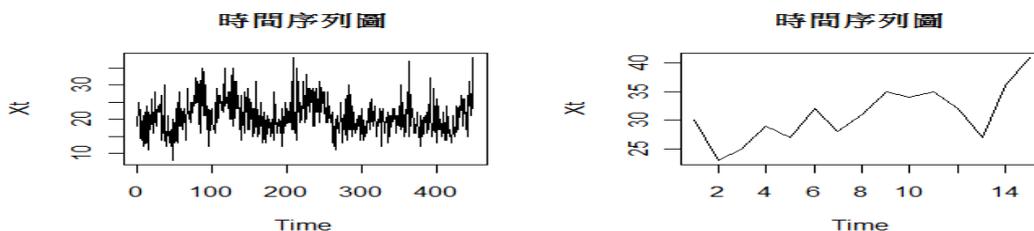


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=4

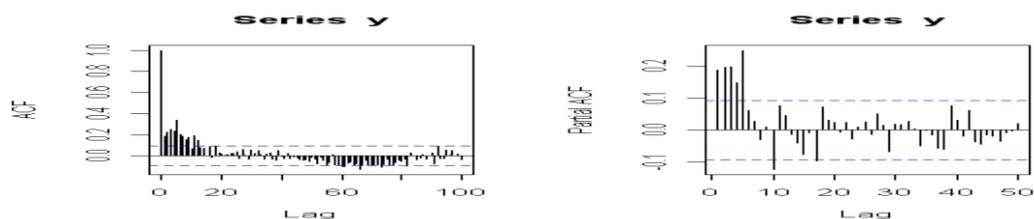
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.08 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.2 \quad \alpha_5=0.28 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 4$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

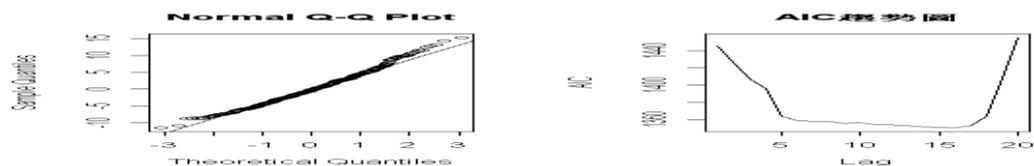
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
6.366935	0.044355	0.100379	0.159003	0.13027	0.260617

觀測值與預測值的殘差平方和: 1334.939

RFE 值: 0.2499021

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=16

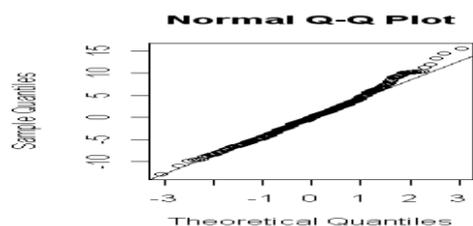
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
1.337938	0.031998	0.082969	0.148341	0.129235	0.272017
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.060805	0.043776	0.0001	0.02088	0.0001	0.091222
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	
0.054292	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 1428.581

RFE 值: 0.2748391

模型取 Order=16 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):

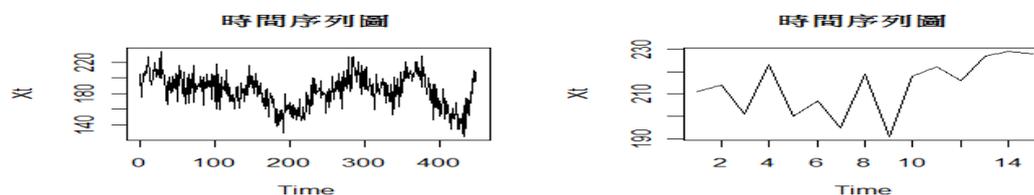


3-3 模擬資料參數 $\lambda=200$ ，並預測未來 15 筆

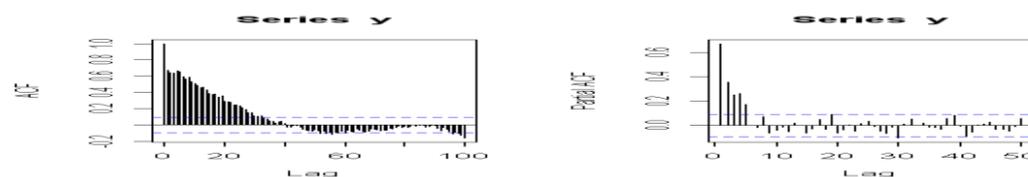
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.19 \quad \alpha_2=0.19 \quad \alpha_3=0.19 \quad \alpha_4=0.19 \quad \alpha_5=0.19 \quad \lambda\left(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i\right)=10$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
16.93897	0.228284	0.161302	0.126501	0.212512	0.178936

觀測值與預測值的殘差平方和: 6189.733

RFE 值: 0.07362712

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=8

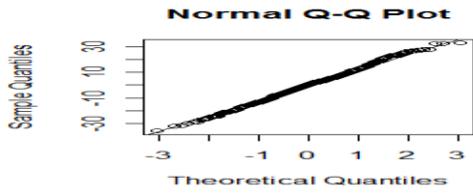
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
10.04406	0.222792	0.156661	0.115838	0.202096
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	
0.174941	0.000668	0.0001	0.072025	

觀測值與預測值的殘差平方和: 12377.47

RFE 值: 0.1217685

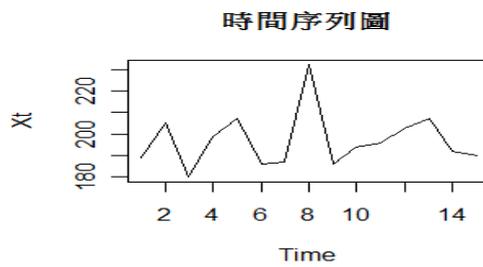
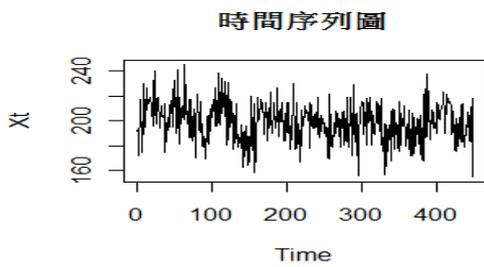
模型取 Order=8 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



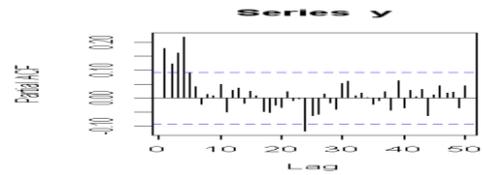
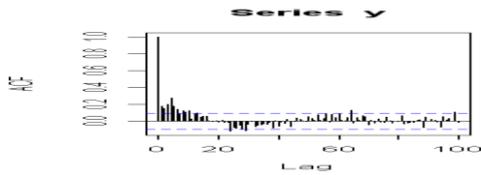
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 100$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=4

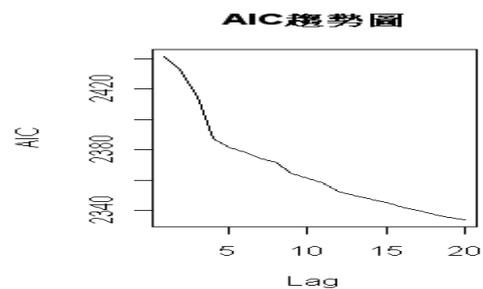
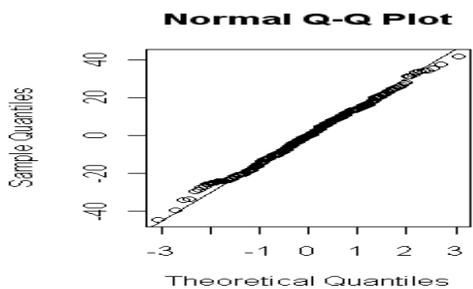
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
92.31307	0.104784	0.0755	0.132112	0.223494

觀測值與預測值的殘差平方和: 2003.446

RFE 值: 0.002812498

模型取 Order=4 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

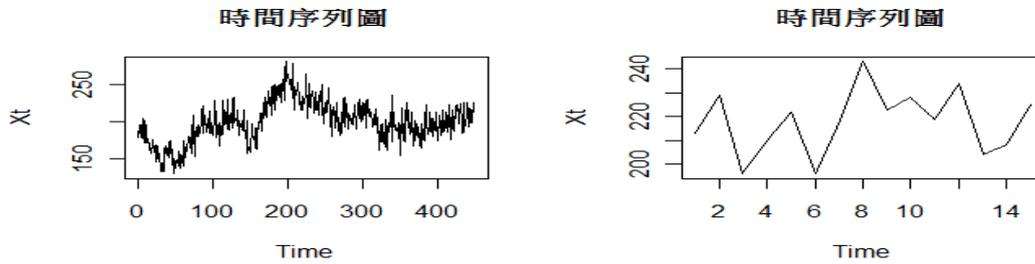


依據 AIC 取小法則選取 Order=4(AIC 呈現遞減, 在 Order=4 時漸趨平緩趨勢)。

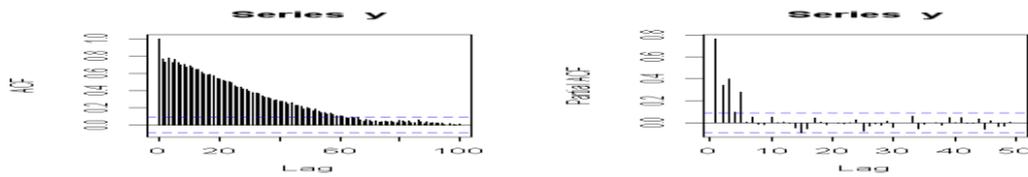
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.3 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.3 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.3 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 19.96$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

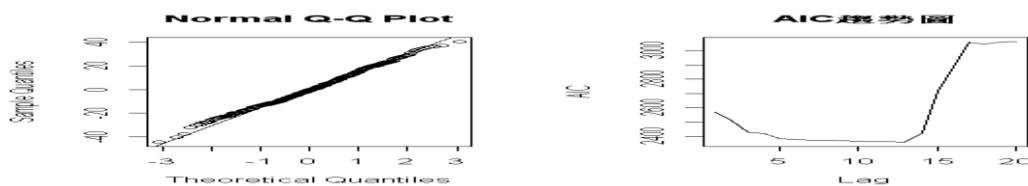
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
11.59278	0.296988	0.022761	0.329621	0.008697	0.28366

觀測值與預測值的殘差平方和: 3792.904

RFE 值: 0.0434022

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=13

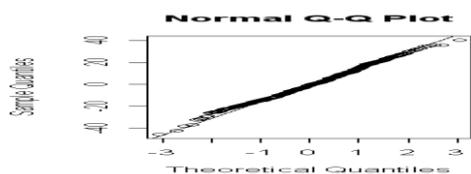
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.019923	0.293488	0.016732	0.321152	0.0001	0.270444	0.001227
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.032545	0.0001	0.0001	0.051122	0.005775	0.010902	0.00009

觀測值與預測值的殘差平方和: 3790.515

RFE 值: 0.04311923

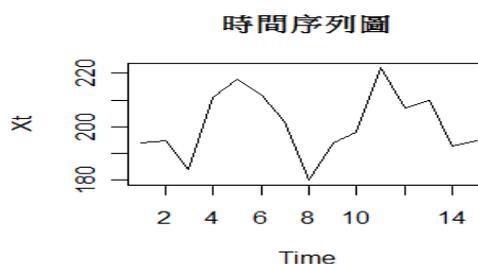
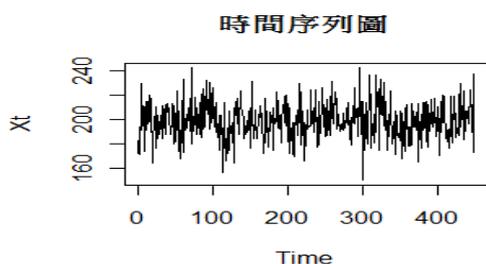
模型取 Order=13 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



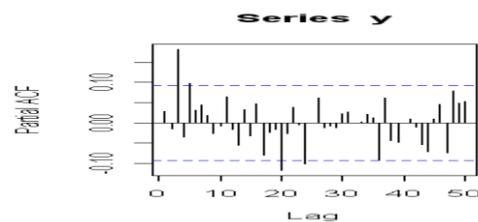
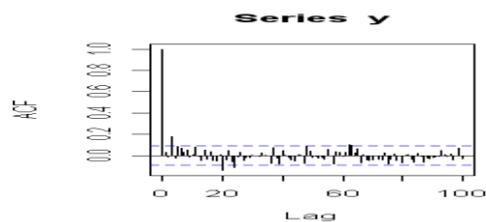
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 139.96$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

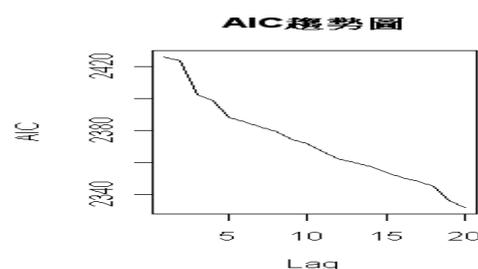
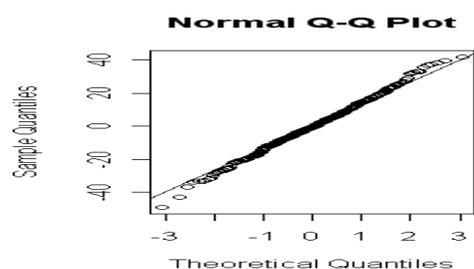
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
133.3895	0.038914	0.0001	0.193509	0.0001	0.096616

觀測值與預測值的殘差平方和: 2055.059

RFE 值: 0.009422365

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

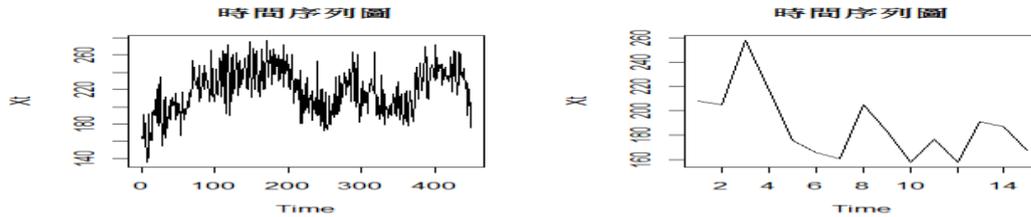


依據 AIC 取小法則選取 Order=5(AIC 呈現遞減, 在 Order=5 時漸趨平緩趨勢)

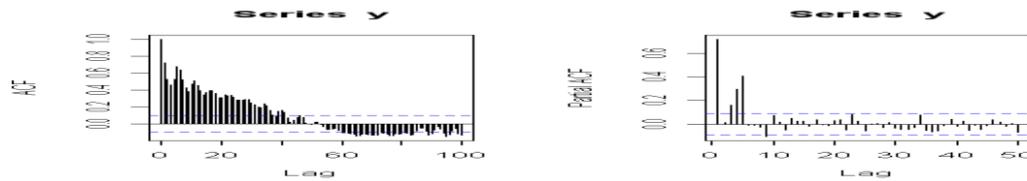
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾 ($P=1$ 及 $P=5$) 且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.5 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.45 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 9.44$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

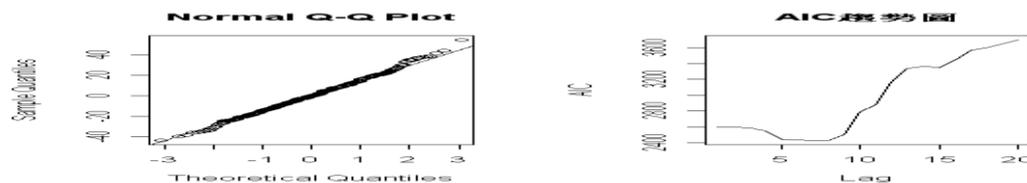
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
6.161643	0.525192	0.0001	0.0001	0.016961	0.429632

觀測值與預測值的殘差平方和: 15943.38

RFE 值: 0.09418811

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

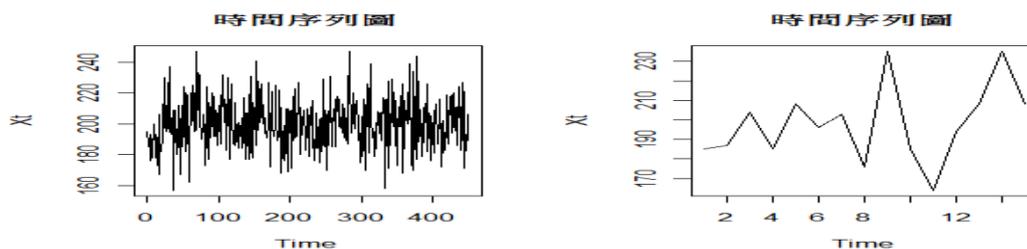


依據 AIC 取小法則選取 Order=5

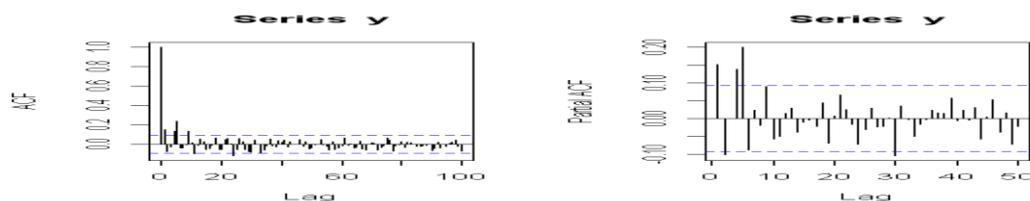
情形 6: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾 ($P=1$ 及 $P=5$) 且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 159.94$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
111.6579	0.13488	0.0001	0.0001	0.104432	0.201344

觀測值與預測值的殘差平方和: 5356.532

RFE 值: 0.001819676

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：

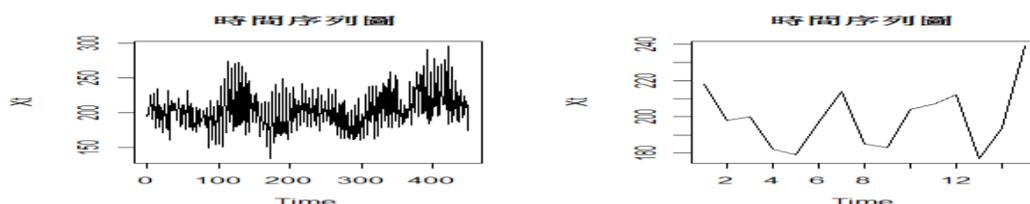


依據 AIC 取小法則選取 Order=5(AIC 呈現遞減，在 Order=5 時漸趨平緩趨勢)。

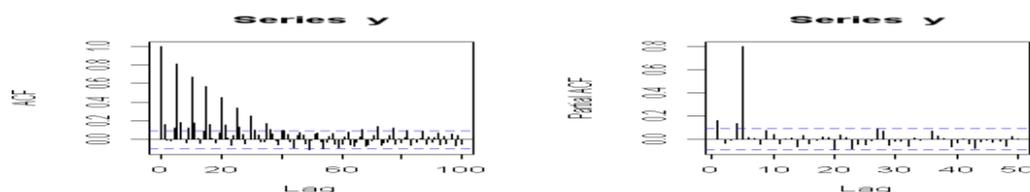
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數明顯較大。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.8 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 39.74$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=5

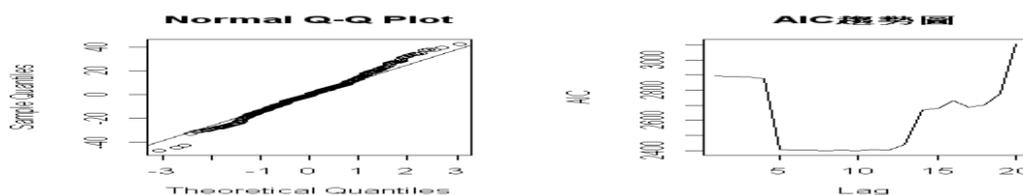
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^p \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
27.43879	0.058854	0.0001	0.0001	0.0001	0.805919

觀測值與預測值的殘差平方和: 7092.887

RFE 值: 0.01722533

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

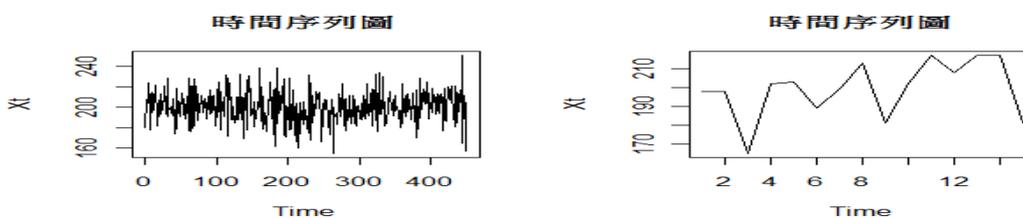


依據 AIC 取小法則也是選取 Order=5

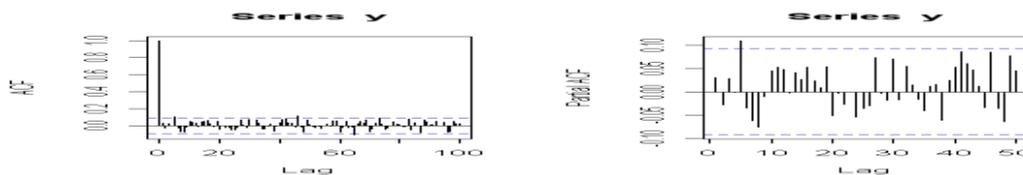
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=5) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.0001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 179.74$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

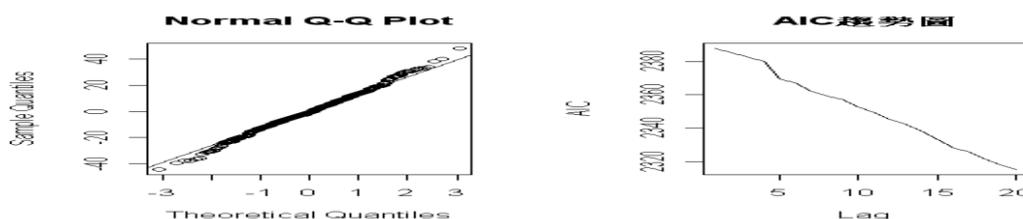
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
164.5585	0.033518	0.0001	0.031867	0.0001	0.112564

觀測值與預測值的殘差平方和: 3179.058

RFE 值: 0.003090036

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:

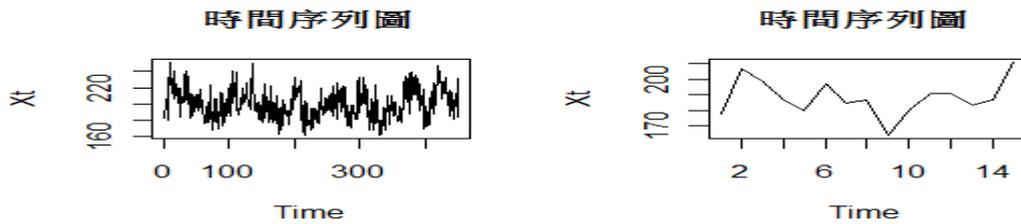


依據 AIC 取小法則選取 Order=5(AIC 呈現遞減, 在 Order=5 時漸趨平緩趨勢)。

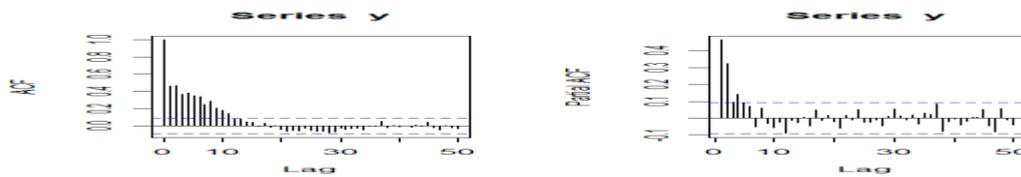
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.28 \quad \alpha_2=0.2 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.1 \quad \alpha_5=0.08 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 40$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

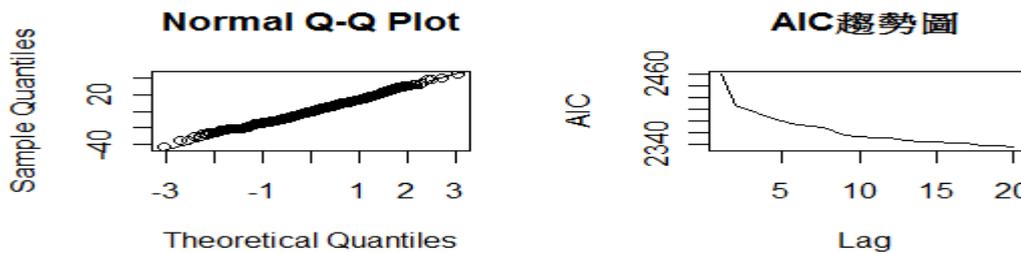
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
50.44886	0.253983	0.252344	0.033637	0.117251	0.090843

觀測值與預測值的殘差平方和: 4039.595

RFE 值: 0.06245689

模型取 Order=9 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=9 (AIC 呈現遞減, 在 Order=9 時漸趨平緩趨勢)

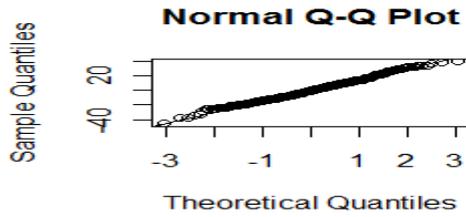
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
29.85651	0.249391	0.241654	0.04582	0.086748
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$
0.078856	0.073983	0.0001	0.074154	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 3269.013

RFE 值: 0.05254612

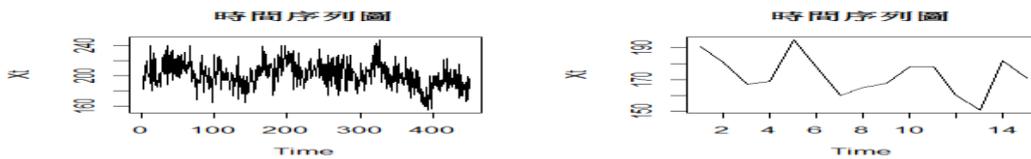
模型取 Order=9 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的)



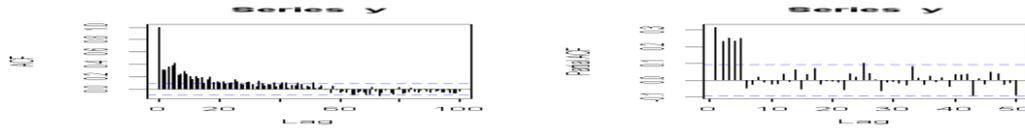
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.08 \quad \alpha_2=0.1 \quad \alpha_3=0.14 \quad \alpha_4=0.2 \quad \alpha_5=0.28 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \alpha_i) = 40$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

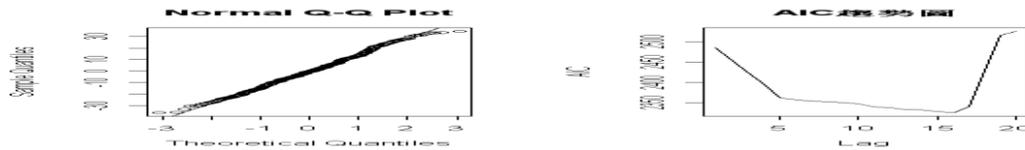
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
43.3128	0.064585	0.078127	0.179019	0.204913	0.257976

觀測值與預測值的殘差平方和: 6996.959

RFE 值: 0.09987467

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=16

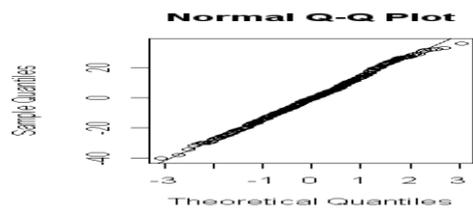
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
3.726676	0.082698	0.10832	0.183983	0.19408	0.262946
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.019478	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	
0.035037	0.0001	0.059101	0.0001	0.035109	

觀測值與預測值的殘差平方和: 6278.034

RFE 值: 0.0984295

模型取 Order=16 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



四、建構模型使用模擬資料筆數為 100 筆，Order=15。

4-1 模擬資料參數 $\lambda=2$ ，並預測未來 15 筆

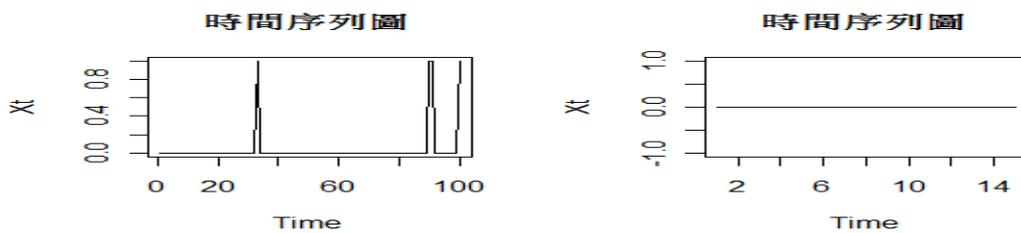
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.065 \quad \alpha_2=0.065 \quad \alpha_3=0.065 \quad \alpha_4=0.065 \quad \alpha_5=0.065 \quad \alpha_6=0.065 \quad \alpha_7=0.065$$

