

東海大學數學系研究所

碩士論文

指導教授：胡馨云博士

Mesh-based and Mesh-free Methods:  
Theory, Implementation and Application

網格及無網格法之理論、演算及應用

研究生：潘金龍

中華民國一〇〇年三月



東海大學  
數學系  
碩士學位口試委員審定書

本系碩士班 潘金龍 君

所提論文 網格及無網格法之理論、演算及應用  
(Mesh-based and Mesh-free Methods: Theory,  
implementation and application.)

合於碩士班資格水準，業經本委員會評審通過，特此證明。

口試委員：

黃 皇 男

吳 金 典

指導教授：

胡 馨 云

所 長：

陳 文 慶

中 華 民 國 一 〇 〇 年 三 月 十 五 日



## - 摘 要 -

近年來無網格法已擠身於計算方法之列，並廣泛用於求解科學及工程問題。無網格法大致可分成兩類，一類由弱形式衍生而出，另一類是由強型式衍生而生。此論文使用弱型式中的再生核心質點法搭配有限元素法求解橢圓邊界值問題，著重於離散系統的建構及誤差分析。再生核心質點法的分析及建構方式與有限元素法十分相似，它的精度比有限元素法高，且系統的尺度不隨階數提高而增加，是固定尺度。缺點是形成矩陣之計算所花費的時間比較多一些。從理論分析得知再生核心質點法與有限元素法的收斂行為相似，當兩者搭配求解問題時，參數之選擇在論文中有詳細討論，兼顧精度及效率以達最優狀態。



# Abstract

In recent years, meshfree methods have emerged into a new class of computational methods and have been widely applied to scientific and engineering problems. Meshfree methods can be roughly divided into two categories: one is based on weak formulation and the other is based on strong formulation. In this work, we provide a framework of coupling of reproducing kernel particle method (RKPM) and finite element method (FEM) for solving boundary value problems. This work focuses on the error analysis both under weak formulation and on the construction of discrete systems. The construction and mathematical analysis for RKPM are quite similar to FEM, but the accuracy of the solution by former is higher than that by latter. Furthermore, the dimension of discrete system of RKPM does not vary when the reproducing degree increased, the discrete system from RKPM costs more CPU time than FEM. The strategy of an optimal coupling, for example, the relationship between the meshsize of FEM and the nodal distant and reproducing degree of RKPM, is discussed in this work as well.



## - 致 謝 辭 -

可以完成這篇論文，首先要感謝指導老師 胡馨云 教授一直以來的教導，在我就讀研究所的期間不斷地給予我指導與協助，此外在老師身上還學習到做事的謹慎態度，讓我受益良多。接著感謝口試委員 黃皇男 教授與 吳金典 教授撥空費心審查，並提供精闢之批評和建議，使本論文更臻完善。此外，也要感謝系上其他老師職員們的教誨，謝謝你們教導我在學習及做人處事之道理上及支持並鼓勵。

除了感謝老師之外，一路上互相鼓勵加油的同學們，宗憲、培瑛、大鈞、富傑、啓敏、世偉、謹榕及柏耕學長等等，我在此也向你們道謝，謝謝你們的陪伴與支持，研究生涯也因你們而有許多美好的回憶，亦祝福你們有美好的未來。

另外，我要感謝在東海大學校牧室及衛助所認識到的朋友、同學及輔導老師們，雖然你們對數學並沒有太多的興趣，但有你們長期默默地相伴，加添了我生涯上不少的色彩。特別感謝已退休的 劉大衛 教授，在我碩一的期間，每禮拜兩小時的晤談時光，讓我淺嘗到科學與基督教信仰的滋味。

最後要感謝我的家人，在我從小到大的求學路上，總是無怨尤的一直支持著，讓我能夠全心全力地朝我的目標前進，回家的路程遙遠，但你們電話裡頭短短一句關心的話，卻是我渡過無數夜晚的力量，謝謝你們！

金龍 僅誌於東海大學

民國100年03月



# - 目 錄 -

- 摘 要 -	iii
Abstract	v
- 致 謝 辭 -	vii
- 目 錄 -	ix
- 圖 目 錄 -	x
- 表 目 錄 -	xi
- 符 號 表 -	xv
1 前言	1
2 邊值問題及泛函問題	3
2.1 方程及其弱型式 . . . . .	3
2.2 Ritz-Galerkin 法 . . . . .	4

3	網格法及無網格法	7
3.1	有限元素法 (FEM)	7
3.2	FEM 之單元分析及誤差估計	9
3.3	再生核心質點法 (RKPM)	12
3.4	RKPM 之單元分析及誤差估計	15
4	數值範例	21
5	應用	25
5.1	FEM-RKPM 結合法	25
5.2	誤差分析	30
6	結論	35
	參考文獻	37

## - 圖目錄 -

3.1	線性基底函數 (3.2)-(3.4) 之分佈情形 . . . . .	8
3.2	小單元 $[x_j, x_{j+1}]$ 中有限元基底函數分佈情形 . . . . .	9
3.3	一階再生核心基底函數 (3.28) 之圖形 . . . . .	13
3.4	二階再生核心基底函數 (3.28) 之圖形 . . . . .	14
3.5	小單元 $[x_j, x_{j+1}]$ 中一階再生核心基底函數分佈情形 . . . . .	15
4.1	有限元素法及再生核心質點法之誤差比較 . . . . .	23
5.1	有限元素法及再生核心質點法之網格點及質點 . . . . .	26
5.2	FEM-RKPM 結合法之單元及基底函數分佈圖 . . . . .	27
5.3	系統 (5.11) 中矩陣 $\mathbf{M}$ 的結構 . . . . .	30
5.4	系統 (5.11) 中向量 $\mathbf{F}$ 的結構 . . . . .	30



