

東海大學社會科學院經濟學系

碩士論文

Department of Economics

College of Social Sciences

TungHai University

Master Thesis

全球金融風暴前後之 Black-Scholes 與 H-N GARCH 評價

模型之應用-以台指選擇權為例

An Application of Black-Scholes and H-N GARCH models
to TAIEX Option before and after Global Financial Crisis

The seal of Tung Hai University is a circular emblem with a scalloped border. It features the university's name in Chinese characters '東海大學' at the top and 'TUNG HAI UNIVERSITY' around the bottom. In the center, there is a stylized design with the year '1955' at the bottom.

游懿綉

Yi-Hsiu Yu

指導教授：陳文典 博士

Advisor : Wen-Den Chen, Ph.D.

中華民國 100 年 6 月

June, 2011

謝 辭

謹將這本論文獻給我最親愛的爸爸、媽媽、兩位哥哥，以及已逝的爺爺和奶奶，您們無窮的愛提供給我源源不絕的力量。

本文能順利完成，首先要感謝我的恩師 陳文典老師，老師在經濟學領域上既深且廣的學問及對學生和藹的態度，皆是我能完成論文的重要因素。這兩年來的研究所生涯，承蒙老師的悉心指導與教誨，讓本論文得以順利完成。學生不僅在學術上受益良多，更在生活上增添了許多專屬師生的溫暖互動，學生在此對老師致上由衷的感謝。在論文口試期間，感謝國立高雄應用科技大學姚名鴻老師，以及國立台北護理健康大學陳依兌老師撥空給予指教，您們的寶貴意見使本論文更臻完善，學生在此向您們致上最深的謝意。在資料整理部分，感謝王宜甲老師的幫忙，讓本研究的資料整理得以順利進行。

特別感謝廖恩愛老師、劉仲戎老師、廖培賢老師、賀惠玲老師、廖國宏老師及陳宜廷老師，在修課期間，給予我滿滿的知識與鼓勵，讓我受益良多。

最後要感謝兩年來一起陪伴成長的學長與同學，文鍵、俊成、如芸、佳惠、博丞、倩瑩、正杰、尚珉、啟家和生富，因為有你們的陪伴，讓我的研究所生涯洋溢著快樂與感動。特別感謝同學，如芸，在我遇到挫折的時候給我鼓勵，在我獲得好消息的同時陪我一起分享喜悅，不只是課業的好同學、好組員，在課餘之外，也是好軍師、好朋友。祝福未來的我們，能夠展翅高飛，也希望多年後我們能夠再度聚首，向彼此分享夢想成真的喜悅。

游懿綉 謹誌於

東海大學經濟學研究所

中華民國 100 年 7 月

摘要

傳統的 Black-Scholes 模型假設波動為固定不變，與實際波動機制並不一致。為了解決這項問題，後續研究學者嘗試放寬假設條件，Heston and Neston (2000) 提出 H-N GARCH 模型，假設波動為一隨時間改變之隨機變數，大幅降低 Black-Scholes 模型因假設波動為固定不變，不符合實際波動機制，造成估計誤差過高的困擾。在早期研究選擇權模型的文獻中，不管是 Black-Scholes 模型或是 Heston-Neston GARCH 模型皆只能描述單一狀態下的行為，未考慮到市場價格容易受到外部事件衝擊的影響，而改變波動路徑，因而造成評價估計誤差。然而，本研究期間曾發生全球金融風暴的衝擊，故在探討選擇權評價模型時，考慮了雙狀態轉換模型。

本研究主要目的是，以 Black-Scholes 模型與 H-N GARCH 兩模型分別搭配歷史波動模型與 H-N GARCH (1,1) 模型，檢定未考慮狀態轉換下的 H-N GARCH 評價模型的估計誤差是否低於 Black-Scholes 評價模型的估計誤差，並且加入 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型，找出狀態轉換的確切時間點，以適合各子區間的波動對價格進行估計，分析加入狀態轉換模型下的兩選擇權模型價格之估計誤差是否有降低。

研究結果顯示，考慮 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型，將可找出較適合各子區間的波動，使選擇權評價模型的估計結果更為準確。我們也發現，考慮狀態轉換模型後，大幅提升 Black-Scholes 模型（固定波動模型）的績效，除了近月和遠月買權之少數情形下，Black-Scholes 評價模型的估計誤差甚至優於 H-N GARCH 評價模型（隨機波動模型）。其主要的原由是 H-N GARCH 模型本身已考慮到波動為一隨時間改變之隨機變數，加入狀態轉換模型後，重新分割後的三個子區間，對於該模型的波動率的變動影響不大，誤差沒有什麼改變。然而，Black-Scholes 模型本身假設波動為固定不變的常數，加入狀態轉換後，分割後的各子區間，對該模型的波動率的變動影響很大，導致估計出來的誤差大幅降低，大幅提升該模型的績效。

關鍵字：Black-Scholes 模型、Heston-Nandi GARCH 模型、狀態轉換模型

目次

第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 研究目的.....	2
1.3 研究架構.....	2
1.4 研究流程圖.....	3
第二章 文獻回顧.....	4
2.1 選擇權模型之相關文獻.....	4
2.1.1 選擇權模型之理論文獻.....	4
2.1.2 選擇權模型之實證文獻.....	5
2.2 狀態轉換模型之相關文獻.....	6
2.2.1 狀態轉換模型之理論文獻.....	6
2.2.2 狀態轉換模型之實證文獻.....	7
第三章 研究方法.....	9
3.1 選擇權評價模型.....	9
3.1.1 Black-Scholes 選擇權評價模型.....	9
3.1.2 Heston-Nandi GARCH 選擇權評價模型.....	13
3.2 波動性估計模型.....	16
3.2.1 歷史波動模型.....	16
3.2.2 Heston-Nandi GARCH (1,1)模型.....	17
3.3 狀態轉換模型.....	18
3.4 模型配適度之檢定.....	20
3.5 評價模型績效評估之檢定.....	20
3.5.1 平均絕對值百分比誤差 (MAPE).....	20
3.5.2 均方根百分比誤差 (RSMPE).....	20
第四章 實證資料與分析.....	21
4.1 實證資料.....	21
4.1.1 台灣加權股價指數 (TSEC).....	21
4.1.2 無風險利率.....	21
4.1.3 台灣加權股價指數選擇權 (TXO).....	21
4.2 GARCH 的最佳階次選擇與參數估計.....	22
4.2.1 基本統計量分析.....	22
4.2.2 GARCH 最佳階次.....	24
4.2.3 GARCH (1,1) 模型的參數估計.....	24
4.3 未考慮狀態轉換模型下的評價誤差.....	25

4.3.1	歷史波動率的估計.....	25
4.3.2	Heston-Nandi GARCH (1,1)模型的參數估計	25
4.3.3	評價模型績效評估.....	26
4.4	狀態轉換模型的估計結果.....	28
4.5	考慮狀態轉換模型下的評價誤差.....	30
4.5.1	歷史波動率的估計.....	30
4.5.2	Heston-Nandi GARCH (1,1) 模型的參數估計	31
4.5.3	評價模型績效評估.....	33
第五章	結論.....	36
	參考文獻.....	37
	附錄一.....	39
	附錄二.....	40
	附錄三.....	41
	附錄四.....	45
附圖一	買權之成交量.....	47
附圖二	賣權之成交量.....	48
附圖三	近月買權 BLACK-SCHOLES 評價模型.....	49
附圖四	遠月買權 BLACK-SCHOLES 評價模型.....	50
附圖五	近月賣權 BLACK-SCHOLES 評價模型.....	51
附圖六	遠月賣權 BLACK-SCHOLES 評價模型.....	52
附圖七	近月買權 HESTON-NANDI GARCH 評價模型.....	53
附圖八	遠月買權 HESTON-NANDI GARCH 評價模型.....	54
附圖九	近月賣權 HESTON-NANDI GARCH 評價模型.....	55
附圖十	遠月賣權 HESTON-NANDI GARCH 評價模型.....	56

圖目錄

圖一	研究流程圖.....	3
圖二	台灣加權股票指數的走勢圖.....	23
圖三	台灣加權股票指數報酬率的走勢圖.....	23
圖四	未考慮狀態轉換模型下之歷史波動模型估計下的波動率.....	25
圖五	未考慮狀態轉換模型下之 H-N GARCH (1,1) 模型估計下的波動率.....	26
圖六	台灣加權股價指數之遞移機率圖.....	29
圖七	考慮狀態轉換下之歷史波動模型估計下的波動率.....	30
圖八	考慮狀態轉換下之 H-N GARCH (1,1) 模型估計下的波動率.....	31

表目錄

表一	價位程度分類表.....	21
表二	台灣加權股價指數 (S_t) 與其報酬 (y_t) 的一般統計敘述.....	22
表三	以不同時間序列 (P, Q) 模型所計算出 SBC 值.....	24
表四	GARCH (1,1) 的參數估計.....	24
表五	未考慮狀態轉換模型下之 H-N GARCH (1,1) 的參數估計.....	26
表六	MAPE 法下的訂價誤差.....	27
表七	RMSPE 法下的訂價誤差.....	27
表八	狀態轉換模型的參數估計.....	29
表九	考慮狀態轉換下之歷史波動率的參數估計.....	30
表十	考慮狀態轉換模型下之 H-N GARCH (1,1) 模型的參數估計.....	32
表十一	MAPE 法下的訂價誤差.....	34
表十二	RMSPE 法下的訂價誤差.....	35

第一章 緒論

1.1 研究背景與動機

對投資者而言，如果可以準確地預測波動率 (volatility)，將可以衡量所面對的投資風險，進行投資決策時的參考。對金融機構而言，波動率的變動則可以成為金融市場是否穩定的衡量指標。波動率為衍生性金融商品評價公式中，最根本且重要的參數之一；當波動率發生改變時，選擇權評價也會隨之改變。故後續學者不斷地找尋適合的波動率模型以搭配選擇權評價模型。

Black and Scholes (1973) 提出的 Black-Scholes 選擇權評價模型 (簡稱 B-S 模型)，利用無套利機會理論成功地建立了選擇權評價模型，其主要的論點是，若存在一完美的金融市場，那麼透過投資者不斷套利的行為，最終市場將不再存在套利機會，此時，選擇權的價格為其合理價格。此一分析方式，除了引起學術界廣大地迴響外，在實務界亦被投資者與金融機構廣為應用。但是，B-S 模型假設波動率為固定不變，與實際波動機制並不一致，故傳統的 B-S 模型並非最後的評價模型。

為了解決這項問題，後續研究學者嘗試放寬假設條件，以推導出更符合實際情況的選擇權評價模型。Heston and Nandi (2000) 提出具有特殊封閉解的 Heston-Nandi GARCH 模型 (簡稱 H-N GARCH 模型)，假設波動為一隨時間改變之隨機變數，大幅降低 B-S 模型因假設波動為固定不變，與實際波動機制並不一致，造成估計誤差過高的困擾。

早期的文獻中，大多使用時間序列的條件變異數來說明股票市場的波動率。在財務計量分析中，被廣泛應用的條件變異數包含 Engle (1982) 提出的提出自我迴歸異質條件變異數模型 (Autoregressive Conditional Heterokedasticity, 簡稱 ARCH 模型) 與 Bollerslev (1986) 提出的一般化自我迴歸異質條件變異數模型 (Generalized ARCH, 簡稱 GARCH 模型)。此兩種模型都可以適切地描述兩種特性，一種是高峽峰分配的特性，亦即機率分配較常態分配具有高峰且厚尾的現象，另一種是波動叢聚的特性，亦即變數的波動性會有聚集在一起的現象。雖然 ARCH 模型和 GARCH 模型皆可說明時間序列的波動聚集現象，但是只能描述單一狀態下的行為。在本論文中的研究期間曾經發生過全球金融風暴，產生結構性改變 (structural change)，因此，我們不能只考慮單一狀態下的行為去評估選擇權價格。

早期研究選擇權評價模型的文獻中，大多只考慮了單一狀態下的行為，但是台灣股票市場是屬於淺碟型市場，且投資者結構是以散戶盤為主，在操作的過程中容易受到外部事件衝擊的

影響，而改變波動路徑，因而造成評價估計誤差。¹因此，以台灣加權股價指數為標的物的台灣加權股價指數選擇權，對於任何影響台灣加權股價指數交易的外部事件也應該存在高度敏感，兩者之間的互動性應該相當的密切。因此進行選擇權評價時，也應將外部事件衝擊考慮進去，以增加選擇權價格估計的準確性。

林常青等人 (2002) 一文中，曾指出 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型所採用的分析方法與模型具有廣泛的適用性，故未來亦可以應用於分析其他證券或金融資產的動態行為上。根據目前文獻所知，Hamilton (1989) 提出的該模型已廣泛地應用在台灣的經濟成長、景氣循環、短期利率、股價指數以及股價指數期貨市場等，但尚未廣泛地應用在估計台灣選擇權價格。故本研究與相關文獻的主要差別是，在 Black-Scholes 和 H-N GARCH 兩種評價模型上，考慮了 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型，認為研究期間可能發生過某種外部事件衝擊，而改變波動路徑，以檢測是否改善兩種評價模型的預測能力。

1.2 研究目的

本研究主要目的是，以 Black-Scholes 和 H-N GARCH 兩評價模型，分別搭配歷史波動和 H-N GARCH (1,1) 模型作比較，除了分析 H-N GARCH 模型的估計誤差是否低於 Black-Scholes 模型的估計誤差；更重要的是，在兩種評價模型上考慮了狀態轉換模型，重新區分各子區間，以適合各子區間的波動對價格進行估計，並分析考慮狀態轉換下的兩評價誤差是否有所改善。結果顯示，未考慮狀態轉換下的 H-N GARCH 模型的評價誤差表現優於 Black-Scholes 模型，但是，考慮狀態轉換下的 H-N GARCH 模型的評價誤差表現並不見得優於 Black-Scholes 模型。