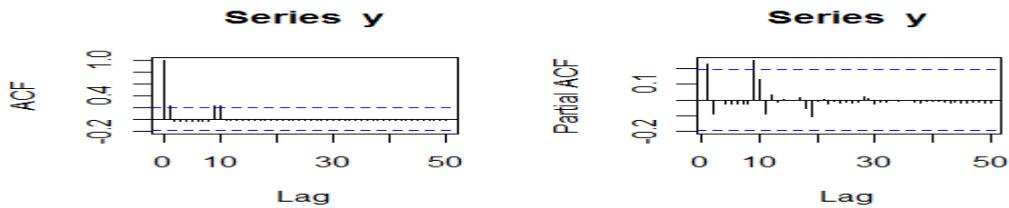
$$\alpha_8=0.065 \quad \alpha_9=0.065 \quad \alpha_{10}=0.065 \quad \alpha_{11}=0.065 \quad \alpha_{12}=0.065 \quad \alpha_{13}=0.065 \quad \alpha_{14}=0.065$$

$$\alpha_{15}=0.065 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)=0.05 \quad \text{Order}=15$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=9

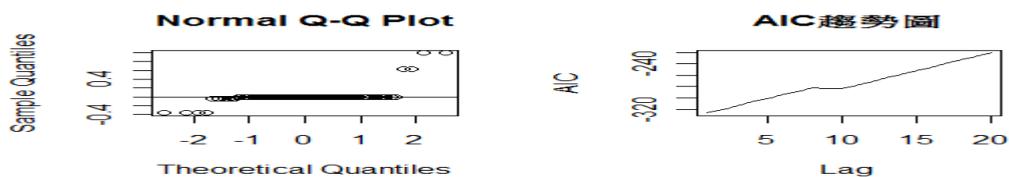
參數估計值

$i(1-\sum_{i=1}^i \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
0.00942	0.355805	0.0001	0.036792	0.0001
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$
0.0001	0.0001	0.036792	0.0001	0.355805

觀測值與預測值的殘差平方和: 0.2102932

RFE 值: 觀察值皆為 0 無法估計

模型取 Order=9 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=1

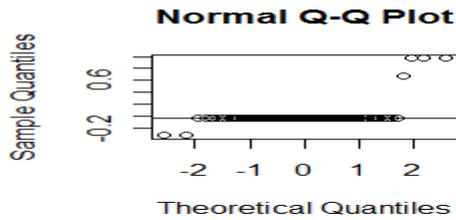
參數估計值

$\lambda(1-\sum \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$
0.028199	0.302083

觀測值與預測值的殘差平方和: 0.150518

RFE 值: 觀察值皆為 0 無法估計

模型取 Order=1 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的)



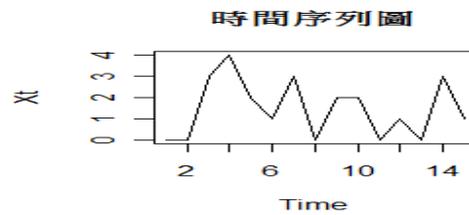
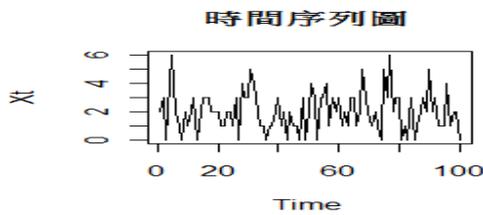
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.01 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.01 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.01 \quad \alpha_8=0.01$$

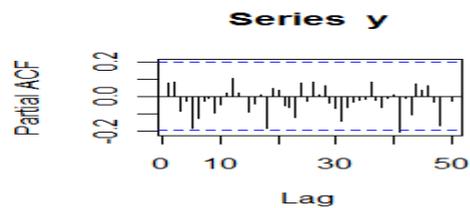
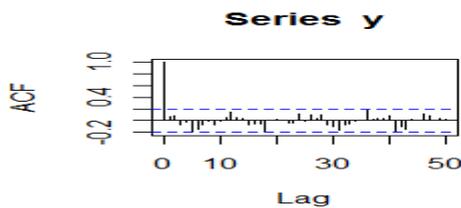
$$\alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.01 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.01 \quad \alpha_{15}=0.01$$

$$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 1.7$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

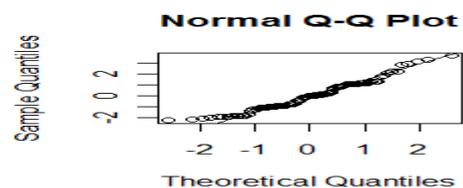
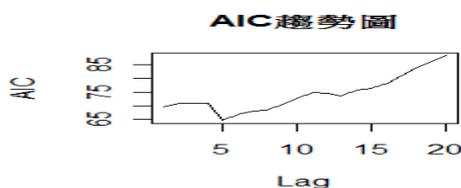


建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=5

參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
1.637899	0.062932	0.109106	0.0001	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 30.5481

RFE 值: 0.3625186

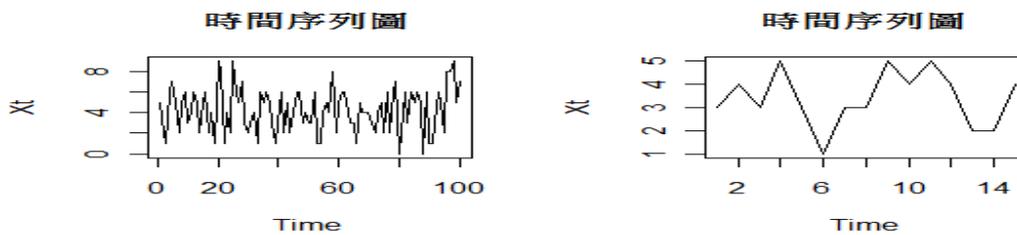
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$\alpha_1=0.12$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.12$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.12$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.12$

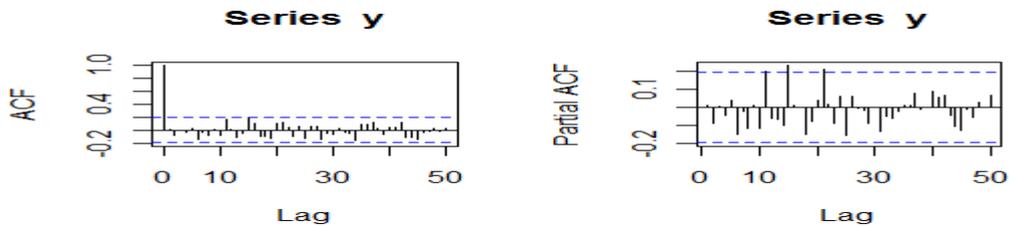
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.12$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.12$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.12$ $\alpha_{14}=0.0001$

$\alpha_{15}=0.12$ $\lambda(1-\sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.0786$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

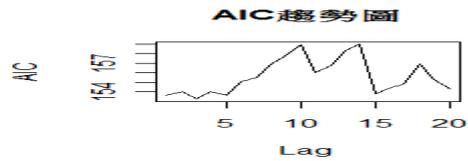
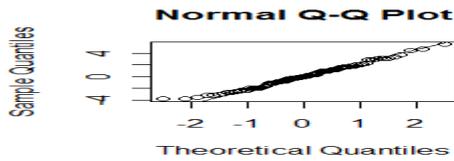
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.356849	0.073583	0.0001	0.048745	0.0001	0.082487
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.094142	0.0001	0.254074
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.0001	0.01226	0.0001	0.348944		

觀測值與預測值的殘差平方和: 51.4013

RFE 值: 0.3202984

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



AIC 趨勢圖:

依據 AIC 取小法則選取 Order=3

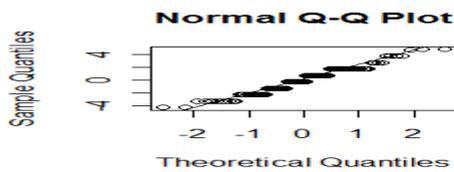
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
4.229647	0.00388	0.0001	0.002616

觀測值與預測值的殘差平方和: 30.7335

RFE 值: 0.2530729

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



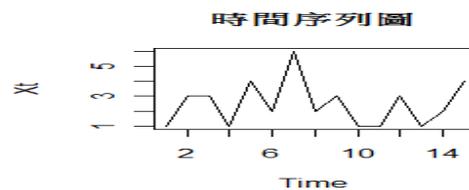
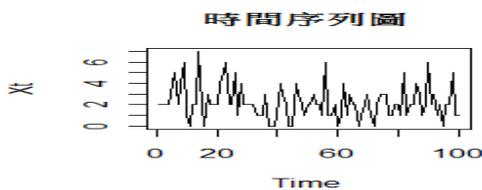
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.01$$

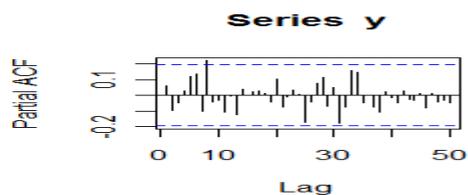
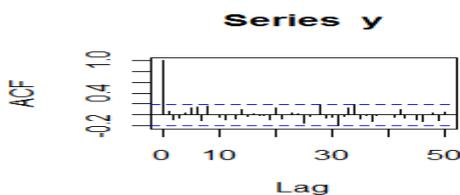
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.0001$$

$$\alpha_{15}=0.01 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 1.8386$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=8

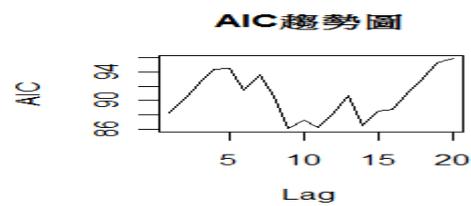
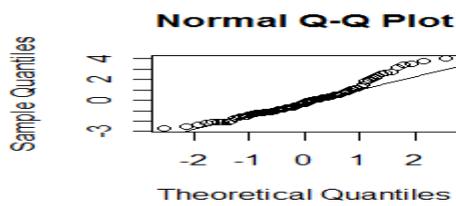
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
0.756363	0.079957	0.0001	0.0001	0.033425
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	
0.110689	0.176336	0.0001	0.246068	

觀測值與預測值的殘差平方和: 33.01234

RFE 值: 0.2036674

模型取 Order=8 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=9

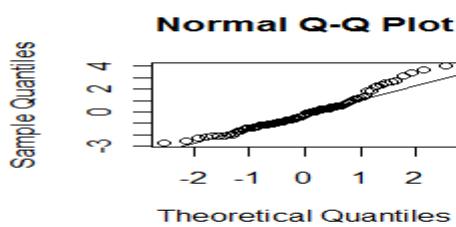
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
0.782718	0.048384	0.0001	0.0001	0.026225
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$
0.113233	0.18168	0.0001	0.25716	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 36.68437

RFE 值: 0.1976604

模型取 Order=9 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



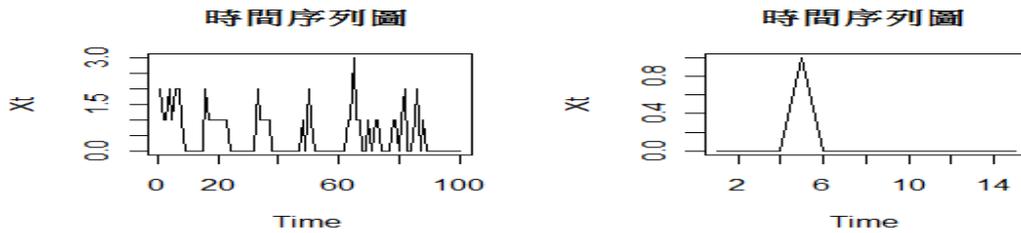
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=15) 且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.48 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

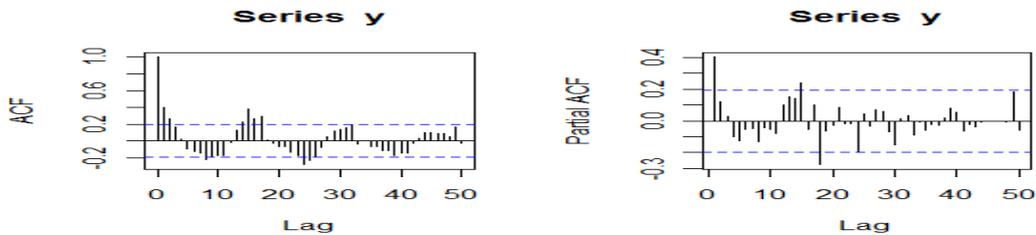
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.48 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.0774$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=18

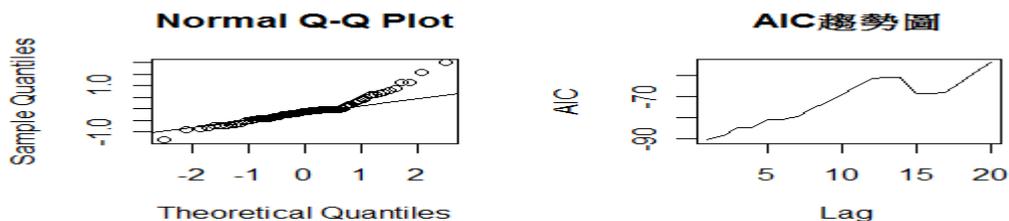
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.013557	0.171268	0.0001	0.094385	0.039624	0.0001	0.001306
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.037657	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.060174
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$		
0.065931	0.255704	0.0001	0.240355	0.0001		

觀測值與預測值的殘差平方和: 2.833721

RFE 值: 3.021787

模型取 Order=18 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=1

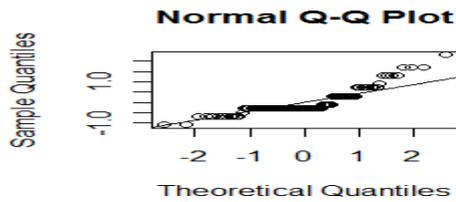
參數估計值

$\lambda(1-\sum \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$
0.288337	0.405305

觀測值與預測值的殘差平方和: 3.292860

RFE 值: 5.942287

模型取 Order=1 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



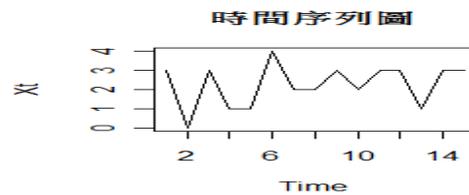
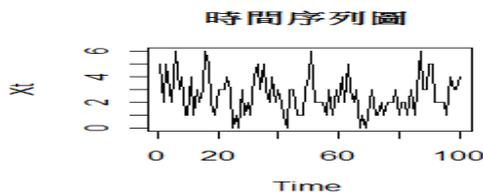
情形 6: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=15) 且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

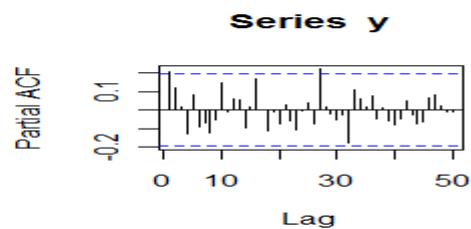
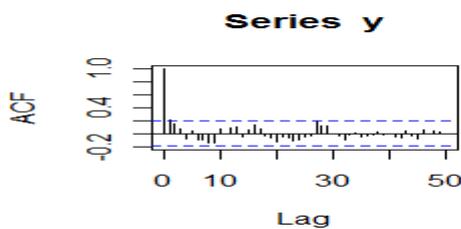
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.1 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 1.5974$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=1

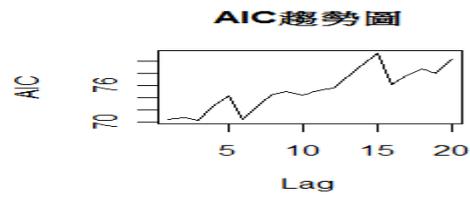
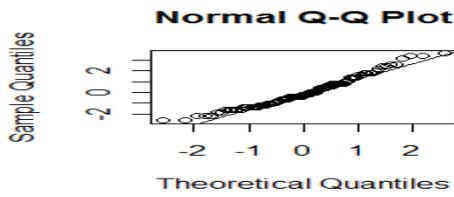
參數估計值

$\lambda(1-\sum \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$
1.979112	0.209951

觀測值與預測值的殘差平方和: 17.90478

RFE 值: 0.1168539

模型取 Order=1 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



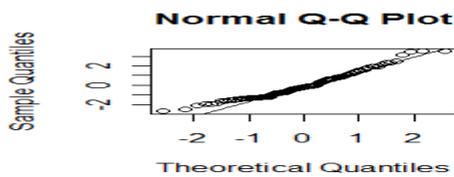
依據 AIC 取小法則選取 Order=3
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
1.715001	0.207533	0.083994	0.018203

觀測值與預測值的殘差平方和: 17.9803

RFE 值: 0.1063415

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



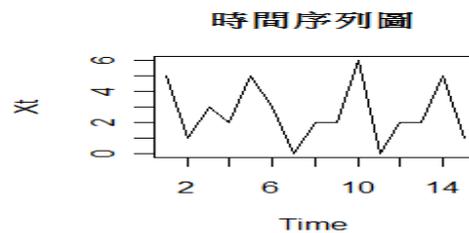
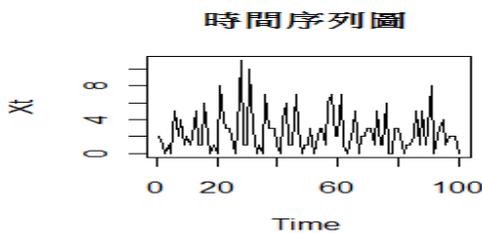
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數明顯較大。 $\alpha_1=0.001$

$\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

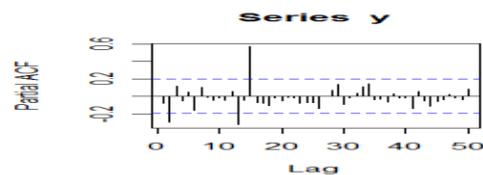
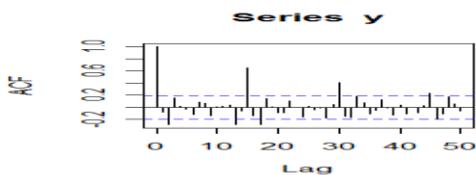
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.8$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.3954$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

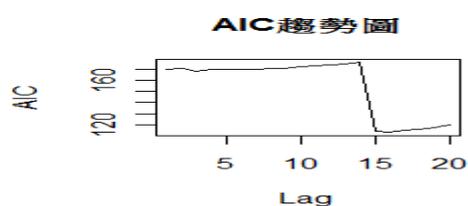
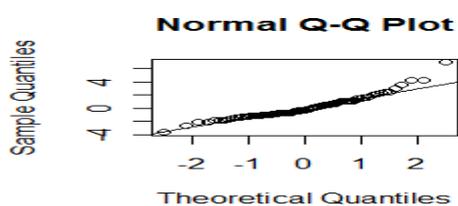
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.589322	0.0001	0.0001	0.123128	0.0001	0.003954
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.0001	0.0001	0.0001	0.644025		

觀測值與預測值的殘差平方和: 72.20276

RFE 值: 0.001984736

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=16

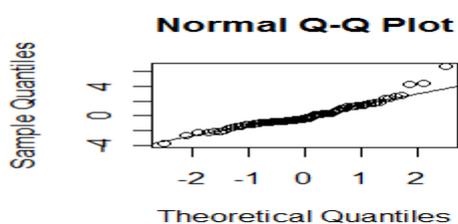
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.234992	0.100219	0.0001	0.099961	0.0001	0.013594
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.018821	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	
0.0001	0.0001	0.0001	0.674066	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 55.98184

RFE 值: 0.04110642

模型取 Order=16 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



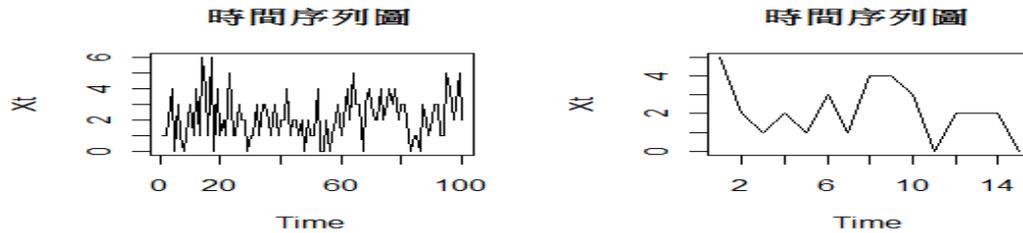
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

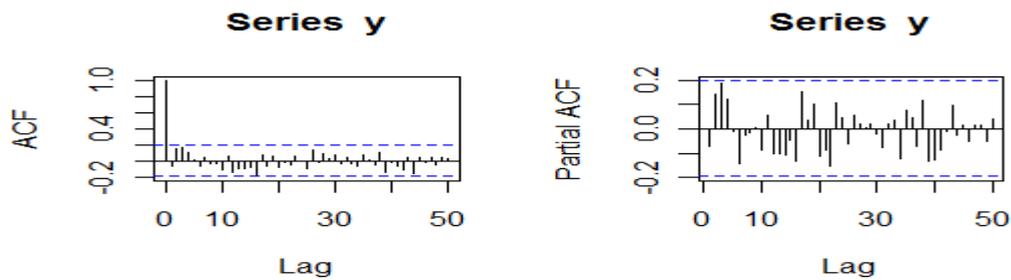
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 1.7954$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

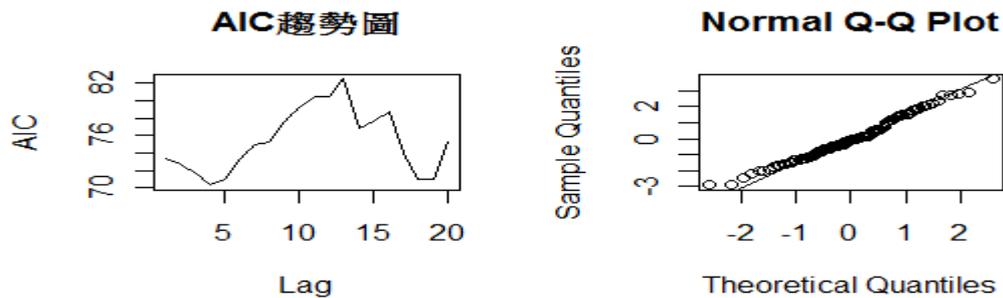


建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=4 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=4

參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^4 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
1.046576	0.0001	0.154931	0.22949	0.13011

觀測值與預測值的殘差平方和: 27.31897

RFE 值: 0.09520786

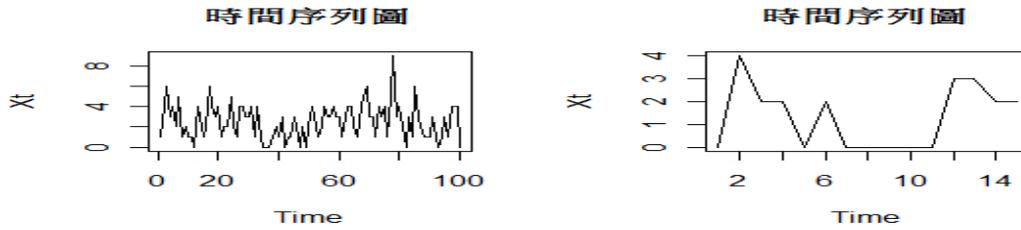
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.2 \quad \alpha_2=0.15 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.08 \quad \alpha_5=0.06 \quad \alpha_6=0.05 \quad \alpha_7=0.04 \quad \alpha_8=0.03$$

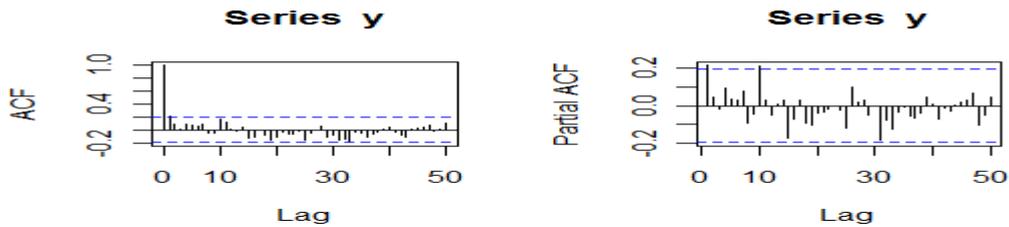
$$\alpha_9=0.02 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.008 \quad \alpha_{12}=0.006 \quad \alpha_{13}=0.004 \quad \alpha_{14}=0.002 \quad \alpha_{15}=0.001$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.478$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=10

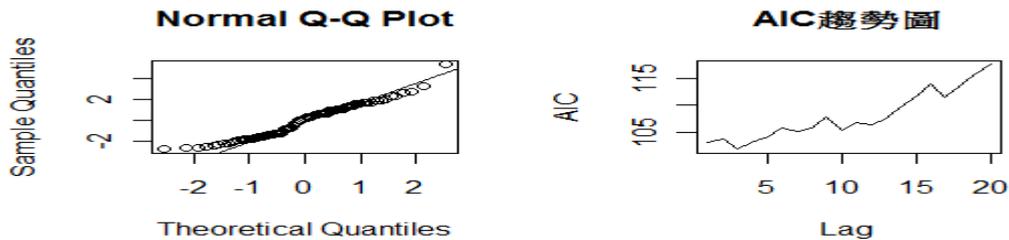
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.642878	0.226618	0.040548	0.0001	0.075211	0.026973
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	
0.030287	0.115163	0.0001	0.0001	0.225442	

觀測值與預測值的殘差平方和: 34.60539

RFE 值: 0.6723423

模型取 Order=10 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=3

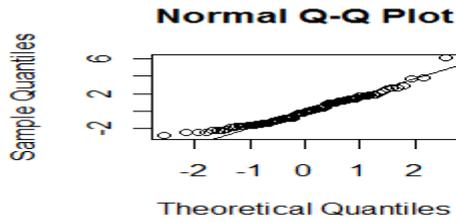
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^3 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
1.819377	0.197688	0.069932	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 49.01765

RFE 值: 0.8983342

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



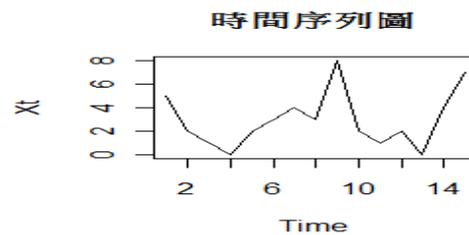
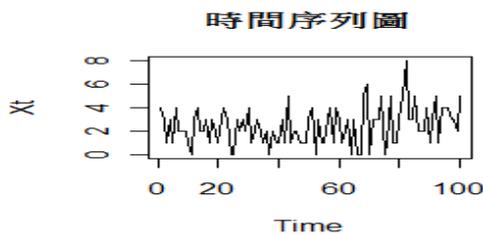
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.002 \quad \alpha_3=0.004 \quad \alpha_4=0.006 \quad \alpha_5=0.008 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.02$$

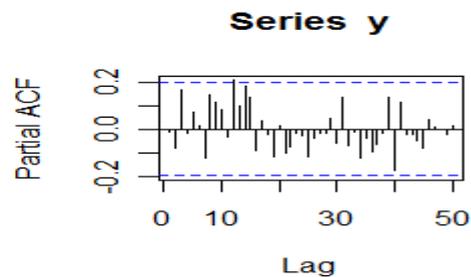
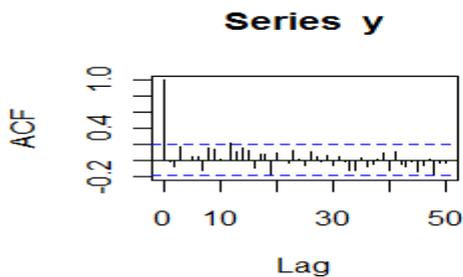
$$\alpha_8=0.03 \quad \alpha_9=0.04 \quad \alpha_{10}=0.05 \quad \alpha_{11}=0.06 \quad \alpha_{12}=0.08 \quad \alpha_{13}=0.1 \quad \alpha_{14}=0.15 \quad \alpha_{15}=0.2$$

$$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.478$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=12

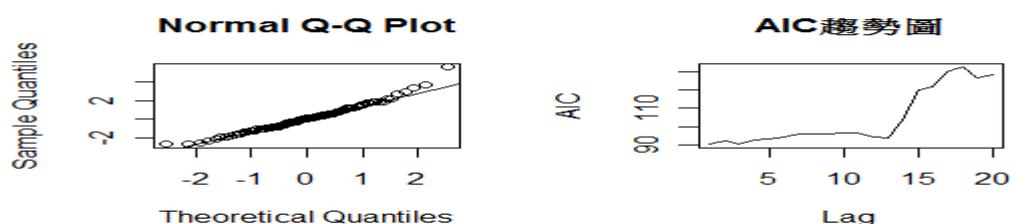
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.147177	0.008876	0.0001	0.173125	0.0001	0.075795	0.000487
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	
0.0001	0.170293	0.120208	0.143036	0.0001	0.247541	

觀測值與預測值的殘差平方和: 72.68855

RFE 值: 0.07173285

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=13

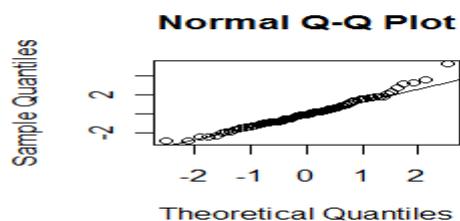
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.000243	0.0001	0.0001	0.172536	0.0001	0.052482	0.018972
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.180047	0.121007	0.144101	0.0001	0.229111	0.105171