## - 表 目 錄 -

4.1	有限元素法之誤差及收斂率 . . . . .	22
4.2	線性再生核心質點法 ( $p=1, a=2h$ ) 之誤差及收斂率 . . . . .	22
4.3	二次再生核心質點法 ( $p=2, a=3h$ ) 之誤差及收斂率 . . . . .	23
5.1	子區域內參數選取之策略 . . . . .	32



## - 符號表 -

$a$	— 參數 $a$ , 核心函數的核心函數半徑。
$a_i, f_i, c_i$	— 係數。
$e_j$	— FEM 的小單元。 $e_j = [x_j, x_{j+1}]$ 。
$\Gamma$	— 內邊界。
$\mathbf{H}^1(\Omega)$	— 廣義一階導函數可積之泛函空間。
$h$	— 網格距 (FEM) 或 質點距 (RKPM)。
$\mathbf{H}$	— 泛函空間。
$\kappa$	— 最大覆蓋數。
$\ \cdot\ _{1,\Omega}$	— Sobolev 壹範數。
$\ \cdot\ _{0,\Omega}$	— Sobolev 零範數或 $\mathbf{L}^2$ 範數。
$\ \cdot\ _{\infty,\Omega}$	— 無窮範數。
$\ \cdot\ _H$	— $H$ 範數。
$\Omega$	— 定義域 $(0, 1)$
$\bar{\Omega}$	— 定義域 $[0, 1]$
$\Omega^-$	— 定義域 $(-1, 0)$
$\Omega^+$	— 定義域 $(0, 1)$
$\Omega_j$	— 核心函數基底 $\varphi_j(x)$ 的 support。
$\omega$	— 權重。

- $\omega_j$  –RKPM 的小單元。  $\omega_j = [x_j, x_{j+1}]$ 。
- $p$  –再生核心基底多項式的階。
- $\phi_i(x)$  –Ritz-Galerkin 法之基底，或 FEM 之基底。
- $\varphi_i(x)$  –再生核心基底函數。
- $\phi_a$  –核心函數。
- U, V** –基底所形成之有限維空間。
- $x_i$  –FEM 之節點或 RKPM 之質點 (particle)。

# 第 1 章 前言

無網格法 [1, 2] 在近十五年受到矚目並擠身於計算方法之列，已廣泛應用於求解科學及工程的問題。無網格法的共通特色就是函數或偏微分方程的解之近似是利用一組零散點建構，而不是建立網格使用差分法或有限元素法。

而這所謂無網格法依其泛函型式可分成兩類，一類為弱型式，例如質點法 [3, 4]，另一類為強型式，例如配置法 [5, 6, 7, 8, 9, 10]<sup>1</sup>。在弱型式中雖不需網格，但需區域積分，與強型式法相比需要更多計算時間。從穩定性角度來看弱型式比強型式更穩定。

在過去，弱型式下常考慮用移動最小二乘近似 (moving least-squares approximation) [11, 12] 或再生核近似 (reproducing kernel approximation) [14, 15, 16]。本論文於弱型式下採再生核心近似，稱之為再生核心質點法 (reproducing kernel particle method, RKPM)，求解一類橢圓問題。因為再生核心質點法其思想與有限元素法相當相似，甚至可視為廣泛型有限元素法 (GFEM 或 XFEM) [13]，所以本論文先由有限元素法的網格法介紹，然後再帶領大家進入無網格法-再生核心質點法的世界中。

從理論上可知，其收斂行為與有限元素法相似，但有限元素法有網格，再生核心質點法是無網格，兩者如何相似呢？再生核心質點法，需定義質點距 (nodal distance)，有限元素法是定義網格距 (meshsize)，收斂性與這兩參數有關。此外，在再生核心質點法中離散系統的建立是先利用小單元分析，然後再予以組合拼湊成一大的系統，此作法與有限元素法的作法如出一轍。

---

<sup>1</sup>於此所舉文獻均採用配置法。

從數值上可知，再生核心質點法的精度比有限元素法來得好。再生核心質點法中，另外需要定義每個質點形成的基底之核心半徑 (support size)，而這核心半徑的大小是與精度有關，在論文後面章節會介紹。而無網格與網格法若要結合使用並求解科學或工程問題時，兩者要如何配合，其參數該如何選取以達到最佳，也是本論文的重點之一。若對於有限元素法熟悉，那不難了解再生核心質點法及其應用。

本論文其餘章節的安排如下：第 2 章介紹邊界值問題及其相應的泛函問題，並回顧 Ritz-Galerkin 法。第 3 章有 4 個子章節，前面兩小節介紹有限元素法之建構及誤差估計，後面兩小節介紹再生核心質點法之建構及誤差估計。在第 4 章則有一數值範例，使用再生核心質點法不同階數之基底函數並與有限元素法的結果相比較。第 5 章是兩種方法的結合應用，其中包含了結合法的建構及誤差分析。而最後第 6 章則是整個論文的總結。

## 第 2 章 邊值問題及泛函問題

### 2.1 方程及其弱型式

考慮下列邊界值問題

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad \text{in } \Omega = (0, 1), \quad (2.1)$$