1.3 研究架構

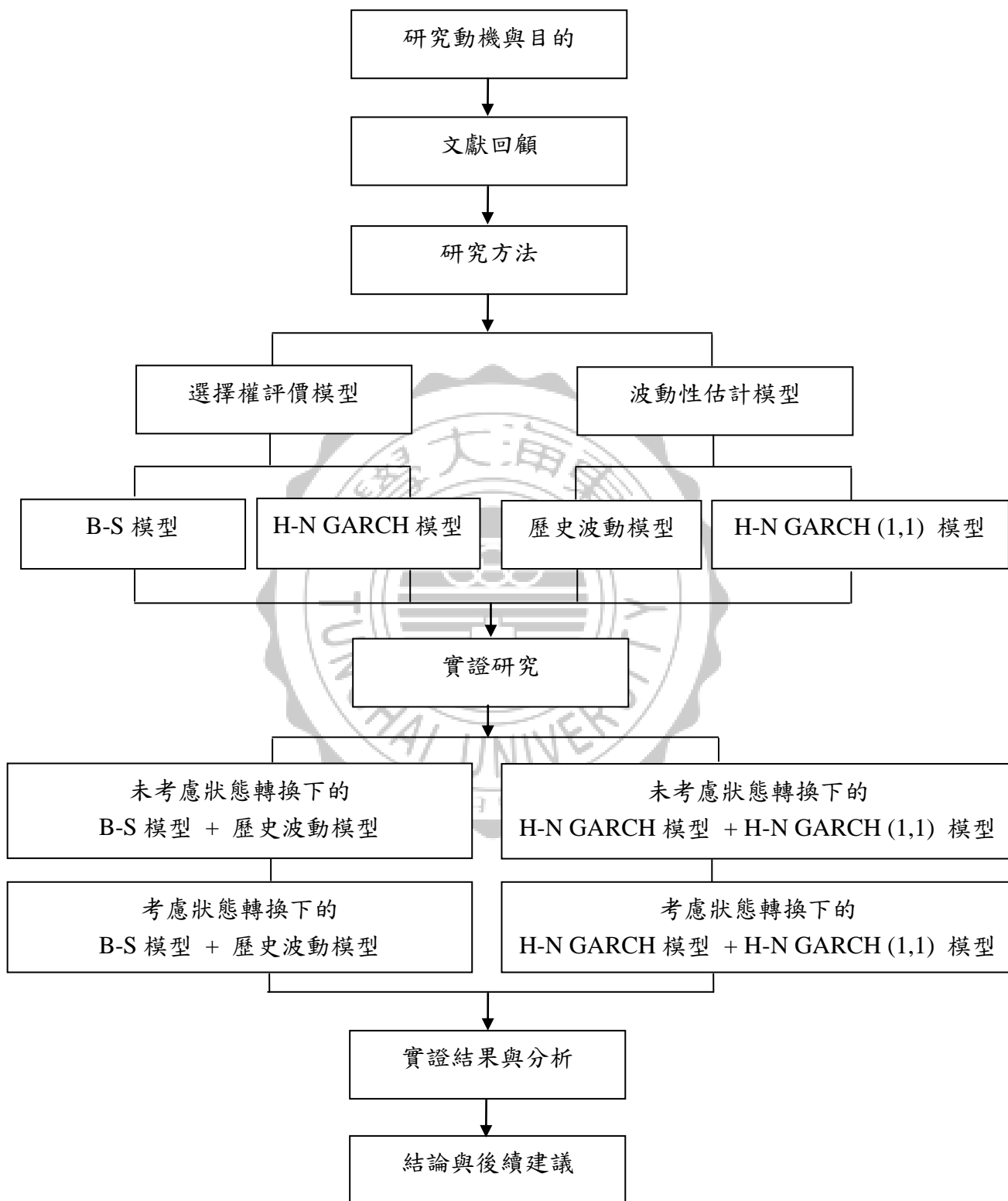
本研究共分為五章，其內容如下：第一章為緒論，介紹研究背景與動機、研究目的。第二章為文獻回顧，回顧選擇權評價模型和狀態轉換模型的理論與實證文獻。第三章為研究方法，定義選擇權評價模型、波動性估計模型以及狀態轉換模型。第四章為實證資料與分析，描述實證資料，分析未考慮狀態轉換下的兩模型評價誤差，以及考慮狀態轉換下的兩模型評價誤差。第五章為本論文的結論，總結研究論點。並且列出 2005 年 7 月到 2010 年 8 月發生的重大政經事件，作為分析時的參考依據。²

¹ 外部事件衝擊，指突發的重大政經事件以及中央銀行面對這些事件的反應措施，例如：石油危機、全球金融風暴或飛彈演習。

² 詳細 2005 年 7 月到 2010 年 8 月間發生的重大政經事件的說明，請參考附錄一。

1.4 研究流程圖

【圖一】為本論文的研究流程圖。



圖一 研究流程圖

第二章 文獻回顧

本章文獻回顧，略述國內外學者對選擇權評價模型和狀態轉換模型的相關研究，包括所使用的評價模型及搭配的波動性模型。

2.1 選擇權模型之相關文獻

2.1.1 選擇權模型之理論文獻

選擇權評價方法直至 Black-Scholes 評價模型，成為後續相關研究的主要參考依據。然而傳統的 Black-Scholes 模型假設股價變動必須服從幾何布朗運動、選擇權只能在到期日履約、固定利率等，與實際波動機制並不一致，為了解決這項問題，後續研究學者嘗試放寬假設條件，以推導出更符合實際情況的選擇權評價模型。

Engle (1982) 提出自我迴歸異質條件變異數模型 (Autoregressive Conditional Heterokedasticity, 簡稱 ARCH)，允許預期條件變異數為過去之殘差函數，使變異數能隨時間而改變。Bollerslev (1986) 實證發現股價報酬的機率分配具有厚尾現象，因此將 ARCH 模型加入條件變異數的落後期，成為一般化自我迴歸異質條件變異數模型 (Generalized ARCH, 簡稱 GARCH)，更能確切地捕捉到總體經濟與財務金融資料具有波動叢聚 (volatility clustering) 及高狹峰分配 (leptokurtic distribution) 兩種特性。³ Amin and Ng (1993) 指出 GARCH 選擇權評價模型改變了波動率為固定不變的假設，導致評價上的困難，換言之，傳統 Black-Scholes 模型的風險中立評價法，無法套用在 GARCH 選擇權評價模型上。Duan (1995) 在均衡架構下提出局部風險中立評價測度，使 GARCH 評價模型可在局部風險中立評價測度下操作。再者，將 GARCH 模型與選擇權評價方法做結合，提出 GARCH 選擇權評價模型，用以修正波動率為固定不變的假設。然而，該模型並不存在封閉解 (closed-form)。

後續 Heston and Nandi (2000) 提出具有特殊封閉解的 GARCH 選擇權評價模型 (又稱為 H-N GARCH 模型)，在特殊 GARCH 模型下利用特徵函數求算期望值的方法，導出歐式選擇權的理論價格。其模型假設波動率為一隨時間改變的隨機變數，大幅降低 Black-Scholes 模型因假設波動為固定不變，與實際波動機制並不一致，因而造成估計誤差過高的困擾。

³ 楊奕農 (2009) 一書指出，過去的文獻發現，許多經濟與財務的時間序列統計資料，ARCH 與 GARCH 模型都可以適切地描述以下兩種特性：一種是高狹峰分配的特性，亦即機率分配較常態分配具有高峰及厚尾，可用來描述有離群值的現象；另一種是波動聚集現象的特性，亦即變數的波動性會有聚集在一起的現象，也就是將變數畫成時間序列圖時，可觀察到「大波動通常會隨著大波動，而小波動通常會跟隨著小波動」的現象。

2.1.2 選擇權模型之實證文獻

Heston and Nandi (2000) 以 S&P500 指數選擇權為研究對象，研究結果顯示，不對稱性 GARCH 評價模型在樣本外的評價誤差表現遠優於 Black-Scholes 模型的結果。⁴此外，利用不對稱性的 GARCH 評價模型來捕捉報酬率波動聚集現象和槓桿效果，將此設定納入選擇權評價模型方法，可獲得對波動性較敏感的選擇權評價模型及避險比率。

方春華 (2004)，Su *et al.* (2010) 檢測 Heston and Nandi (2000) 的 H-N GARCH 模型的評價效率，並且以 Dumas *et al.* (1998) 的 Ad Hoc Black-Scholes 選擇權評價模型當作比較標的，藉以判斷 H-N GARCH 模型是否有較好的評價效率；方春華 (2004) 使用 TAIEX 選擇權市場的資料，Su *et al.* (2010) 以 FTSE100 選擇權市場的資料為分析的對象。⁵

方春華 (2004) 的研究結果顯示，H-N GARCH 模型相較於 Ad Hoc Black-Scholes，在樣本外的實證研究有較小的評價誤差。Su *et al.* (2010) 的實證結果發現 H-N GARCH 模型相較於 Ad Hoc Black-Scholes，無論是在樣本內或是樣本外的實證研究都有較小的評價誤差。

羅善明 (2010) 嘗試以 Heston and Nandi (2000) 所提出的 H-N GARCH 選擇權評價模型，使用台灣加權股價指數為資料，對台灣加權股價指數選擇權進行評價。實證結果顯示，雖然 Heston and Nandi (2000) 提出的模型放寬波動率為固定不變的假設，在樣本內和樣本外模型比較，Black-Scholes 模型在評價效度上較 H-N GARCH 模型略佳，亦即 H-N GARCH 模型知誤差略高，作者認為其原因有二個，第一原因為變數定義導致資料型態和 Heston and Nandi (2000) 不盡相同。再者，參數的不良估計，使得 H-N GARCH 模型的兩重要參數估計偏差過大，以致最後評價誤差略高。

⁴ S&P500 指數，指的是標準普爾 500 指數，其指數裡的 500 家公司都是在美國股市的兩大股票交易市場。

⁵ Dumas *et al.* (1998) 以 S&P500 指數⁵選擇權為研究對象，當改進的 Ad Hoc Black-Scholes 選擇權評價模型只能捕捉到波動相關性，而不能涵蓋路徑相關性時，其樣本外的評價誤差大於傳統 Black-Scholes 模型的結果。因此，設計不對稱性的 GARCH 評價模型以同時捕捉資產報酬波動的相關及波動中的路徑相關性時，應可增進不對稱性 GARCH 評價模型在實證上的表現。

2.2 狀態轉換模型之相關文獻

2.2.1 狀態轉換模型之理論文獻

Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型 (regime switching model) ，又稱為馬可夫轉換模型 (markov switching model) ，主要是利用某一無法觀察到的狀態變數 S_t 來區分時間序列在不同狀態下的轉換行為，以反映結構性的改變，而此一狀態變數 S_t 依循一階馬可夫鏈而變動。⁶相較於傳統的時間序列或計量模型更具包容性，狀態轉換模型能夠捕捉到更複雜的動態行為，使得其模型具有較廣泛的適用性，故早已成為分析總體經濟變數和財務變數的重要工具。然而，早期的文獻應用主要侷限在條件期望值的狀態轉換，並無法說明條件變異數的行為；例如：Hamilton (1989) 探討美國 GNP 成長率與景氣波動的長期趨勢，林向愷等人 (1998) 探討台灣實質 GNP 成長率的動態行為與台灣景氣循環的趨勢。

隨著資料產生形態的不同，狀態轉換模型亦隨之有新的發展，例如：允許截距項隨狀態轉換的馬可夫模型 (Hamilton, 1989) ，變異數隨狀態轉換的馬可夫模型 (Cai, 1994 ; Hamilton and Susmel, 1994 ; Gray, 1996) ，以至於 K 個狀態的馬可夫模型 (林常青等人, 2002) 。

Cai (1994) 與 Hamilton and Susmel (1994) 將 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型加以延伸，使其能刻劃條件變異數在不同狀態下的行為。在 ARCH 的架構下，Cai (1994) 提出的 MS-ARCH 模型與 Hamilton and Susmel (1994) 提出的 Switching ARCH 模型 (簡稱 SWARCH 模型) ，允許條件變異數的參數隨狀態不同而改變。研究顯示，兩種模型所估計的波動持續性會降低，對未來的波動預測也較以往計量模型來的準確。但是 MS-ARCH 模型和 SWARCH 模型對於各狀態間條件變異數的設定，只能表示截距項所發生的變動，或者是不同狀態下的條件變異數呈現某種比例的關係，無法說明狀態間不同的波動特性。此外，若允許條件期望值也隨狀態改變，或者在模型中加入 GARCH 效果，都會使兩種模型估計會變得極為困難。

Gray (1996) 提出的一般化狀態轉換模型 (Generalized Regime-Switching model ; 簡稱 GRS-GARCH model) 使用加權平均的方式，將各個狀態下每一期的條件期望值與條件變異數加以合併，因而避免了上述模型的困難。此模型以雙狀態和 GARCH (1,1) 為架構所推導而成，一方面允許模型中出現 GARCH 效果，另一方面也允許條件期望值與條件變異中的參數隨著狀態變數而變動。因此，可以充分捕捉不同狀態下時間數列的動態行為。

⁶ 詳細馬可夫鏈 (Markov chain) 的說明，請參考附錄二。

2.2.2 狀態轉換模型之實證文獻

林常青等人 (2002) 一文中，曾指出 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型所採用的分析方法與模型具有廣泛的適用性，故未來亦可以應用於分析其他證券或金融資產的動態行為上。

在實證研究中，狀態轉換模型已有一些應用，Hamilton (1989)，林向愷等人 (1998)，徐士勛與管中閔 (2001)，林常青等人 (2002)，莊忠柱與胡文正 (2005)，以及喻書庭 (2010) 皆使用狀態轉換模型，將研究資料分成高波動與低波動兩種狀態；Hamilton (1989) 分析美國的 GNP 成長率時間序列，林向愷等人 (1998) 探討台灣實質 GNP 成長率的動態行為與台灣景氣循環的趨勢，徐士勛與管中閔 (2001) 對九十年代台灣的景氣循環探討，林常青等人 (2002) 對短期利率的研究，莊忠柱與胡文正 (2005) 捕捉股價指數與股價指數期貨市場的個別報酬與波動性行為，以及喻書庭 (2010) 對 Hull-White 選擇權評價模型進行估計。

Hamilton (1989) 利用狀態轉換模型分析美國的 GNP 成長率時間序列。研究顯示，此模型可以成功地區分出美國 GNP 的高成長與低成長兩種狀態。更重要的是，此模型所認定出的 GNP 成長率的狀態轉換行為，和美國國家經濟研究局所公佈的景氣循環的收縮期與擴張期具有相當程度的一致性。因此，Hamilton (1989) 的研究結果帶動了後續學者，廣泛地利用狀態轉換模型分析相關的總體經濟變數或財務變數的動態行為。

林向愷等人 (1998) 首先採用 Hamilton (1989, 1994) 提出的單變量雙狀態馬可夫轉換模型來區分出台灣實質 GNP 成長率的高成長和低成長兩種狀態，並且比較此模型所認定的台灣實質 GNP 成長率狀態轉換，與我國行政院經濟建設委員會所公佈的景氣循環基準日期間的差異。研究顯示，在 1990 年之前雙狀態馬可夫轉換模型所認定出的實質 GNP 年成長率的高低成長期，相當接近經建會所公佈的基準日期。再者，此模型較其他時間序列模型有更好的樣本外預測能力。

徐士勛與管中閔 (2001) 利用雙變量雙狀態馬可夫轉換模型，配合紀卜斯抽樣法 (Gibbs sampling method) 研究 90 年代台灣的景氣循環，研究發現雙變量馬可夫轉換模型比單變量模型更能捕捉景氣循環的特性。再者，嘗試過估計三狀態的馬可夫狀態轉換模型，其結果發現三狀態之間變動過於頻繁，以及同一狀態缺乏持續性等實證上不易解釋的情況，都說明了當馬可夫轉換模型中有超過兩種以上的狀態時，模型反而有於太過複雜而無法適當的區分出資料特性 (可能的結構性改變)。

林常青等人 (2002) 使用 Gray (1996) 提出的一般化狀態轉換模型 (簡稱 GRS-GARCH) 作為基礎，建立一個 K 個狀態且條件變異數含有 GARCH (p,q) 效果的狀態轉換模型，並且指出，所採用的分析方法與模型具有廣泛的適用性，在未來也可以應用於分析其他證券或金融資產的動態行為上。以 1994 年到 1998 年的台灣短期利率作為分析對象，其研究顯示，在不同狀態下，短期利率產生兩種不同的動態行為 (政經事件頻傳的高波動期與相對穩定的低波動期)，而且，這兩種不同的動態行為可能導因於央行對市場的不同干預所造成的。

莊忠柱與胡文正 (2005) 先利用 Gray (1996) 提出的高波動與低波動兩種狀態的 GRS-GARCH 模型，捕捉股價指數與股價指數期貨市場的個別報酬與波動性行為，並進一步利用自我迴歸分配遞延模型 (Autoregressive Distributed Lag; 簡稱 ADL)，分別探討股價指數與股價指數期貨市場的報酬與波動性的動態關係。研究顯示，允許條件平均報酬與條件變異數同時隨高波動與低波動兩種狀態變動的 GRS-GARCH 模型，較能捕捉股價指數與股價指數期貨市場的報酬與波動性的行為。

喻書庭 (2010) 結合了 Black-Schole 和 Hull-White 選擇權評價模型，對選擇權價格進行有效的預測與分析。為了提升對選擇權價格的預測與評估績效，納入了 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型，了解研究期間模型參數在狀態上的改變，模型參數中的波動率也因為狀態上的改變作修正，而有助於 Black-Schole 或 Hull-White 選擇權價格的評估績效。再者，在狀態轉換模型上加入離群值偵測模型，更能改善預測選擇權價格的準確度。

目前國內文獻，考慮狀態轉換模型下進行台指選擇權評價的研究仍相當匱乏，因此，在本論文中，採用 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型作為探討的重點，並且，參考徐士勛與管中閔 (2001) 一文的建議，將研究期間分為高波動和低波動兩種狀態，以避免模型過於複雜。再者，重新估計 Black-Schole 或 Heston-Nandi GARCH 選擇權價格，比較考慮狀態轉換後的兩種選擇權價格的估計是否獲得改善。