觀測值與預測值的殘差平方和: 77.59274

RFE 值: 0.07832474

模型取 Order=13 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



4-2 模擬資料參數 $\lambda=20$ ，並預測未來 15 筆

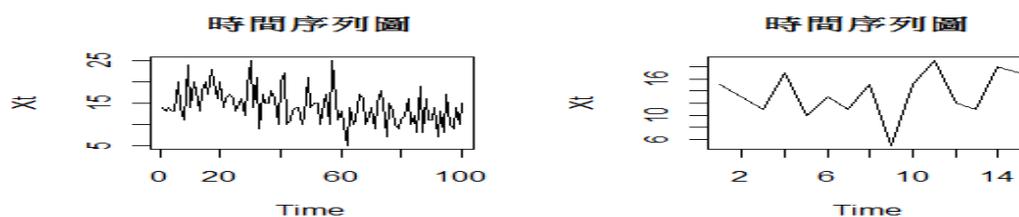
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.065 \quad \alpha_2=0.065 \quad \alpha_3=0.065 \quad \alpha_4=0.065 \quad \alpha_5=0.065 \quad \alpha_6=0.065 \quad \alpha_7=0.065$$

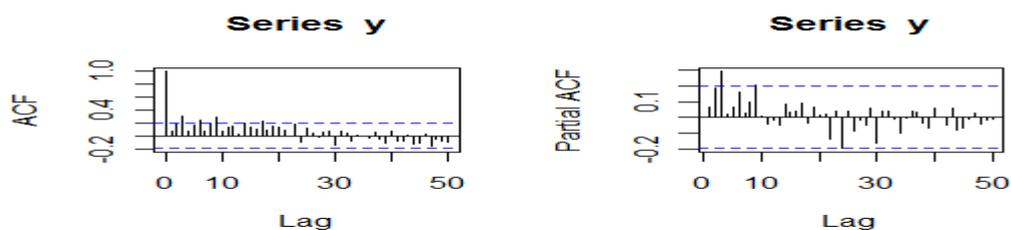
$$\alpha_8=0.065 \quad \alpha_9=0.065 \quad \alpha_{10}=0.065 \quad \alpha_{11}=0.065 \quad \alpha_{12}=0.065 \quad \alpha_{13}=0.065 \quad \alpha_{14}=0.065$$

$$\alpha_{15}=0.065 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)=0.5 \quad \text{Order}=15$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=9

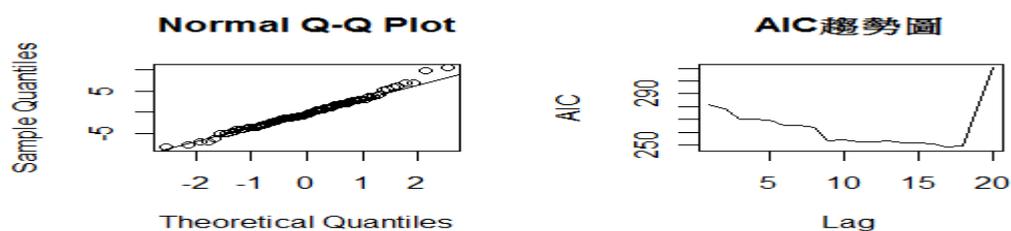
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
2.65508	0.0001	0.133639	0.15284	0.0001
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$
0.056859	0.106053	0.007175	0.115028	0.240327

觀測值與預測值的殘差平方和: 203.2623

RFE 值: 0.1080115

模型取 Order=9 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=17

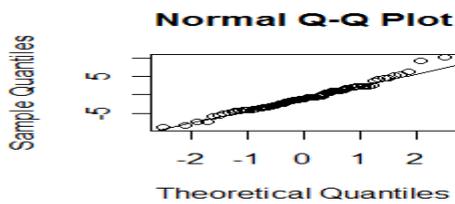
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.001377	0.0001	0.043976	0.106535	0.01161	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.006161	0.003166	0.040542	0.271894	0.055974	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$
0.034773	0.0001	0.139678	0.04849	0.098844	0.146822

觀測值與預測值的殘差平方和: 245.6342

RFE 值: 0.1119645

模型取 Order=17 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



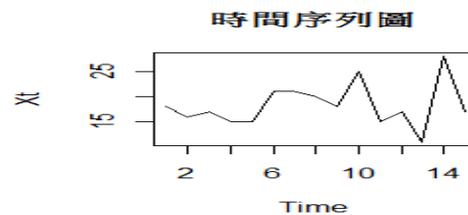
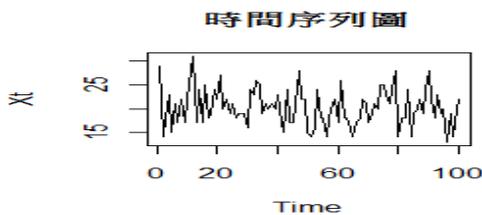
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.01 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.01 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.01 \quad \alpha_8=0.01$$

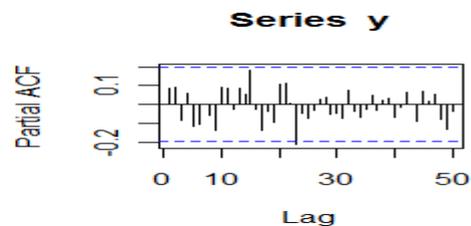
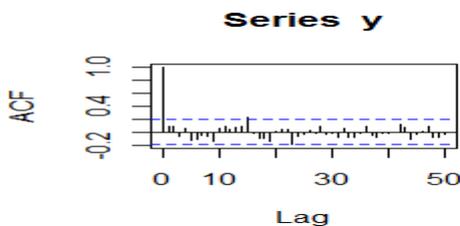
$$\alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.01 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.01 \quad \alpha_{15}=0.01$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 17$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=23

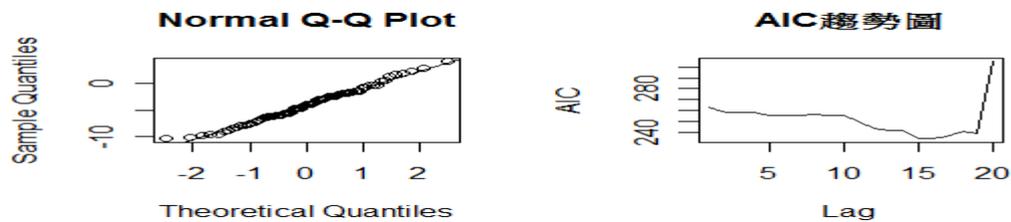
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.001995	0.14212	0.075514	0.0001	0.169268	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.081591	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$
0.094928	0.031938	0.084262	0.228125	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$	$\hat{\alpha}_{21}$	$\hat{\alpha}_{22}$	$\hat{\alpha}_{23}$
0.0001	0.0001	0.048328	0.190832	0.036571	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 1181.514

RFE 值: 0.4397935

模型取 Order=23 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=16

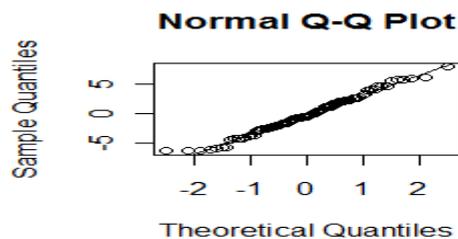
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
2.221515	0.189634	0.03744	0.0001	0.119208	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.079603	0.0001	0.0001	0.077702	0.001438
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	
0.057039	0.02838	0.096682	0.201725	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 282.5048

RFE 值: 0.1049185

模型取 Order=16 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



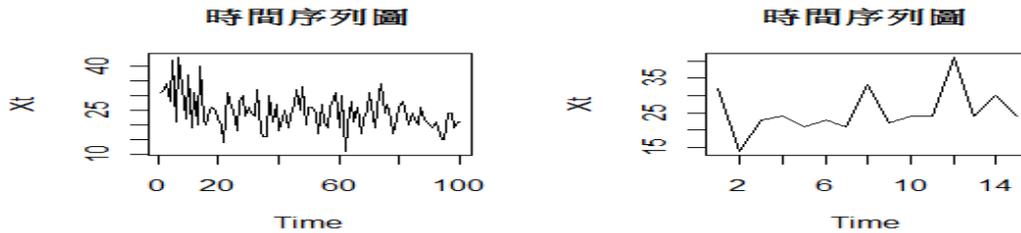
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.12 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.12 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.12 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.12$$

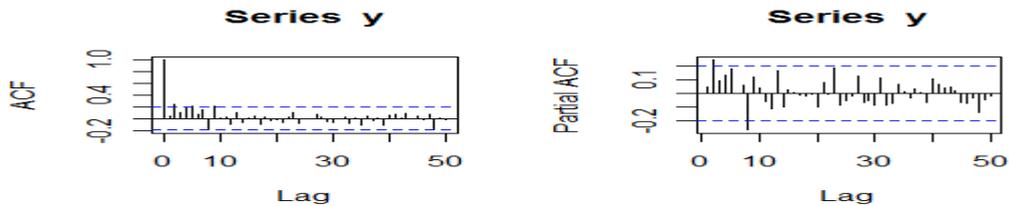
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.12 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.12 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.12 \quad \alpha_{14}=0.0001$$

$$\alpha_{15}=0.12 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.786$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=8

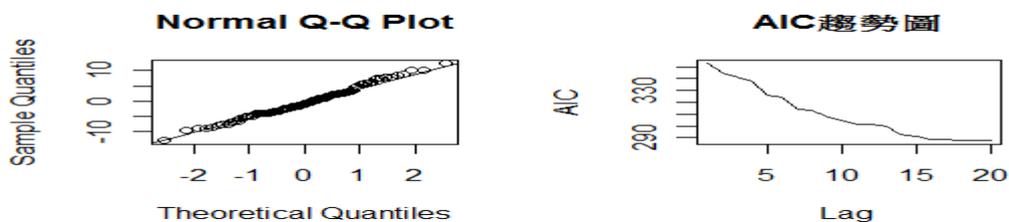
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
12.04011	0.0001	0.035938	0.009942	0.120869
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	
0.165802	0.053375	0.102476	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 653.4797

RFE 值: 0.1187716

模型取 Order=8 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=16

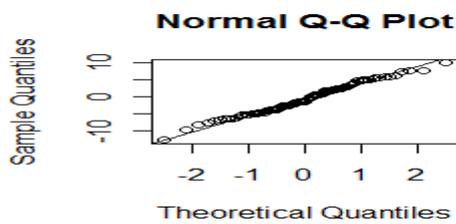
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
6.906098	0.101934	0.003895	0.0001	0.08006	0.101873
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.008629	0.0001	0.0001	0.151626	0.021987	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	
0.0001	0.140483	0.0001	0.049799	0.042383	

觀測值與預測值的殘差平方和: 754.642

RFE 值: 0.1351384

模型取 Order=16 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



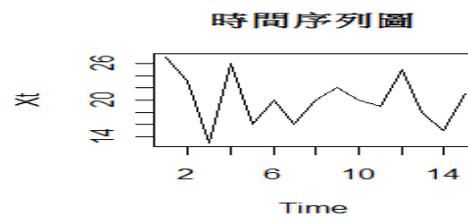
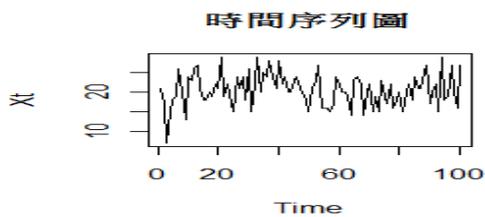
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.01$$

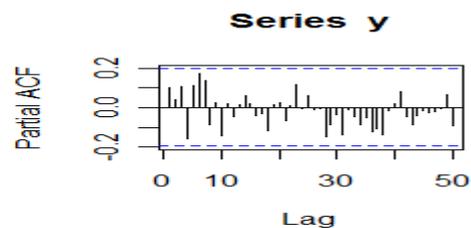
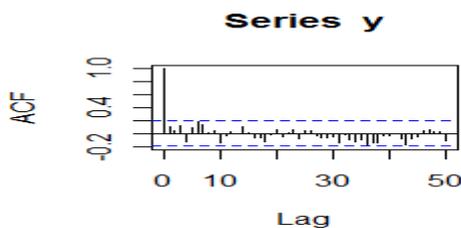
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.0001$$

$$\alpha_{15}=0.01 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 18.386$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

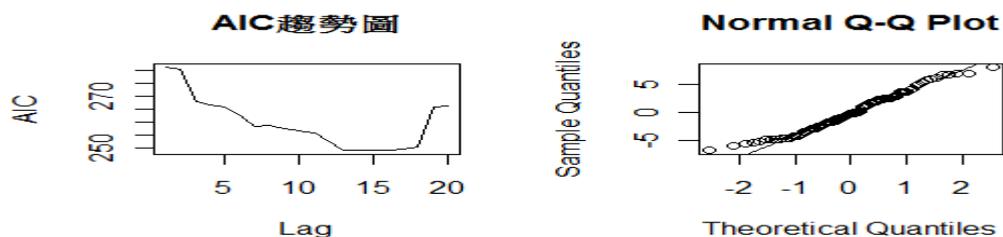


建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=14
 參數估計值

$i(1-\sum_{i=1}^i \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
2.367179	0.0001	0.0001	0.195142	0.0001	0.085058
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.123637	0.255651	0.0001	0.15145	0.0001	0.022639
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.0001	0.0001	0.051226			

觀測值與預測值的殘差平方和: 274.1534

RFE 值: 0.07139514

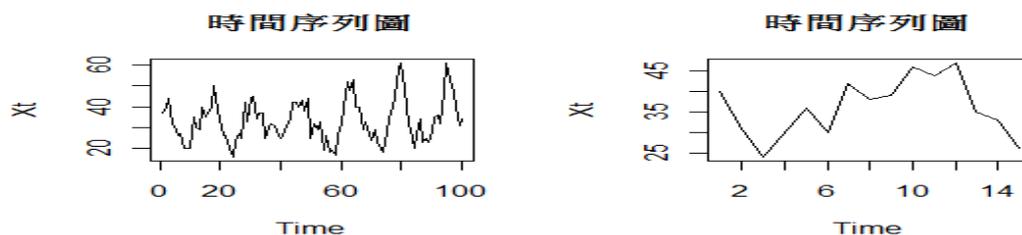
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=15) 且 α 係數加總趨近於 1。

$\alpha_1=0.48$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

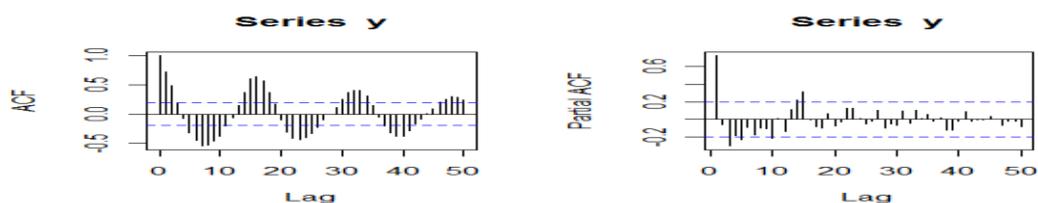
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.48$ $\lambda(1-\sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.774$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



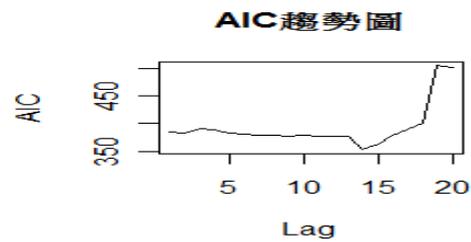
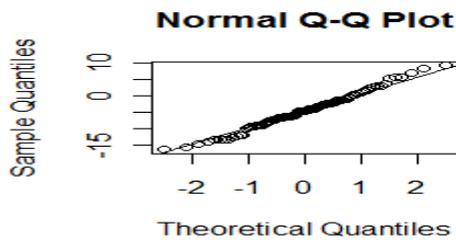
依據 PACF 圖選取 Order=15

參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.003378	0.37407	0.134067	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.052244	0.0001	0.081053
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.0001	0.0001	0.075418	0.435745		

觀測值與預測值的殘差平方和: 3788.194

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

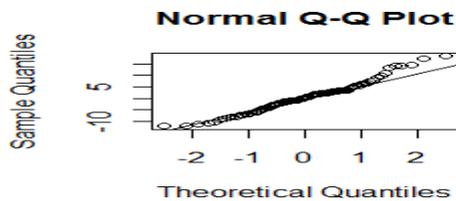
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
3.536271	0.44718	0.115033	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.032261	0.0001	0.051539
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.0001	0.0001	0.248435			

觀測值與預測值的殘差平方和: 1111.756

RFE 值: 0.03317911

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



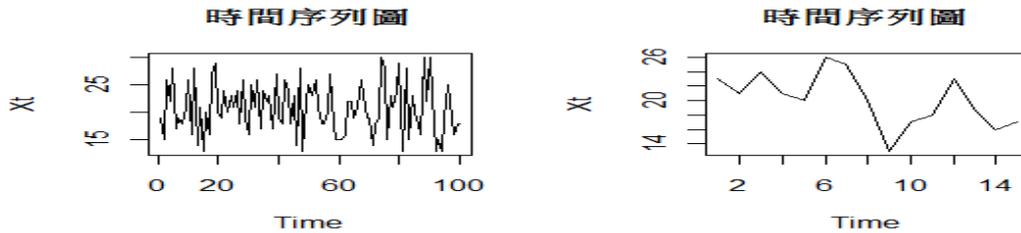
情形6:考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1及P=15) 且 α 係數加總明顯小於1。

$\alpha_1=0.1$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

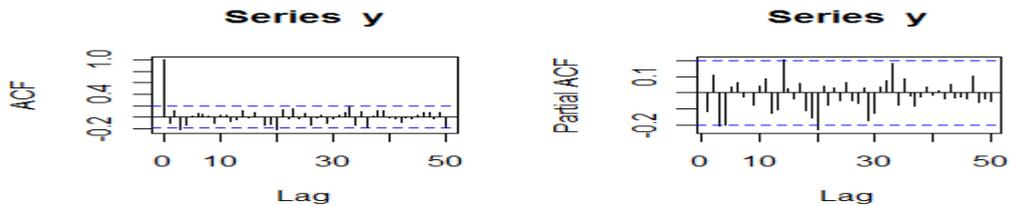
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.1$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 15.974$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=20

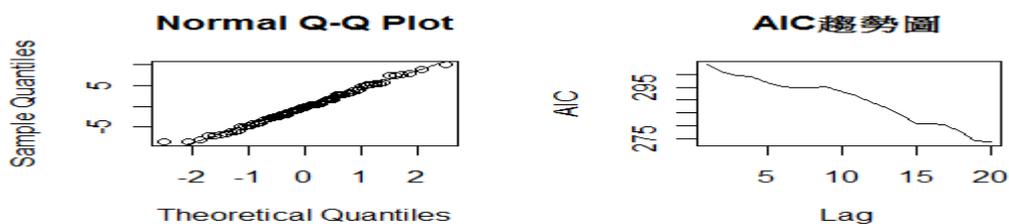
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
5.230344	0.0001	0.112971	0.0001	0.0001	0.085601	0.067974
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.007668	0.0001	0.119358	0.133639	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.171089	0.0001	0.0001	0.048436	0.0001	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 186.4079

RFE 值: 0.02505260

模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則也是選取 Order=20

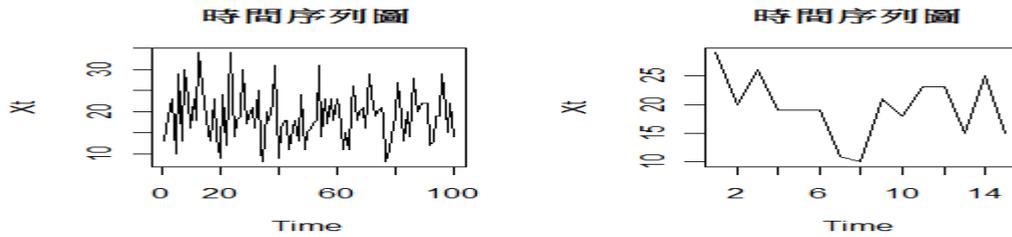
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數明顯較大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

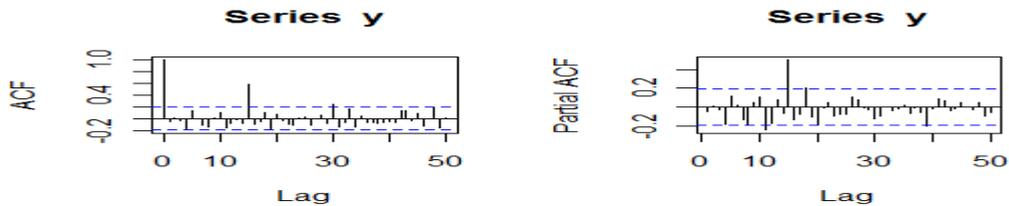
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.8 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 3.954$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

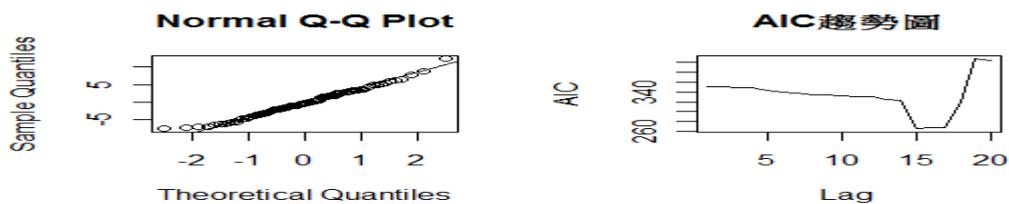
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
5.91408	0.009546	0.0001	0.01722	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.019619	0.0001	0.0001	0.012125	0.038573	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.0001	0.0001	0.0001	0.584658		

觀測值與預測值的殘差平方和: 565.6837

RFE 值: 0.003561591

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則也是選取 Order=15

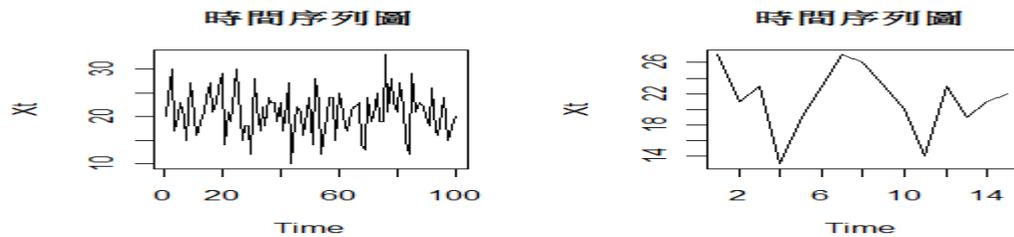
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數較小。 $\alpha_1=0.001$

$\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

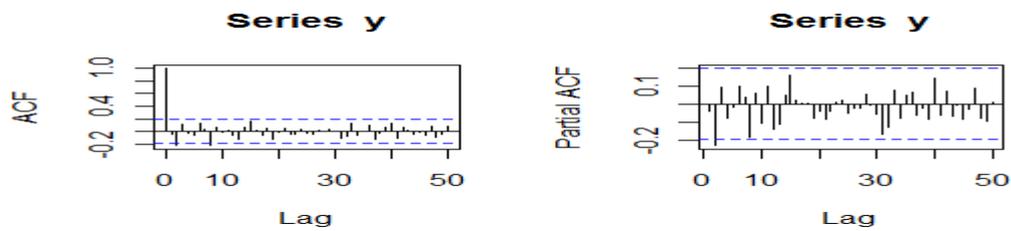
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.1$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 17.954$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=2

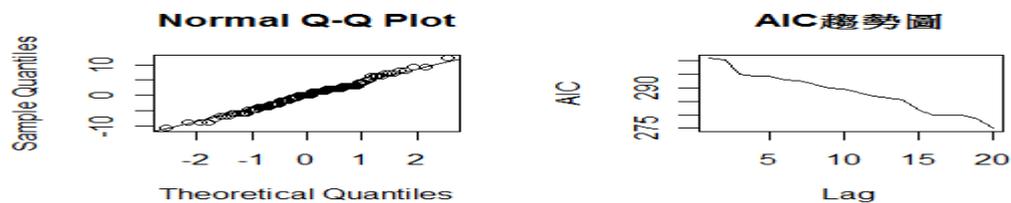
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$
20.82237	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 238.5376

RFE 值: 0.02679965

模型取 Order=2 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

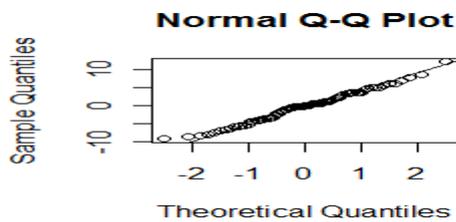
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
7.671046	0.0001	0.0001	0.107531	0.0001	0.023505	0.020698
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.116959	0.0001	0.070438	0.0001	0.079817	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.025688	0.167188	0.013334	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 260.3518

RFE 值: 0.03188517

模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



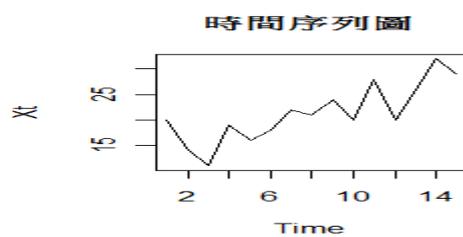
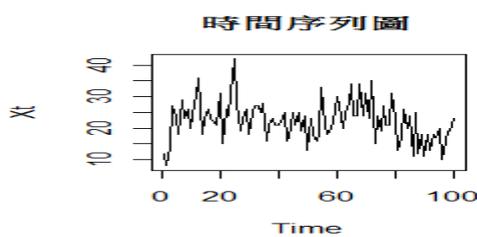
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.2 \quad \alpha_2=0.15 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.08 \quad \alpha_5=0.06 \quad \alpha_6=0.05 \quad \alpha_7=0.04 \quad \alpha_8=0.03$$

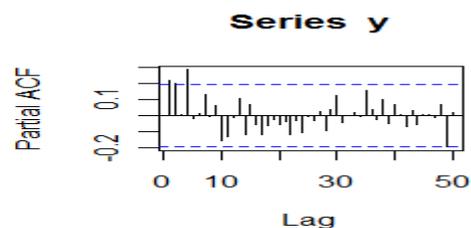
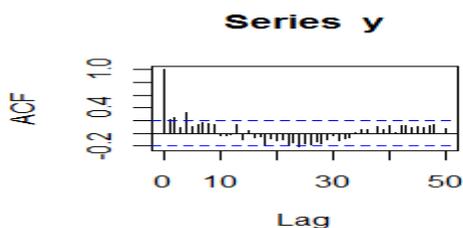
$$\alpha_9=0.02 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.008 \quad \alpha_{12}=0.006 \quad \alpha_{13}=0.004 \quad \alpha_{14}=0.002 \quad \alpha_{15}=0.001$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 4.78$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=4

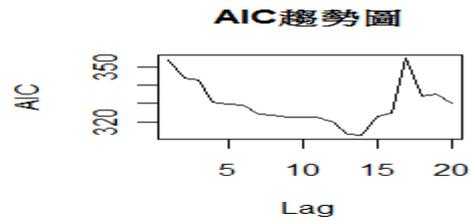
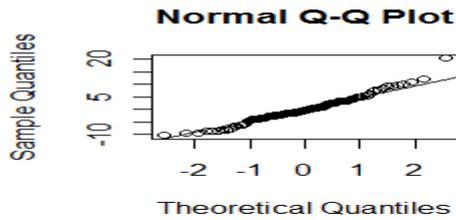
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
9.793907	0.117632	0.164384	0.0001	0.284605

觀測值與預測值的殘差平方和: 385.5039

RFE 值: 0.01712825

模型取 Order=4 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

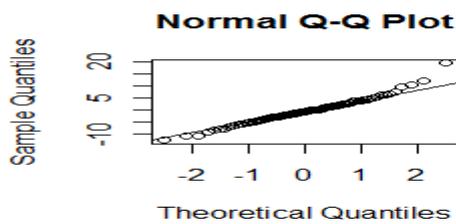
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.414312	0.098459	0.153932	0.0001	0.274346	0.001092
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.03393	0.222494	0.013815	0.076159	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.0001	0.106697	0.0001			

觀測值與預測值的殘差平方和: 696.7801

RFE 值: 0.2059306

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



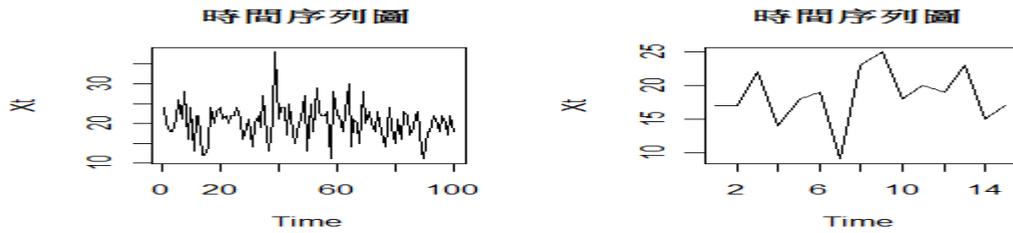
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.002 \quad \alpha_3=0.004 \quad \alpha_4=0.006 \quad \alpha_5=0.008 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.02$$

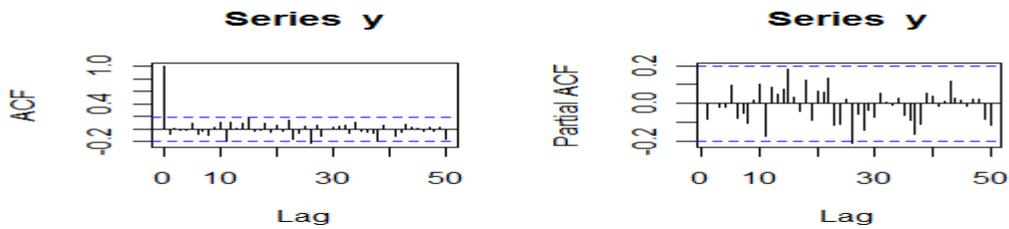
$$\alpha_8=0.03 \quad \alpha_9=0.04 \quad \alpha_{10}=0.05 \quad \alpha_{11}=0.06 \quad \alpha_{12}=0.08 \quad \alpha_{13}=0.1 \quad \alpha_{14}=0.15 \quad \alpha_{15}=0.2$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 4.78$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