其中邊界條件為

$$u(0) = 0, \quad (2.2)$$

$$u(1) = 0. \quad (2.3)$$

而 (2.1) 中  $p(x) = p > 0$ ,  $q(x) = q \geq 0$  且  $f(x)$  在  $\Omega$  上可積。邊界值問題 (2.1)-(2.3) 之泛函弱型式為

$$a(u, v) = f(v), \quad v \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (2.4)$$

其中  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  是代表廣義一階導函數可積的泛函空間，稱為 Sobolev 空間。而雙線性形式由內積定義

$$\begin{aligned} a(u, v) &= (-(pu')', v) + (qu, v) \\ &= p(u', v') + q(u, v) \\ &= \int_0^1 (pu'v' + quv) dx, \end{aligned} \quad (2.5)$$

及線性形式如下

$$\begin{aligned} f(v) &= (f, v) \\ &= \int_0^1 f v dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.2 Ritz-Galerkin 法

我們將邊界值問題 (2.1)-(2.3) 的解用一組基底  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n+1}$  之線性組合代替，則近似解  $u^h$  如下

$$u^h = u^h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \phi_i(x), \quad (2.7)$$

係數  $c_i$  可由下列泛函極小化問題求得

$$E(u^h) = \min_{v \in \mathbf{V}} E(v), \quad (2.8)$$

其中有限維向量  $\mathbf{V}$  的定義為

$$\mathbf{V} = \text{span} \{ \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{n+1}(x) \}, \quad (2.9)$$

而泛函  $E(v)$  定義為

$$E(v) = a(v, v) - 2f(v) = \int_0^1 \{ p(v')^2 + qv^2 - 2fv \} dx. \quad (2.10)$$

將 (2.10) 進一步改寫如下

$$\begin{aligned} E(c_1, c_2, \dots, c_{n+1}) &\triangleq E(v) \\ &= \int_0^1 \left\{ p \left( \sum_{i=1}^{n+1} c_i \phi_i'(x) \right)^2 + q \left( \sum_{i=1}^{n+1} c_i \phi_i(x) \right)^2 - 2f \left( \sum_{i=1}^{n+1} c_i \phi_i(x) \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (2.11)$$

極小化問題 (2.8) 須求解  $E(v)$  之極值，作法如下

$$\frac{\partial E(c_1, c_2, \dots, c_{n+1})}{\partial c_j} = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (2.12)$$

整理可得

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left\{ \int_0^1 \{ p\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q\phi_i(x)\phi_j(x) \} dx \right\} c_i = \int_0^1 f\phi_j(x) dx, \quad \forall j. \quad (2.13)$$

將係數  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$  記為向量形式

$$\mathbf{x}^t = [c_1, c_2, \dots, c_{n+1}], \quad (2.14)$$

其中上標  $t$  表向量之轉置，則 (2.13) 可形表矩陣形式

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad (2.15)$$

其中矩陣  $\mathbf{K} = [K_{ij}]$  及向量  $\mathbf{F} = [F_{ij}]$  之元素分別為

$$K_{ij} = \int_0^1 (p\phi_i'(x)\phi_j'(x) + q\phi_i(x)\phi_j(x))dx, \quad (2.16)$$

$$F_i = \int_0^1 f\phi_i(x)dx. \quad (2.17)$$

當基底選取為局部基底，則線性系統 (2.15) 中  $\mathbf{K}$  矩陣將為帶狀稀疏矩陣，若為全域基底，則矩陣  $\mathbf{K}$  為滿矩陣。若基底具有正交性，則形成矩陣  $\mathbf{K}$  所花費的時間可大大節省。一係數向量求得後，代回 (2.7) 式中可計算出近似解  $u^h$ ，再計算誤差  $u - u^h$ ，並觀察誤差之收斂行為。

在下一章，我們分別考慮有限元函數及再生核心基底函數作為 Ritz-Galerkin 法之基底。因為此兩類的基底是局部型，所以我們另可採用小單元的分析，再組合起來。此兩類方法之間有何關聯性呢？下面章節中我們會仔細討論。



## 第 3 章 網格法及無網格法

### 3.1 有限元素法 (FEM)

將第 2 章中介紹的橢圓邊界值問題 (2.1)-(2.3) 之定義域  $\bar{\Omega} = [0, 1]$  均勻分成  $n$  份, 間距  $h = \frac{1-0}{n}$ , 此間距又稱之為網格距; 對應  $\bar{\Omega}$  之分割為

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1, \quad (3.1)$$

當然也可以考慮非均勻分佈。每個點  $x_i$  稱之為節點, 在節點上定義基底函數分別如下

$$\phi_1(x) = \begin{cases} -\frac{x-x_2}{h} & , 0 \leq x \leq x_2, \\ 0 & , x_2 < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x-x_{i-1}}{h} & , x_{i-1} < x \leq x_i, \\ -\frac{x-x_{i+1}}{h} & , x_i < x \leq x_{i+1}, \\ 0 & , x_{i+1} < x \leq 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

其中  $2 \leq i \leq n$ ,

$$\phi_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < x_n. \\ \frac{x-x_n}{h} & , x_n \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

上述基底其輪廓如圖 3.1 所示。

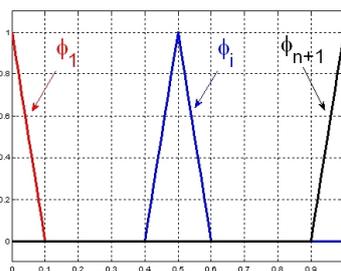


圖 3.1: 線性基底函數 (3.2)-(3.4) 之分佈情形

而上述基底的導函數分別為

$$\phi_1'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{h} & , 0 < x < x_2. \\ 0 & , x_2 < x < 1. \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < x_{i-1}. \\ \frac{1}{h} & , x_{i-1} < x < x_i. \\ -\frac{1}{h} & , x_i < x < x_{i+1}. \\ 0 & , x_{i+1} < x < 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