第三章 研究方法

在選擇權評價模型的選擇上，本研究使用 Black and Scholes (1973) 提出的 Black-Scholes 模型（固定波動模型），和 Heston and Nandi (2000) 提出的 H-N GARCH 模型（隨機波動模型），分別搭配歷史波動模型和 H-N GARCH (1,1) 模型進行實證研究，並加入 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型，找出狀態轉換的確切時間點，重新區分 Black-Scholes 模型和 H-N GARCH 模型各子區間，以檢測是否改善選擇權評價模型之預測能力。

3.1 選擇權評價模型

3.1.1 Black-Scholes 選擇權評價模型

Black-Scholes 模型是現今選擇權理論評價的基礎，主要是用來計算選擇權的價格，對資本市場做出下列的假設

1. 股價變動呈連續性的隨機漫步過程 (Random Walk Process)，且符合幾何布朗運動 (Geometric Browning Motion)。
2. 股票報酬率的機率分配服從對數常態分配 (lognormal distribution)。
3. 無法在到期日前履約，只能在到期日當天履約，為歐式選擇權。
4. 無交易成本、保證金及稅賦，且市場無買空、賣空的限制。
5. 短期無風險利率已知且為一個固定常數。
6. 證券可以分割，並不存在無風險套利機會。
7. 標的資產在衍生性商品到期期間內，不發放現金股利或股票股利。
8. 選擇權交易為連續過程。

由於 Black-Scholes 模型假設股票價格的機率分配服從對數常態分配，且其變動符合幾何布朗運動 (Geometric Browning Motion)，因此標的股價的隨機過程可寫為

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1)$$

其中 S ：標的股票價格

dS ：股價的變動量

μ ：標的股票瞬間報酬率之期望值，為一個常數

σ ：標的股票瞬間報酬率之標準差，為一個常數

dt ：表示極短時間

dz ：期望值為零，變異數為 dt 之 Standard Wiener Process

在這些假設下，選擇權價值只受標的股價、時間及被取作已知常數之變數的影響。故令選擇權價格函數為 $f(S, t) = \log S$ ，對 S 偏微分得： $\frac{\partial f}{\partial S} = S^{-1}$ ， $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -S^{-2}$ ；對 t 偏微分得： $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ 。

對 $f(S, t)$ 全微分，運用Itô's Lemma，並將(1)式帶入，可得

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (2)$$

定義此無風險投資組合為 H ，即賣出股價 $f(S, t)$ 之股票一單位，並買入股價 S 之股票 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 單位，則此投資組合部分內的資產價值 H 為

$$H = \frac{\partial f}{\partial S} S - 1 \cdot f(S, t) \quad (3)$$

若股價產生微幅變動，在 dt 短期間內，則此無風險投資組合價值 H 的變化量為

$$dH = \frac{\partial f}{\partial S} dS - 1 \cdot df \quad (4)$$

將(1)、(2)式用Itô' Lemma轉換後可得

$$\begin{cases} dS = \mu S dt + \sigma S dz \\ df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \end{cases} \quad (5)$$

將(5)式代入(4)式，整理後可得

$$dH = \frac{\partial f}{\partial S} dS - df = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \quad (6)$$

若市場之無風險利率為 r ，且在無風險套利下，則

$$dH = r \cdot H \cdot dt \quad (7)$$

將(6)式代入(7)式中即可得

$$dH = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = r \left(\frac{\partial f}{\partial S} S - f(S, t) \right) dt \quad (8)$$

將(8)重新整理後，可得到 Black-Scholes 模型的偏微分方程式

$$rf(S, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + r \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (9)$$

此時選擇權買權與賣權在到期日的邊界條件分別為

$$f(S_T, T) \begin{cases} S_T - K, & \text{if } S_T \geq K \\ 0 & , \text{if } S_T < K \end{cases}$$

$$f(S_T, T) \begin{cases} K - S_T, & \text{if } K \geq S_T \\ 0 & , \text{if } K < S_T \end{cases} \quad (10)$$

(K 為履約價)

經由變數轉換將(8)式轉換成一熱傳導方程式，然後分離變數，並運用 Fourier 積分定理，再加上其邊界條件可得偏微分方程(8)式之 closed form solution 可表示為⁷

$$C^{BS} = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (11)$$

此即為 Black-Scholes 買權評價公式

其中 C ：買權的價格

P ：賣權的價格

S_t ：標的物價格

K ：履約價格

r ：無風險利率，為一常數

$(T - t)$ ：選擇權的到期時間

⁷ 詳細推導過程，請參考附錄三。

$N(\cdot)$ ：標準常態分配的累積機率密度函數

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

同理，可得賣權評價公式為 $P^{BS} = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1)$



3.1.2 Heston-Nandi GARCH 選擇權評價模型

Bollerslev (1986) 提出一般化自我迴歸異質條件變異數模型 (Generalized ARCH, 簡稱 GARCH)，能確切捕捉到總體經濟與財務金融資料具有波動叢聚 (volatility clustering) 及高狹峰分配 (leptokurtic distribution) 兩種現象。⁸其 GARCH (p,q) 模型可表示為

$$Y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = c + \varepsilon_t \quad (12)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (13)$$

其中 Y_t ：任一時間序列變數

$$\varepsilon_t : \varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

Ω_{t-1} ：第 t-1 期的資訊集合

σ_t^2 ：條件變異數，或稱為波動性

$$p > 0 \text{ 且 } q > 0$$

$$\omega > 0, \alpha_i \geq 0 \text{ 且 } \beta_j \geq 0 \quad i = 1, \dots, p \quad j = 1, \dots, q$$

因此，GARCH (1,1) 模型可表示為 $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$ ，其中 $(\alpha + \beta)$ 為衡量衝擊對波動率的持續性 (persistence) 且 $(\alpha + \beta) < 1$ 以確保條件變異數為恆定。當 $(\alpha + \beta)$ 的估計值相當接近 1，表示波動率具有高度的持續性。

由於 Duan (1995) 提出的 GARCH 選擇權評價模型，並無法求得選擇權價格的封閉解。Heston and Nandi (2000) 利用數理統計的技巧，將一般的 GARCH 加以改良，推導出具有封閉解的選擇權評價模型。Heston and Nandi (2000) 所提出的 H-N GARCH (1,1) 模型，其標的物價格的模型可假設為

$$Y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r + \lambda \sigma_t^2 + \sqrt{\sigma_t^2} z_t \quad (14)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha \left(z_{t-1} - \gamma \sqrt{\sigma_{t-1}^2}\right)^2 \quad (15)$$

其中 S_t ：t 期的標的物價格

⁸ 同註腳三。

r ：無風險利率，為一常數

λ ：單位風險溢酬，為一常數

σ_t^2 ：長期報酬下之條件變異數

z_t ：標準常態隨機變數且 $z_t \sim N(0,1)$

$\omega > 0$ ， $\alpha \geq 0$ 且 $\beta \geq 0$

$(\beta + \alpha\gamma^2)$ 為衡量衝擊對波動率的持續性，而其穩定條件為 $(\beta + \alpha\gamma^2) < 1$

當 γ 定義為分配的偏態時， α 可定義為分配的峰態。

因為風險溢酬 (λ) 是伴隨著風險程度的大小而有所不同，故我們從式中可知， $\lambda\sigma_t^2$ 即是表示風險溢酬 (λ) 與條件變異數 (σ_t^2) 存在一特定比例 λ 的關係。

然而，僅僅只是式 (14) 和式 (15)，並無法得出選擇權的價格，於是透過風險中立模式的轉換後，令

$$\lambda^* = -\frac{1}{2} \quad (16)$$

$$\gamma^* = \gamma + \lambda + \frac{1}{2} \quad (17)$$

將式 (16) 和式 (17) 代入式 (14) 和式 (15) 中，可得出風險中立測度下的標的物價格模型，可表示為

$$Y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r - \frac{1}{2}\sigma_t^2 + \sqrt{\sigma_t^2}z_t^* \quad (18)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\left(Z_{t-1}^* - \gamma^*\sqrt{\sigma_{t-1}^2}\right)^2 \quad (19)$$

其中 $Z_t^* = z_t + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\sigma_t^2}$ ，為標準常態分配下風險中立的誤差項。

經由生成函數及許多數理統計的技巧，可得到在此特定模型下的歐式買權價格為⁹

$$\begin{aligned} C^{HN} &= e^{-r(T-t)} E_t^* [\text{Max}(S_T - K, 0)] \\ &= S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2 \end{aligned} \quad (20)$$

⁹ 詳細推導過程，請參考附錄四，以及 Rouah, F. D. and G. Vainberg (2007) 一書。

其中 C ：買權的價格

P ：賣權的價格

S_t ：標的物價格

K ：履約價格

r ：無風險利率，為一常數

$(T - t)$ ：選擇權的到期時間

$E_t^*[\cdot]$ ： t 期時，風險中立測度下的期望值

P_1, P_2 ：風險中立測度下的機率值

透過買權賣權平價說 (Put-Call Parity)，可得 $P^{HN} = C^{HN} + Ke^{-r(T-t)} - S_t$



3.2 波動性估計模型

由於 Black-Scholes 評價模型中，假設股票報酬率的變異數為一固定常數，因此本研究利用簡單歷史資料來估計 Black-Scholes 評價模型之波動；而在 H-N GARCH 評價模型中，認為股票報酬率之變異數為一隨時間改變之隨機變數，因此採用 H-N GARCH (1,1) 模型的估計結果作為 H-N GARCH 模型之波動。

3.2.1 歷史波動模型

$$\mu_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum(\mu_t - \bar{\mu})^2}{n-1}$$

其中 μ_t ：標的物的對數日報酬率

S_t ：標的物價格

$\bar{\mu}$ ：平均日報酬率

n ：觀察值個數



3.2.2 Heston-Nandi GARCH (1,1)模型

Heston and Nandi (2000) 提出的 H-N GARCH (1,1) 模型，其標的物價格的模型可假設為

$$Y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = r + \lambda\sigma_t^2 + \sqrt{\sigma_t^2}z_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha\left(z_{t-1} - \gamma\sqrt{\sigma_{t-1}^2}\right)^2$$

其中 S_t ：標的物價格

r ：無風險利率，為一常數

λ ：單位風險溢酬，為一常數

σ_t^2 ：長期報酬下之條件變異數

z_t ：標準常態隨機變數且 $z_t \sim N(0,1)$

$\omega > 0$ ， $\alpha \geq 0$ 且 $\beta \geq 0$

$(\beta + \alpha\gamma^2)$ 為衡量衝擊對波動率的持續性，而其穩定條件為 $(\beta + \alpha\gamma^2) < 1$

當 γ 定義為分配的偏態時， α 可定義為分配的峰態。

3.3 狀態轉換模型

由於我們認為研究期間曾發生全球金融風暴衝擊的影響，而改變波動路徑，因此我們在 Black-Scholes 和 Heston-Nandi GARCH 兩模型中，加入了 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型，以找出狀態轉換的確切時間點。

Hamilton (1989,1994) 提出的狀態轉換模型，主要是利用某一無法觀察到的狀態變數 S_t 來區分時間序列在不同狀態下的轉換行為，以反映結構性的改變，而此一狀態變數 S_t 依循馬可夫鏈 (markov chain) 而變動。¹⁰ 相較於傳統的時間序列或計量模型，狀態轉換模型在參數上的變動上增加了馬可夫型式的機率結構，一方面仍然允許參數隨時間而改變，另一方面則使模型不至於太過複雜，讓模型具有較廣泛的適用性。

對於一組時間序列資料 y_t ，雙狀態一階馬可夫轉換模型可表示為

$$y_t - \mu_{S_t} = \varphi(y_{t-1} - \mu_{S_{t-1}}) + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

其中 S_t ：某一無法觀察到的狀態變數，其實現值為 $S_t = 1$ 或 2

μ_{S_t} ：代表模型截距項的係數，其值隨狀態變數的實現值而改變（分別為 μ_1 和 μ_2 ）

當狀態變數 $S_t = 1$ 時，其觀察值 y_t 來自分配 (μ_1, σ_1^2)

當狀態變數 $S_t = 2$ 時，其觀察值 y_t 來自分配 (μ_2, σ_2^2)

狀態轉換模型的特色，是指狀態變數 S_t 依循一階馬可夫鏈而變動。換言之，只有前一期狀態變數 S_{t-1} 會影響當期狀態變數 S_t 的行為。因此，狀態變數 S_t 的遞移機率 (transition probability) 可以表示為

$$P_{ij} = P_r[S_t = j | S_{t-1} = i] \quad 0 \leq P_{ij} \leq 1 \quad i, j = 1, 2$$

其中 P_{ij} ：給定 $t-1$ 期在 i 狀態，而 t 期在狀態 j 的機率。

換言之，

$$P_{11} = P_r[S_t = 1 | S_{t-1} = 1] = p$$

$$P_{12} = P_r[S_t = 2 | S_{t-1} = 1] = (1 - p)$$

¹⁰ 同註腳六。

$$P_{22} = P_r[S_t = 2|S_{t-1} = 2] = q$$

$$P_{21} = P_r[S_t = 1|S_{t-1} = 2] = (1 - q)$$

其中 P_{11} ：給定 $t - 1$ 期在狀態一下，而 t 期仍維持在狀態一的機率為 p

P_{12} ：給定 $t - 1$ 期在狀態一下，而 t 期轉換成狀態二的機率為 $(1 - p)$

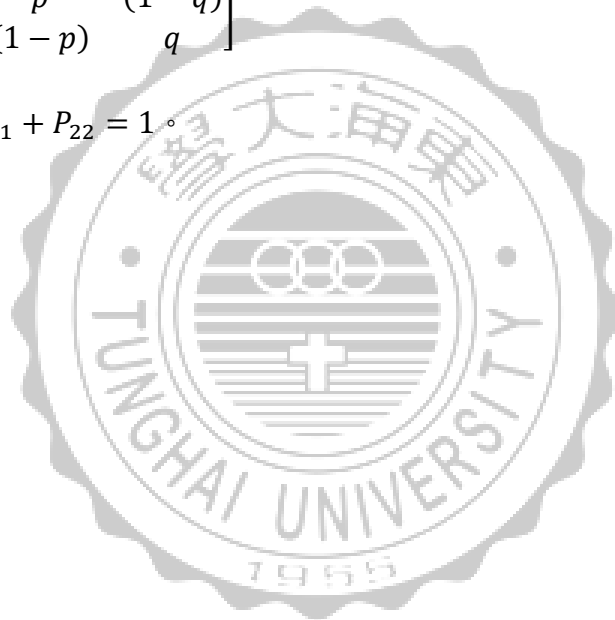
P_{22} ：給定 $t - 1$ 期在狀態二下，而 t 期仍維持在狀態二的機率為 q

P_{21} ：給定 $t - 1$ 期在狀態二下，而 t 期轉換成狀態一的機率為 $(1 - q)$

故雙狀態間的遞移機率矩陣可表示為

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & (1 - p) \\ (1 - q) & q \end{bmatrix}$$

其中 $P_{11} + P_{12} = 1$ 且 $P_{21} + P_{22} = 1$ 。



3.4 模型配適度之檢定

本研究在使用 GARCH 模型之前，必須先選擇 GARCH 模型最佳階次，一般文獻最常使用的檢定方法為 AIC (Akaike Information Criterion, 簡稱 AIC) 和 SBC (Schwarz Bayesian Criterion, 簡稱 SBC) 準則檢定。當模型估計參數較少以及樣本數愈大時，採用 SBC 是較為有利的。當 SBC 愈小，代表模型配適度愈佳。因此，本研究使用 Schwarz (1978) 所提出的 SBC 檢定方式，可以表示為

$$SBC = -2 * \log L / T + \log(T) * k / T$$

其中 $\log L$ ：對數型式的概似值

k ：模型所需估計的參數個數

T ：樣本個數

3.5 評價模型績效評估之檢定

評價模型績效評估主要是在比較理論價格與實際市場價格之間的差異，為了了解各種模型的預測能力，本研究使用平均絕對值百分比誤差 (mean absolute percentage error, 簡稱 MAPE) 與均方根百分比誤差 (root squared mean percentage error, 簡稱 RSMPE) 作為衡量不同模型績效之方法。因此，愈小的值代表模型預測的能力愈佳。