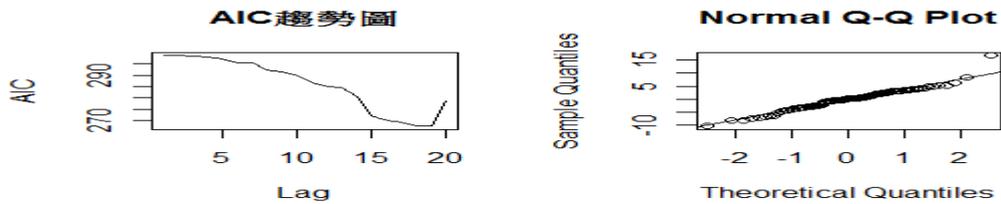


建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=19 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=19

參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{19} \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.002043	0.0001	0.0001	0.019143	0.041255	0.069151	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.009907	0.0001	0.059735	0.131633	0.0001	0.055863	0.026972
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	
0.166756	0.26322	0.068669	0.0001	0.089506	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 187.5576

RFE 值: 0.02981936

4-3 模擬資料參數 $\lambda=200$ ，並預測未來 15 筆

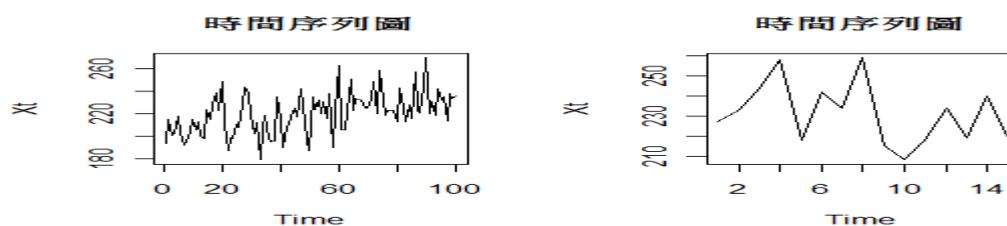
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.065 \quad \alpha_2=0.065 \quad \alpha_3=0.065 \quad \alpha_4=0.065 \quad \alpha_5=0.065 \quad \alpha_6=0.065 \quad \alpha_7=0.065$$

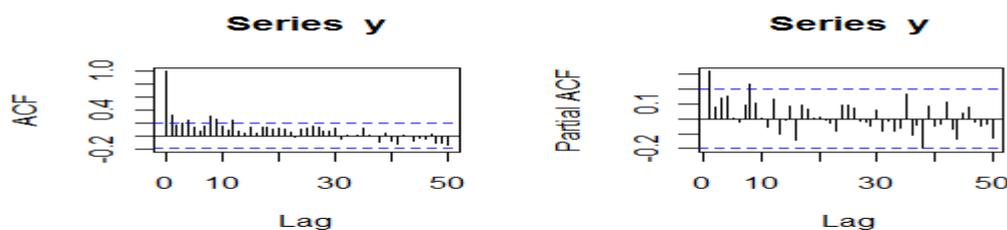
$$\alpha_8=0.065 \quad \alpha_9=0.065 \quad \alpha_{10}=0.065 \quad \alpha_{11}=0.065 \quad \alpha_{12}=0.065 \quad \alpha_{13}=0.065 \quad \alpha_{14}=0.065$$

$$\alpha_{15}=0.065 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 5 \quad \text{Order}=15$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=8

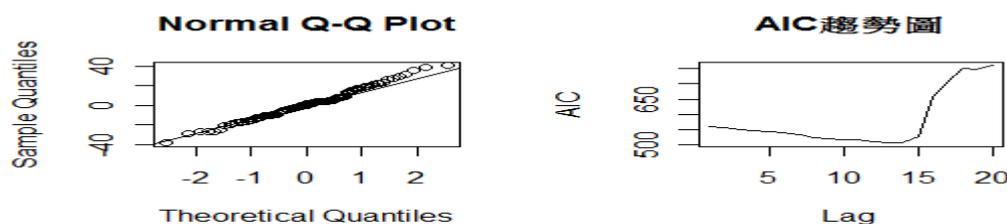
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^8 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
64.5307	0.209177	0.033672	0.064586	0.107504
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	
0.0001	0.0001	0.028654	0.265329	

觀測值與預測值的殘差平方和: 3973.857

RFE 值: 0.02247034

模型取 Order=8 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

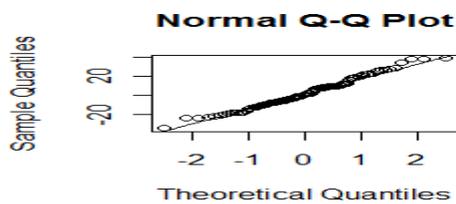
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
12.76954	0.170795	0.000351	0.051209	0.074842	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.000969	0.215122	0.129003	0.027092	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.207964	0.0001	0.064976			

觀測值與預測值的殘差平方和: 4822.993

RFE 值: 0.004086898

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



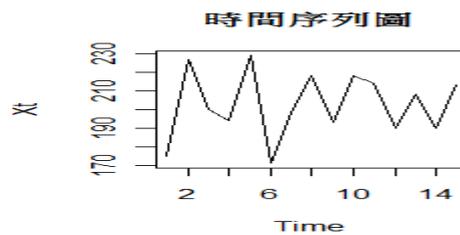
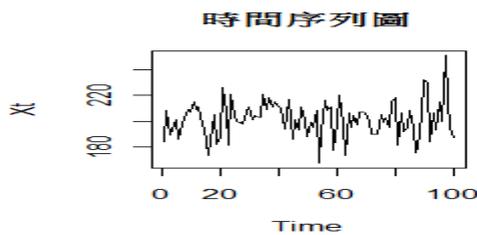
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.01 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.01 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.01 \quad \alpha_8=0.01$$

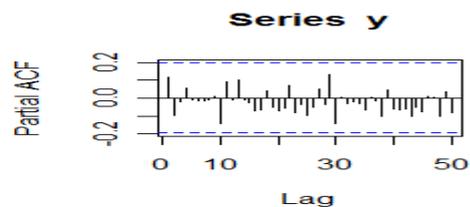
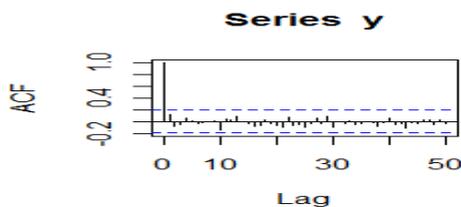
$$\alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.01 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.01 \quad \alpha_{15}=0.01$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 170$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

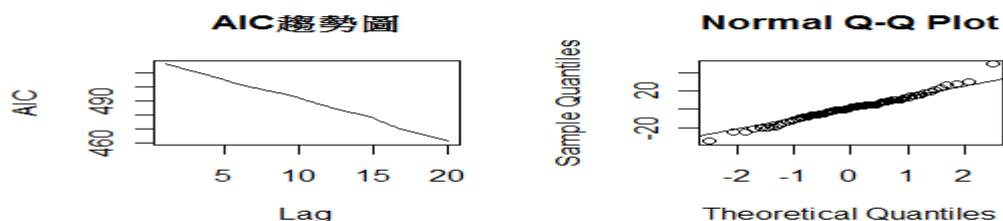


建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
16.89184	0.048906	0.0001	0.0001	0.025698	0.132349	0.063117
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.154169	0.0001	0.081569	0.0001	0.177967	0.0001	0.21119
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.020461	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 4956.164

RFE 值: 0.01807760

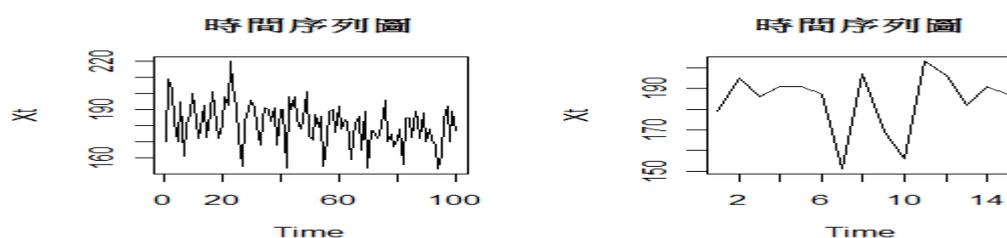
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$\alpha_1=0.12$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.12$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.12$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.12$

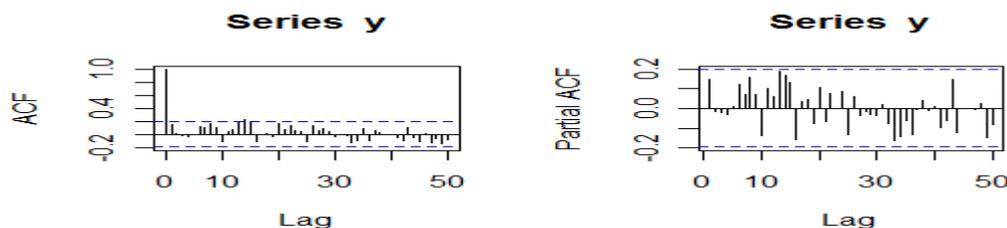
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.12$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.12$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.12$ $\alpha_{14}=0.0001$

$\alpha_{15}=0.12$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 7.86$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

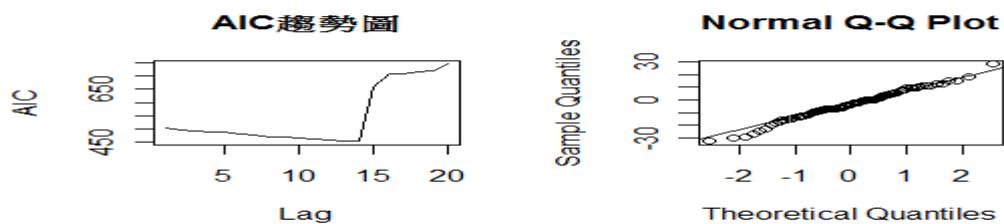


建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

參數估計值

$\hat{\lambda}(1 - \sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.018053	0.091547	0.0001	0.006455	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.043133	0.018116	0.111609	0.181227	0.0001	0.087033
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.051557	0.235099	0.187547			

觀測值與預測值的殘差平方和: 3583.355

RFE 值: 0.03379941

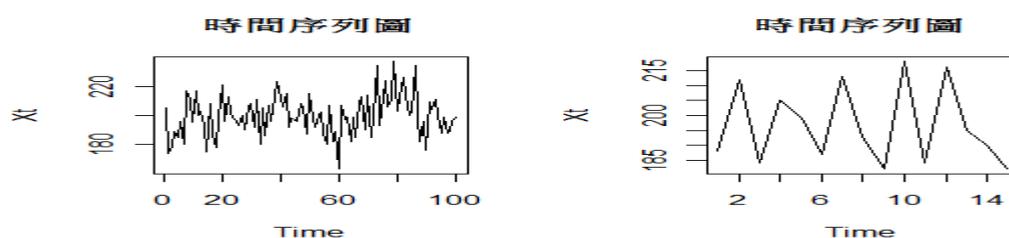
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$\alpha_1=0.01$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.01$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.01$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.01$

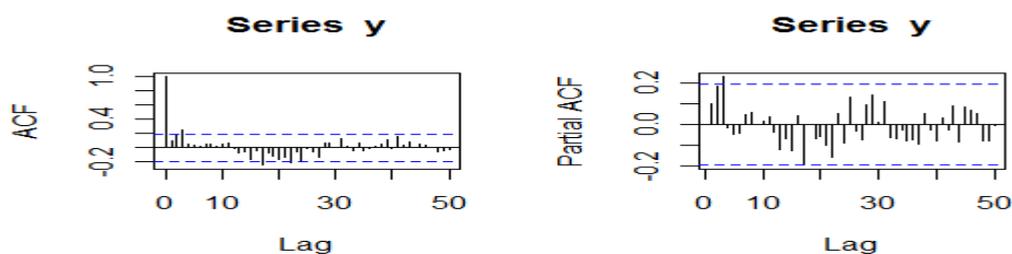
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.01$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.01$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.01$ $\alpha_{14}=0.0001$

$\alpha_{15}=0.01$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 183.86$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=3

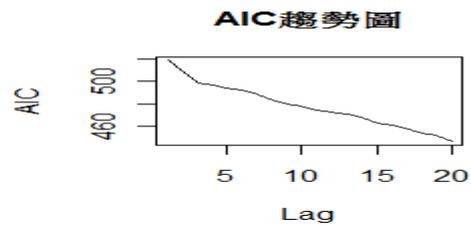
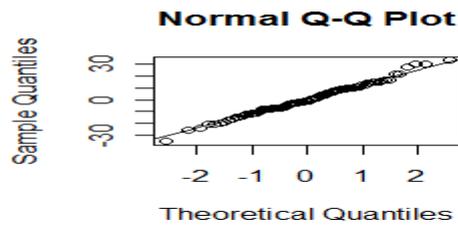
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$
114.9346	0.017008	0.172975	0.236113

觀測值與預測值的殘差平方和: 2539.486

RFE 值: 0.01498911

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

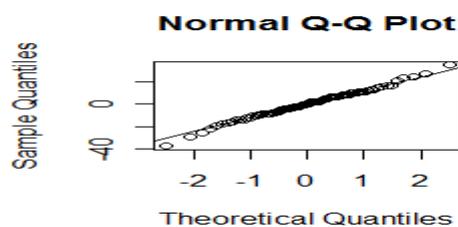
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
58.38361	0.0001	0.109445	0.178914	0.0001	0.0001	0.111606
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.084374	0.0001	0.02409	0.060554	0.064429	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.0001	0.0001	0.019392	0.0001	0.055487	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 3454.009

RFE 值: 0.04201788

模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



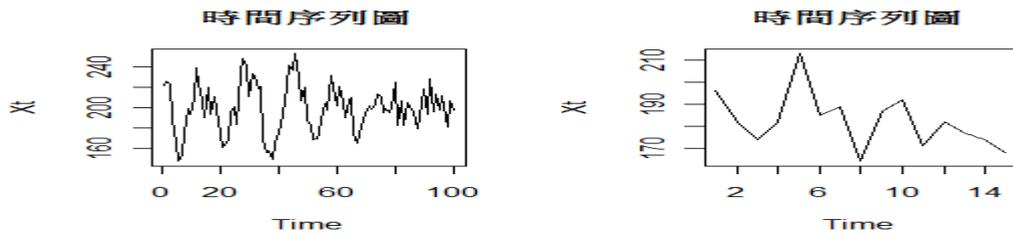
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=15) 且 α 係數加總趨近於 1。

$\alpha_1=0.48$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

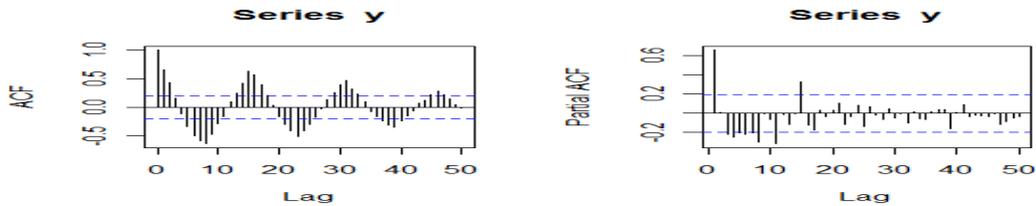
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.48$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 7.74$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=15

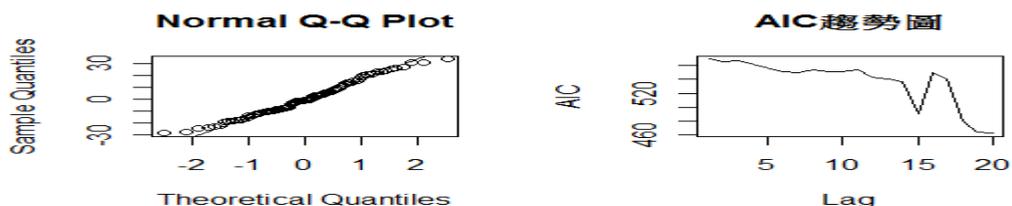
參數估計值]

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
7.794889	0.199288	0.12478	0.0001	0.008147	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.12181	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.155819	0.0001	0.0001	0.350159		

觀測值與預測值的殘差平方和: 6787.036

RFE 值: 0.0963955

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=15

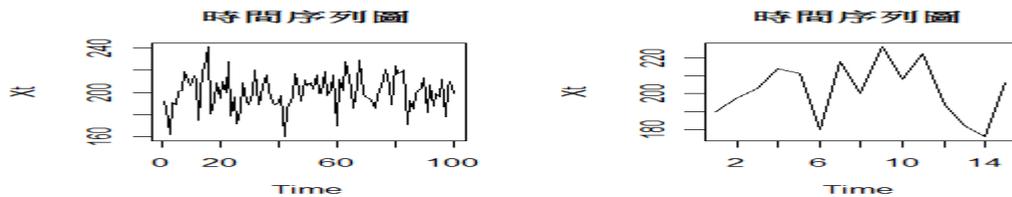
情形6:考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1及P=15) 且 α 係數加總明顯小於1。

$\alpha_1=0.1$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

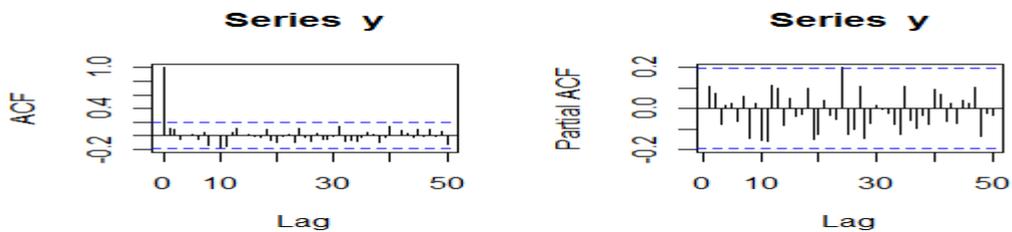
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.1$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 159.74$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=23

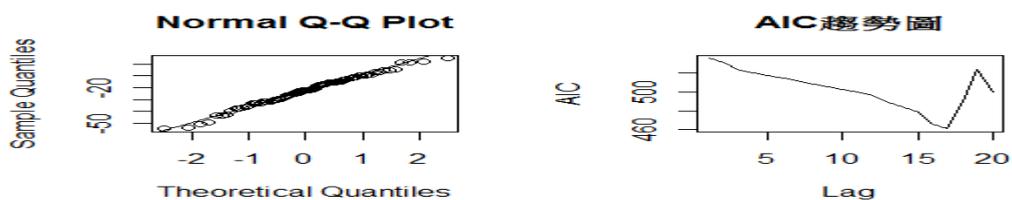
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.02001	0.098743	0.186833	0.0001	0.0001	0.123094
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.009007	0.0001	0.069355	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$
0.13719	0.246698	0.0001	0.02166	0.018573	0.0001
$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$	$\hat{\alpha}_{21}$	$\hat{\alpha}_{22}$	$\hat{\alpha}_{23}$
0.098398	0.0001	0.0001	0.07794	0.019583	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 23055.25

RFE 值: 0.1722321

模型取 Order=23 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=17

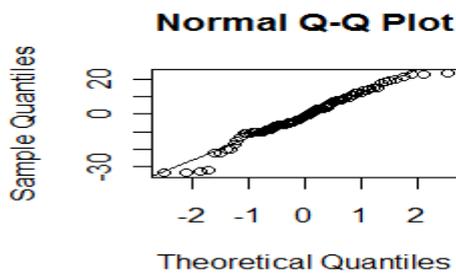
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
12.67351	0.101889	0.107994	0.006573	0.0001	0.0882
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.060352	0.0001	0.130408	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$
0.137908	0.247835	0.0001	0.054836	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 3784.984

RFE 值: 0.03108646

模型取 Order=17 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



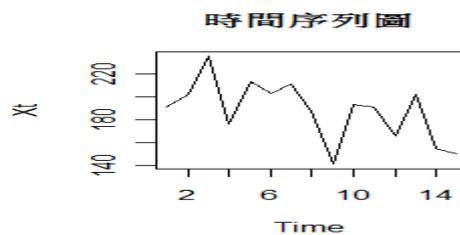
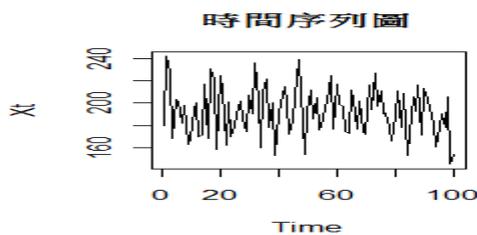
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數明顯較大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

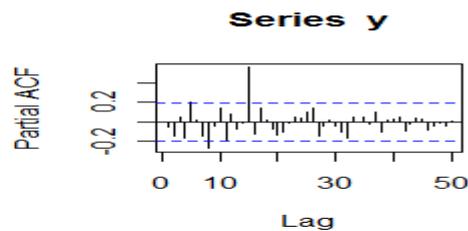
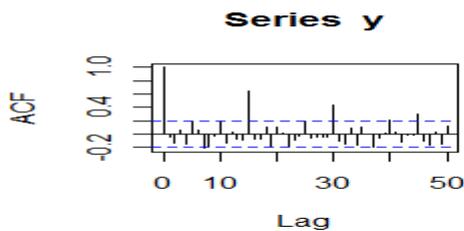
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.8 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 39.54$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

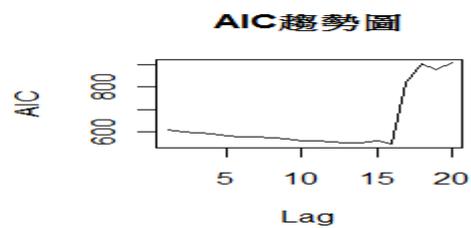
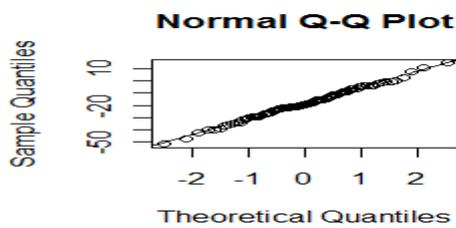
參數估計值

$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.019218	0.0001	0.0001	0.0001	0.064106
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$
0.084183	0.0001	0.0001	0.0001	0.083972
$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$
0.027315	0.01997	0.037114	0.033119	0.739187

觀測值與預測值的殘差平方和: 21074.06

RFE 值: 0.09602288

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=16

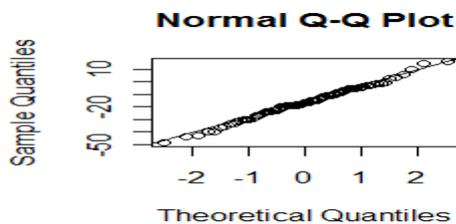
參數估計值

$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.019246	0.075689	0.0001	0.0001	0.047217
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$
0.065573	0.0001	0.0001	0.0001	0.080389
$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$
0.012552	0.0001	0.047235	0.03386	0.717421
				$\hat{\alpha}_{16}$
				0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 22171.66

RFE 值: 0.09597587

模型取 Order=16 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



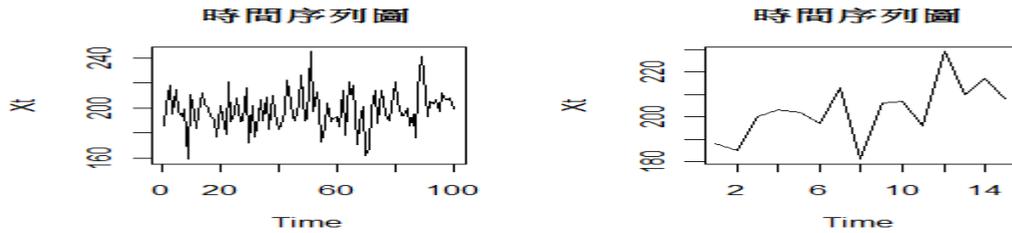
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

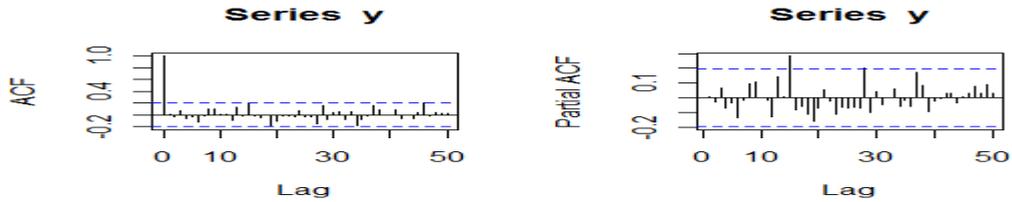
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 179.54$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=14

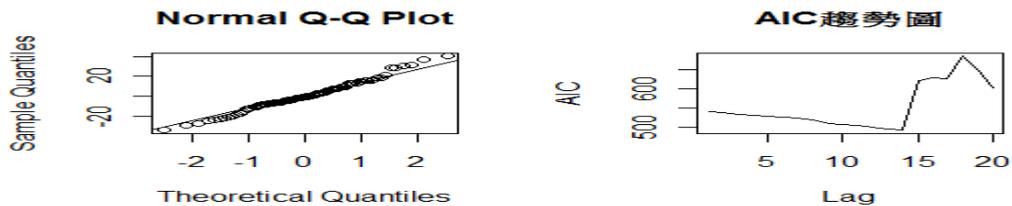
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
84.5805	0.043873	0.0001	0.093381	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.013559	0.090821	0.1415	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.0001	0.174859	0.015733			

觀測值與預測值的殘差平方和: 2528.735

RFE 值: 0.0003039738

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則也是選取 Order=14

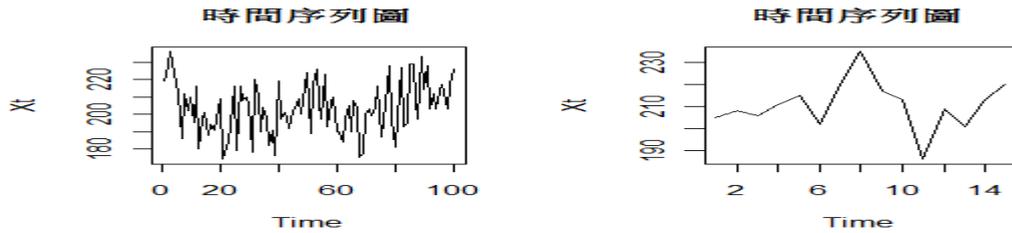
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.2 \quad \alpha_2=0.15 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.08 \quad \alpha_5=0.06 \quad \alpha_6=0.05 \quad \alpha_7=0.04 \quad \alpha_8=0.03$$

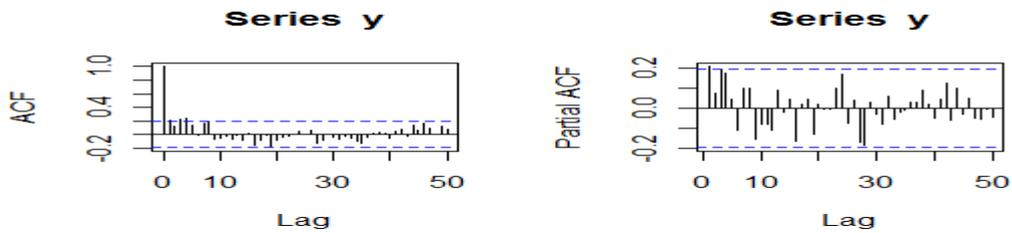
$$\alpha_9=0.02 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.008 \quad \alpha_{12}=0.006 \quad \alpha_{13}=0.004 \quad \alpha_{14}=0.002 \quad \alpha_{15}=0.001$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 47.8$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=1

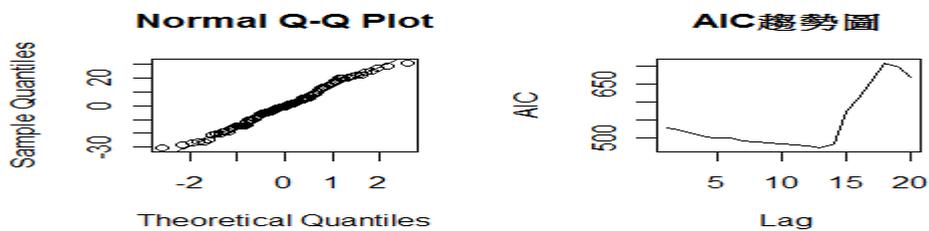
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$
160.1828	0.212333

觀測值與預測值的殘差平方和: 2488.531

RFE 值: 0.03304123

模型取 Order=1 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=12

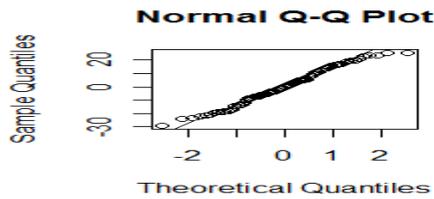
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
24.68685	0.029556	0.0001	0.179279	0.222686	0.171164	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	
0.12649	0.148136	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 1745.99