其中  $2 \leq i \leq n$ ,

$$\phi_{n+1}'(x) = \begin{cases} 0 & , 0 < x < x_n. \\ \frac{1}{h} & , x_n < x < 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

將基底 (3.2)-(3.4) 及基底導數 (3.5)-(3.7) 放入上一章 (2.16) 及 (2.17) 式中，算出積分值，建立起  $\mathbf{K}$  矩陣及向量  $\mathbf{F}$ ，再予以求解。

另外一種建立系統  $\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$  的方法是透過單元分析，先將定義域分成  $n$  個小單元  $e_j = [x_j, x_{j+1}]$ ，再將每個小單元中的積分分別算出，然後拼湊出一大矩陣  $\mathbf{K}$  及一大向量  $\mathbf{F}$ 。下面章節將介紹整個建構的過程。

### 3.2 FEM 之單元分析及誤差估計

我們將 (2.1) 之邊值問題之近似解  $v^h$  及等號右端之近似函數  $f^h$  用 (3.2)-(3.4) 基底函數予以線性組合而成：

$$v^h = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \phi_i(x), \quad (3.8)$$

$$f^h = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \phi_i(x), \quad (3.9)$$

考慮小單元  $e_j = [x_j, x_{j+1}] = [jh, (j+1)h]$ ，其中有出現兩個基底，分別為  $\phi_j(x)$  及  $\phi_{j+1}(x)$ ，見圖 3.2。

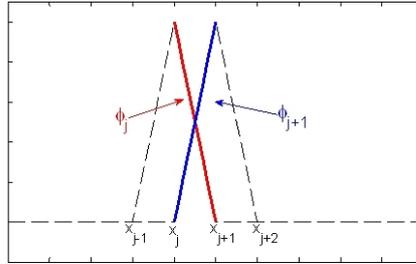


圖 3.2: 小單元  $[x_j, x_{j+1}]$  中有限元基底函數分佈情形

在此單元內，可計算出下列積分，每個單元積分可寫成二次式

$$\begin{aligned} \int_{e_j} (v^h)'^2 dx &= \int_{e_j} (a_j \phi_j'(x) + a_{j+1} \phi_{j+1}'(x))^2 dx \\ &= [a_j, a_{j+1}] \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \\ \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ a_{j+1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \int_{e_j} (v^h)^2 dx &= \int_{e_j} (a_j \phi_j(x) + a_{j+1} \phi_{j+1}(x))^2 dx \\ &= [a_j, a_{j+1}] \begin{bmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ a_{j+1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\int_{e_j} f^h v^h dx = [f_j, f_{j+1}] \begin{bmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ a_{j+1} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

因此定義於 (2.10) 的相應離散泛函  $E(v^h)$  可進一步整理變成

$$\begin{aligned}
E(v^h) &= \int_0^1 (p(v^h)'^2 + q(v^h)^2 - 2f^h v^h) dx \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{e_j} (p(v^h)'^2 + q(v^h)^2 - 2f^h v^h) dx \\
&= \sum_{j=1}^n [a_j, a_{j+1}] \left\{ \frac{p}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{qh}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a_j \\ a_{j+1} \end{bmatrix} \\
&\quad - 2 \sum_{j=1}^n [f_j, f_{j+1}] \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_j \\ a_{j+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

將 (3.13) 記為矩陣二次式

$$E(v^h) = \mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x} - 2\mathbf{F}^t \mathbf{x} = \mathbf{x}^t (p\mathbf{K}_1 + q\mathbf{K}_2) \mathbf{x} - 2\mathbf{F}^t \mathbf{x}, \tag{3.14}$$

其中矩陣  $\mathbf{K} = p\mathbf{K}_1 + q\mathbf{K}_2$ , 而  $\mathbf{K}_1$  及  $\mathbf{K}_2$  分別為

$$\mathbf{K}_1 = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

以及向量  $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^t &= [f_1, f_2, \dots, f_{n+1}] \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ &= [f_1, f_2, \dots, f_{n+1}] \cdot \mathbf{K}_2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

其實 (3.15)-(3.16) 之矩陣  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  是分別由  $n$  個下列  $2 \times 2$  小矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

拼湊而成。極小化二次式 (3.14) 可等價於求解下列線性系統 [17]

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad (3.18)$$

其中  $\mathbf{F}$  是由 (3.17) 轉置而成，其為

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_2 \cdot \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

系統 (3.18) 之矩陣  $\mathbf{K}$  為對稱正定稀疏矩陣，可採用共軛梯度法求其解。

接下來我們來討論有限元素法 (FEM) 的收斂性。首先令  $\mathbf{V}$  是所有  $n+1$  個基底所形成之有限維空間，記為

$$\mathbf{V} = \text{span}\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{n+1}(x)\} \subseteq \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (3.20)$$

並且定義範數

$$\|v\|_{1,\Omega} = \left\{ \int_0^1 ((v')^2 + v^2) dx \right\}^{1/2}, \quad (3.21)$$