3.5.1 平均絕對值百分比誤差 (MAPE)

MAPE 能對誤差的程度予以加總，並不會因為誤差的正負而相互抵消。

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{|\text{市場價格} - \text{理論價格}|}{\text{市場價格}} \right)$$

3.5.2 均方根百分比誤差 (RSMPE)

RSMPE 的特色是對誤差程度較大的資料，給予懲罰。

$$RSMPE = \left(\frac{1}{n} \sum \left(\frac{\text{市場價格} - \text{理論價格}}{\text{市場價格}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

第四章 實證資料與分析

4.1 實證資料

4.1.1 台灣加權股價指數 (TSEC)

本研究是採用台灣股價指數之日內價格(開盤價、收盤價、成交量與剩餘天數)，資料來源為台灣證券交易所的大盤股價指數，研究期間為2005年7月1日至2010年8月31日，共計有1286筆的交易日。

4.1.2 無風險利率

無風險利率是指沒有任何違約風險資產的收益率，本研究採用金融業隔夜拆款利率作為無風險利率，資料來源為中央銀行，研究期間為2005年7月1日至2010年8月31日。

4.1.3 台灣加權股價指數選擇權 (TXO)

資料來源為台灣期貨交易所公布的「台灣加權指數選擇權每日行情下載區」，分析的期間為2005年7月1日至2010年8月31日，共計有1286個營業日。為了確保資料實證操作的合理與客觀性，我們將成交量為0，到期日未滿5日及選擇權收盤價未滿5元者捨去。

對於選擇權價位分類之標準，表一為許溪南等人(2005)對選擇權價位的定義，以最接近加權股價指數的履約價作為價平買(賣)權，其餘價位分類如表一。

表一 價位程度分類表

價內價外程度	買權 (call)	賣權 (put)
深價內	價平-400 點	價平+400 點
價內	價平-200 點	價平+200 點
價平	價平	價平
價外	價平+200 點	價平-200 點
深價外	價平+400 點	價平-400 點

依據距離到期日的長短，將選擇權再區分為近月與遠月。近月定義為距離到期日最近的一個月（亦即距離到期日小於 30 天）；遠月定義為距到期日最近的兩個月（亦即距離到期日大於 30 天，小於 60 天）。

4.2 GARCH 的最佳階次選擇與參數估計

4.2.1 基本統計量分析

在我們所選擇的研究期間，台灣經歷了許多重大的外部事件衝擊，而中央銀行也對這些情況採用了不同的政策予以因應。我們將取得的樣本資料作基本統計量分析並繪圖。¹¹表二為台灣加權股價指數 (S_t) 與其報酬率 (y_t) 的樣本平均值、標準差，及其他的敘述統計量。表中的峰態係數顯示，報酬率 (y_t) 的分配可能有厚尾的現象。台灣加權股價指數的日報酬率的定義可表示為

$$y_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \times 100$$

其中 y_t ：標的物價格的報酬率

S_t ：標的物價格

表二 台灣加權股價指數 (S_t) 與其報酬 (y_t) 的一般統計敘述

	平均值	標準差	偏態係數	峰態係數	極大值	極小值
S_t	7169.794	1221.183	-0.3783	2.9250	9809.88 (2007/10/29)	4089.93 (2008/11/20)
y_t	0.0003	0.0146	-0.2717	5.5398*	0.0674 (2009/4/30)	-0.0651 (2008/1/22)

註：*表示峰態係數大於三，代表資料有高峽峰趨勢和厚尾現象。

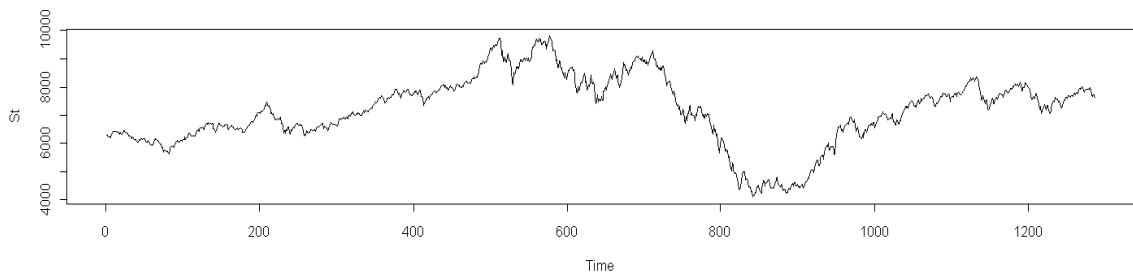
此研究期間內，發生了一些重大的外部事件，例如：2007 年 7 月美國次級房貸；2008 年 9 月雷曼兄弟宣布破產；2007 年 7 月與 2009 年間全球金融海嘯；與 2008 年 3 月國內的總統改選。在這段研究期間內，台灣央行在 2008 年 9 月宣布調降重貼現率至 3.5%，隨後陸續宣布調降至 2.75%；台灣的行政院也在 2008 年 11 月通過全民發放消費券之草案。

¹¹ 同註腳二。

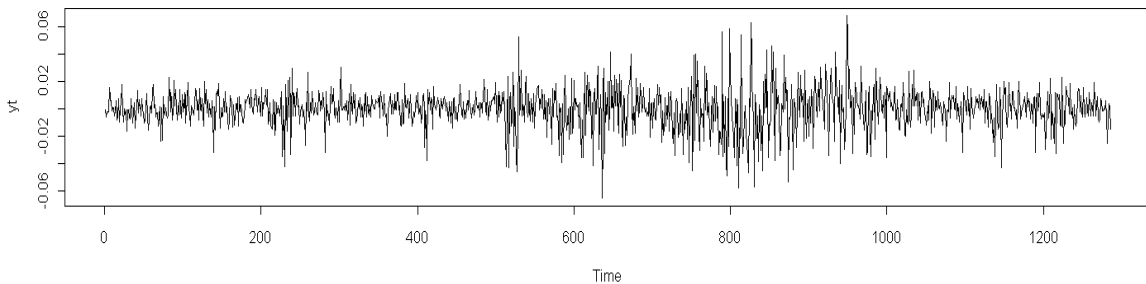
圖二和圖三分別為台灣加權股價指數 (S_t) 與其報酬率 (y_t) 在研究期間的走勢圖。我們從圖二可以看出台灣加權股票指數 (S_t) 較為平滑，而在上述重大政經事件發生的期間較為陡峭；由圖三我們亦可發現台灣加權股價指數報酬率 (y_t) 的波動大小皆不相同，其報酬率在零的上下波動，但在重大政經事件發生之際（例如：2007 年 7 月與 2009 年間全球金融海嘯），報酬率則出現較大幅度的波動。

若以 2007 年 7 月 (data 513 左右) 和 2009 年 8 月 (data 1022 左右) 為區隔時間點，並分隔為前、中、後三個區隔時間，可以觀察到前區隔時間內 (data 1 ~ data 512 左右) 和後區隔時間 (data 1023 ~ data 1285 左右)，日報酬率波動起伏相對地比較小，即變異數相對地比較小，而中區隔時間內 (data 513 ~ data 1022 左右)，日報酬率波動起伏較大，即變異數較大。因此，我們概略地推估在重大的政經事件發生之際，可能有狀態轉換之存在。

由表二和圖三，我們也可知台灣加權股價指數的報酬率，其機率分配呈現出厚尾現象與波動叢聚兩種特性，故我們使用 GARCH 模型以分析台灣股價市場的波動率現象。¹²



圖二 台灣加權股票指數的走勢圖



圖三 台灣加權股票指數報酬率的走勢圖

¹² 同註腳三。

4.2.2 GARCH 最佳階次

本研究在使用 GARCH 模型之前，必須先選擇 GARCH 模型最佳階次，一般文獻最常使用的檢定方法為 AIC (Akaike Information Criterion; 簡稱 AIC) 和 SBC (Schwarz Bayesian Criterion; 簡稱 SBC) 準則檢定。當模型估計參數較少以及樣本數愈大時，採用 SBC 是較為有利的，當 SBC 愈小，代表模型配適度愈佳。因此，本研究使用 Schwarz (1978) 所提出的 SBC 檢定方式。

Tsay (2005) 所撰寫的時間序列書中有提及，為了符合簡約原則一般使用的 GARCH 模型估計參數不會太多，因此我們針對 GARCH (1,1)、GARCH (1,2)、GARCH (2,1) 和 GARCH (2,2) 此四種最常使用的 GARCH 模型做配適度的檢定，並選擇最佳階次的 GARCH 模型做為研究使用的時間序列模型。由表三可發現 GARCH (1,1) 模型有較小的 SBC 值，故最適合本論文的時間序列模型為 GARCH (1,1) 模型。

表三 以不同時間序列 (p, q) 模型所計算出 SBC 值

	GARCH (1, 1)	GARCH (1, 2)	GARCH (2, 1)	GARCH (2, 2)
SBC	-5.837032*	-5.836775	-5.834908	-5.831437

註：*號為 SBC 值最小者

4.2.3 GARCH (1,1) 模型的參數估計

本研究採用 R 軟體，研究期間為 2005 年 7 月 1 日至 2010 年 8 月 31 日的台灣加權股價指數的日報酬率，共 1285 筆。表四為 GARCH (1,1) 模型的估計結果。以最大概似法 (MLE) 來估計模型中的參數，其中參數的估計為 $\hat{\alpha} = 0.0810$ ， $\hat{\beta} = 0.9059$ ，且 $\hat{\alpha} + \hat{\beta} < 1$ 符合條件變異數為穩定的條件。

表四 GARCH (1,1) 的參數估計

變數名稱	參數	標準誤	T 統計量	顯著水準
c	7.148×10^{-04}	3.262×10^{-04}	2.192	0.0284 *
ω	2.962×10^{-06}	1.037×10^{-06}	2.855	0.0043 **
α	8.100×10^{-02}	1.424×10^{-02}	5.687	1.29×10^{-08} ***
β	9.059×10^{-01}	1.596×10^{-02}	56.768	$< 2 \times 10^{-16}$ ***
概似函數值	3758.686			

註：***表示 1% 的顯著水準，**表示 5% 的顯著水準，*表示在 10% 的顯著水準。

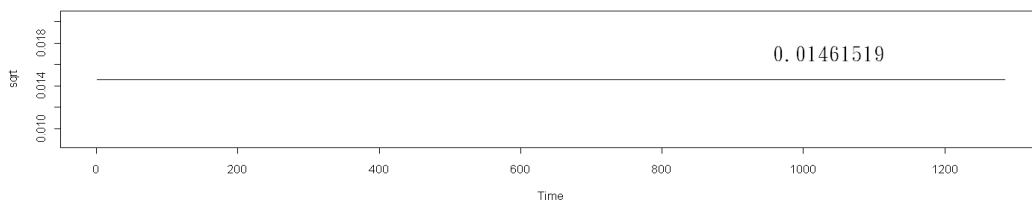
4.3 未考慮狀態轉換模型下的評價誤差

4.3.1 歷史波動率的估計

由於 Black-Scholes 評價模型中，假設股票報酬率的變異數為一固定常數，因此本論文利用歷史波動模型的估計結果 0.01461519 作為 B-S 模型之波動，圖四為未考慮狀態轉換模型下之歷史波動模型估計下的波動率。

$$\mu_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum(\mu_t - \bar{\mu})^2}{n-1}} = \sqrt{0.00021360} = 0.01461519$$



圖四 未考慮狀態轉換模型下之歷史波動模型估計下的波動率

4.3.2 Heston-Nandi GARCH (1,1)模型的參數估計

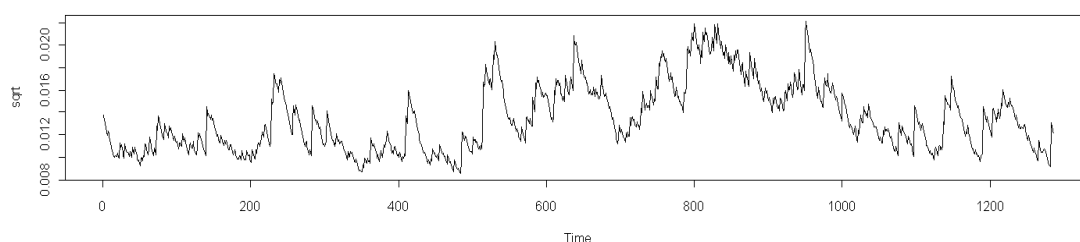
在 H-N GARCH 評價模型中，認為股票報酬率之變異數為一隨時間改變之隨機變數，因此採用 H-N GARCH (1,1) 模型的估計結果作為 H-N GARCH 模型之波動。表五和圖五為未考慮狀態轉換模型下之 H-N GARCH (1,1) 模型的估計參數和波動率，其中 $\omega = 2.789 \times 10^{-11} > 0$ ， $1.139 \times 10^{-05} \geq 0$ ， $\beta = 9.397 \times 10^{-01} \geq 0$ ，且其穩定條件為 $\beta + \alpha\gamma^2 = 0.9397 < 1$ 。

由表五也可看出，投資者的風險溢酬參數 ($\lambda = 3.913$) 大於風險中立測度下的風險溢酬參數 ($\lambda = -0.5$)，顯示出風險貼水在全區間是正的風險溢酬，換句話說，投資者整體而言是屬於風險趨避的。

表五 未考慮狀態轉換模型下之 H-N GARCH (1,1) 的參數估計

全區間 (data 1 ~ data 1285)		
變數名稱	參數	標準誤
λ	$3.913 \times 10^{+00***}$	1.420×10^{-03}
ω	$2.789 \times 10^{-11***}$	5.679×10^{-15}
α	$1.139 \times 10^{-05***}$	1.596×10^{-09}
β	$9.397 \times 10^{-01***}$	1.981×10^{-04}
對數概似函數值	6957.3	
持續性	0.9397	
變異數	0.0002	

註：***表示 1% 的顯著水準，**表示 5% 的顯著水準，*表示 10% 的顯著水準。



圖五 未考慮狀態轉換模型下之 H-N GARCH (1,1) 模型估計下的波動率

4.3.3 評價模型績效評估

本節比較 Black-Scholes 模型搭配歷史波動模型，與 H-N GARCH 模型搭配 H-N GARCH (1,1) 模型所得到的理論價格與實際市場價格之誤差，並且採用平均絕對百分比誤差 (MAPE) 與均方根百分比誤差 (RMSPE) 進行評價誤差的衡量。由表六和表七可得，在未考慮狀態轉換模型下，除了近月和遠月賣權之少數情形外（例如深價內、價內與價平），H-N GARCH 模型評價誤差明顯小於 Black-Scholes 模型。

由於我們認為研究期間內曾經發生全球金融風暴衝擊的影響，而使觀察期間內的價格結構產生改變，改變波動路徑，因此我們在 Black-Scholes 和 Heston-Nandi GARCH 兩模型中，考慮了 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型，以找出結構性改變的確切時間點。

表六 MAPE 法下的訂價誤差

MAPE		近月買權		遠月買權		近月賣權		遠月賣權	
評價模型		B-S	H-N	B-S	H-N	B-S	H-N	B-S	H-N
深價內	未考慮狀態轉換模型	0.0963	0.0836	0.1913	0.1418	0.0880	0.1197	0.1428	0.2334
價內	未考慮狀態轉換模型	0.1930	0.1828	0.3041	0.3313	0.1711	0.2390	0.2217	0.4242
價平	未考慮狀態轉換模型	0.5113	0.4394	0.5123	0.6569	0.4056	0.5036	0.3667	0.7150
價外	未考慮狀態轉換模型	1.3903	0.7369	0.9363	0.8998	0.8757	0.7777	0.5965	0.9238
深價外	未考慮狀態轉換模型	1.7690	0.9472	1.8334	0.9866	1.0128	0.9423	0.9656	0.9837