RFE 值: 0.01543802

模型取 Order=12 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



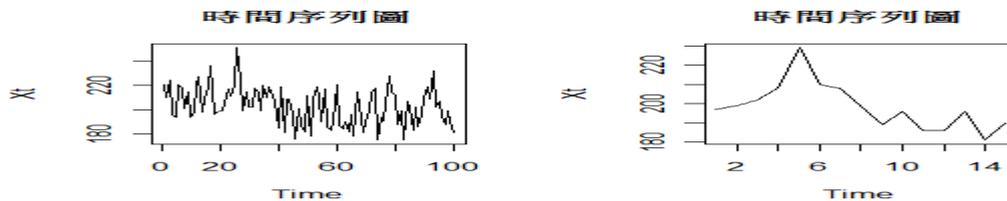
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.002 \quad \alpha_3=0.004 \quad \alpha_4=0.006 \quad \alpha_5=0.008 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.02$$

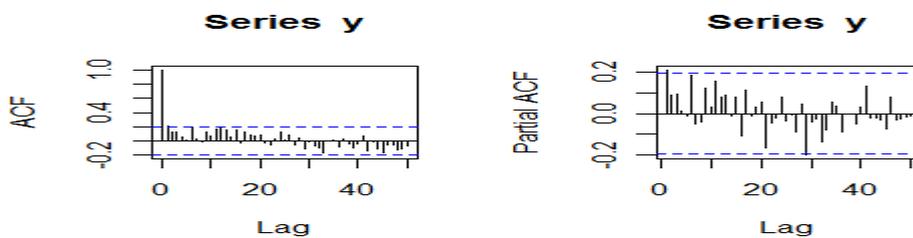
$$\alpha_8=0.03 \quad \alpha_9=0.04 \quad \alpha_{10}=0.05 \quad \alpha_{11}=0.06 \quad \alpha_{12}=0.08 \quad \alpha_{13}=0.1 \quad \alpha_{14}=0.15 \quad \alpha_{15}=0.2$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 47.8$$

建構模型使用 100 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 100 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=1

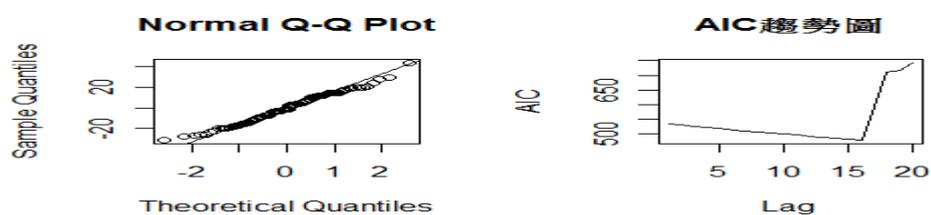
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$
159.1687	0.21662

觀測值與預測值的殘差平方和: 2351.217

RFE 值: 0.02204085

模型取 Order=1 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=16

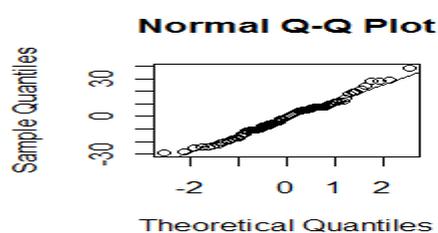
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
7.513212	0.196616	0.068521	0.034601	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.133565	0.0001	0.0001	0.08291	0.0001	0.154967
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	
0.077778	0.104964	0.0001	0.108189	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 1636.377

RFE 值: 0.02019009

模型取 Order=16 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



五、建構模型使用模擬資料筆數為 450 筆，Order=15。

5-1 模擬資料參數 $\lambda=2$ ，並預測未來 15 筆

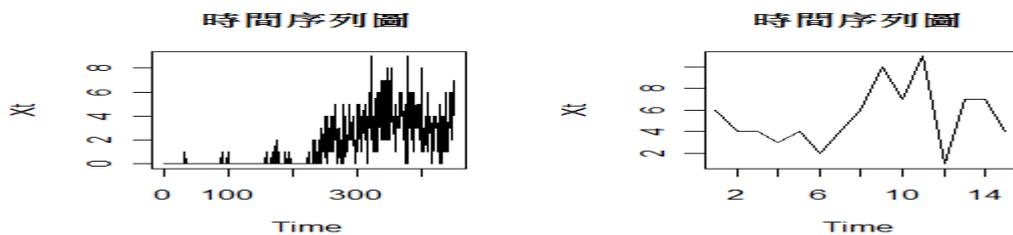
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.065 \quad \alpha_2=0.065 \quad \alpha_3=0.065 \quad \alpha_4=0.065 \quad \alpha_5=0.065 \quad \alpha_6=0.065 \quad \alpha_7=0.065$$

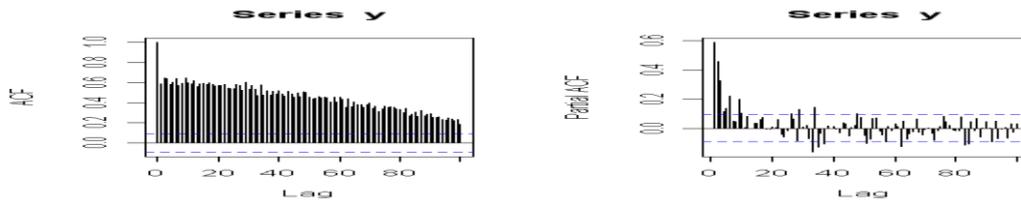
$$\alpha_8=0.065 \quad \alpha_9=0.065 \quad \alpha_{10}=0.065 \quad \alpha_{11}=0.065 \quad \alpha_{12}=0.065 \quad \alpha_{13}=0.065 \quad \alpha_{14}=0.065$$

$$\alpha_{15}=0.065 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)=0.05 \quad \text{Order}=15$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=10

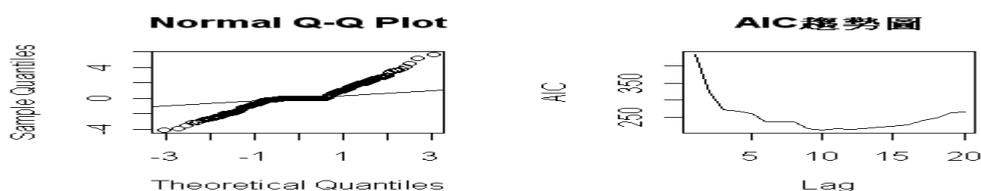
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k\hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.000152	0.0001	0.202838	0.147186	0.0001	0.083819
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	
0.190789	0.0001	0.024838	0.231975	0.1282	

觀測值與預測值的殘差平方和: 149.7755

RFE 值: 0.268415

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則也是取 Order=10

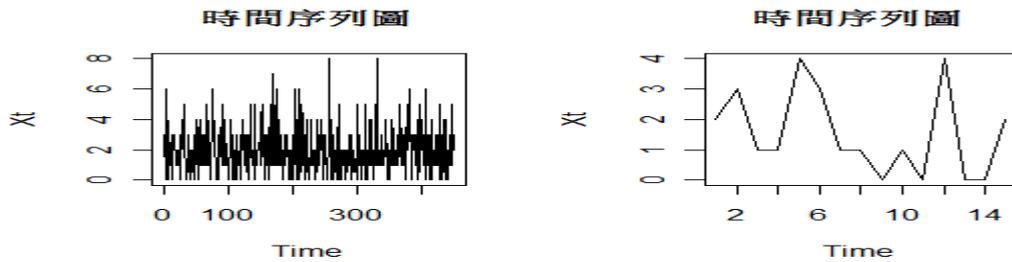
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.01 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.01 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.01 \quad \alpha_8=0.01$$

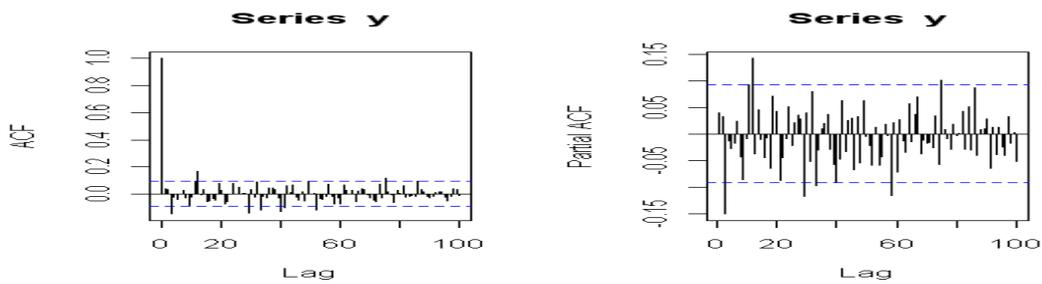
$$\alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.01 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.01 \quad \alpha_{15}=0.01$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 1.7$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=12

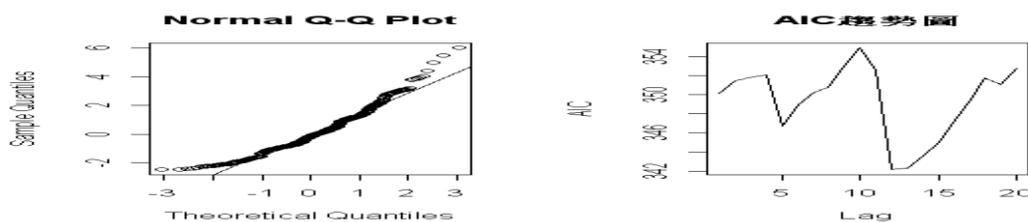
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \alpha_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
1.286247	0.022019	0.05747	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	
0.029095	0.0001	0.0001	0.0001	0.089307	0.145558	

觀測值與預測值的殘差平方和: 27.50735

RFE 值: 0.2986047

模型取 Order=12 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=12

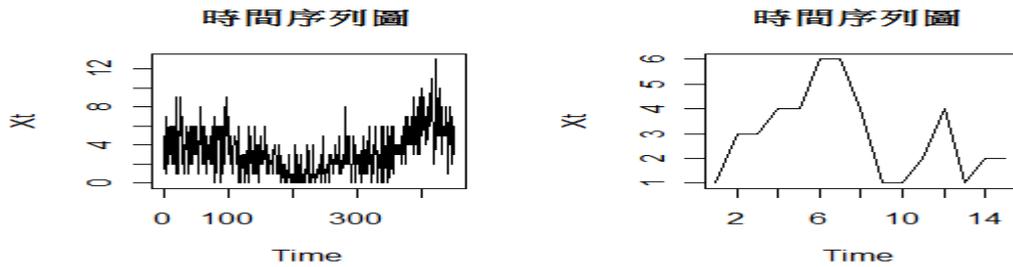
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.12 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.12 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.12 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.12$$

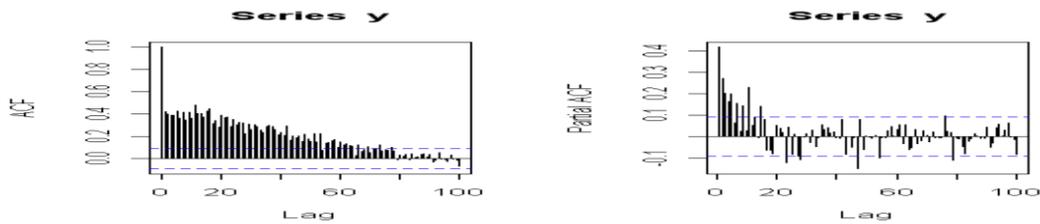
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.12 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.12 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.12 \quad \alpha_{14}=0.0001$$

$$\alpha_{15}=0.12 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.0786$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=15

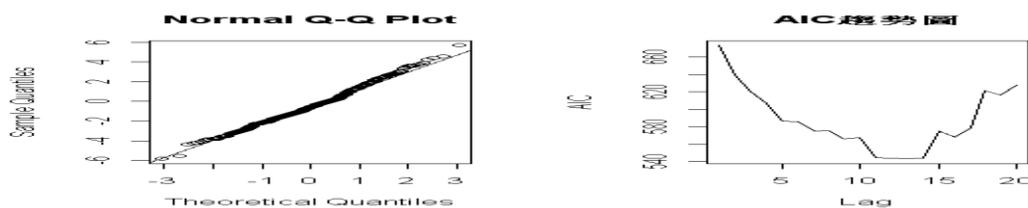
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.000329	0.122273	0.022875	0.073535	0.0001	0.151905
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.121129	0.0001	0.138702	0.0001	0.220839
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.022617	0.104985	0.0001	0.163627		

觀測值與預測值的殘差平方和: 200.7307

RFE 值: 1.078383

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=13

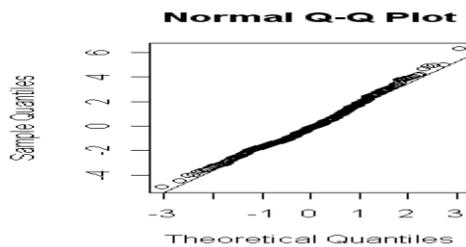
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.009423	0.117801	0.037958	0.079711	0.004098	0.142797	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.1156	0.0001	0.128482	0.0001	0.2261	0.040281	0.104006

觀測值與預測值的殘差平方和: 94.54427

RFE 值: 0.634281

模型取 Order=13 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



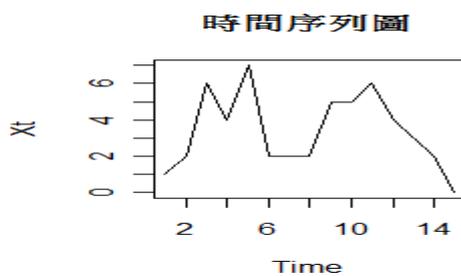
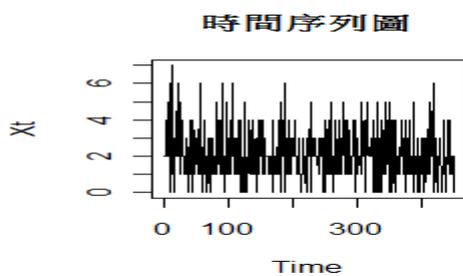
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.01$$

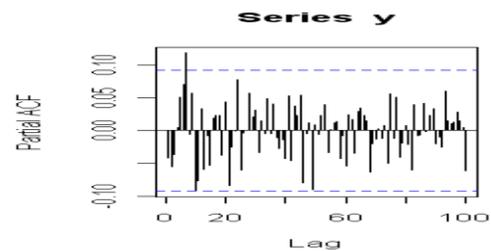
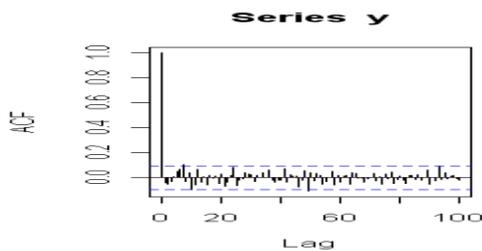
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.0001$$

$$\alpha_{15}=0.01 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 1.8386$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=10

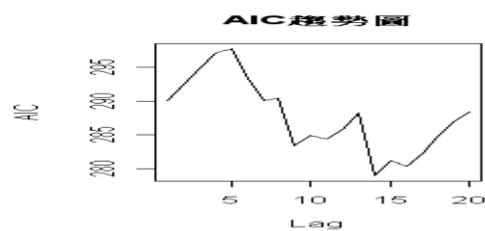
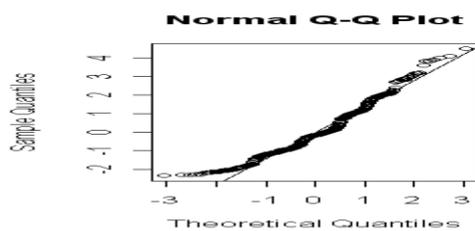
參數估計值

$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
1.354588	0.0001	0.0001	0.0001	0.015563	0.065899
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	
0.080189	0.121781	0.0001	0.055294	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 81.3375

RFE 值: 0.3626403

模型取 Order=10 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

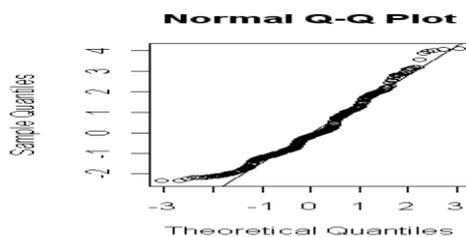
參數估計值

$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
1.257938	0.0001	0.0001	0.0001	0.040649	0.057935
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.082911	0.1283	0.0001	0.043457	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.030393	0.0001	0.0001			

觀測值與預測值的殘差平方和: 91.41936

RFE 值: 0.405379

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



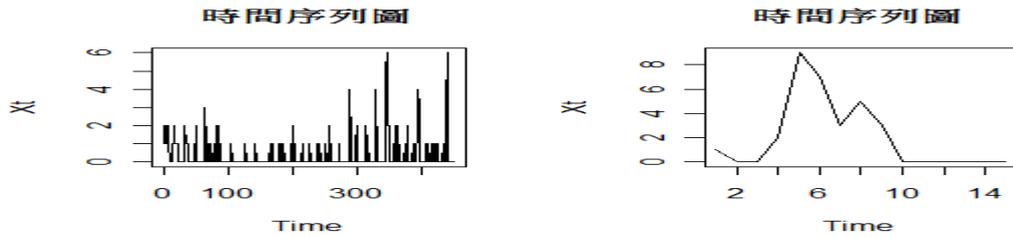
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=15) 且 α 係數加總趨近於 1。

$\alpha_1=0.48$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

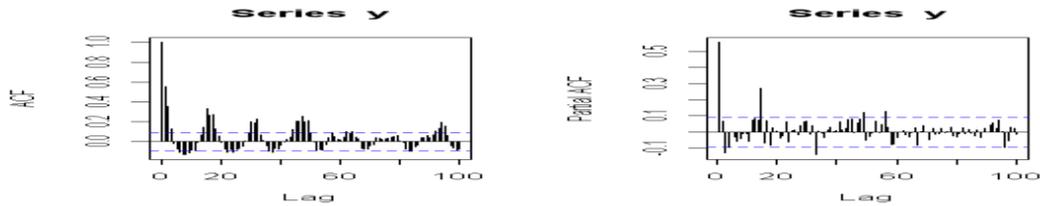
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.48$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.0774$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

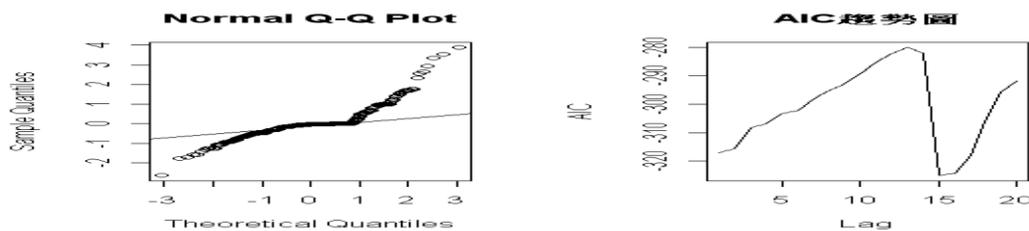
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.00004	0.47097	0.135985	0.0001	0.0001	0.009739
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.011792	0.019604	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.035437	0.007533	0.0001	0.31791		

觀測值與預測值的殘差平方和: 181.4278

RFE 值: 0.5135122

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則也是選取 Order=15

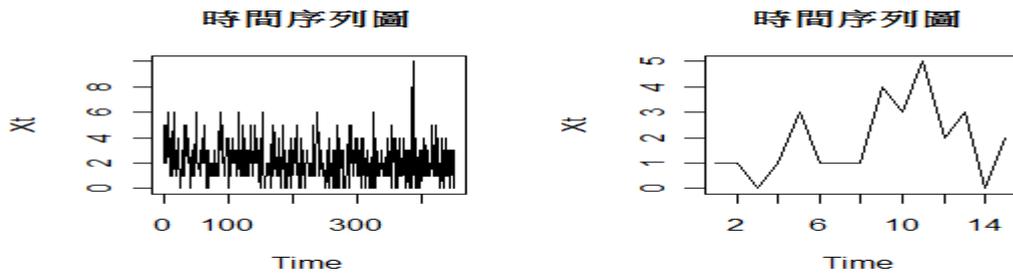
情形6:考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1及P=15) 且 α 係數加總明顯小於1。

$\alpha_1=0.1$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

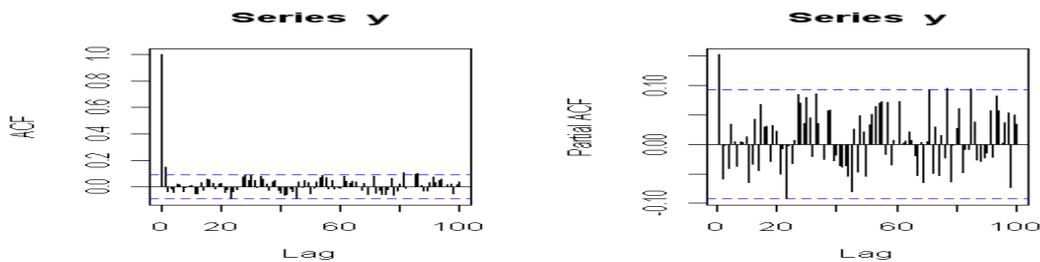
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.1$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 1.5974$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=1

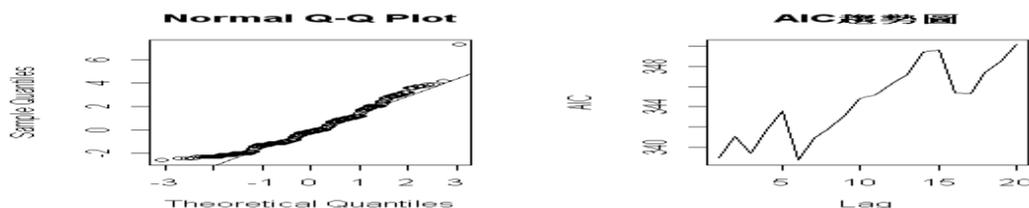
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$
1.81835	0.152192

觀測值與預測值的殘差平方和: 31.26802

RFE 值: 0.1544649

模型取 Order=1 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=6

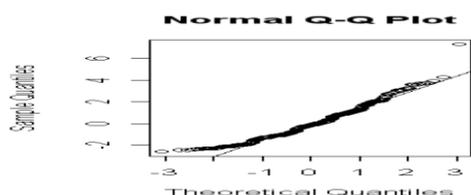
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
1.719349	0.164967	0.0001	0.0001	0.0001	0.02122	0.005692

觀測值與預測值的殘差平方和: 29.97558

RFE 值: 0.1217400

模型取 Order=6 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



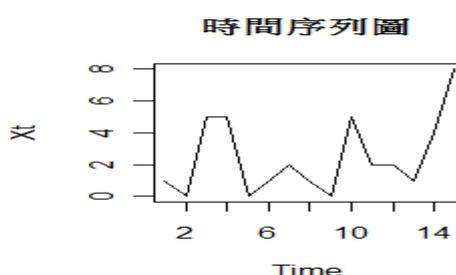
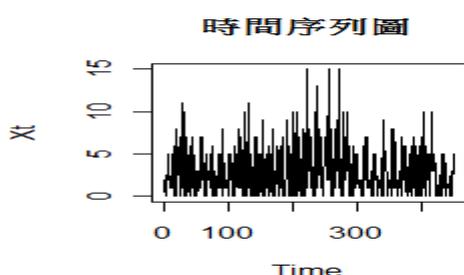
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數明顯較大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

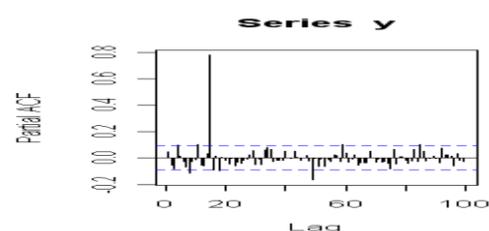
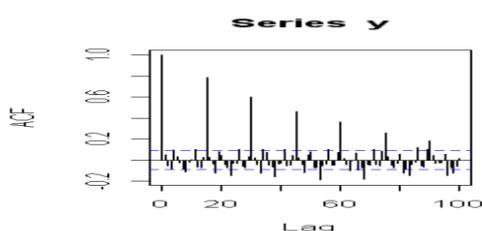
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.8 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.3954$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

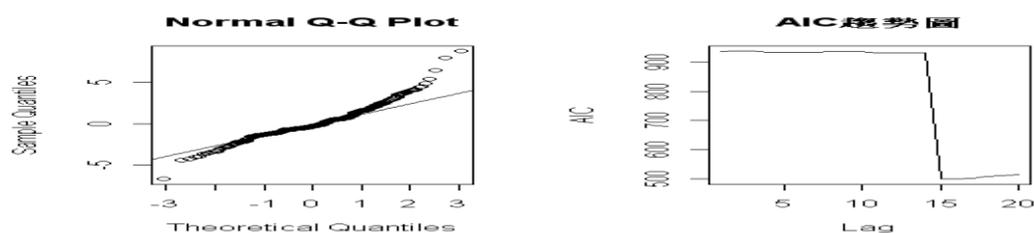
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.338894	0.014359	0.00392	0.0001	0.020422	0.01846
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.002589	0.0001	0.026975
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.006981	0.0001	0.000945	0.788121		

觀測值與預測值的殘差平方和: 146.0111

RFE 值: 0.1449579

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則也是選取 Order=15

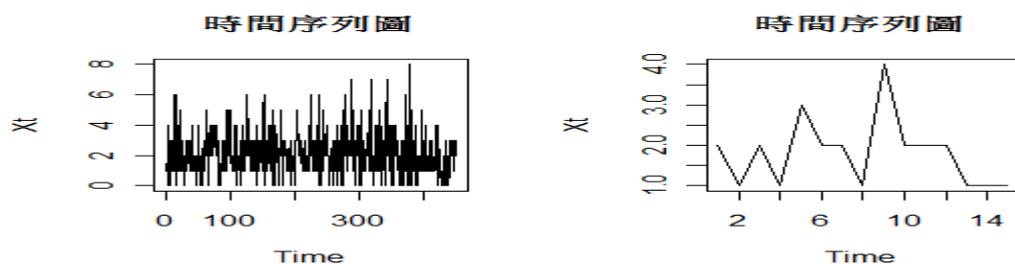
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

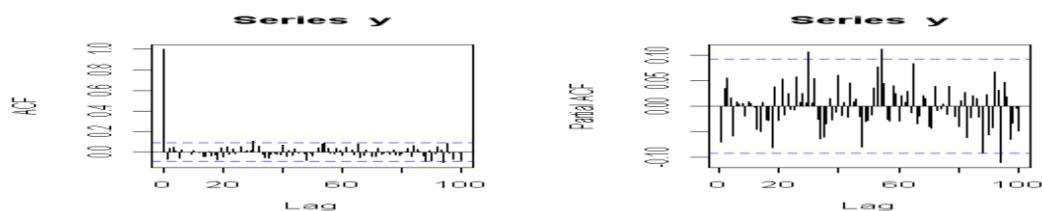
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 1.7954$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

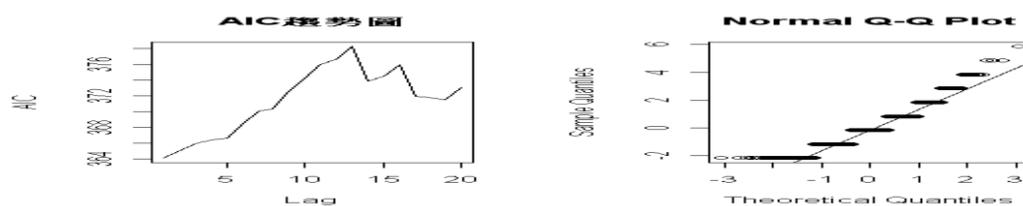


建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=1 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=1

參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$
2.157913	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 47.02794

RFE 值: 0.09141228

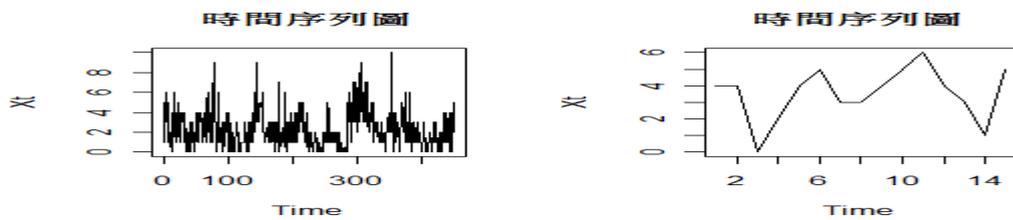
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$\alpha_1=0.2$ $\alpha_2=0.15$ $\alpha_3=0.1$ $\alpha_4=0.08$ $\alpha_5=0.06$ $\alpha_6=0.05$ $\alpha_7=0.04$ $\alpha_8=0.03$

$\alpha_9=0.02$ $\alpha_{10}=0.01$ $\alpha_{11}=0.008$ $\alpha_{12}=0.006$ $\alpha_{13}=0.004$ $\alpha_{14}=0.002$ $\alpha_{15}=0.001$

$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.478$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

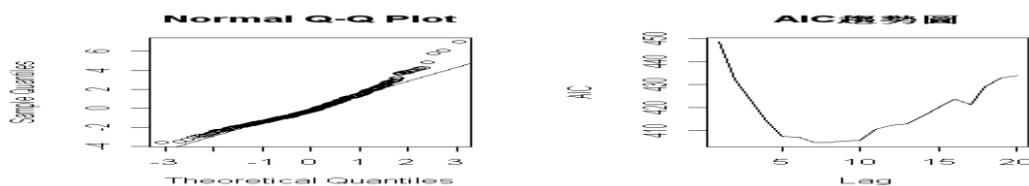
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^k \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.717277	0.255008	0.11982	0.052563	0.121019	0.134935