及

$$\|v\|_{0,\Omega} = \left\{ \int_0^1 (v^2) dx \right\}^{1/2}, \quad (3.22)$$

範數 (3.21) 我們稱之為 Sobolev 壹範數或  $\mathbf{H}^1$  範數，而 (3.22) 我們稱之為 Sobolev 零範數或  $\mathbf{L}^2$  範數。第 4 章數值範例將使用上述兩者及無窮範數去估計誤差。

橢圓邊界值問題之有限元解，可視為滿足下列弱型式所得之解 [18]

$$a(u^h, v^h) = f(v^h), \quad v^h \in \mathbf{V}, \quad (3.23)$$

根據 C ea 引理，可證明得到壹範數下最優估計式，如下

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq C \cdot \inf_{v^h \in \mathbf{V}} \|u - v^h\|_{1,\Omega}, \quad (3.24)$$

再根據局部插值估計可得下面的誤差上界

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq \left( \sum_{j=1}^n \|u - v^h\|_{1,e_j}^2 \right)^{1/2} \leq ch |u|_{2,\Omega}, \quad (3.25)$$

其中  $e_j$  代表本節一開始介紹的小單元  $[x_j, x_{j+1}]$ 。因此，(3.25) 式進一步可得

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq ch |u|_{2,\Omega} \approx O(h^1), \quad (3.26)$$

常數  $C$  及  $c$  都與網格距  $h$  無關。再利用 Aubin-Nitsche 引理 [19] 可證明在零範數下誤差上界為

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega} \leq h \|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq ch^2 |u|_{2,\Omega} \approx O(h^2). \quad (3.27)$$

### 3.3 再生核心質點法 (RKPM)

接下來我們介紹無網格法，將第 2 章節使用的基底改用另外一組基底。需先在定義域  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega^1$  上取一些點，這些點可均勻分佈亦可非均勻分佈於  $\bar{\Omega}$  上，我們稱之

---

<sup>1</sup>定義域  $\bar{\Omega} = [0, 1]$ ，和上節相同。

為質點 (particles), 共有  $n + 1$  個點。其質點距 (nodal distance) 為  $h = \frac{1-0}{n}$ , 每個質點  $x_i$  上定義一個基底函數  $\varphi_i(x)$  [15, 16], 如下

$$\varphi_i(x) = \mathbf{h}^t(0)\mathbf{M}^{-1}(x)\mathbf{h}(x - x_i)\phi_a(x - x_i), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (3.28)$$

此基底函數  $\varphi_i(x)$  需利用再生性及鄰近的質點一起共同建構出來。其中向量  $\mathbf{h}$  及矩陣  $\mathbf{M}$  定義分別如下

$$\mathbf{h}(y) = [1, y, y^2, \dots, y^p]^t, \quad (3.29)$$

參數  $p$  是基底多項式的階,

$$\mathbf{M}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{h}(x - x_i)\mathbf{h}^t(x - x_i)\phi_a(x - x_i), \quad (3.30)$$

而其中的  $\phi_a(x - x_i)$  為核心函數, 可選用下列五次 B-Spline

$$\phi_a(z) = \begin{cases} \frac{11}{20} - \frac{9}{2}z^2 + \frac{81}{4}z^4 - \frac{81}{4}z^5 & , \text{ for } 0 \leq z < \frac{1}{3}, \\ \frac{17}{40} + \frac{15}{8}z - \frac{63}{4}z^2 + \frac{135}{4}z^3 - \frac{243}{8}z^4 - \frac{81}{8}z^5 & , \text{ for } \frac{1}{3} \leq z < \frac{2}{3}, \\ \frac{81}{40} - \frac{81}{8}z + \frac{81}{4}z^2 - \frac{81}{4}z^3 - \frac{81}{8}z^4 - \frac{81}{40}z^5 & , \text{ for } \frac{2}{3} \leq z < 1, \\ 0 & , \text{ for } 1 \leq z, \end{cases} \quad (3.31)$$

而  $z = \frac{|x-x_i|}{a}$ ,  $a$  表示核心函數的核心函數 (support) 半徑, 此半徑可隨質點變, 亦可統一。於本論文中我們考慮相同的核心函數 (support) 半徑。函數 (3.28) 稱為再生核心函數, 而其輪廓如圖 3.3。

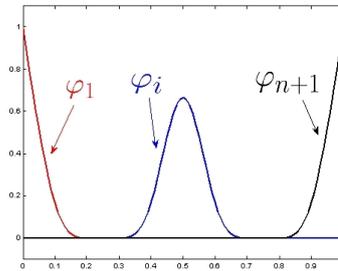


圖 3.3: 一階再生核心基底函數 (3.28) 之圖形

圖 3.3 中再生核心函數的階數  $p$  是取 1，即 (3.29) 式中定義  $\mathbf{h}(y) = [1, y]^t$ ，而核心半徑是 2 倍的質點距，即  $a = 2 \cdot h$ 。如果階數  $p$  取 2 時，核心半徑可取 3 倍的質點距，即  $a = 3 \cdot h$ ，其輪廓如圖 3.4 所示。