註：B-S 為歷史波動率搭配 Black-Scholes 選擇權評價模型；H-N 為 H-N GARCH(1,1) 搭配 H-N GARCH 選擇權評價模型。

表七 RMSPE 法下的訂價誤差

RMSPE		近月買權		遠月買權		近月賣權		遠月賣權	
評價模型		B-S	H-N	B-S	H-N	B-S	H-N	B-S	H-N
深價內	未考慮狀態轉換模型	0.1271	0.1127	0.2398	0.1760	0.1139	0.1512	0.1735	0.2654
價內	未考慮狀態轉換模型	0.2468	0.2252	0.3779	0.3617	0.2139	0.2839	0.2670	0.4492
價平	未考慮狀態轉換模型	0.6827	0.4900	0.6570	0.6699	0.5324	0.5487	0.4646	0.7249
價外	未考慮狀態轉換模型	2.2469	0.7828	1.3104	0.9022	1.3811	0.8071	0.8387	0.9251
深價外	未考慮狀態轉換模型	2.8917	0.9504	2.9292	0.9867	1.5829	0.9450	1.5742	0.9838

註：B-S 為歷史波動率搭配 Black-Scholes 選擇權評價模型；H-N 為 H-N GARCH(1,1) 搭配 H-N GARCH 選擇權評價模型。

4.4 狀態轉換模型的估計結果

本論文認為研究期間不能只考慮單一狀態下的行為，因此假設研究期間的報酬率存在有低波動和高波動的兩種狀態，進而利用 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型進行估計，表八為狀態轉換模型的估計結果。由表八中可知，雙狀態分配的平均數、變異數以及遞移機率，皆在 1% 的顯著水準下呈現顯著的結果。再者，分析狀態轉換模型的估計結果，在狀態一的情況下，其平均數和變異數可表示為 (μ_1, σ_1^2) ，其估計值為 (0.000692, 0.000102)；而在狀態二的情況下，其平均數和變異數可表示為 (μ_2, σ_2^2) ，其估計值為 (-0.000401, 0.000383)。由此可知，在狀態一的 σ_1^2 (=0.000102) 小於狀態二的 σ_2^2 (=0.000383)。故我們可以將狀態一判定為低波動狀態，狀態二判定為高波動狀態。

在四個遞移機率 ($P_{11}, P_{12}, P_{22}, P_{21}$) 的實證結果中，台灣加權股價指數的報酬率持續處於低波動狀態的機率 (P_{11}) 為 0.9618，而其報酬率由低波動狀態轉換成高波動狀態的機率 ($P_{12} = 1 - P_{11}$) 為 0.0382。另一方面，台灣加權股價指數的報酬率持續處於高波動狀態的機率 (P_{22}) 為 0.9369，而其報酬率由高波動狀態轉換成低波動狀態的機率 ($P_{21} = 1 - P_{22}$) 為 0.0631。由上述分析可知，除了在面臨全球金融風暴期間，報酬率呈現出較大幅度的波動之外，其他研究期間則多呈現較低波動的狀態。再者，由低波動狀態轉換成高波動狀態的機率 ($P_{12} = 0.0382$) 小於由高波動狀態轉換成低波動狀態的機率 ($P_{21} = 0.0631$)，說明投資者比較喜歡處在穩定的狀態裡（低波動狀態），而非處在不穩定的狀態裡（高波動狀態）。

圖六為台灣加權股價指數的遞移機率圖。基於狀態轉換模型的特性，狀態變數 S_t 雖為某一無法觀察到的變數，但我們仍然可以推論在任意時點 t 各狀態的機率值，有關各時點的狀態劃分，我們依循 Hamilton (1989) 的方式，以遞移機率是否大於等於 0.5 的標準來判定高、低波動狀態。當 S_t 的遞移機率大（小）於 0.5 時，這時期的經濟較有可能處於高（低）波動的狀態。值得注意的是，遞移機率只是機率論述，並非確定性的結果。因此，如何區分高、低波動狀態並無一定的標準，本論文中以 0.5 作為分界點，主要是為了方便本論文研究期間的分割。

本論文認為，若研究期間曾發生過外部事件的衝擊，而改變路徑波動，例如：2007 年 7 月次級房貸危機發生 (data 513 左右)，圖三的台灣加權股票指數報酬率由小波動轉為大波動，可視為一結構轉變時間點；相反地，2009 年第三季全球金融風暴過後 (data 1022 左右)，台灣加權股票指數報酬率可以明顯看出由大波動轉為小波動，也可視為一結構轉變時間點。依循這

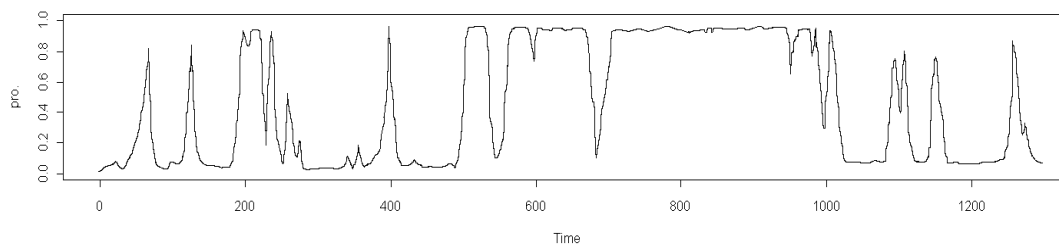
個想法，在圖六的遞移機率圖中，可以發現在 2007 年 7 月至 2009 年第三季之間 (data 513 ~ data 1022 左右)，狀態變數 S_t 的遞移機率幾乎都大於 0.5，且持續的期間很長，可視為一高波動的狀態；相反地，其他的研究期間可判定為低波動的狀態，此一結果與圖三的台灣加權股價指數報酬率結果相符合。

判定高、低波動的狀態後，我們可以進一步將研究期間加以分割，進而求出更適合模型的波動率，以增加模型的績效，降低訂價誤差之目的。根據以上的判定，我們將研究期間加以分割，分成區間一 (data 1 ~ data 512)、區間二 (data 513 ~ data 1022) 和區間三 (data 1023 ~ data 1285)，共三個子區間，以適合各子區間的波動對 Black-Scholes 和 H-N GARCH 兩種模型價格進行估計，並分析考慮狀態轉換模型下的 Black-Scholes 和 H-N GARCH 模型評價誤差是否有得到改善。

表八 狀態轉換模型的參數估計

變數名稱	參數	標準誤
μ_1	0.0007***	0.00005
μ_2	-0.0004***	0.00003
φ	0.9564***	0.04965
P_{11}	0.9618***	0.03084
P_{22}	0.9369***	0.01192
σ_1	0.0001***	0.00001
σ_2	0.0004***	0.00001
對數概似函數值	-163.8474	

註：***表示 1% 的顯著水準，**表示 5% 的顯著水準，*表示 10% 的顯著水準。



圖六 台灣加權股價指數之遞移機率圖

4.5 考慮狀態轉換模型下的評價誤差

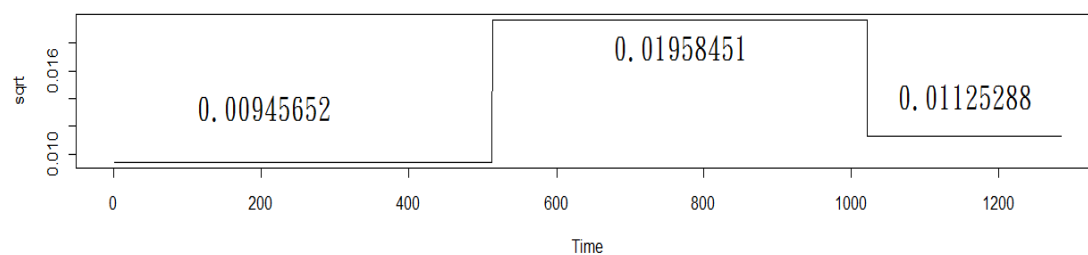
本論文利用 Hamilton (1989) 提出的狀態轉換模型，找出結構性改變的確切時間點，由上一節將研究期間重新分割成三個子區間，並且，分析分割後的 Black-Scholes 和 H-N GARCH 兩模型的波動率，經分割過後的波動率應能降低兩模型的評價誤差。

4.5.1 歷史波動率的估計

表九與圖七為考慮狀態轉換模型下的 Black-Scholes 模型估計參數與波動率。

表九 考慮狀態轉換下之歷史波動率的參數估計

	區間一 (data 1 ~ data 512)	區間二 (data 513 ~ data 1022)	區間三 (data 1023 ~ data 1285)
歷史波動率	0.00945652	0.01958451	0.01125288



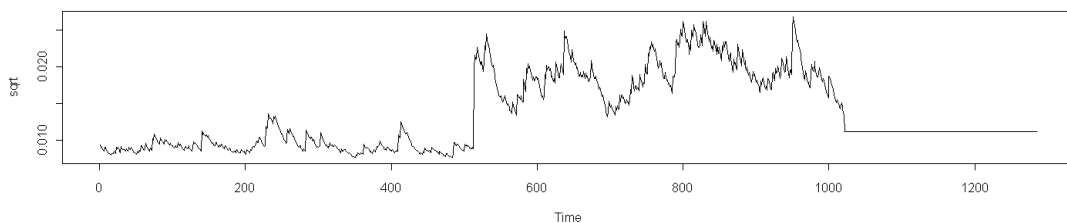
圖七 考慮狀態轉換下之歷史波動模型估計下的波動率

4.5.2 Heston-Nandi GARCH (1,1) 模型的參數估計

表十為考慮狀態轉換模型下之 H-N GARCH (1,1) 模型的估計結果，其中 $\omega > 0$ ， $\alpha \geq 0$ ， $\beta \geq 0$ ，且其穩定條件為 $\beta + \alpha\gamma^2 < 1$ 。由表十也可發現，區間一投資者的風險溢酬參數 $\lambda=11.63$ ，於2007年7月次級房貸和全球金融風暴發生期間（區間二），風險溢酬參數轉成為 $\lambda=0.5030$ 。雖然風險溢酬參數有所改變，但是風險溢酬參數仍大於風險中立測度下的風險溢酬參數（ $\lambda = -0.5$ ），此結果說明投資人從風險趨避的情況轉換成風險較不趨避的情況。

大多的投資者雖因全球金融風暴的衝擊，在風險的心態上有些許改變，但面對不穩定狀態且高風險的市場（區間二），存在波動高必然帶來高報酬的想法，因此產生逢低買進的心態。最終，全球金融風暴過後（區間三）的風險溢酬參數反轉為 $\lambda=2.886$ ，說明投資呈現回穩現象。

在圖八，我們可以清楚看到重新分割後的各子區間，與使用全區間的資料所估計出的結果圖五相比，兩者的 H-N GARCH 波動率估計值明顯不同。比較特別的是，由圖八我們可發現的，區間三的變異數不顯著，代表沒有理由拒絕它的波動率為固定不變，而區間一和區間二的波動率仍呈現一隨時間而改變的隨機變數。



圖八 考慮狀態轉換下之 H-N GARCH (1,1) 模型估計下的波動率

表十 考慮狀態轉換模型下之 H-N GARCH (1,1) 模型的參數估計

區間一 (data 1 ~ data 512)		
變數名稱	參數	標準誤
λ	$1.163 \times 10^{+01***}$	7.628×10^{-03}
ω	$2.577 \times 10^{-06***}$	3.682×10^{-10}
α	$3.994 \times 10^{-06***}$	1.476×10^{-10}
β	$9.250 \times 10^{-01***}$	7.730×10^{-03}
對數概似函數值	2952.823	
持續性	0.925029	
變異數	0.000087648	

區間二 (data 513 ~ data 1022)		
變數名稱	參數	標準誤
λ	$5.030 \times 10^{-01***}$	3.254×10^{-04}
ω	$1.158 \times 10^{-19***}$	9.443×10^{-24}
α	$2.367 \times 10^{-05***}$	2.968×10^{-09}
β	$9.374 \times 10^{-01***}$	9.484×10^{-05}
對數概似函數值	2572.223	
持續性	0.9373876	
變異數	0.0003780029	

區間三 (data 1023 ~ data 1285)		
變數名稱	參數	標準誤
λ	$2.886 \times 10^{+00***}$	9.592×10^{-04}
ω	$2.017 \times 10^{-05***}$	9.578×10^{-09}
α	$1.552 \times 10^{-23***}$	3.541×10^{-28}
β	$8.401 \times 10^{-01***}$	9.021×10^{-05}
對數概似函數值	1472.254	
持續性	0.8400866	
變異數	0.0001261477	

註：***表示 1% 的顯著水準，**表示 5% 的顯著水準，*表示 10% 的顯著水準。

4.5.3 評價模型績效評估

本節將狀態轉換模型所得到的結構變動的確切時間點，重新區分 Black-Scholes 和 H-N GARCH 模型各子區間，以適合各子區間的波動對價格進行估計，採用平均絕對百分比誤差 (MAPE) 和均方根百分比誤差 (RMSPE) 評估模型進行評價誤差；並與「未考慮狀態轉換模型下的全區間」的評價誤差作比較，由表十一和表十二可以發現：

- (1) 在 Black-Scholes 模型下，「考慮狀態轉換模型下」的評價誤差明顯小於「未考慮狀態轉換模型下」者，有些誤差值甚至下降為不到原來的一半。並且，愈往深價外（即在買權時， K 愈大於 S ；在賣權時， K 愈小於 S ），考慮狀態轉換模型所能降低的評價誤差幅度就愈大，例如：表十一近月買權的價外，MAPE 由 1.39030 降為 0.63545。
- (2) 在 H-N GARCH 模型下，尤其是深價內、價內與深價外，「考慮狀態轉換模型下」的評價誤差明顯小於「未考慮狀態轉換模型下」的評價誤差。
- (3) 未考慮狀態轉換模型下，除了近月和遠月賣權之少數情形外（例如：深價內、價內與價平），H-N GARCH 模型評價誤差明顯小於 Black-Scholes 模型。
- (4) 考慮狀態轉換模型下，大幅提升 Black-Scholes 模型的績效，除了近月和遠月買權之少數情形外（例如：深價內與深價外），Black-Scholes 模型評價誤差甚至優於 H-N GARCH 模型。

表十一 MAPE 法下的訂價誤差

MAPE		近月買權		遠月買權		近月賣權		遠月賣權	
評價模型		B-S	H-N	B-S	H-N	B-S	H-N	B-S	H-N
深價內	未考慮狀態轉換模型	0.0963	0.0836	0.1913	0.1418	0.0880	0.1197	0.1428	0.2334
	考慮狀態轉換模型	0.0788	0.0812	0.1390	0.1398	0.0804	0.1158	0.1064	0.2310
價內	未考慮狀態轉換模型	0.1930	0.1828	0.3041	0.3313	0.1711	0.2390	0.2217	0.4242
	考慮狀態轉換模型	0.1312	0.1750	0.1913	0.3308	0.1206	0.2331	0.1318	0.4244
價平	未考慮狀態轉換模型	0.5113	0.4394	0.5123	0.6569	0.4056	0.5036	0.3667	0.7150
	考慮狀態轉換模型	0.2746	0.4573	0.2844	0.6851	0.2144	0.5291	0.1819	0.7412
價外	未考慮狀態轉換模型	1.3903	0.7369	0.9363	0.8998	0.8757	0.7777	0.5965	0.9238
	考慮狀態轉換模型	0.6354	0.7700	0.4622	0.9196	0.3576	0.8283	0.2530	0.9393
深價外	未考慮狀態轉換模型	1.7690	0.9472	1.8334	0.9866	1.0128	0.9423	0.9656	0.9837
	考慮狀態轉換模型	0.9681	0.8990	0.7671	0.9848	0.4918	0.9290	0.3423	0.9814

註：B-S 為歷史波動率搭配 Black-Scholes 選擇權評價模型；H-N 為 H-N GARCH (1,1) 模型搭配 H-N GARCH 選擇權評價模型。