觀測值與預測值的殘差平方和: 55.59837

RFE 值: 0.3364122

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=7

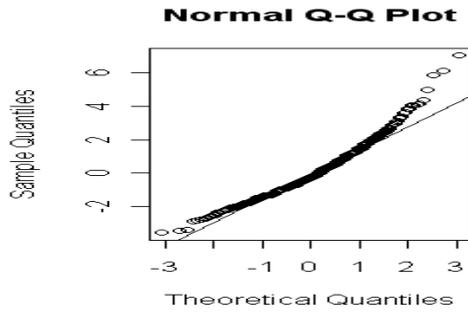
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$
0.621835	0.24409	0.099602	0.044397	0.104032	0.10499	0.050764	0.076928

觀測值與預測值的殘差平方和: 57.61763

RFE 值: 0.3501251

模型取 Order=7 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



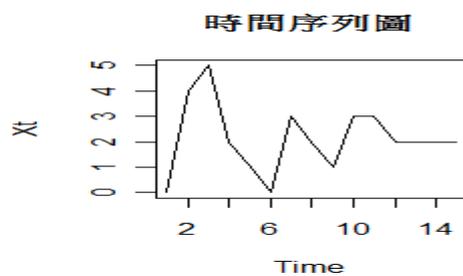
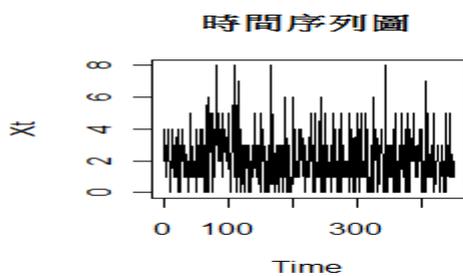
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.002 \quad \alpha_3=0.004 \quad \alpha_4=0.006 \quad \alpha_5=0.008 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.02$$

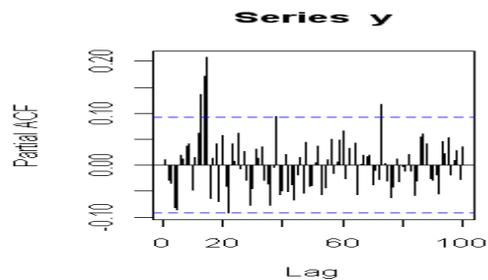
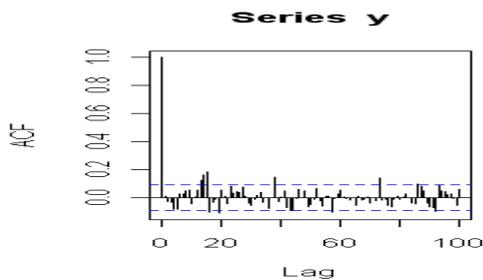
$$\alpha_8=0.03 \quad \alpha_9=0.04 \quad \alpha_{10}=0.05 \quad \alpha_{11}=0.06 \quad \alpha_{12}=0.08 \quad \alpha_{13}=0.1 \quad \alpha_{14}=0.15 \quad \alpha_{15}=0.2$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.478$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

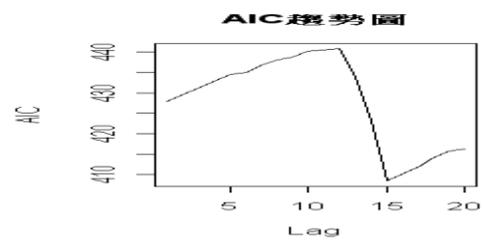
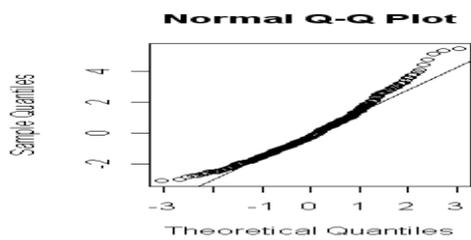
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.487933	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.001663	0.046845	0.071894	0.0001	0.038205
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.070771	0.148896	0.181349	0.211449		

觀測值與預測值的殘差平方和: 30.09395

RFE 值: 0.04449871

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則也是選取 Order=15

5-2 模擬資料參數 $\lambda=20$ ，並預測未來 15 筆

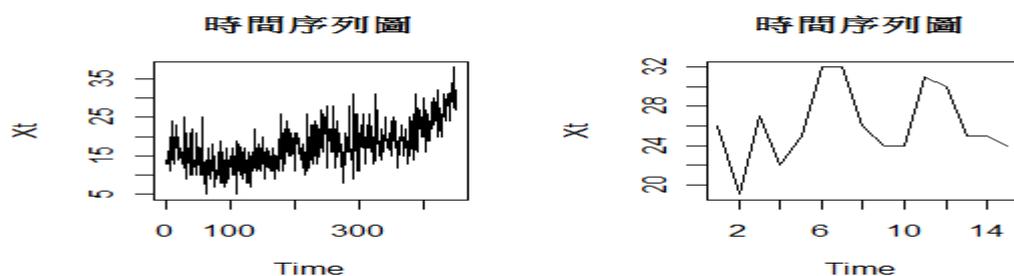
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.065 \quad \alpha_2=0.065 \quad \alpha_3=0.065 \quad \alpha_4=0.065 \quad \alpha_5=0.065 \quad \alpha_6=0.065 \quad \alpha_7=0.065$$

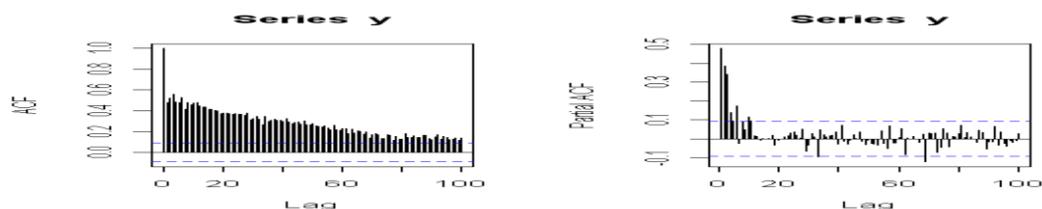
$$\alpha_8=0.065 \quad \alpha_9=0.065 \quad \alpha_{10}=0.065 \quad \alpha_{11}=0.065 \quad \alpha_{12}=0.065 \quad \alpha_{13}=0.065 \quad \alpha_{14}=0.065$$

$$\alpha_{15}=0.065 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)=0.5 \quad \text{Order}=15$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=11

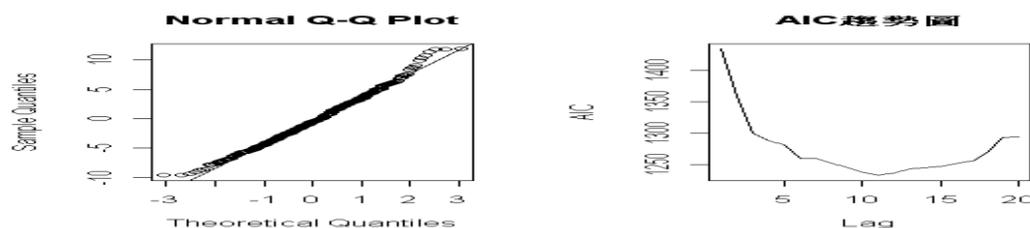
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^{11}\hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.001778	0.024758	0.123823	0.196544	0.068289	0.047161
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.158936	0.0001	0.07898	0.0616	0.143098	0.126565

觀測值與預測值的殘差平方和: 551.7161

RFE 值: 0.1909144

模型取 Order=11 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則也是選取 Order=11

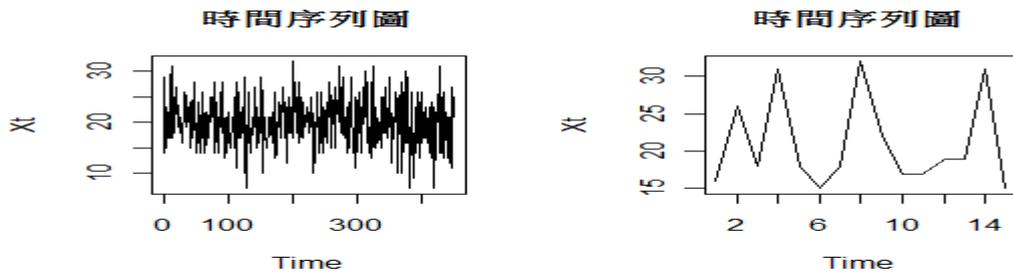
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.01 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.01 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.01 \quad \alpha_8=0.01$$

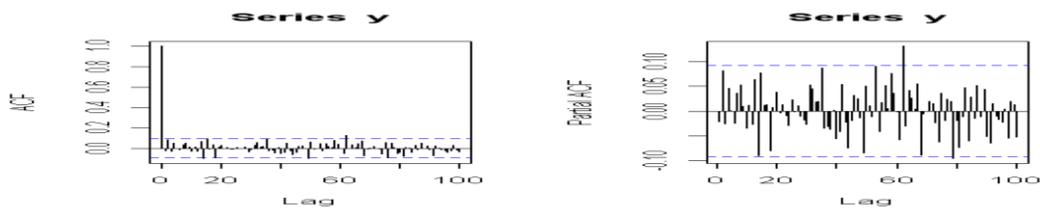
$$\alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.01 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.01 \quad \alpha_{15}=0.01$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 17$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:

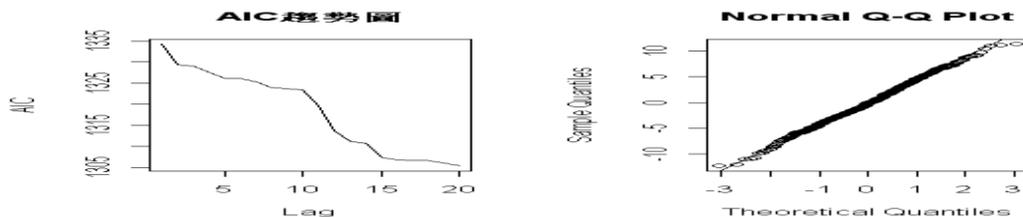


建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



PACF 圖皆不顯著，Order 無法選取。

AIC 趨勢圖及模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



依據 AIC 取小法則選取 Order=15(遞減到 15 有逐漸平滑趨勢)

參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
12.60858	0.001386	0.071457	0.0001	0.045517	0.00466
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.038821	0.051306	0.013381	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.0001	0.056372	0.0001	0.083598		

觀測值與預測值的殘差平方和: 551.6415

RFE 值: 0.05478046

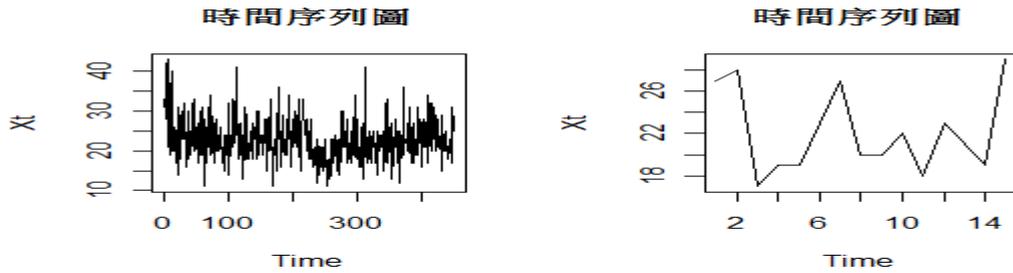
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.12 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.12 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.12 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.12$$

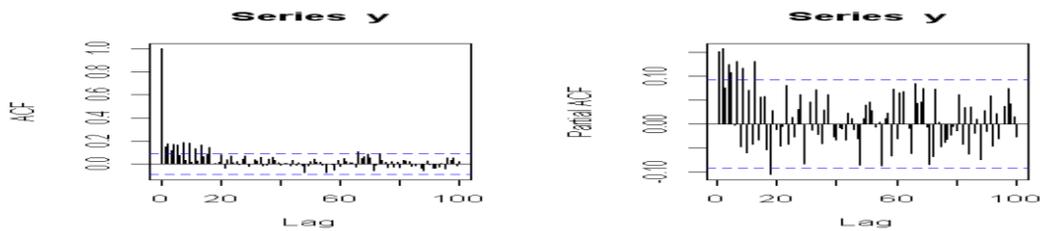
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.12 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.12 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.12 \quad \alpha_{14}=0.0001$$

$$\alpha_{15}=0.12 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.786$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=13

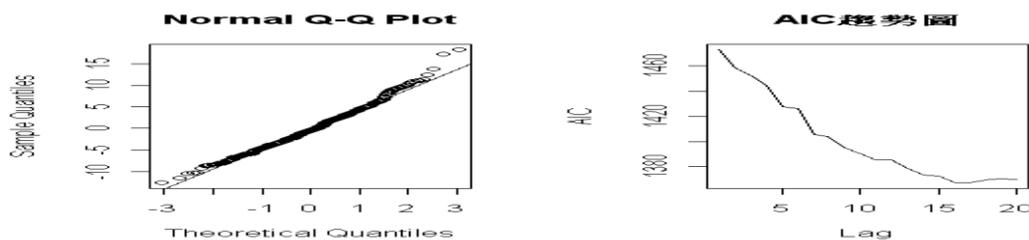
參數估計值

$i(1 - \sum \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
5.324742	0.133312	0.008883	0.034203	0.077153	0.06778	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.122171	0.0001	0.116312	0.0001	0.072143	0.0001	0.132244

觀測值與預測值的殘差平方和: 207.6288

RFE 值: 0.005535005

模型取 Order=13 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=16

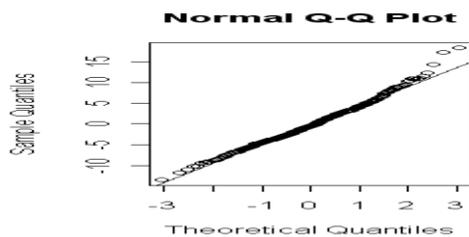
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
3.678997	0.140626	0.002924	0.03755	0.058934	0.075519
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.099453	0.0001	0.102723	0.0001	0.06853
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	
0.0001	0.129394	0.0001	0.054395	0.066575	

觀測值與預測值的殘差平方和: 214.0958

RFE 值: 0.003817379

模型取 Order=16 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



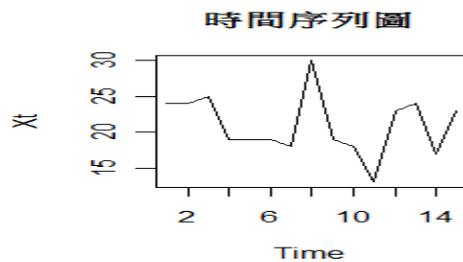
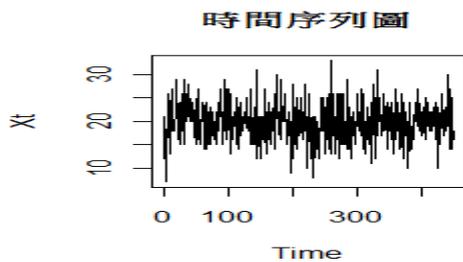
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.01$$

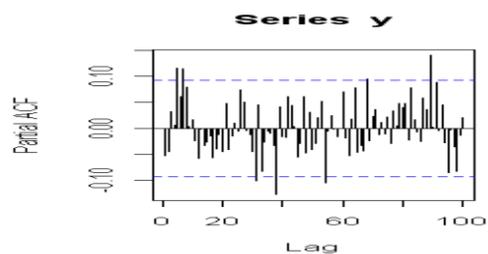
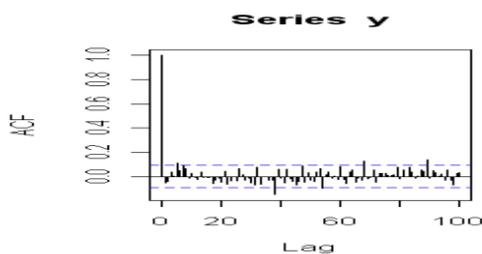
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.0001$$

$$\alpha_{15}=0.01 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 18.386$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=8

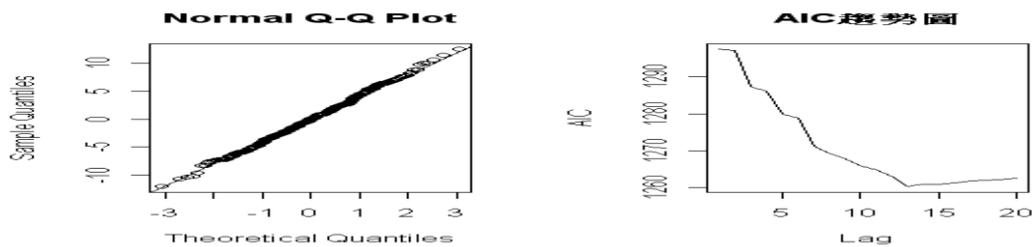
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
10.7065	0.0001	0.0001	0.02539	0.023977
$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	
0.130789	0.076723	0.121899	0.082469	

觀測值與預測值的殘差平方和: 277.1696

RFE 值: 0.06456088

模型取 Order=8 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=13

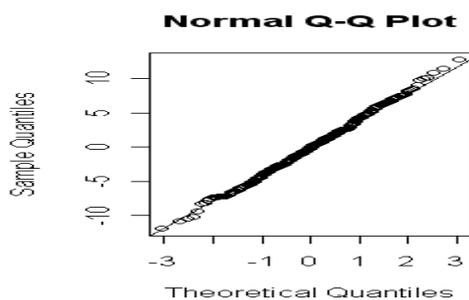
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
8.533933	0.0001	0.0001	0.014715	0.027932	0.13062	0.080151
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.146837	0.109698	0.030379	0.029225	0.0001	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 247.1002

RFE 值: 0.0223467

模型取 Order=13 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



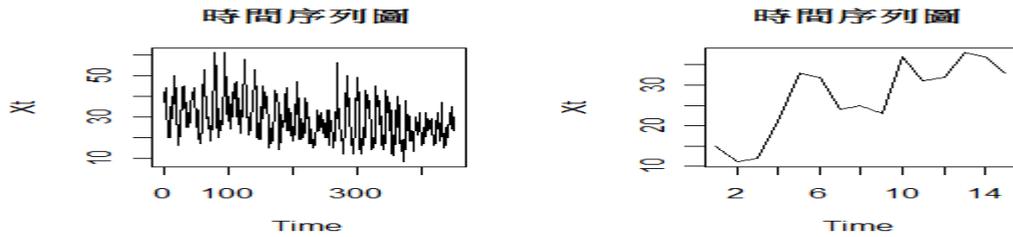
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=15) 且 α 係數加總趨近於 1。

$\alpha_1=0.48$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

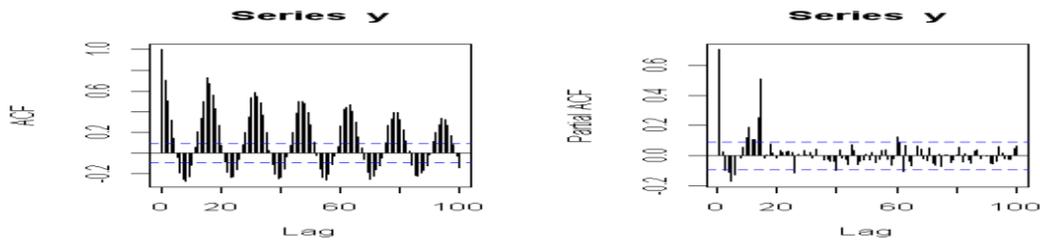
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.48$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 0.774$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

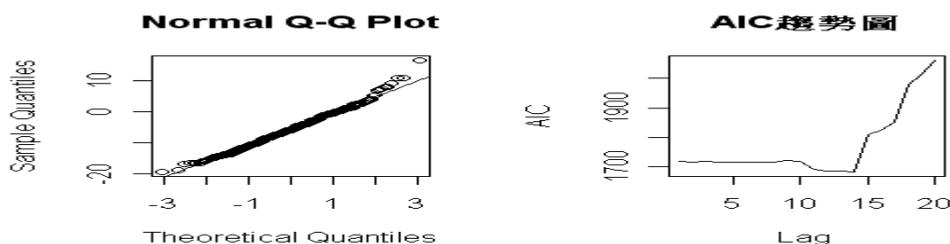
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.00286	0.409854	0.09886	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.03836	0.0001	0.010925	0.0001	0.085885
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.021435	0.0001	0.0001	0.525131		

觀測值與預測值的殘差平方和: 2113.201

RFE 值: 0.2928744

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

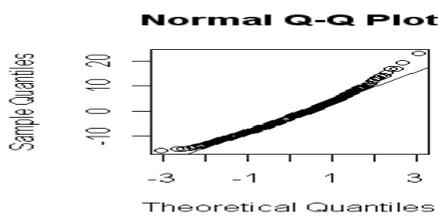
參數估計值

$\lambda(1 - \sum \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.002861	0.545179	0.079407	0.0001	0.047848	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.015084	0.0001	0.0001	0.0001	0.107259
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.02257	0.0001	0.260573			

觀測值與預測值的殘差平方和: 1065.411

RFE 值: 0.1105644

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



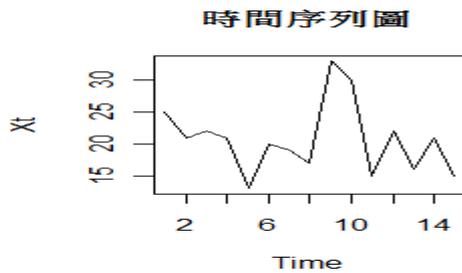
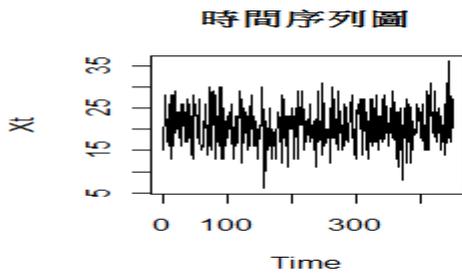
情形 6: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=15) 且 α 係數加總明顯小於

$1 \cdot \alpha_1=0.1 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$

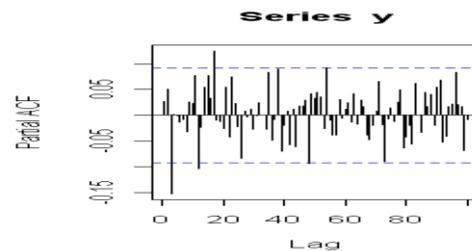
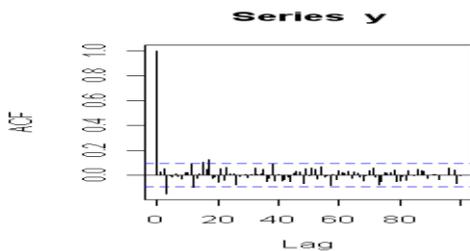
$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 15.974$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=17

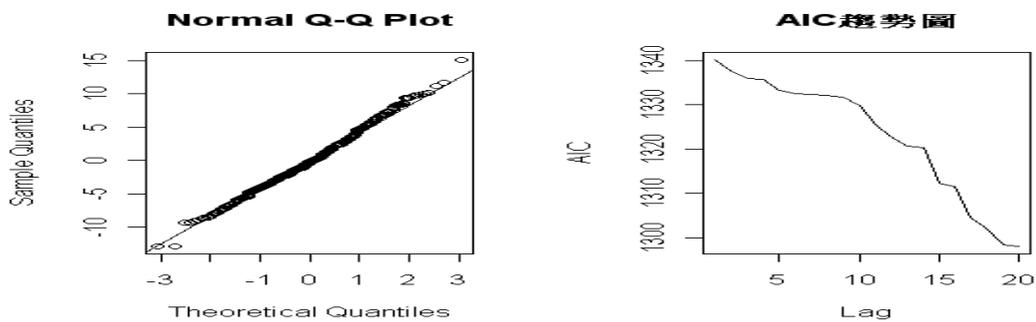
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
9.695465	0.040519	0.041767	0.0001	0.0001	0.001412
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.041506	0.098086
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$
0.0001	0.0001	0.078125	0.068402	0.024237	0.133392

觀測值與預測值的殘差平方和: 402.321

RFE 值: 0.02364076

模型取 Order=17 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

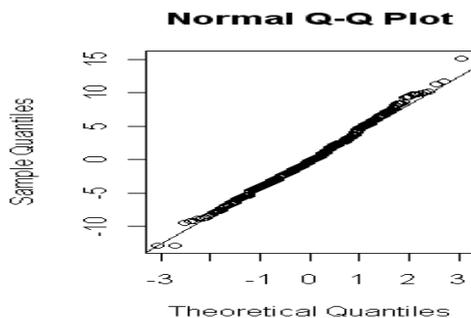
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
9.432247	0.040648	0.049737	0.0001	0.003698	0.00717	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.044202	0.10118	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.06895	0.064903	0.02052	0.138299	0.0001	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 410.4226

RFE 值: 0.004408795

模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



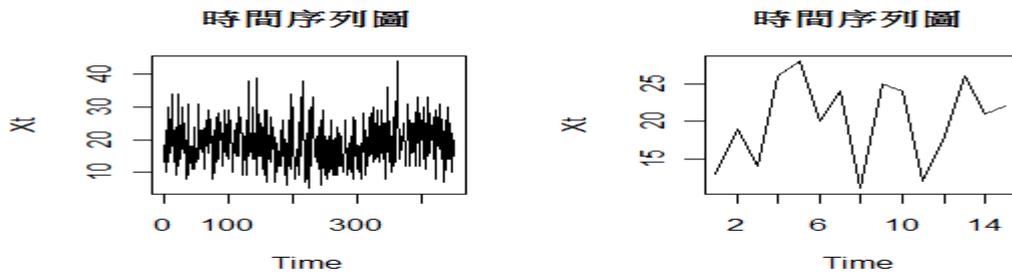
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數明顯較大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

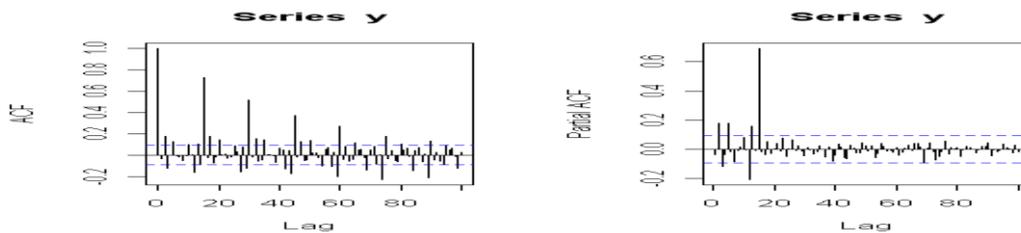
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.8 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 3.954$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

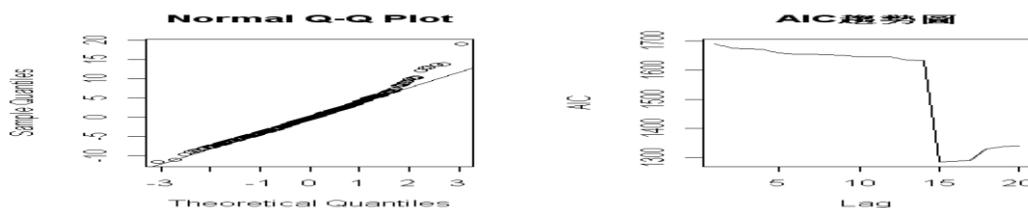
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.830721	0.039182	0.11308	0.0001	0.0001	0.054959
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.001353	0.000283	0.0001	0.0001	0.027878	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.0001	0.0001	0.0001	0.718071		

觀測值與預測值的殘差平方和: 931.5812

RFE 值: 0.1005831

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=15

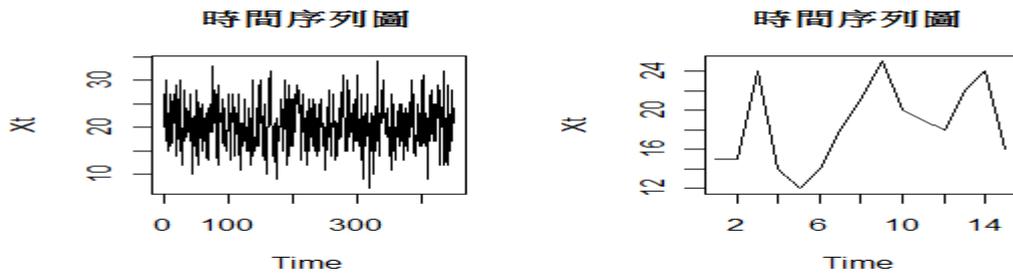
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

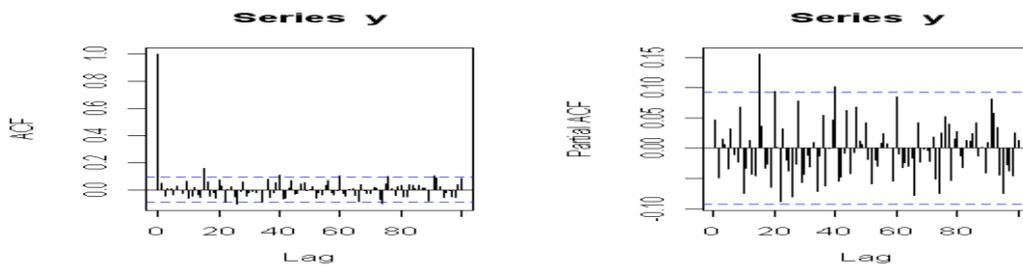
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 17.954$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