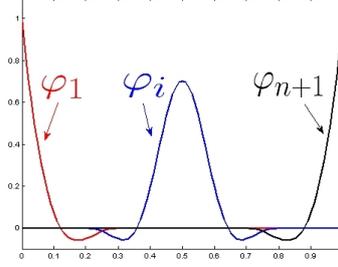


圖 3.4: 二階再生核心基底函數 (3.28) 之圖形

將二階 ( $P = 2$ ) 的基底與低階 ( $p = 1$ ) 的基底相比，可看出高階基底比較寬些。而較高階核心函數採用較寬的核心半徑的主要原因是為了讓 (3.30) 式中之  $\mathbf{M}$  矩陣非奇異，建議  $a = (p + 1)h$  [16]。再生基底  $\varphi_i(x)$  建構過程中，需使用  $\mathbf{M}$  的反矩陣，見 (3.28) 式，若核心半徑不夠大，每個點被覆的基底數目不夠多，整組再生核心基底將無法順利建構出來 [16]。基底函數  $\varphi_i(x)$  僅端點上的基底滿足 Kronecker delta 性質，即

$$\varphi_i(x_1) = \delta_{i,1}, \quad (3.32)$$

$$\varphi_i(x_j) \neq \delta_{ij}, \quad 2 \leq j \leq n, \quad (3.33)$$

$$\varphi_i(x_{n+1}) = \delta_{i,n+1}. \quad (3.34)$$

基底之導函數  $\varphi'_i(x)$  可利用乘法原理去求得，如下

$$\begin{aligned} \varphi'_i(x) = & [\mathbf{h}^t(0) \cdot (\mathbf{M}^{-1}(x))' \cdot \mathbf{h}(x - x_i) + \mathbf{h}^t(0) \cdot \mathbf{M}^{-1}(x) \cdot (\mathbf{h}(x - x_i))'] \cdot \phi_a(x - x_i) \\ & + \mathbf{h}^t(0) \cdot \mathbf{M}^{-1}(x) \cdot \phi'_a(x - x_i), \end{aligned} \quad (3.35)$$

其中  $(\mathbf{M}^{-1}(x))'$  可利用下列關係求得，

$$(\mathbf{M}^{-1}(x))' = -\mathbf{M}^{-1}(x) \cdot (\mathbf{M}(x))' \cdot \mathbf{M}^{-1}(x), \quad (3.36)$$

而  $(\mathbf{M}(x))'$  可直接對 (3.30) 微分後取得。  $\phi'_a(x - x_1)$  也可直接對 (3.31) 式微分。 類似於有限元的作法，我們將再生核心基底 (3.28) 及基底導函數 (3.35) 放入第 2 章的 (2.16) 及 (2.17) 式中，此為再生核心質點法，其相應之線性系統亦可建立出來。 同樣地，我們也可利用單元分析來建構。 下面章節將仔細介紹。

### 3.4 RKPM 之單元分析及誤差估計

我們令近似解  $v^h$  可用再生核心基底函數 (3.28) 線性組合而成

$$v^h = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \varphi_i(x), \quad (3.37)$$

先考慮線性的核心基底函數，即  $p = 1$ ，其核心半徑取  $a = (p + 1)h = 2h$ ，在內部小單元  $\omega_j = [x_j, x_{j+1}] = [jh, (j + 1)h]$  中含有四個基底，分別為  $\varphi_{j-1}(x)$ ， $\varphi_j(x)$ ， $\varphi_{j+1}(x)$  和  $\varphi_{j+2}(x)$ ，見圖 3.5。

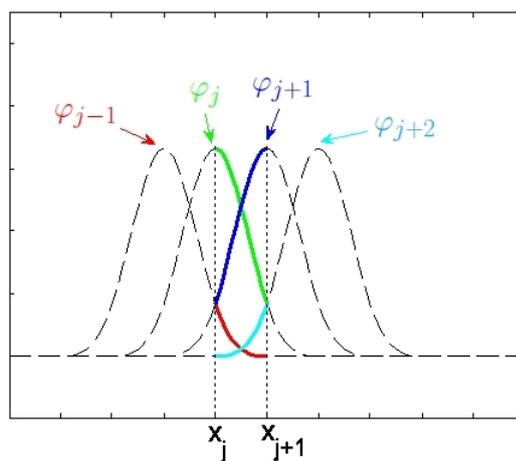


圖 3.5: 小單元  $[x_j, x_{j+1}]$  中一階再生核心基底函數分佈情形

在此單元內計算下列積分

$$\begin{aligned}
 \int_{\omega_j} (v^h)'^2 dx &= \int_{\omega_j} (b_{j-1}\varphi'_{j-1} + b_j\varphi'_j + b_{j+1}\varphi'_{j+1} + b_{j+2}\varphi'_{j+2})^2 dx \\
 &= [b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, b_{j+2}] \left[ \int_{\omega_j} \varphi'_k \varphi'_\ell dx \right]_{4 \times 4} \begin{bmatrix} b_{j-1} \\ b_j \\ b_{j+1} \\ b_{j+2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\omega_j} (v^h)^2 dx &= \int_{\omega_j} (b_{j-1}\varphi_{j-1} + b_j\varphi_j + b_{j+1}\varphi_{j+1} + b_{j+2}\varphi_{j+2})^2 dx \\
 &= [b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, b_{j+2}] \left[ \int_{\omega_j} \varphi_k \varphi_\ell dx \right]_{4 \times 4} \begin{bmatrix} b_{j-1} \\ b_j \\ b_{j+1} \\ b_{j+2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

相似地，

$$f^h(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i \varphi_i(x), \tag{3.40}$$

因此，單元內之積分如下

$$\int_{\omega_j} f^h v^h dx = [f_{j-1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2}] \left[ \int_{\omega_j} \varphi_k \varphi_\ell dx \right]_{4 \times 4} \begin{bmatrix} b_{j-1} \\ b_j \\ b_{j+1} \\ b_{j+2} \end{bmatrix}, \tag{3.41}$$