表十二 RMSPE 法下的訂價誤差

RMSPE		近月買權		遠月買權		近月賣權		遠月賣權	
評價模型		B-S	H-N	B-S	H-N	B-S	H-N	B-S	H-N
深價內	未考慮狀態轉換模型	0.1271	0.1127	0.2398	0.1760	0.1139	0.1512	0.1735	0.2654
	考慮狀態轉換模型	0.1129	0.1088	0.1929	0.1723	0.1091	0.1466	0.1456	0.2620
價內	未考慮狀態轉換模型	0.2468	0.2252	0.3779	0.3617	0.2139	0.2839	0.2670	0.4492
	考慮狀態轉換模型	0.1832	0.2111	0.2640	0.3551	0.1623	0.2723	0.1716	0.4441
價平	未考慮狀態轉換模型	0.6827	0.4900	0.6570	0.6699	0.5324	0.5487	0.4646	0.7249
	考慮狀態轉換模型	0.3722	0.4944	0.3842	0.6921	0.2842	0.5624	0.2295	0.7456
價外	未考慮狀態轉換模型	2.2469	0.7828	1.3104	0.9022	1.3811	0.8071	0.8387	0.9251
	考慮狀態轉換模型	0.9564	0.8008	0.6247	0.9224	0.4928	0.8456	0.3198	0.9407
深價外	未考慮狀態轉換模型	2.8917	0.9504	2.9292	0.9867	1.5829	0.9450	1.5742	0.9838
	考慮狀態轉換模型	1.3832	0.9202*	1.0896	0.9856	0.6311	0.9362	0.4340	0.9816

註：B-S 為歷史波動率搭配 Black-Scholes 選擇權評價模型；H-N 為 H-N GARCH (1,1) 模型搭配 H-N GARCH 選擇權評價模型。

第五章 結論

本研究中，我們發現一旦考慮研究期間會受到外部事件衝擊的影響，並採用 Hamilton (1989) 提出的雙狀態單變量的狀態轉換模型，我們即能找出台灣加權股價指數報酬率，在全球金融風暴前後的狀態轉換時間點。藉由找到的狀態轉換時間點，我們將研究期間重新分割成三個子區間，並算出分割後的 Black-Scholes 和 H-N GARCH 兩評價模型的波動率，經分割過後的波動率，能降低兩選擇權模型的評價誤差。

在過去 Black-Scholes 和 H-N GARCH 兩評價模型的文獻中，並未探討過加入狀態轉換模型下的誤差表現。換言之，過去的選擇權評價模型文獻，只探討了單一狀態下的行為，並未探討過兩種狀態下的行為。我們的實證結果顯示，加入狀態轉換模型的兩評價模型，將可降低兩評價模型的估計誤差，並且，大幅提升兩評價模型的績效。

我們的實證也傳達了三項有關台指選擇權的重要資訊。第一，若未考慮狀態轉換模型，H-N GARCH 評價模型的估計誤差明顯低於 Black-Scholes 評價模型的估計誤差。第二，考慮狀態轉換模型，兩評價模型的估計誤差明顯小於「未考慮狀態轉換模型」的估計誤差。第三，考慮狀態轉換模型，除了近月和遠月買權之少數情形下，Black-Scholes 評價模型（固定波動模型）的估計誤差甚至優於 H-N GARCH 評價模型（隨機波動模型）。其主要的理由是 H-N GARCH 評價模型本身已考慮到波動率為一隨時間改變之隨機變數，加入狀態轉換模型後，重新分割後的三個子區間，對於該模型波動率的變動影響不大，誤差沒有什麼改變。然而，Black-Scholes 評價模型本身假設波動率為一固定不變的常數，加入狀態轉換後，分割後的各子區間，對該模型波動率的變動影響很大，導致估計出來的評價誤差大幅降低，大幅提升該模型的績效。

參考文獻

中文部分

方春華 (2004), *封閉解 GARCH 選擇權模型運用於台指選擇權評價與波動性之研究*, 台灣大學財務金融學系研究所碩士論文。

石村貞夫與石村園子 (2004), *細說 Black-Scholes 微分方程式*, 鼎茂書局。

林向愷、黃裕烈與管中閔 (1998), 「景氣循環轉折點認定與經濟成長率預測」, *經濟論文叢刊*, 26(4), 431-457。

林常青、洪茂蔚與管中閔 (2002), 「台灣短期利率的動態行為:狀態轉換模型的應用」, *經濟論文叢刊*, 30(1), 29-55。

徐士勛與管中閔 (2000), 「九零年代台灣的景氣循環:馬可夫轉換模型與紀卜斯抽樣法的應用」, *人文及社會科學集刊*, 13, 515-40。

莊忠柱與胡文正 (2005), 「具有狀態轉換過程下的臺灣股價指數與股價指數期貨市場的報酬與波動性動態關係」, *財務金融學刊*, 13(1), 1-30。

許溪南、林昭賢與陳浚泓 (2005), 「B-S 模型與隨機波動性定價模式之比較-台灣股價指數選擇權之實證」, *中山管理評論*, 13(3), 837-871。

喻書庭 (2010), *狀態轉換模型對選擇權訂價的預測*, 東海大學經濟系研究所碩士論文。

楊奕農 (2005), *時間序列分析-經濟與財務上之應用*, 雙葉初版。

羅善明 (2010), *指數選擇權 BS 評價模型與 GARCH 評價模型之比較*, 台北大學統計學系研究所碩士論文。

英文部分

Amin, K. and V. Ng (1993), *ARCH processes and option valuation*, Manuscript, University of Michigan.

Black, F. and M. Scholes (1973), "The pricing of options and corporate liabilities," *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-54.

- Bollerslev, T. (1986), "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-27.
- Cai, J. (1994), "A Markov model of switching-regime ARCH," *Journal of Business & Economic Statistics*, 12(3), 309-316.
- Duan, J. C. (1995), "The GARCH option pricing model," *Mathematical Finance*, 5(1), 13-32.
- Dumas, B., J. Fleming and R.E. Whaley (1998), "Implied volatility functions: Empirical tests," *The Journal of Finance*, 53(6), 2059-2106.
- Engle, R. F. (1982), "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation," *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 50(4), 987-1007.
- Gray, S. F. (1996), "Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process," *Journal of Financial Economics*, 42(1), 27-62.
- Hamilton, J. D. (1989), "A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle," *Econometrica : Journal of the Econometric Society*, 57(2), 357-384.
- Hamilton, J. D. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton : Princeton University Press.
- Hamilton, J. D. and R. Susmel (1994), "Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime," *Journal of Econometrics*, 64(1-2), 307-333.
- Heston, S. L. and S. Nandi (2000), "A closed-form GARCH option valuation model," *Review of Financial Studies*, 13(3), 585.
- Rouah, F. D. and G. Vainberg (2007), *Option Pricing Models and Volatility Using Excel - VBA*, John Wiley & Sons, INC.
- Schwarz, G. (1978), "Estimating the Dimension of a Model," *Annals of Statistics*, 6, 461-464.
- Su, Y. C., M. D. Chen and H. C. Huang (2010), "An application of closed-form GARCH option-pricing model on FTSE 100 option and volatility," *Applied Financial Economics*, 20(11), 899-910.
- Tsay, R. S. (2005), *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, INC.

附錄一

本附錄詳細說明 2005 年 7 月至 2010 年 8 月發生的重大政經事件，以供參考。

- 2005 年

- 2006 年 美伊戰爭

- 2007 年

07 月：美國次級房貸危機

- 2008 年 全球金融海嘯爆發

03 月：全美第五大投資銀行貝爾斯登（Bear Stearns）垮台賣給了摩根大通。

台灣總統改選。

09 月：美國政府挹注房利美和房地美最多各 1000 億美元。

全美第四大投資銀行雷曼兄弟（Lehman Brothers）申請破產保護。

全美第三大投資銀行美林（Merrill Lynch）被美國銀行收購。

世界最大保險集團美國國際集團（AIG）在獲得金援後，走向國有化。

台灣央行宣布調降新台幣各種存款準備率 5 碼，隨後首度調降重貼現

率半碼至 3.5%，隨後再陸續宣布調降重貼現率至 2.75%。

11 月：台灣行政院通過「振興經濟消費券發放特別條例」草案。

- 2009 年 金融海嘯

10 月：台灣景氣對策信號已擺脫連四個月的黃藍燈，轉為綠燈

11 月：台灣景氣對策信號更亮出黃紅燈，確定國內景氣已漸回溫

第三季經濟成長率仍為負成長，但第四季已轉為正成長

- 2010 年

附錄二

本附錄詳細說明馬可夫鏈 (Markov Chain) ，以供參考。

馬可夫鏈是一種具有馬可夫特性 (Markov Property) 的隨機特性 (Stochastic Process) ，其條件機率僅與有限的落後其有關。換言之，某一 S_t 為服從 N 狀態的隨機變數 $\{1,2,3,\dots,N\}$ ，假設前一期的狀態變數 S_{t-1} 會影響當期狀態變數 S_t ，則機率可表示為

$$P_r[S_t = j | S_{t-1} = i, S_{t-2}, S_{t-3}, \dots] = P_r[S_t = j | S_{t-1} = i] = P_{ij} \quad 0 \leq P_{ij} \leq 1$$

其中 $\{P_{ij}\}_{i,j=1,2,3,\dots,N}$ 為遞移機率，代表馬可夫鏈由前期是狀態 i 移轉至當期是狀態 j 的轉換機率，此機率具有 $P_{i1} + P_{i2} + \dots + P_{iN} = 1$ 的基本特質。

對於 $(N \times N)$ 的遞移機率矩陣 (the matrix of transition probability) 可表示為

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots & P_{N1} \\ P_{12} & P_{22} & \dots & P_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1N} & P_{2N} & \dots & P_{NN} \end{bmatrix}$$

其中第 j 列第 i 行的 P 矩陣元素是遞移機率 P_{ij} ，例如 P_{12} 可表示為狀態 1 移轉至狀態 2 的轉換機率。

若為雙狀態的遞移機率 (transition probability) 時，則可表示為

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $P_{11} + P_{12} = 1$ 且 $P_{21} + P_{22} = 1$ 。

若我們改變設定成二階的馬可夫鏈，則狀態變數 S_t 的轉換過程只會受到 S_{t-1} 和 S_{t-2} 的影響，其餘依此類推。

附錄三

本附錄推導，藉由 Black-Scholes 偏微分方程式，再加上邊界條件，推導出 Black-Scholes 買權評價公式¹³。

$$\text{Black-Scholes 偏微分方程式：} rf(S, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + r \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (1)$$

$$\text{買權邊界條件：} f(S_T, T) = \begin{cases} S_T - X & \text{if } S_T \geq X \\ 0 & \text{if } S_T < X \end{cases}$$

步驟 1：變數轉換

$$\text{令} \begin{cases} x = T - t \\ u = \log \frac{S}{X} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) \end{cases}$$

將變數 (S, t) 轉成變數 (u, x) ，則 $f(S, t) = e^{-r(T-t)} \cdot y(u, x) = e^{-rx} \cdot y(u, x)$

由上式可得到

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = e^{-rx} \left[-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) y_u + ry - y_x \right] \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} = e^{-rx} \cdot y_u \cdot S^{-1} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right) = e^{-rx} \cdot S^{-2} \cdot (y_{uu} - y_u) \quad (4)$$

將式(2)、(3)、(4)代回式(1)中，可得

$$\begin{aligned} rf(S, t) &= e^{-rx} \left[-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) y_u + ry - y_x \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-rx} \cdot S^{-2} \cdot (y_{uu} - y_u) \sigma^2 S^2 + r e^{-rx} \cdot y_u \cdot S^{-1} S \end{aligned}$$

左式=右式

$$e^{-rx} \left[ry - y_x + \frac{1}{2} \sigma^2 y_{uu} \right] = e^{-rx} \cdot (ry)$$

將上式兩邊同除以 $\frac{1}{e^{-rx}}$ ，可得 $\left[ry - y_x + \frac{1}{2} \sigma^2 y_{uu} \right] = ry$

經由變數轉換將 Black-Scholes 偏微分方程式轉為一熱傳導方程式，可得

¹³ 參考石村貞夫與石村園子 (2004) 一書。

$$y_{uu}(u, x) - \frac{2}{\sigma^2} y_x(u, x)$$

$$\text{邊界條件改變為 } y(u, 0) = \begin{cases} X(e^u - 1) & \text{if } u \geq 0 \\ 0 & \text{if } u < 0 \end{cases}$$

步驟 2：分離變數

利用分離變數法，即 $y(u, x) = V(u) \cdot W(x)$ ，則

$$y_{uu}(u, x) = V_{uu}(u) \cdot W(x) \quad (6)$$

$$y_x(u, x) = V(u) \cdot V_x(x)$$

將式(6)代入熱傳導方程式式(5)中，假設其值為 $-k^2$ ，且 $-k^2 < 0$ 才滿足邊界條件。

$$\frac{V_{uu}(u, x)}{V(u)} = -k^2 = \frac{2}{\sigma^2} \frac{W_x(x)}{W(x)} \quad (7)$$

將式(7)分成兩個偏微分方程式求解，得式(8)

$$\begin{cases} V(u) = C_1(k) \cdot \cos ku + C_2(k) \cdot \sin ku \\ W(x) = C_3 \cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} \end{cases} \quad (8)$$

其中， $C_1(k)$ 與 $C_2(k)$ 為和 k 有關的常數， C_3 為常數。

$$\text{則 } y(u, x) = V(u) \cdot W(x) = (C(k) \cdot \cos ku + D(k) \cdot \sin ku) e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} \quad (9)$$

式(9)為所求偏微分方程式的其中一解

將所有的 $k(0 \leq k \leq \infty)$ 代入所得解的加總亦為其解，故可得式(10)

$$y(u, x) = \int_0^\infty (C(k) \cdot \cos ku + D(k) \cdot \sin ku) e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk \quad (10)$$

步驟 3：有初始條件，運用 Fourier 積分定理求解

$$\text{令 } x = 0, \text{ 則 } y(u, 0) = g(a) = \int_0^\infty (C(k) \cdot \cos ku + D(k) \cdot \sin ku) dk$$

利用 Fourier 積分展開式，可求得 $C(k)$ 與 $D(k)$ 係數

$$\begin{cases} C(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \cos ka da \\ D(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \sin ka da \end{cases}$$

邊際條件： $g(a) = \begin{cases} Xe^u - X & u \geq 0 \\ 0 & u < 0 \end{cases}$

將 $C(k)$ 和 $D(k)$ 代入式(10)，並利用積分公式整理後可得到式(11)

$$\begin{aligned}
 & y(u, x) \\
 &= \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(a) \cos ka \, da \right] \cdot \cos ku + \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(a) \sin ka \, da \right] \cdot \sin ku \right\} \\
 & \quad \cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk \\
 &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(a) \cos ka \cos ku \, da + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(a) \sin ka \sin ku \, da \right] \cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk \\
 &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(a) (\cos ka \cos ku + \sin ka \sin ku) da \right] \cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty g(a) \cos k(a-u) \right] \cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty g(a) \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(a-u)^2}{2\sigma^2 x}} \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{x}} \right] da \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \int_{-\infty}^\infty g(a) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a-u}{\sigma\sqrt{x}} \right)^2} da
 \end{aligned} \tag{11}$$

令 $v = \frac{a-u}{\sigma\sqrt{x}}$ ，則 $a = u + \sigma\sqrt{x}v$

邊界條件變成 $g(a) = g(u + \sigma\sqrt{x}v) = \begin{cases} X(e^{u+\sigma\sqrt{x}v} - 1), & v \geq \frac{-u}{\sigma\sqrt{x}} \\ 0, & v < \frac{-u}{\sigma\sqrt{x}} \end{cases}$

Black-Scholes 偏微分方程式之解右式部分變成

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \int_{-\infty}^\infty g(a) e^{-\frac{1}{2}v^2} da &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \int_{-\infty}^\infty g(a) e^{-\frac{1}{2}v^2} \sigma\sqrt{x} dv \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^\infty (Xe^{u+\sigma\sqrt{x}v} - x) e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^\infty Xe^{u+\sigma\sqrt{x}v} e^{-\frac{1}{2}v^2} dv - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^\infty Xe^{-\frac{1}{2}v^2} dv
 \end{aligned}$$