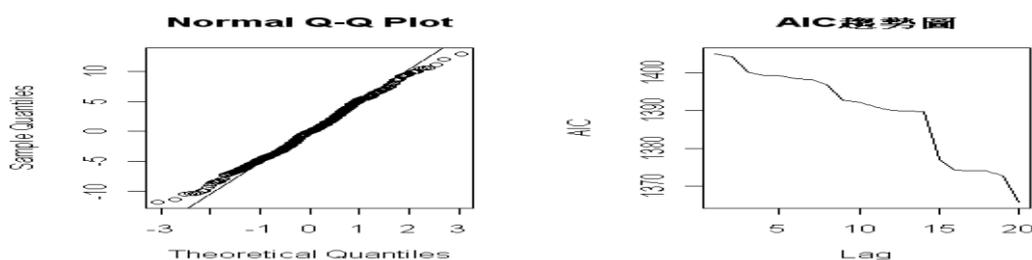
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
13.45315	0.062667	0.0001	0.0001	0.016577	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.012841	0.0001	0.0001	0.070802	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.012334	0.0001	0.0001	0.163816		

觀測值與預測值的殘差平方和: 278.8317

RFE 值: 0.09391987

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

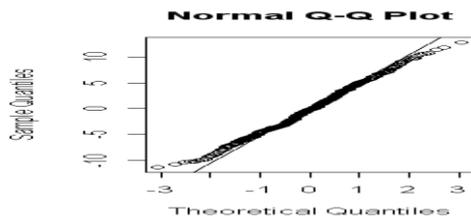
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
0.6809	0.05188	0.0001	0.002274	0.012547	0.0001	0.014016
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.0001	0.072839	0.0001	0.0001	0.021189	0.0001
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.0001	0.164376	0.039316	0.0001	0.0001	0.0001	0.094972

觀測值與預測值的殘差平方和: 336.0328

RFE 值: 0.1001032

模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



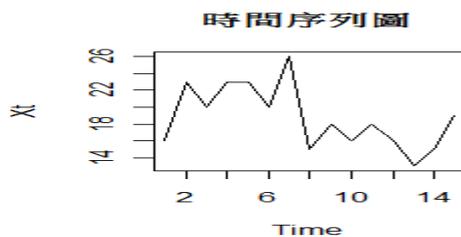
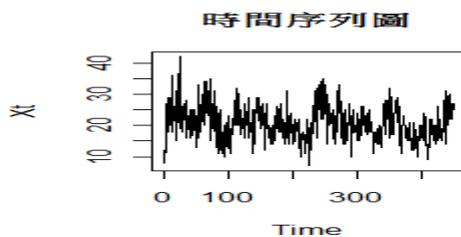
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.2 \quad \alpha_2=0.15 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.08 \quad \alpha_5=0.06 \quad \alpha_6=0.05 \quad \alpha_7=0.04 \quad \alpha_8=0.03$$

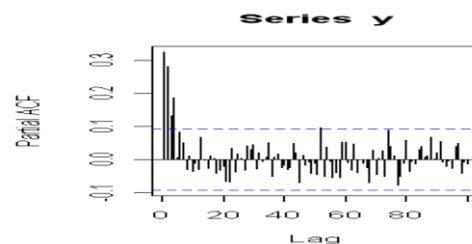
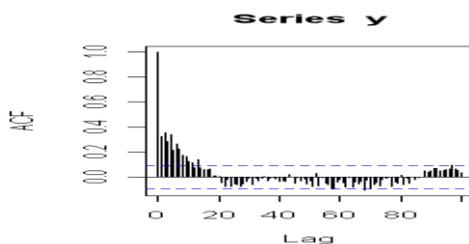
$$\alpha_9=0.02 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.008 \quad \alpha_{12}=0.006 \quad \alpha_{13}=0.004 \quad \alpha_{14}=0.002 \quad \alpha_{15}=0.001$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 4.78$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=4

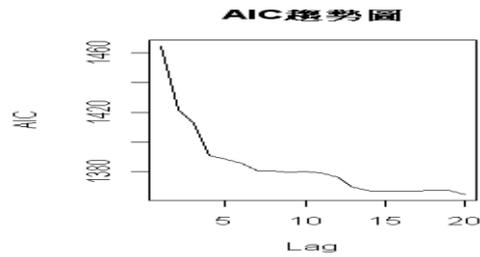
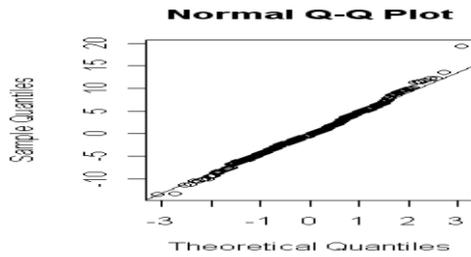
參數估計值

$\hat{\lambda}(1-\sum_{i=1}^4 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$
6.908134	0.160606	0.216452	0.107067	0.184011

觀測值與預測值的殘差平方和: 323.4738

RFE 值: 0.1673997

模型取 Order=4 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

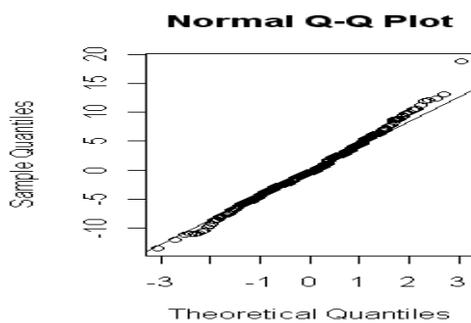
參數估計值

$\hat{\lambda}(1-\sum_{i=1}^{14} \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
3.760593	0.152133	0.198961	0.095328	0.159279	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.087221	0.058987	0.0001	0.007633	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.0001	0.058324	0.0001			

觀測值與預測值的殘差平方和: 307.2496

RFE 值: 0.1512417

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



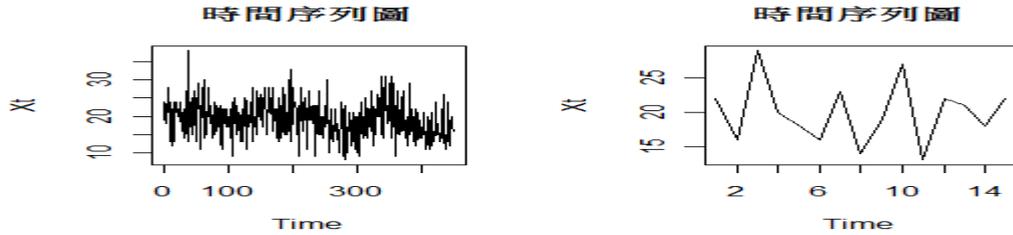
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.002 \quad \alpha_3=0.004 \quad \alpha_4=0.006 \quad \alpha_5=0.008 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.02$$

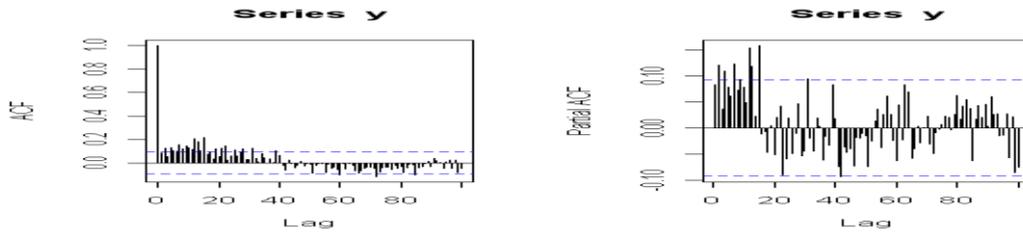
$$\alpha_8=0.03 \quad \alpha_9=0.04 \quad \alpha_{10}=0.05 \quad \alpha_{11}=0.06 \quad \alpha_{12}=0.08 \quad \alpha_{13}=0.1 \quad \alpha_{14}=0.15 \quad \alpha_{15}=0.2$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 4.78$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

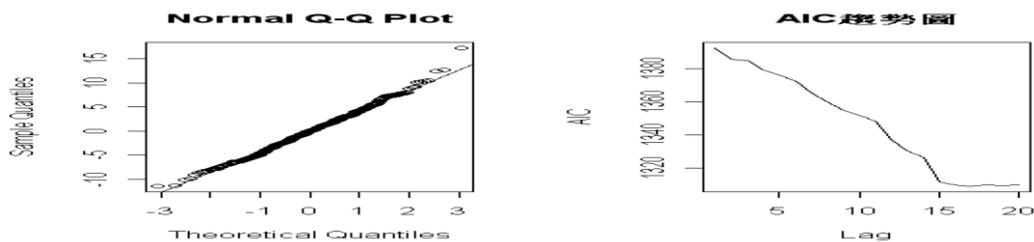
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
2.381332	0.0001	0.013011	0.0001	0.038167	0.00904
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.009188	0.089117	0.043578	0.08645	0.069168	0.032052
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.161046	0.123186	0.035141	0.166017		

觀測值與預測值的殘差平方和: 421.5480

RFE 值: 0.1697024

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=17

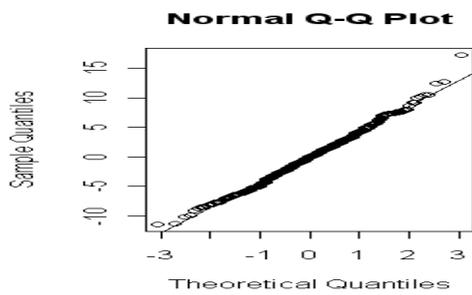
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
2.14619	0.0001	0.010044	0.0001	0.04055	0.004758
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.014899	0.086345	0.051209	0.086652	0.073336	0.031921
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$
0.159799	0.122465	0.036918	0.168374	0.0001	0.0001

觀測值與預測值的殘差平方和: 435.9862

RFE 值: 0.1454714

模型取 Order=17 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



5-3 模擬資料參數 $\lambda=200$ ，並預測未來 15 筆

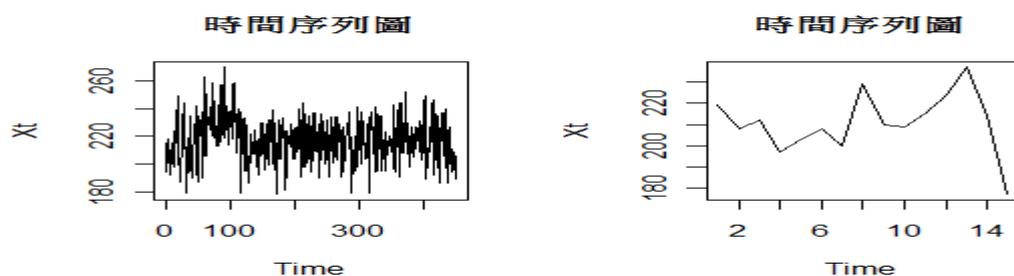
情形 1: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.065 \quad \alpha_2=0.065 \quad \alpha_3=0.065 \quad \alpha_4=0.065 \quad \alpha_5=0.065 \quad \alpha_6=0.065 \quad \alpha_7=0.065$$

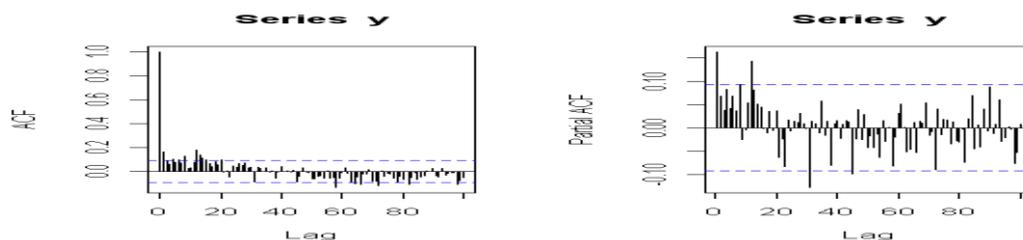
$$\alpha_8=0.065 \quad \alpha_9=0.065 \quad \alpha_{10}=0.065 \quad \alpha_{11}=0.065 \quad \alpha_{12}=0.065 \quad \alpha_{13}=0.065 \quad \alpha_{14}=0.065$$

$$\alpha_{15}=0.065 \quad \lambda(1-\sum_{i=1}^{15}\alpha_i)=5 \quad \text{Order}=15$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=12

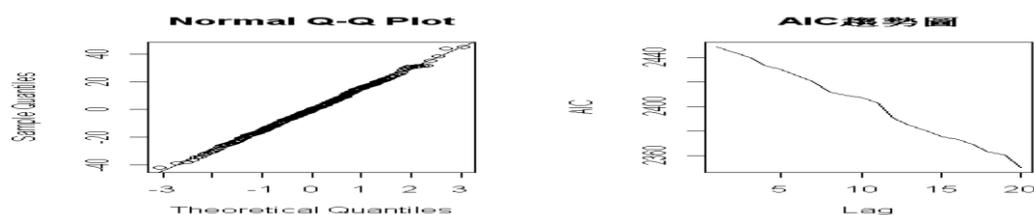
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
89.95804	0.120238	0.044237	0.009193	0.048583	0.020543	0.048153
	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$
	0.017029	0.090119	0.0001	0.0001	0.037778	0.150314

觀測值與預測值的殘差平方和: 3191.858

RFE 值: 0.0079317

模型取 Order=12 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

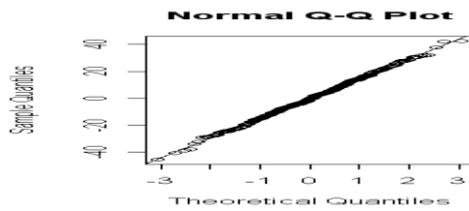
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^6 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
50.09487	0.086942	0.013959	0.0001	0.051735	0.007384	0.041343
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.009918	0.084032	0.0001	0.0001	0.043222	0.141417	0.084008
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.064069	0.052906	0.013842	0.0001	0.039126	0.0001	0.035178

觀測值與預測值的殘差平方和: 2960.879

RFE 值: 0.009871641

模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



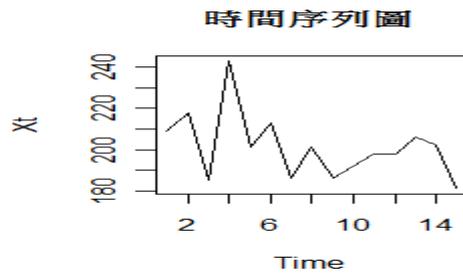
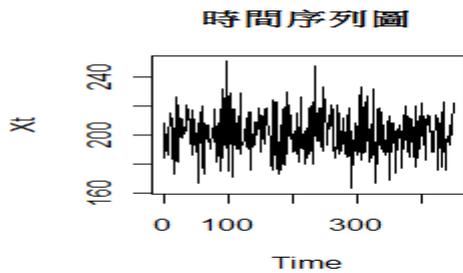
情形 2: 考慮真實 α 係數皆相等且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.01 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.01 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.01 \quad \alpha_8=0.01$$

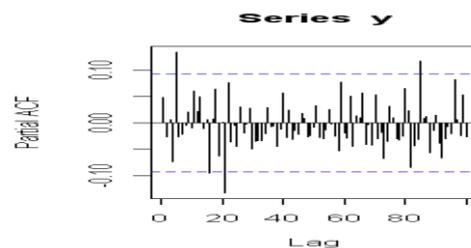
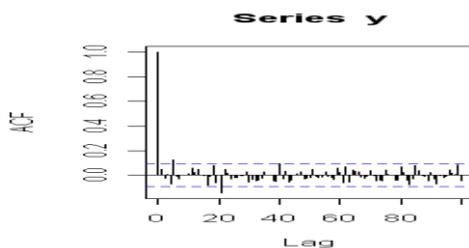
$$\alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.01 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.01 \quad \alpha_{15}=0.01$$

$$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 170$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=21

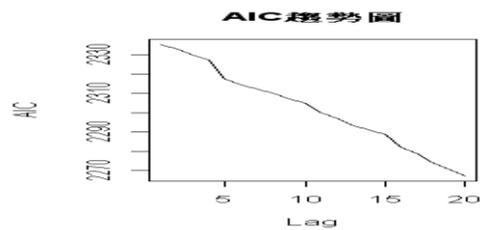
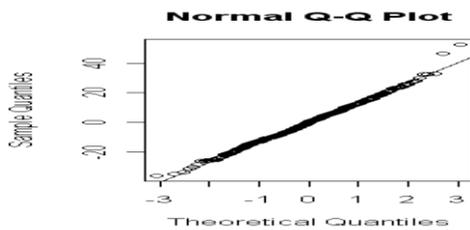
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
109.975	0.060126	0.0001	0.011862	0.0001	0.145848
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.007712	0.02657	0.0001	0.072333
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$
0.010739	0.030433	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$	$\hat{\alpha}_{21}$		
0.071521	0.0001	0.014056	0.0001		

觀測值與預測值的殘差平方和: 3828.066

RFE 值: 0.004818408

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

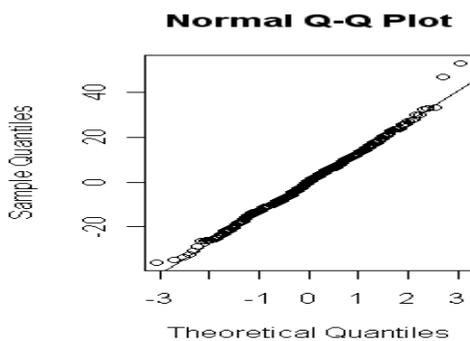
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
116.0771	0.053399	0.0001	0.00324	0.0001	0.148867	0.0001
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.0001	0.005368	0.027305	0.0001	0.07513	0.011123	0.031687
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.064099	0.0001	0.000863

觀測值與預測值的殘差平方和: 3711.399

RFE 值: 0.003750469

模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



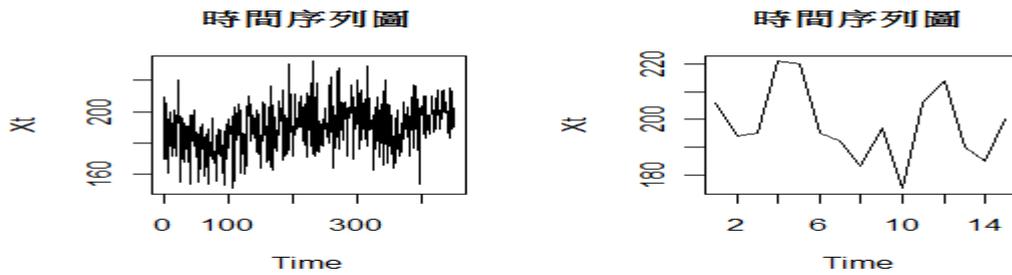
情形 3: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總趨近於 1。

$$\alpha_1=0.12 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.12 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.12 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.12$$

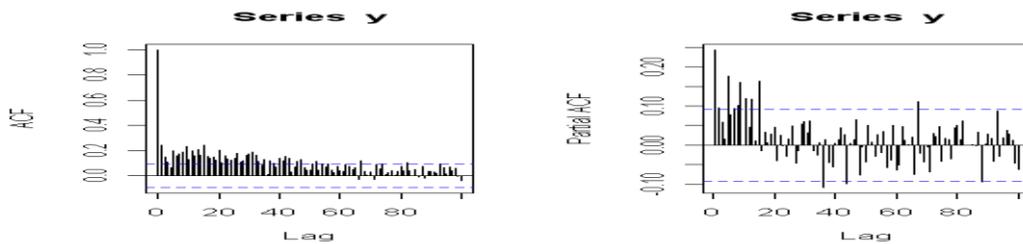
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.12 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.12 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.12 \quad \alpha_{14}=0.0001$$

$$\alpha_{15}=0.12 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 7.86$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖：



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖：



依據 PACF 圖選取 Order=15

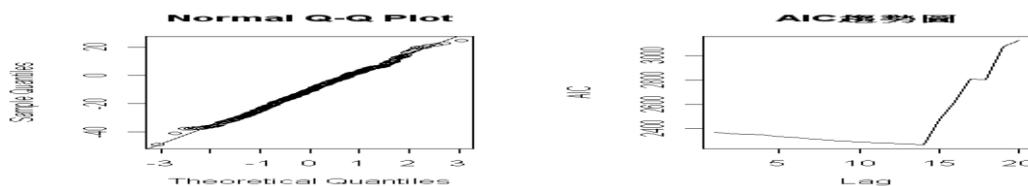
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.01899	0.15732	0.0001	0.0001	0.0001	0.163047
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.052012	0.029183	0.184826	0.0001	0.124367
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.029428	0.136101	0.0001	0.179994		

觀測值與預測值的殘差平方和: 9601.213

RFE 值: 0.1036508

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖：



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

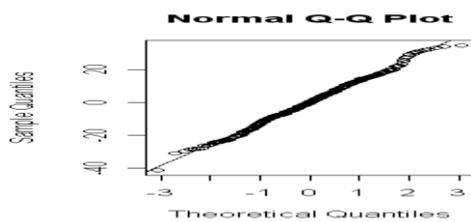
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
18.78013	0.155879	0.010515	0.003817	0.0001	0.152202
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.014	0.062604	0.048235	0.182002	0.0001	0.108807
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.024897	0.128684	0.009245			

觀測值與預測值的殘差平方和: 2320.889

RFE 值: 0.001300995

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



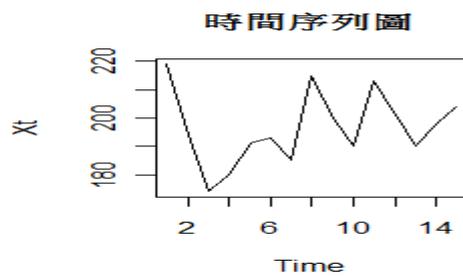
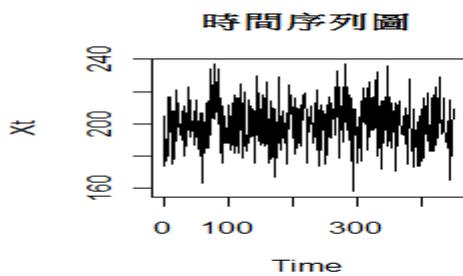
情形 4: 考慮真實 α 係數前後跳動大且 α 係數加總明顯小於 1。

$$\alpha_1=0.01 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.01 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.01 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.01$$

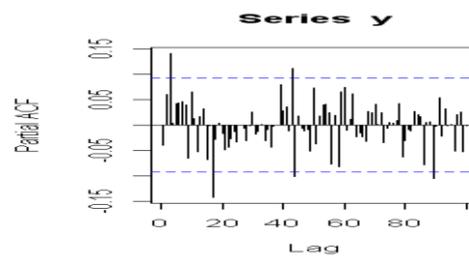
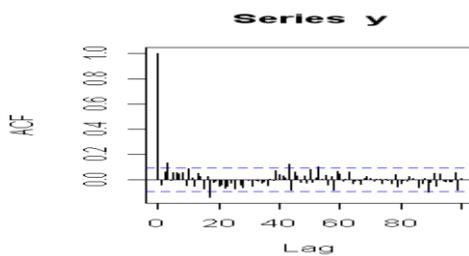
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.01 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.01 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.01 \quad \alpha_{14}=0.0001$$

$$\alpha_{15}=0.01 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 183.86$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=16

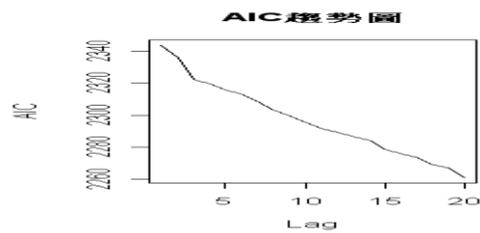
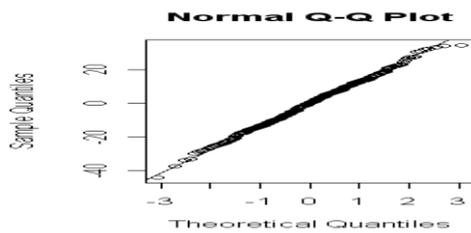
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
100.979	0.0001	0.056537	0.117232	0.004944	0.046253
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.073797	0.055643	0.028333	0.0001	0.066334	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	
0.0001	0.01307	0.033244	0.0001	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 2554.047

RFE 值: 0.01290056

模型取 Order=16 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

參數估計值

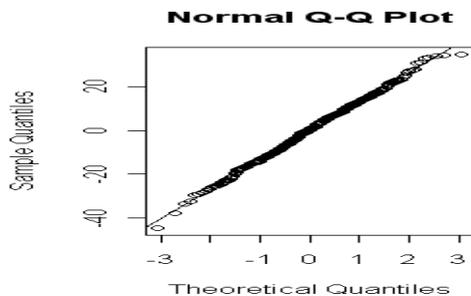
$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
94.56224	0.0001	0.048054	0.111194	0.001691	0.047513	0.083094
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.071863	0.025545	0.0001	0.080096	0.0001	0.0001	0.011218
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.046838	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

[1,]

觀測值與預測值的殘差平方和: 2615.441

RFE 值: 0.01794902

模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



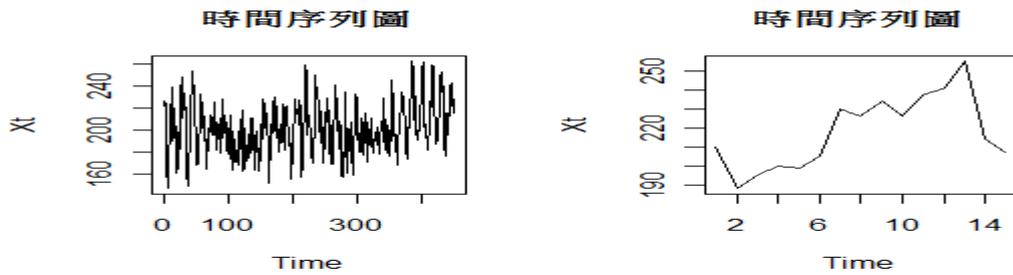
情形 5: 考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=15) 且 α 係數加總趨近於 1。

$\alpha_1=0.48$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

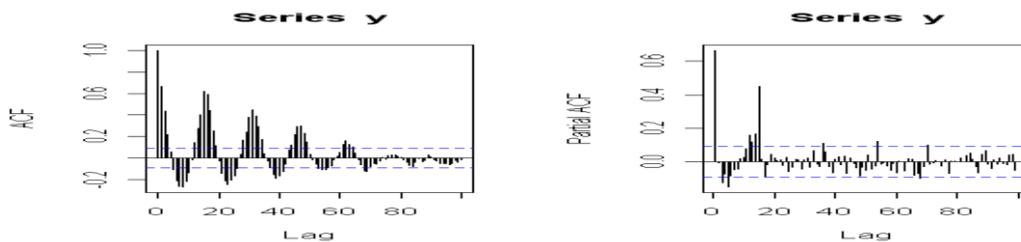
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.48$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 7.74$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

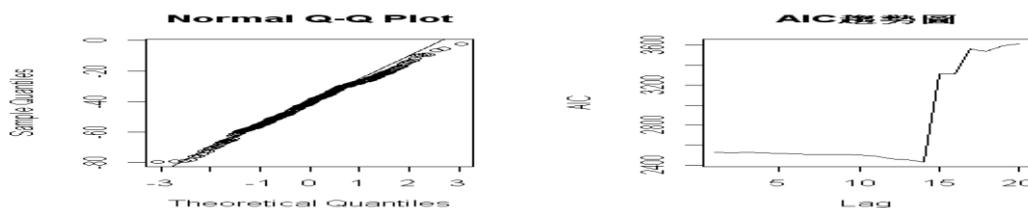
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
0.020159	0.467812	0.058179	0.0001	0.058827	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.012141	0.0001	0.01871	0.005634	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.111532	0.0007	0.0001	0.471726		

觀測值與預測值的殘差平方和: 135219.7

RFE 值: 0.4251929

模型取 Order=3 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

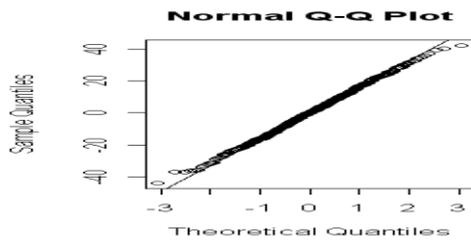
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
7.334116	0.552953	0.073578	0.0001	0.048967	0.0001
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.0001	0.009046	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.083463	0.024851	0.170056			

觀測值與預測值的殘差平方和: 6679.959

RFE 值: 0.03639706

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



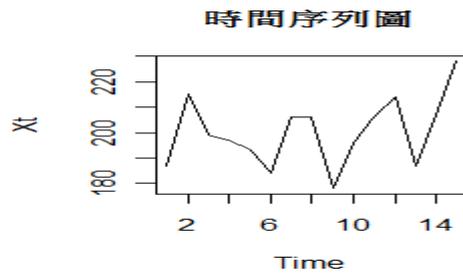
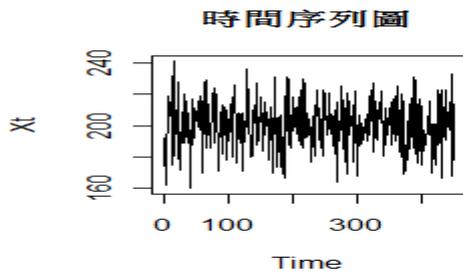
情形6:考慮真實 α 係數主要出現在頭尾(P=1 及 P=15) 且 α 係數加總明顯小於1。

$\alpha_1=0.1$ $\alpha_2=0.0001$ $\alpha_3=0.0001$ $\alpha_4=0.0001$ $\alpha_5=0.0001$ $\alpha_6=0.0001$ $\alpha_7=0.0001$

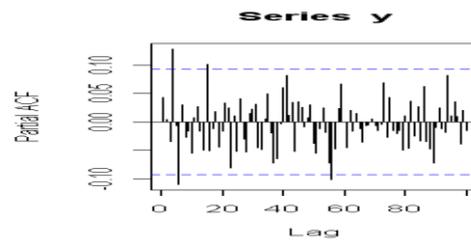
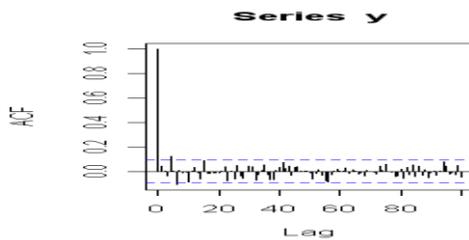
$\alpha_8=0.0001$ $\alpha_9=0.0001$ $\alpha_{10}=0.0001$ $\alpha_{11}=0.0001$ $\alpha_{12}=0.0001$ $\alpha_{13}=0.0001$