其中  $k, \ell = (j-1), j, (j+1), (j+2)$ 。將 (3.38)-(3.39) 及 (3.41) 放入泛函  $E(v)$  中，進一步可得矩陣二次式如下

$$\begin{aligned}
 E(v^h) &= \mathbf{x}^t \mathbf{K} \mathbf{x} - 2\mathbf{F}^t \mathbf{x} \\
 &= \mathbf{x}^t (p\mathbf{K}_1 + q\mathbf{K}_2) \mathbf{x} - 2\mathbf{F}^t \mathbf{x},
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

若 (3.37) 之質點數為  $n + 1 = 11$ ，則得到  $\mathbf{K}_1$  及  $\mathbf{K}_2$  如下所示：

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 8.669 & -7.341 & -1.325 & -0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.341 & 13.356 & -4.694 & -1.318 & -0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.325 & -4.694 & 12.037 & -4.697 & -1.318 & -0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.003 & -1.318 & -4.697 & 12.037 & -4.697 & -1.318 & -0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.003 & -1.318 & -4.697 & 12.037 & -4.697 & -1.318 & -0.003 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.003 & -1.318 & -4.697 & 12.037 & -4.697 & -1.318 & -0.003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.003 & -1.318 & -4.697 & 12.037 & -4.697 & -1.318 & -0.003 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.003 & -1.318 & -4.697 & 12.037 & -4.697 & -1.318 & -0.003 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.003 & -1.318 & -4.697 & 12.037 & -4.694 & -1.325 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.003 & -1.318 & -4.694 & 13.356 & -7.341 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.003 & -1.325 & -7.341 & 8.669 \end{bmatrix}_{11 \times 11} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.034 & 0.018 & 0.001 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.018 & 0.058 & 0.020 & 0.001 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0.020 & 0.058 & 0.020 & 0.001 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0.001 & 0.020 & 0.058 & 0.020 & 0.001 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0.001 & 0.020 & 0.058 & 0.020 & 0.001 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0.001 & 0.020 & 0.058 & 0.020 & 0.001 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0.001 & 0.020 & 0.058 & 0.020 & 0.001 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0.001 & 0.020 & 0.058 & 0.020 & 0.001 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0.001 & 0.020 & 0.058 & 0.020 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0.001 & 0.020 & 0.058 & 0.018 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0.001 & 0.018 & 0.034 \end{bmatrix}_{11 \times 11} \quad (3.44)$$

(其中  $* = 3.3E - 7$ )

極小化二次式 (3.42) 等價於求解下列線性系統

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad (3.45)$$

其中  $\mathbf{K} = p\mathbf{K}_1 + q\mathbf{K}_2$ ， $\mathbf{K}_1$  及  $\mathbf{K}_2$  由 10 個  $4 \times 4$  小矩陣拼湊出的，因此矩陣  $\mathbf{K}$  的帶寬為 7。在第二節中介紹有限元素法之單元分析中之  $\mathbf{K}_1$  及  $\mathbf{K}_2$  則是由 10 個  $2 \times 2$  小矩陣拼出，因此有限元矩陣帶寬為 3，比再生核心質點法的窄一些。

如果我們考慮二階核心基底函數，即  $p = 2$ ，其半徑取  $a = (p + 1)h = 3h$ ，因此在小單元  $[x_j, x_{j+1}]$  中將含有六個基底， $\varphi_{j-2}(x)$ ， $\varphi_{j-1}(x)$ ， $\dots$ ， $\varphi_{j+3}(x)$ 。在此小單元內積分，可得矩陣二次式，其中小矩陣的尺寸為  $6 \times 6$ ，將 10 個  $6 \times 6$  小矩陣拼湊出的  $\mathbf{K}_1$ ， $\mathbf{K}_2$  帶寬為 11，如式 (3.46)-(3.47) 所示。而矩陣  $\mathbf{K} = p\mathbf{K}_1 + q\mathbf{K}_2$ ，同樣帶寬

爲 11。

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 10.697 & -10.846 & -0.435 & 0.619 & -0.035 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10.846 & 20.419 & -7.686 & -2.536 & 0.684 & -0.034 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.435 & -7.686 & 15.378 & -5.344 & -2.562 & 0.683 & -0.034 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0.619 & -2.536 & -5.344 & 14.520 & -5.345 & -2.563 & 0.683 & -0.034 & * & 0 & 0 \\ -0.035 & 0.684 & -2.562 & -5.345 & 14.517 & -5.345 & -2.563 & 0.683 & -0.034 & * & 0 \\ * & -0.034 & 0.683 & -2.563 & -5.345 & 14.517 & -5.345 & -2.563 & 0.683 & -0.034 & * \\ 0 & * & -0.034 & 0.683 & -2.562 & -5.345 & 14.517 & -5.345 & -2.562 & 0.684 & -0.035 \\ 0 & 0 & * & -0.034 & 0.683 & -2.563 & -5.345 & 14.520 & -5.344 & -2.536 & 0.619 \\ 0 & 0 & 0 & * & -0.034 & 0.683 & -2.562 & -5.344 & 15.378 & -7.686 & -0.435 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & -0.034 & 0.684 & -2.536 & -7.686 & 20.419 & -10.846 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & -0.035 & 0.619 & -0.435 & -10.846 & 10.697 \end{bmatrix} 11 \times 11$$

(其中  $* = -6.3E - 4$ )