令 $z = v - \sigma\sqrt{x}$ ，將 $y(u, x)$ 分成兩部份各別積分，並利用變數轉換法可得

$$\begin{aligned}
y(u, x) &= Se^{rx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} - \sigma\sqrt{x}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - X \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
&= Se^{rx} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - X \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right)
\end{aligned}$$

則 Black-Scholes 買權評價公式可表示為

$$\begin{aligned}
f(S, t) &= S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - Xe^{-rt} \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right) \\
&= S \cdot N(d_1) - Xe^{-rt} \cdot N(d_1) \\
&= C^{BS}
\end{aligned}$$



附錄四

在 Heston and Nandi (2000) 提出的選擇權評價模型中， P_1 和 P_2 必須先行計算，用以計算出選擇權的理論價格，而當 P_1 和 P_2 計算出之後，進一步定義標的物價格的生成函數 (generating function)。

令 $f(\phi)$ 為標的物價格的生成函數，則

$$f(\phi) = E_t[S_{t+T}^\phi] \quad (12)$$

式 (12) 同時也是標的物價格取對數後的動差生成函數 (moment generating function)，也就是 $E_t[S_{t+T}^\phi] = E_t[\phi \log S_{t+T}]$ ，此外，令 $f^*(\phi)$ 可表示為風險中立過程下的生成函數，Heston and Nandi (2000) 指出風險中立過程下的生成函數，依循 GARCH (1,1) 模型的線性對數形式 (log-linear form)，其形式可假設為

$$f(\phi) = S_T^\phi \exp(A_t + B_t \sigma_{t+1}^2)$$

按照所假設的形式進行化簡，並比較係數，就能得到各係數間的遞迴 (recursively) 關係式為

$$A_t = A_{t+1} + \phi r + B_{t+1} w - \frac{1}{2} \log(1 - 2\alpha B_{t+1})$$

$$B_t = \phi(\lambda + \gamma) - \frac{1}{2} \gamma^2 + \beta B_{t+1} + \frac{\frac{1}{2}(\phi - \gamma)^2}{1 - 2\alpha B_{t+1}}$$

而將初始值 (starting value) 設定為 $A_t = B_t = 0$

P_1 和 P_2 的計算：

在 Heston and Nandi (2000) 提出的選擇權評價模型中， P_1 和 P_2 必須先行計算，用以計算出選擇權的理論價格。因此，我們利用風險中立測度下的生成函數 $f^*(\phi)$ 計算出來。Heston and Naodi (2000) 指出風險中立測度下的機率值可寫成

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{e^{-r(T-t)}}{\pi S_t} \int_0^\infty R_e \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi+1)}{i\phi} \right] d\phi$$

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty R_e \left[\frac{K^{-i\phi} f^*(i\phi)}{i\phi} \right] d\phi$$

其中 $(T - t)$ ：到期日

$f^*(\cdot)$ ：風險中立過程下的生成函數

$E_t^*[\cdot]$ ：風險中立過程下的期望值

S_t ：t 期的標的物價格

P_1, P_2 ：風險中立過程下的可能性

R_e ：函數的實部

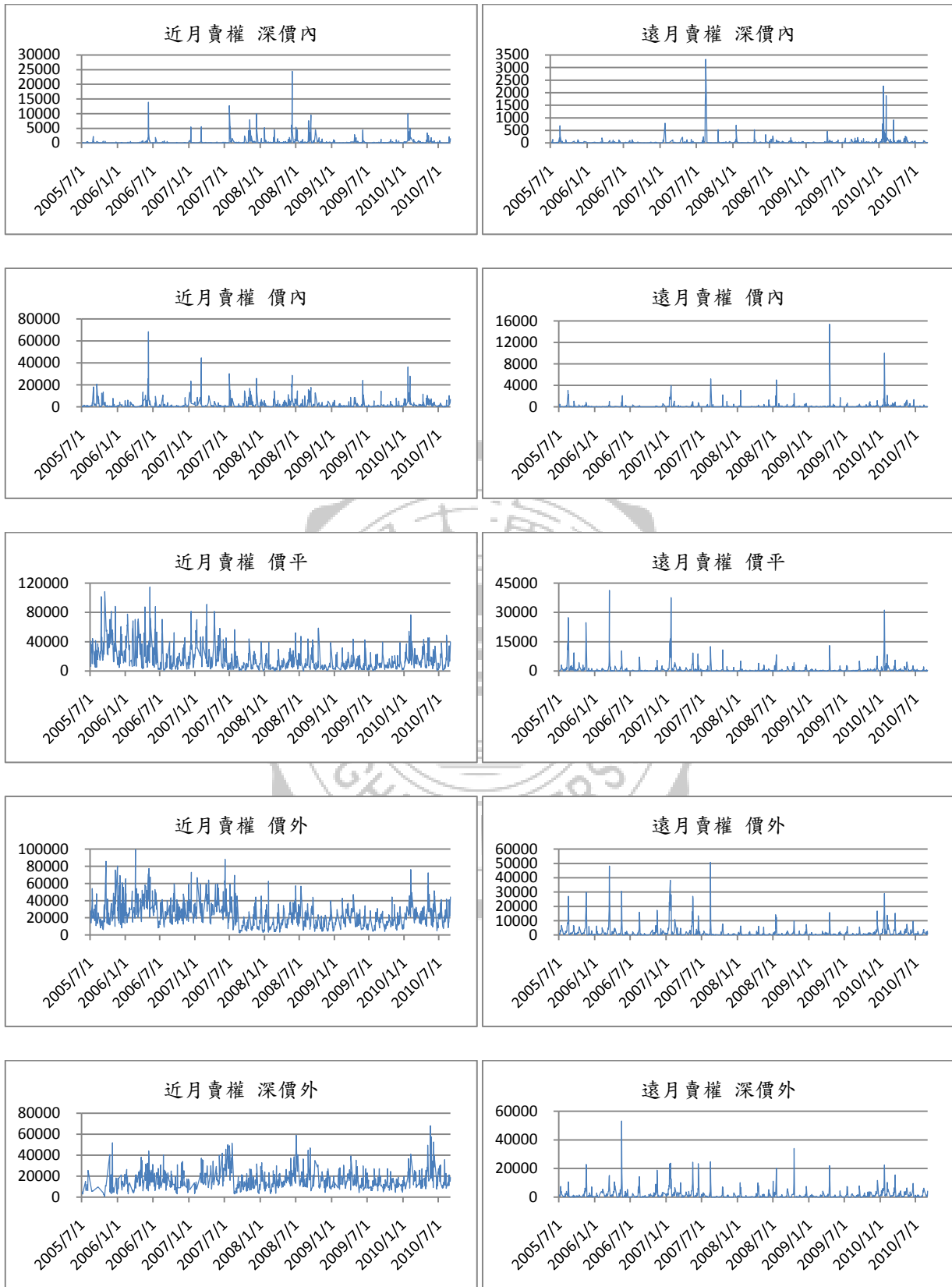


附圖一 買權之成交量¹⁴



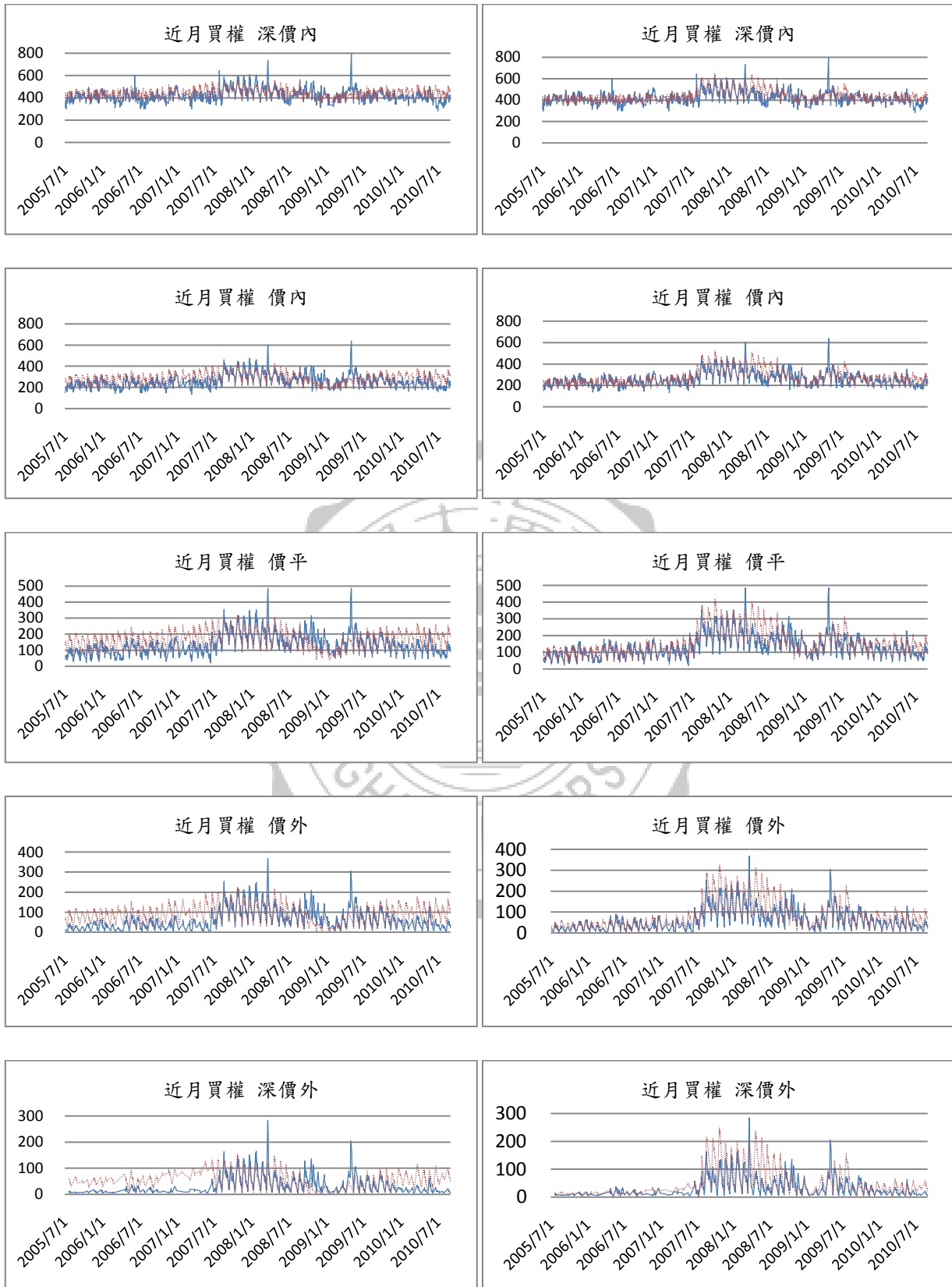
¹⁴ 左邊為研究期間之近月買權成交量，右邊為研究期間之遠月買權成交量。

附圖二 賣權之成交量¹⁵



¹⁵ 左邊為研究期間之近月賣權成交量，右邊為研究期間之遠月賣權成交量。

附圖三 近月買權 Black-Scholes 評價模型¹⁶



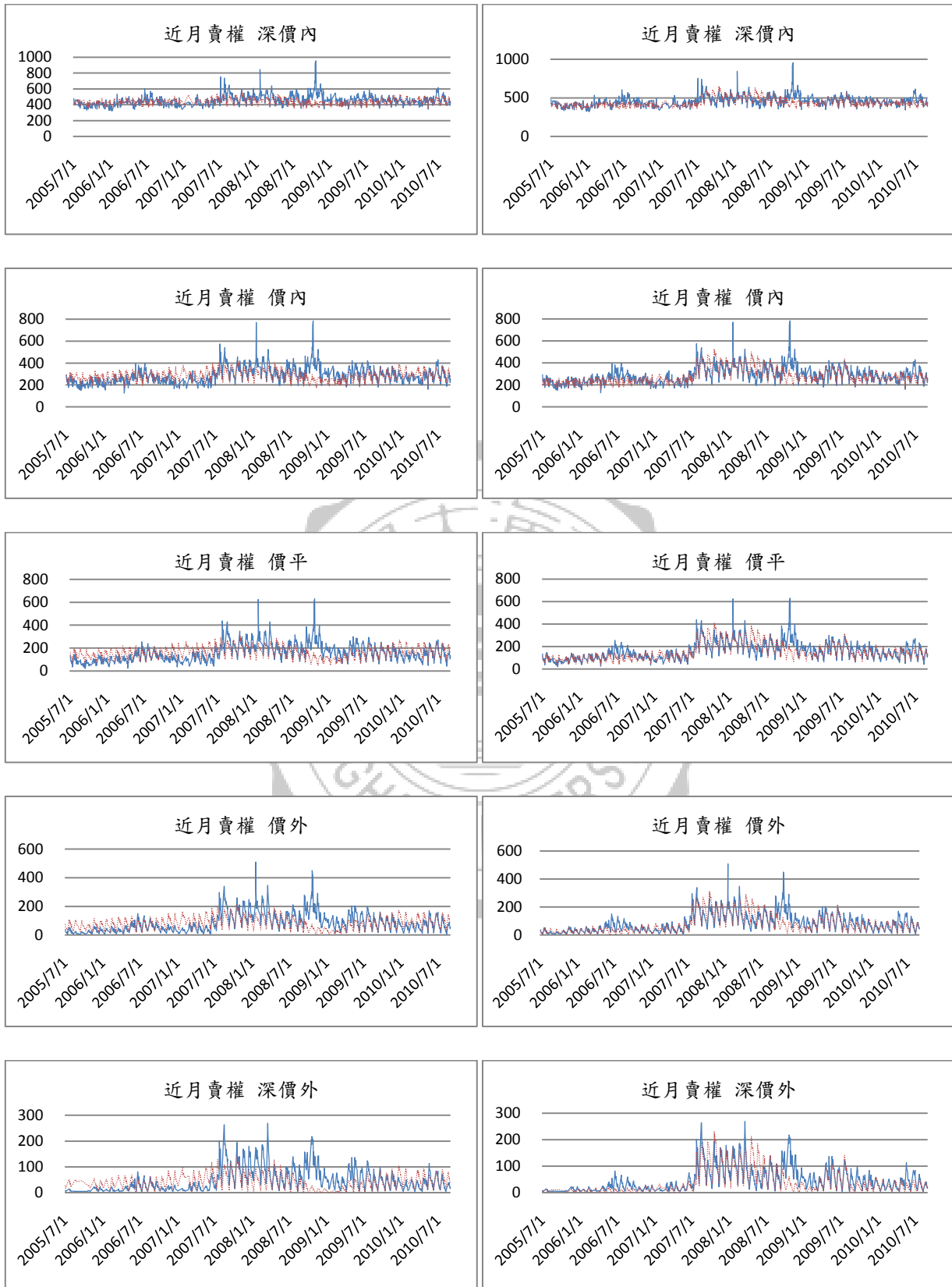
¹⁶ 左邊為「未考慮狀態轉下」的 Black-Scholes 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖
右邊為「考慮狀態轉下」的 Black-Scholes 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖

附圖四 遠月買權 Black-Scholes 評價模型¹⁷



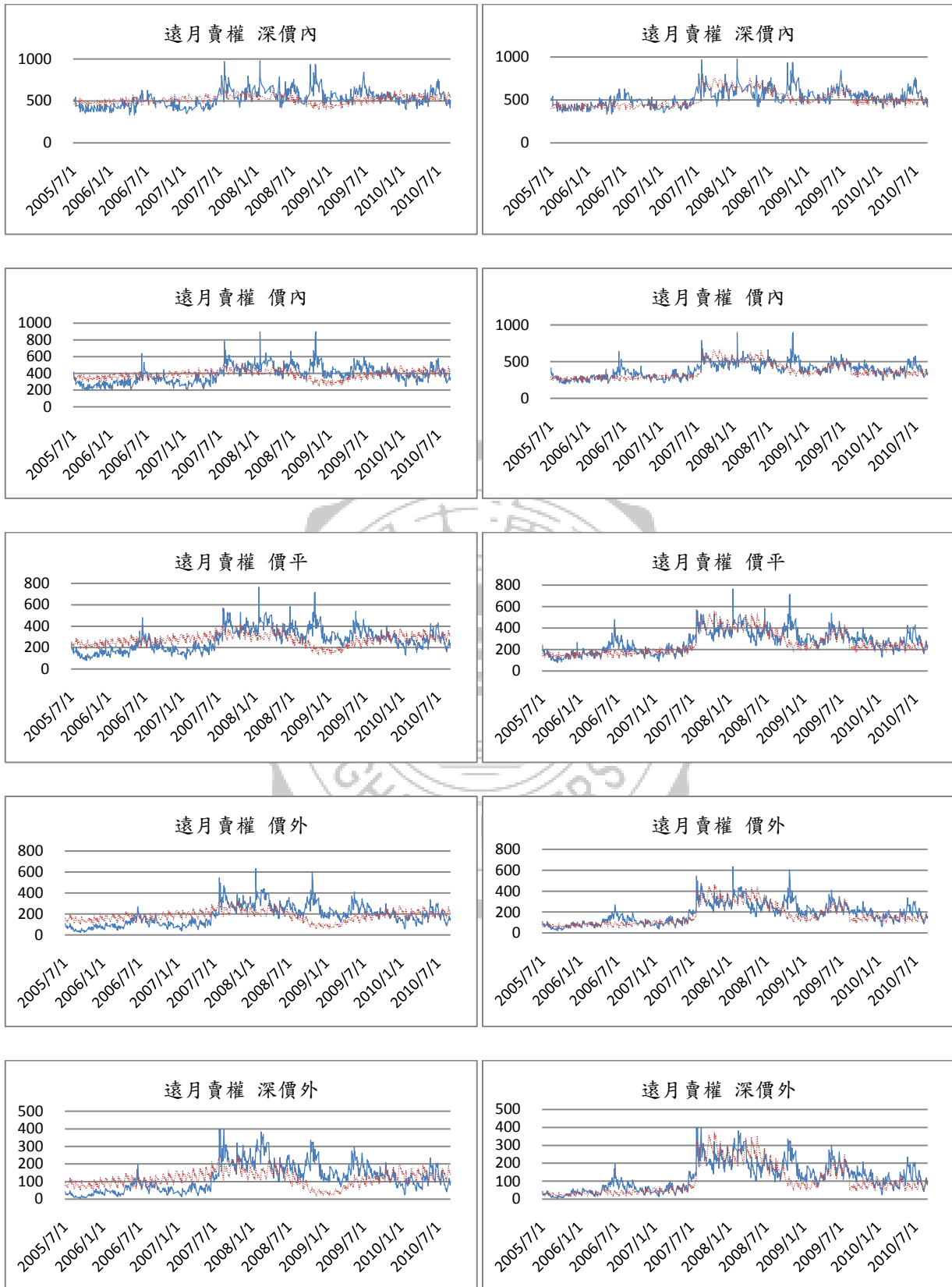
¹⁷ 左邊為「未考慮狀態轉下」的 Black-Scholes 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖
右邊為「考慮狀態轉下」的 Black-Scholes 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖

附圖五 近月賣權 Black-Scholes 評價模型¹⁸



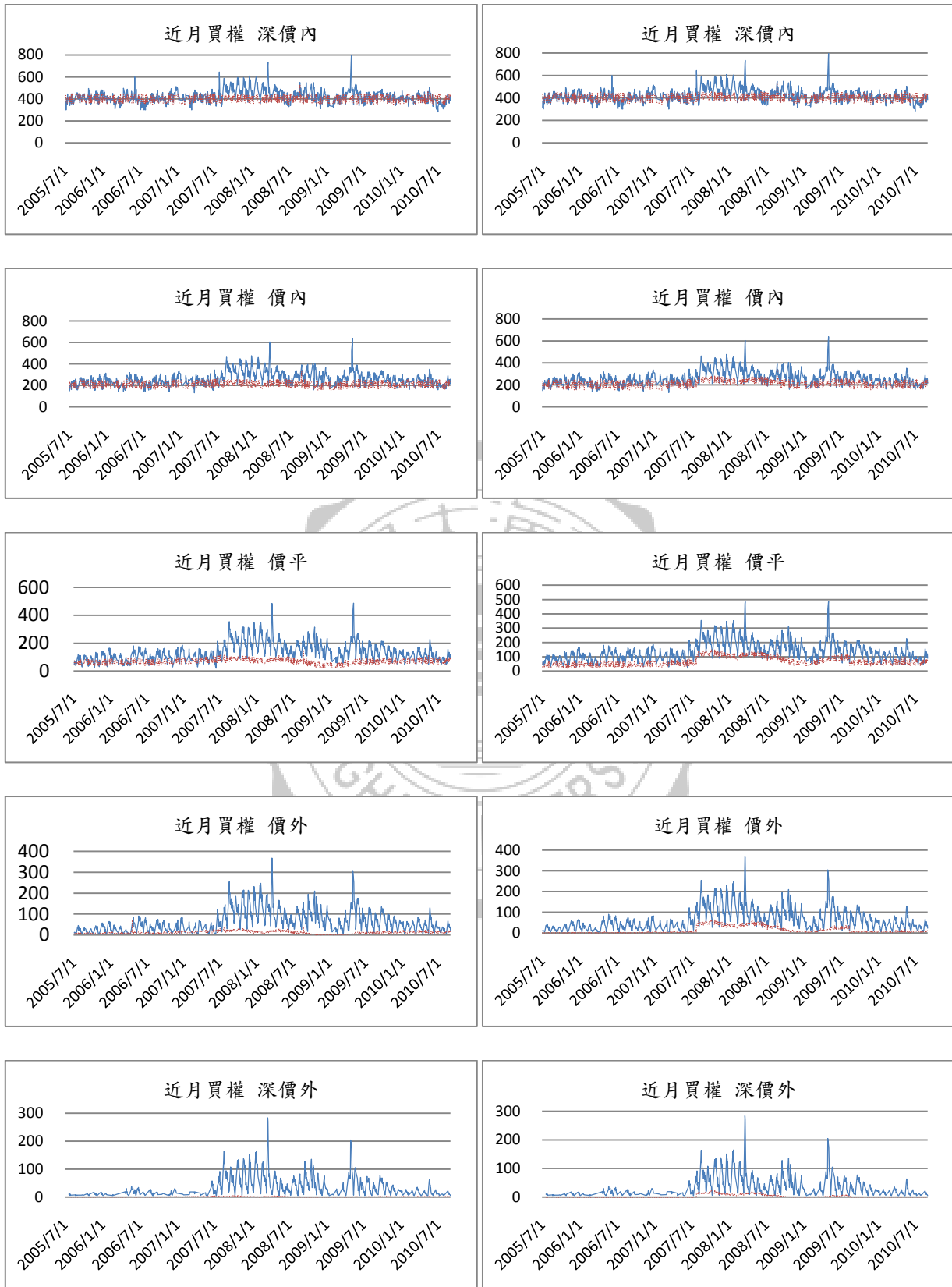
¹⁸ 左邊為「未考慮狀態轉下」的 Black-Scholes 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖
 右邊為「考慮狀態轉下」的 Black-Scholes 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖

附圖六 遠月賣權 Black-Scholes 評價模型¹⁹



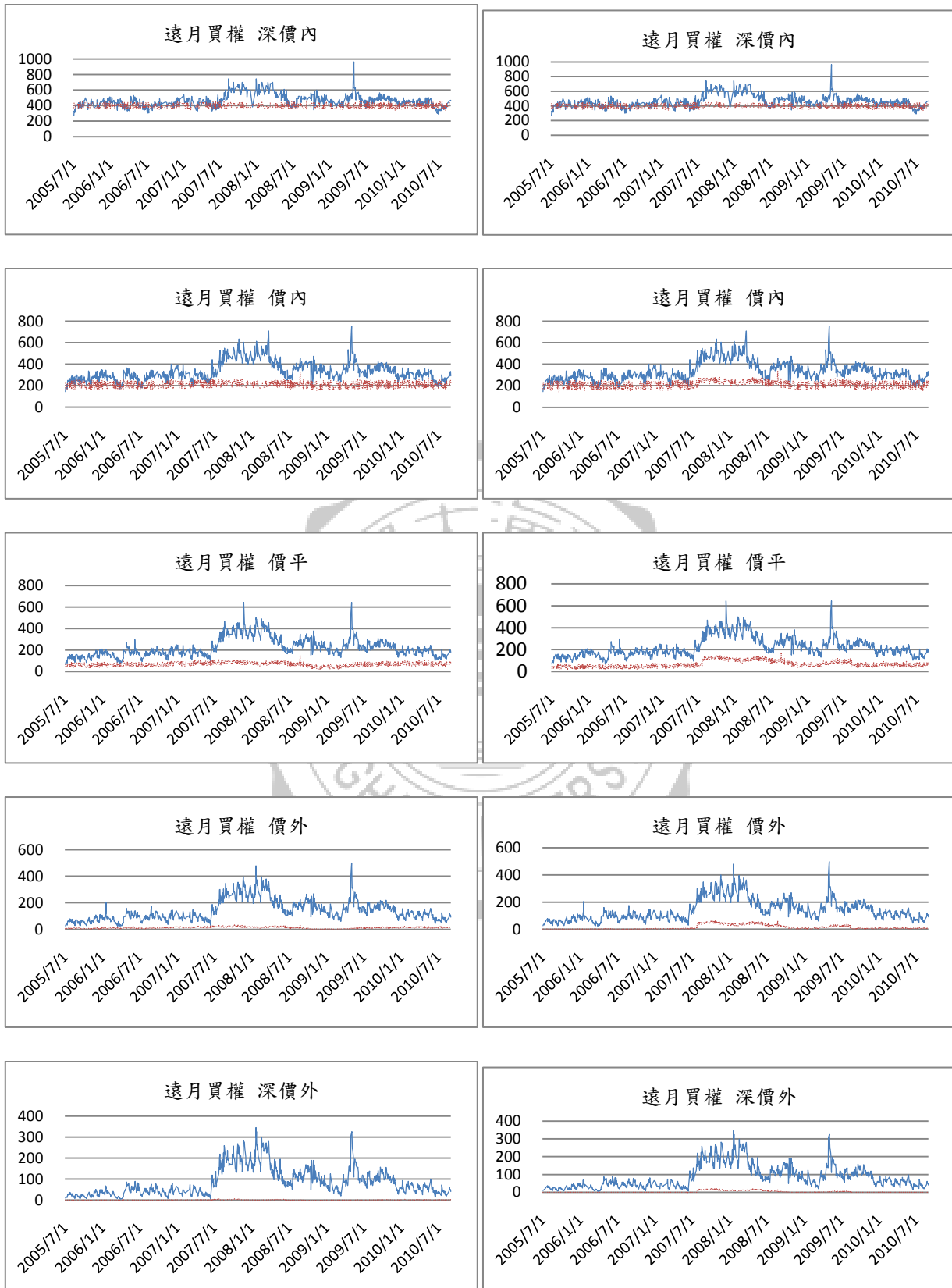
¹⁹ 左邊為「未考慮狀態轉下」的 Black-Scholes 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖
 右邊為「考慮狀態轉下」的 Black-Scholes 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖

附圖七 近月買權 Heston-Nandi GARCH 評價模型²⁰



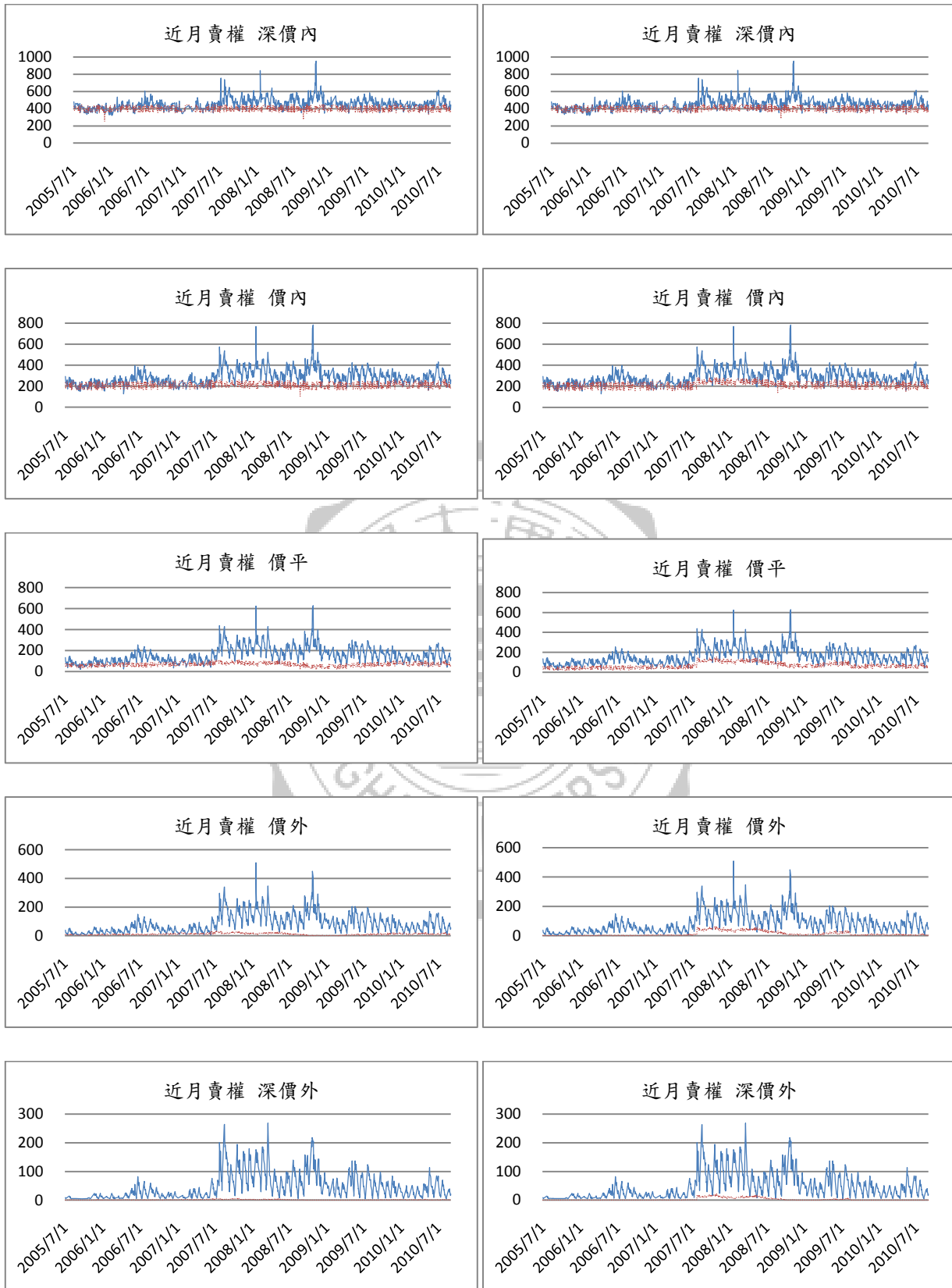
²⁰ 左邊為「未考慮狀態轉下」的 H-N GARCH 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖
 右邊為「考慮狀態轉下」的 H-N GARCH 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖

附圖八 遠月買權 Heston-Nandi GARCH 評價模型²¹



²¹ 左邊為「未考慮狀態轉下」的 H-N GARCH 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖
右邊為「考慮狀態轉下」的 H-N GARCH 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖

附圖九 近月賣權 Heston-Nandi GARCH 評價模型²²



²² 左邊為「未考慮狀態轉下」的 H-N GARCH 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖
右邊為「考慮狀態轉下」的 H-N GARCH 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖

附圖十 遠月賣權 Heston-Nandi GARCH 評價模型²³



²³ 左邊為「未考慮狀態轉下」的 H-N GARCH 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖
 右邊為「考慮狀態轉下」的 H-N GARCH 理論價格 (虛線) 與收盤價 (實線) 的比較圖