$\alpha_{14}=0.0001$ $\alpha_{15}=0.1$ $\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 159.74$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

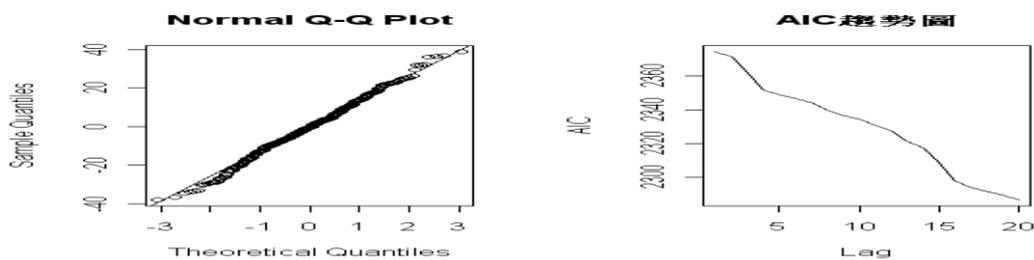
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
122.6643	0.042058	0.01801	0.0001	0.125102	0.017113
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0324	0.0001	0.004651	0.0001	0.000154
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.043095	0.0001	0.0001	0.103841		

觀測值與預測值的殘差平方和: 2559.446

RFE 值: 0.0009407975

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=16(在 ORDER16 遞減漸趨平緩)

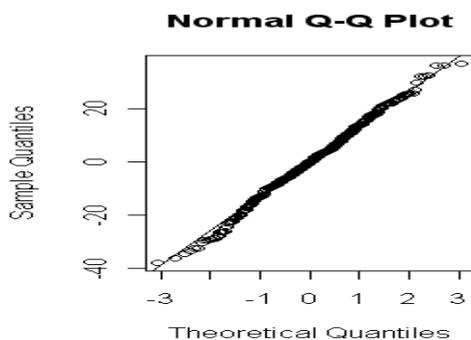
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
123.5831	0.037774	0.005094	0.0001	0.122905	0.011515
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.025424	0.0001	0.006194	0.0001	0.004681
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	
0.053407	0.006035	0.0001	0.108514	0.0001	

觀測值與預測值的殘差平方和: 2635.192

RFE 值: 0.0002426210

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



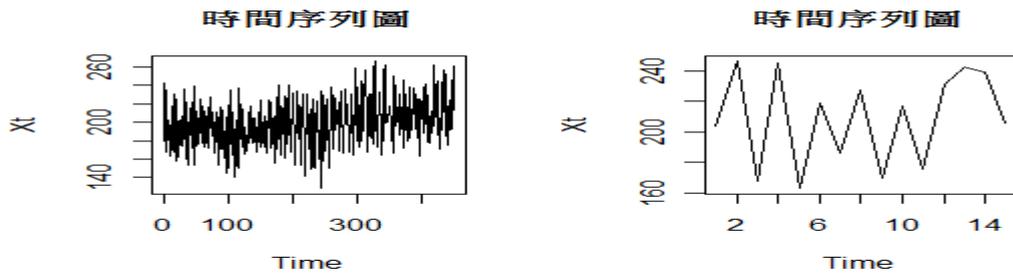
情形 7: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數明顯較大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

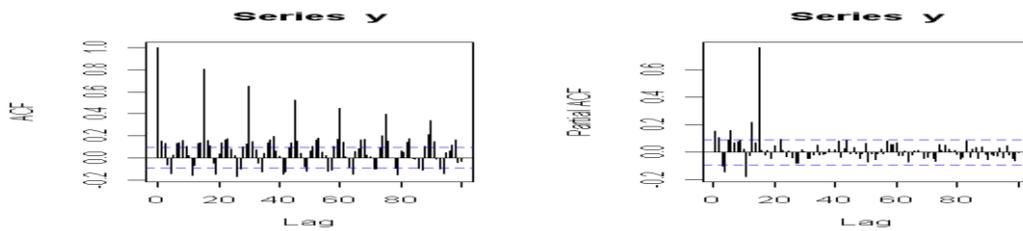
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.8 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 39.54$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

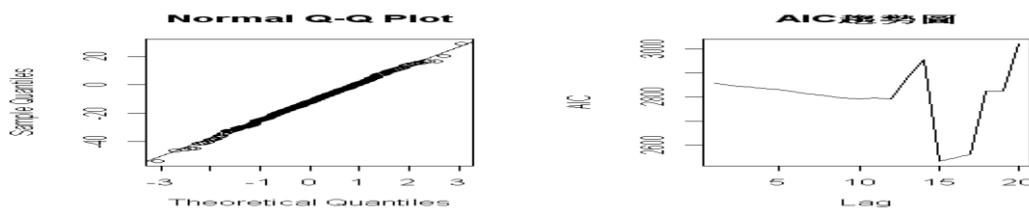
參數估計值:

$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	
0.01994	0.034955	0.056792	0.0001	0.0001	0.026276
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.052984	0.0001	0.024087	0.006566	0.000822	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.0001	0.051802	0.0001	0.808395		

觀測值與預測值的殘差平方和: 16498.92

RFE 值: 0.09517083

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則也是選取 Order=15

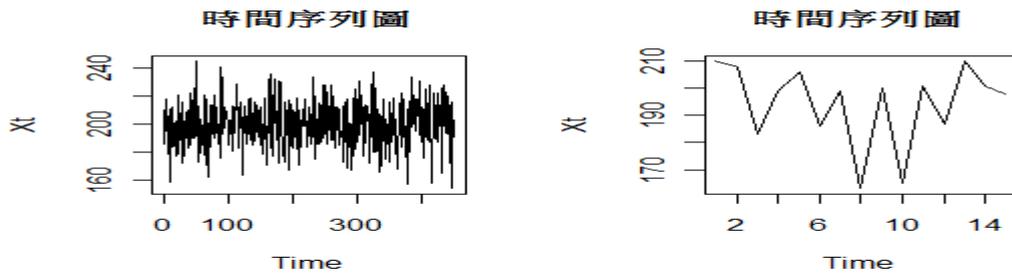
情形 8: 考慮真實 α 係數主要出現在最後面(P=15) 且 α 係數較小。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.0001 \quad \alpha_3=0.0001 \quad \alpha_4=0.0001 \quad \alpha_5=0.0001 \quad \alpha_6=0.0001 \quad \alpha_7=0.0001$$

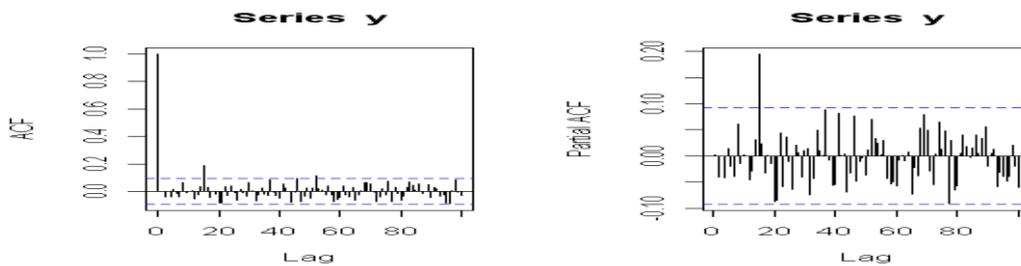
$$\alpha_8=0.0001 \quad \alpha_9=0.0001 \quad \alpha_{10}=0.0001 \quad \alpha_{11}=0.0001 \quad \alpha_{12}=0.0001 \quad \alpha_{13}=0.0001$$

$$\alpha_{14}=0.0001 \quad \alpha_{15}=0.1 \quad \lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 179.54$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

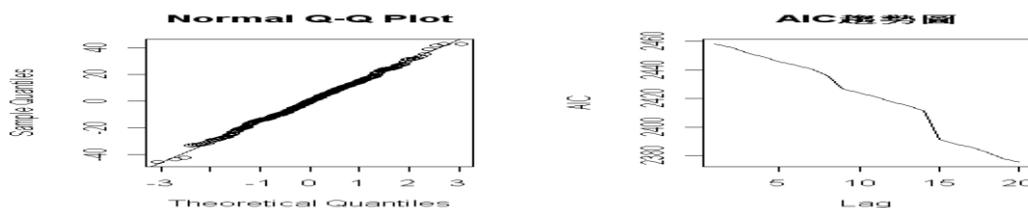
參數估計值

$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
136.3177	0.002811	0.0001	0.002052	0.0001	0.010585
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.0001	0.063878	0.0001	0.0001	0.002437
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.0001	0.0001	0.033374	0.202412		

觀測值與預測值的殘差平方和: 4081.1

RFE 值: 0.02973513

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=15(AIC 呈現遞減, 在 Order=15 時漸趨平緩趨勢)。

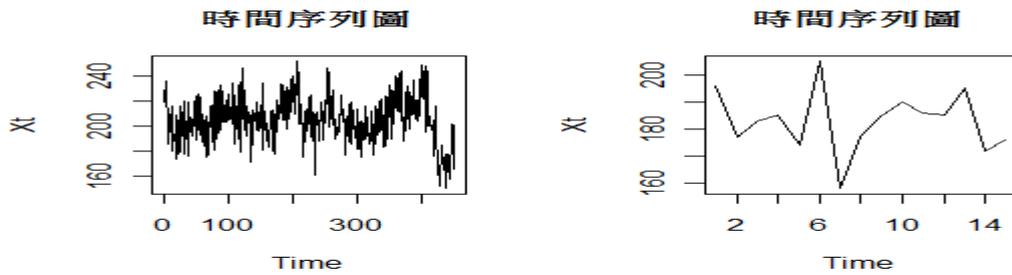
情形 9: 考慮真實 α 係數逐漸變小。

$$\alpha_1=0.2 \quad \alpha_2=0.15 \quad \alpha_3=0.1 \quad \alpha_4=0.08 \quad \alpha_5=0.06 \quad \alpha_6=0.05 \quad \alpha_7=0.04 \quad \alpha_8=0.03$$

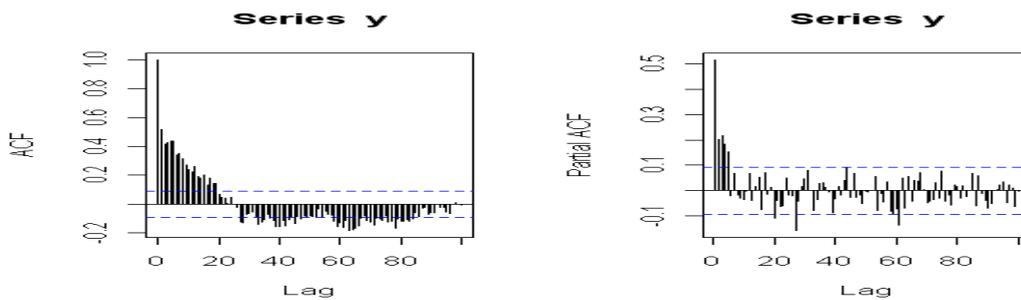
$$\alpha_9=0.02 \quad \alpha_{10}=0.01 \quad \alpha_{11}=0.008 \quad \alpha_{12}=0.006 \quad \alpha_{13}=0.004 \quad \alpha_{14}=0.002 \quad \alpha_{15}=0.001$$

$$\lambda(1 - \sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 47.8$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=5

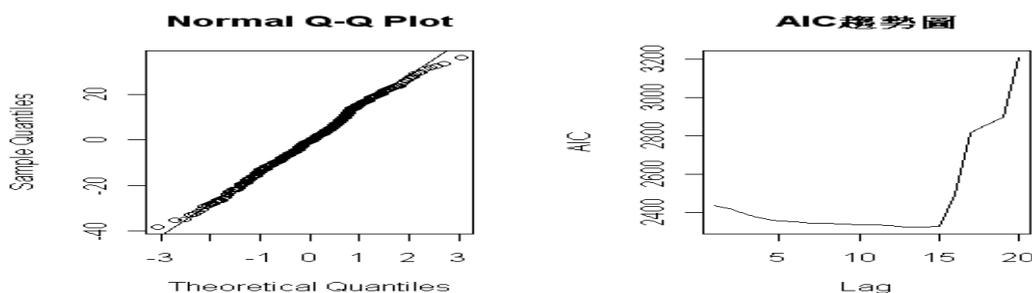
參數估計值

$i(1 - \sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
42.76219	0.286739	0.068599	0.139667	0.136413	0.159922

觀測值與預測值的殘差平方和: 5003.8

RFE 值: 0.07679699

模型取 Order=5 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=14

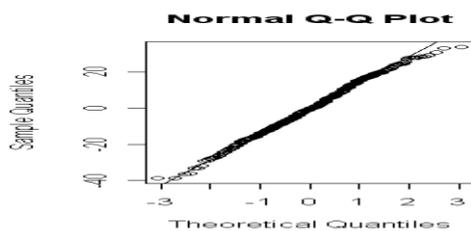
參數估計值

$\lambda(1-\sum_{i=1}^5 \hat{\alpha}_i)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
5.477547	0.301649	0.048591	0.147589	0.127497	0.174672
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.0001	0.069698	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$			
0.084798	0.0001	0.018188			

觀測值與預測值的殘差平方和: 3125.011

RFE 值: 0.04962703

模型取 Order=14 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



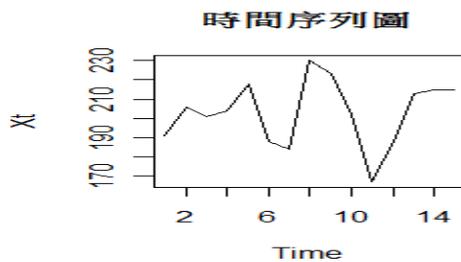
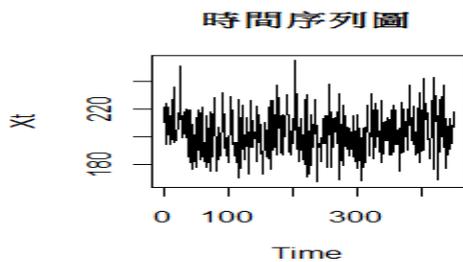
情形 10: 考慮真實 α 係數逐漸變大。

$$\alpha_1=0.001 \quad \alpha_2=0.002 \quad \alpha_3=0.004 \quad \alpha_4=0.006 \quad \alpha_5=0.008 \quad \alpha_6=0.01 \quad \alpha_7=0.02$$

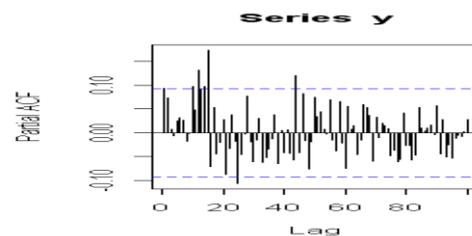
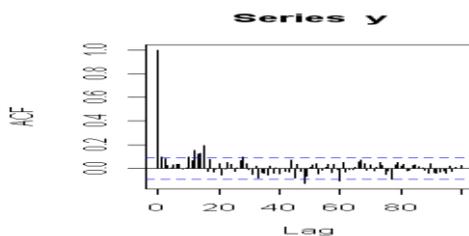
$$\alpha_8=0.03 \quad \alpha_9=0.04 \quad \alpha_{10}=0.05 \quad \alpha_{11}=0.06 \quad \alpha_{12}=0.08 \quad \alpha_{13}=0.1 \quad \alpha_{14}=0.15 \quad \alpha_{15}=0.2$$

$$\lambda(1-\sum_{i=1}^{15} \alpha_i) = 47.8$$

建構模型使用 450 筆資料及未來 15 筆真實資料的時間序列圖:



建構模型使用 450 筆資料所產生的 ACF 圖及 PACF 圖:



依據 PACF 圖選取 Order=15

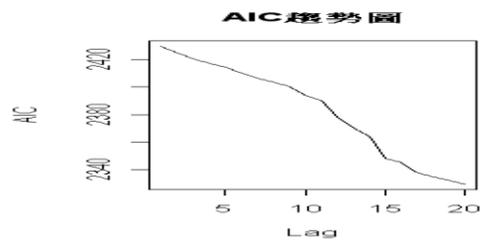
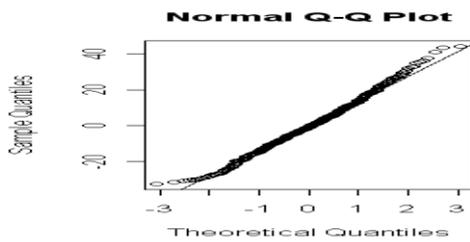
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$
63.58526	0.033259	0.036514	0.0001	0.0001	0.000317
$\hat{\alpha}_6$	$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$
0.015222	0.027571	0.0001	0.0001	0.075906	0.033902
$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$	$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$		
0.117393	0.080594	0.087246	0.177184		

觀測值與預測值的殘差平方和: 4329.2

RFE 值: 0.005791102

模型取 Order=15 的殘差 QQ-PLOT 圖及 AIC 趨勢圖:



依據 AIC 取小法則選取 Order=20

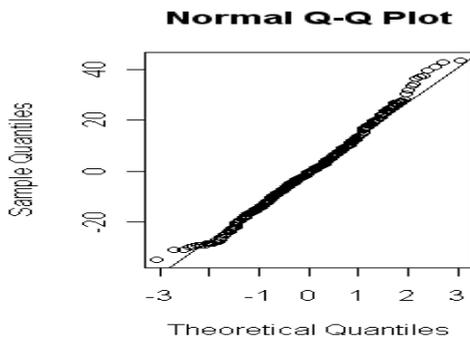
參數估計值

$i(1-\sum_{j=1}^i \hat{\alpha}_j)$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_3$	$\hat{\alpha}_4$	$\hat{\alpha}_5$	$\hat{\alpha}_6$
40.10067	0.051993	0.036268	0.0001	0.0001	0.0001	0.029044
$\hat{\alpha}_7$	$\hat{\alpha}_8$	$\hat{\alpha}_9$	$\hat{\alpha}_{10}$	$\hat{\alpha}_{11}$	$\hat{\alpha}_{12}$	$\hat{\alpha}_{13}$
0.027065	0.0001	0.0001	0.065996	0.030605	0.126561	0.07818
$\hat{\alpha}_{14}$	$\hat{\alpha}_{15}$	$\hat{\alpha}_{16}$	$\hat{\alpha}_{17}$	$\hat{\alpha}_{18}$	$\hat{\alpha}_{19}$	$\hat{\alpha}_{20}$
0.080939	0.174801	0.0001	0.065652	0.0001	0.0001	0.033675

觀測值與預測值的殘差平方和: 4579.715

RFE 值: 0.0005605728

模型取 Order=20 的殘差 QQ-PLOT 圖(依照 AIC 取小法則所選取的):



附錄 B:程式碼

#Poisson Integer Autoregressive 模擬資料程式碼:

以 $\lambda=2$, Order=5 , 情形一 為例:

#情形 1: 係數平均分配且相加為 1

```
Lambda=2
```

```
a1=0.19;a2=0.19;a3=0.19;a4=0.19;a5=0.19;a0=(1-(a1+a2+a3+a4+a5))*Lambda
```

```
y=rpois(5,Lambda);x=matrix(0,1000,1)
```

```
x[1]=y[1];x[2]=y[2];x[3]=y[3];x[4]=y[4];x[5]=y[5]
```

```
for (i in 6:1000)
```

```
x[i]=rpois(1,(a0+a1*x[i-1]+a2*x[i-2]+a3*x[i-3]+a4*x[i-4]+a5*x[i-5]))
```

```
z=x[501:1000]
```

Poisson Integer Autoregressive 參數估計

```
myregb0bi_2=function(x,y){
```

```
n=length(x[,1]);p=length(x[,,]);
```

```
xm=mean(x);xsd=sd(x);
```

```
xe=matrix(0,n,p);for(i in 1:p) xe[,i]=x[,i]-xm[i];
```

```
xd=matrix(0,n,p);for(i in 1:p) xd[,i]=xe[,i]/xsd[i];sdx=xd/sqrt(n-1);
```

```
ym=mean(y);ysd=sd(y);sdy=(y-ym)/(sqrt(n-1))*ysd;
```

```
br=matrix(0,1,p);
```

```
br=solve(t(sdx)%*%sdx)%*%t(sdx)%*%sdy
```

```
b=matrix(0,1,p+1);
```

```
for(i in 1:p) b[i+1]=(ysd/xsd[i])*br[i]
```

```
for(j in 2:(p+1)){
```

```
if (b[j]<=0){b[j]=0.0001}
```

```
else { if (b[j]>=1){b[j]=0.9999}
```

```
else{b[j]=b[j]}}
```

```
}
```

```
b0=matrix(0,1,1);for(i in 1:p) b0=b0+b[i+1];
```

```
if (b0>=1){b0=0.9999}
```

```
else{b0=b0}
```

```
b[1]=(1-b0)*ym
```

```
b
```

```
}
```

```

#Poisson Integer Autoregressive 計算 AIC 程式碼(考慮模型 Order 到 20):
MYAIC=function(x,y,b){
  A=t(y)%**y
  J=matrix(1,length(y),length(y))
  B=(1/(length(y)))*t(y)%**J%**y
  SST=A-B
  n=length(x[,1])
  p=length(x[1,])
  X=matrix(1,n,p+1)
  for (i in 1:p) X[,i+1]=x[,i]
  SSE=t(y-X%**t(b))%**t(b)
  SSR=SST-SSE
  AIC=n*log(SSE/n)+2*p
  AIC
}
aa1=ts.intersect(y=y,x1=lag(y,-1),dframe=TRUE) #間隔 1 的時間序列
x_1=as.matrix(aa1[,2])
y_1=aa1[,1]
b1=myregb0bi_2(x_1,y_1)
aa2=ts.intersect(y=y,x1=lag(y,-1),x2=lag(y,-2),dframe=TRUE) #間隔 2 的時間序列
x_2=aa2[,2:3]
y_2=aa2[,1]
b2=myregb0bi_2(x_2,y_2)
  ⋮
aa20=ts.intersect(y=y,x1=lag(y,-1),x2=lag(y,-2),x3=lag(y,-3),x4=lag(y,-4),x5=lag(y,-5),
),x6=lag(y,-6),x7=lag(y,-7),x8=lag(y,-8),x9=lag(y,-9),x10=lag(y,-10),x11=lag(y,-11),x
12=lag(y,-12),x13=lag(y,-13),x14=lag(y,-14),x15=lag(y,-15),x16=lag(y,-16),x17=lag(
y,-17),x18=lag(y,-18),x19=lag(y,-19),x20=lag(y,-20),dframe=TRUE)
x_20=aa20[,2:21]
y_20=aa20[,1]
b20=myregb0bi_2(x_20,y_20) #間隔 20 的時間序列
AIC1=MYAIC(x_1,y_1,b1)
  ⋮
AIC20=MYAIC(x_20,y_20,b20)
myAIC=c(AIC1,AIC2,AIC3,AIC4,AIC5,AIC6,AIC7,AIC8,AIC9,AIC10,AIC11,AIC
12,AIC13,AIC14,AIC15,AIC16,AIC17,AIC18,AIC19,AIC20)
plot(ts(myAIC),xlab="Lag",ylab="AIC",main="AIC 趨勢圖")

```

#Poisson Integer Autoregressive 計算模型殘差(ε_t)及 QQ-PLOT 圖程式碼:

```
MYSSE=function(x,y,b){
n=length(x[,1])
p=length(x[,1])
X=matrix(1,n,p+1)
for (i in 1:p) X[,i+1]=x[,i]
mySSE=y-X%*%t(b)
mySSE
}
SSE5=MYSSE(x_5,y_5,b5) #以 Order=5 為例
qqnorm(SSE5); qqline(SSE5) #可經由圖型判斷是否為常態。
```

**#Poisson Integer Autoregressive 觀測值與預測值殘差平方和及 RFE 值程式碼:
以 Order=5 為例**

```
forecast100=matrix(0,1010,1)
forecast100[1]=y[length(y)]
forecast100[2]=y[length(y)-1]
forecast100[3]=y[length(y)-2]
forecast100[4]=y[length(y)-3]
forecast100[5]=y[length(y)-4]
for (i in 6:1010)
forecast100[i]=b5[1]+b5[2]*forecast100[i-1]+b5[3]*forecast100[i-2]+
b5[4]*forecast100[i-3]+b5[5]*forecast100[i-4]+b5[6]*forecast100[i-5]
##殘差平方和；其中 TRUEE 為真實值
t(TRUEE[1:15]-forecast100[6:(6+14)])%*%(TRUEE[1:15]-forecast100[6:(6+14)])
### RFE 值
abs(sum(TRUEE[1:15])-sum(forecast100[6:(6+14)]))/sum(TRUEE[1:15])
###觀測值與預測值的圖型(使用在真實資料部分)
plot(ts(forecast100[4:(4+14)], frequency =1),ylim = c(8,40),xlab="日期",lwd=1,ylab="蟲數",main="Poisson INAR  
預測未來 15 天")
lines(ts(TRUEE[1:15], frequency =1),lwd=3, col="RED")
legend(locator(1),col=c(1,2),lwd=c(1,3),expression("預測值","真實值"))
```

Autoregressive 計算 AIC 程式碼(考慮模型 Order 到 20):

```
MYAICAR=function(x,y,b){
  A=t(y)%*%y
  J=matrix(1,length(y),length(y))
  B=(1/(length(y)))*t(y)%*%J%*%y
  SST=A-B
  n=length(x[,1])
  p=length(x[,1])
  X=matrix(1,n,p)
  for (i in 1:p) X[,i]=(x[,i]-b[p+1])
  BBB=matrix(0,1,p)
  for (i in 1:p) BBB[i]=b[i]
  SSE=t((y-b[p+1])-(X%*%t(BBB)))%*%((y-b[p+1])-(X%*%t(BBB)))
  AIC=n*log(SSE/n)+2*p
  AIC
}
b1=matrix(0,1,2)
for (i in 1:2) b1[i]=arima(y,c(1,0,0))$coe[i]
  :
b20=matrix(0,1,21)
for (i in 1:21) b20[i]=arima(y,c(20,0,0))$coe[i]
aa1=ts.intersect(y=y,x1=lag(y,-1),dframe=TRUE) #間隔 1 的時間序列
x_1=as.matrix(aa1[,2])
y_1=aa1[,1]
  :
aa20=ts.intersect(y=y,x1=lag(y,-1),x2=lag(y,-2),x3=lag(y,-3),x4=lag(y,-4),x5=lag(y,-5),
x6=lag(y,-6),x7=lag(y,-7),x8=lag(y,-8),x9=lag(y,-9),x10=lag(y,-10),x11=lag(y,-11),x
12=lag(y,-12),x13=lag(y,-13),x14=lag(y,-14),x15=lag(y,-15),x16=lag(y,-16),x17=lag(
y,-17),x18=lag(y,-18),x19=lag(y,-19),x20=lag(y,-20),dframe=TRUE)
#間隔 20 的時間序列
x_20=aa20[,2:21]
y_20=aa20[,1]
AIC1=MYAICAR(x_1,y_1,b1)
  :
AIC20=MYAICAR(x_20,y_20,b20)
myAICII=c(AIC1,AIC2,AIC3,AIC4,AIC5,AIC6,AIC7,AIC8,AIC9,AIC10,AIC11,AI
C12,AIC13,AIC14,AIC15,AIC16,AIC17,AIC18,AIC19,AIC20)
plot(ts(myAICII,start = 1),xlab="Lag",ylab="AIC",main="AIC 趨勢圖")
```

Autoregressive 計算模型殘差(ε_t)及 QQ-PLOT 圖程式碼:

```
MYSSEAR=function(x,y,b){
n=length(x[,1])
p=length(x[,1])
X=matrix(1,n,p)
for (i in 1:p) X[,i+1]=(x[,i]-b[p+1])
BBB=matrix(0,1,p)
for (i in 1:p) BBB[i]=b[i]
mySSE=(y-b[p+1])-(X%*%t(BBB))
mySSE
}
SSE3=MYSSEAR(x_3,y_3,b3) #以 Order=3 為例
qqnorm(SSE3); qqline(SSE3) #可經由圖型判斷是否為常態。
```

Autoregressive 觀測值與預測值殘差平方和及 RFE 值程式碼:

以 Order=3 為例

```
forecast30=matrix(0,1010,1)
forecast30[1]=y[length(y)]
forecast30[2]=y[length(y)-1]
forecast30[3]=y[length(y)-2]
for (i in 4:1010)
forecast30[i]=b3[1]*(forecast30[i-1]-b3[4])+b3[2]*(forecast30[i-2]-b3[4])+
b3[3]*(forecast30[i-3]-b3[4])+b3[4]
##殘差平方和；其中 TRUEE 為真實值
t(TRUEE[1:15]-forecast30[4:(4+14)])%*%(TRUEE[1:15]-forecast30[4:(4+14)])
#RFE 值
abs(sum(TRUEE[1:15])-sum(forecast30[4:(4+14)]))/sum(TRUEE[1:15])
#觀測值與預測值的圖型(使用在真實資料部分)
plot(ts(forecast30[4:(4+14)], frequency =1),ylim = c(8,40),xlab="日期",lwd=1,ylab="蟲數",main="AR
預測未來 15 天")
lines(ts(TRUEE[1:15], frequency =1),lwd=3, col="RED")
legend(locator(1),col=c(1,2),lwd=c(1,3),expression("預測值","真實值"))
```