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.026 & 0.018 & -0.006 & b & \natural & *_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.018 & 0.085 & 0.018 & -0.005 & *_3 & *_2 & *_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.006 & 0.018 & 0.070 & 0.020 & -0.005 & *_3 & *_2 & *_1 & 0 & 0 & 0 \\ b & -0.005 & 0.020 & 0.069 & 0.020 & -0.005 & *_3 & *_2 & *_1 & 0 & 0 \\ \natural & *_3 & -0.005 & 0.020 & 0.069 & 0.020 & -0.005 & *_3 & *_2 & *_1 & 0 \\ *_1 & *_2 & *_3 & -0.005 & 0.020 & 0.069 & 0.020 & -0.005 & *_3 & *_2 & *_1 \\ 0 & *_1 & *_2 & *_3 & -0.005 & 0.020 & 0.069 & 0.020 & -0.005 & *_3 & \natural \\ 0 & 0 & *_1 & *_2 & *_3 & -0.005 & 0.020 & 0.069 & 0.020 & -0.005 & b \\ 0 & 0 & 0 & *_1 & *_2 & *_3 & -0.005 & 0.020 & 0.070 & 0.018 & -0.006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & *_1 & *_2 & *_3 & -0.005 & 0.018 & 0.085 & 0.018 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *_1 & \natural & b & -0.006 & 0.018 & 0.026 \end{bmatrix} 11 \times 11$$

(其中  $*_1 = 7.22E - 8$ ,  $*_2 = 3.75E - 5$ ,  $*_3 = -1.4E - 4$ ,  
 $b = 3.77E - 5$ ,  $\natural = -6.74E - 5$ )

由此可知我們使用較高階的基底，所建構出的矩陣  $\mathbf{K}$  愈寬，相對地花較多 CPU 的時間，但精確度會提升。下面來介紹此方法的誤差分析。

假設  $\mathbf{U}$  是所有  $n + 1$  個再生核心基底所形成之有限維空間：

$$\mathbf{U} = \text{span}\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n+1}(x)\} \subseteq \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (3.48)$$

我們同樣使用 (3.21)-(3.22) 中定義的範例來作估計誤差。

橢圓邊界值問題之再生核心質點法解，可視為滿足下列弱型式所得之解

$$a(u^h, v^h) = f(v^h), \quad v^h \in \mathbf{U}, \quad (3.49)$$

可得到壹範數下最優估計 [10]

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq C \cdot \inf_{v^h \in \mathbf{U}} \|u - v^h\|_{1,\Omega}, \quad (3.50)$$

再利用局部插值估計 [10] 可得

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq \left( \sum_{j=1}^n \|u - v^h\|_{\Omega_j}^2 \right)^{1/2} \leq C\kappa a^p |u|_{p+1,\Omega}, \quad (3.51)$$

其中  $\bar{\Omega} \subset \cup_j \Omega_j$ ， $\Omega_j$  是每個基底  $\varphi_j(x)$  的 support，即  $\Omega_j = [x_j - a, x_j + a]$ ， $\kappa$  是最大覆蓋數，而  $p$  是再生核心函數的階數。因此，由 (3.51) 可得到下列收斂結果

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq C' a^p |u|_{p+1,\Omega} \approx \begin{cases} O(a^1) & , \text{if } p = 1. \\ O(a^2) & , \text{if } p = 2. \end{cases} \quad (3.52)$$

同樣可用 Aubin-Nitsche 技巧得到零範數下的收斂行為

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega} \leq C'' a^{p+1} |u|_{p+1,\Omega} \approx \begin{cases} O(a^2) & , \text{if } p = 1. \\ O(a^3) & , \text{if } p = 2. \end{cases} \quad (3.53)$$

常數  $C'$  及  $C''$  與核心半徑及質點距無關。因為核心半徑  $a$  與質點距  $h$ ，成正比關係： $a = (p + 1)h$ ，所以 (3.52)-(3.53) 可進一步寫成下列形式

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \approx \begin{cases} O(h^1) & , \text{if } p = 1. \\ O(h^2) & , \text{if } p = 2. \end{cases} \quad (3.54)$$

和

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega} \approx \begin{cases} O(h^2) & , \text{if } p = 1. \\ O(h^3) & , \text{if } p = 2. \end{cases} \quad (3.55)$$

我們在下一章將有限元素法與再生核心質點法的數值收斂比較，所以採用相同的網格距及質點距。

雖然有限元是網格法而再生核心質點法是屬於無網格法，但當後者核心半徑  $a$  的值取的小一些，例如  $a = 1.0001 \cdot h$  時，則可證明得到

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j, \quad (3.56)$$

那再生核心質點法竟變成有限元素法了 [13]，矩陣  $\mathbf{K}$  的帶寬由 7 變成 3，這點相當特別。因此，再生核心質點法會被視為廣泛型有限元素法不無道理，英文縮寫 XFEM 或 GFEM 指的就是此種無網格法。



## 第 4 章 數值範例

在前面第 3 章我們已介紹了網格法中之有限元素法，及無網格法中之再生核心質點法的建構方式。兩種方法在基底的建構看似很不一樣，但其實有一些關聯，有限元素法基底可視為再生核心函數的特例。我們前面提及當核心函數的核心半徑愈大，則相對應線性系統  $\mathbf{Kx} = \mathbf{F}$  中的矩陣  $\mathbf{K}$  之帶寬也愈大，其中矩陣帶寬大致具有這樣的關係

$$\omega = 2\kappa - 1 = \begin{cases} 7 & , \text{當 } h < a \leq 2h. \\ 11 & , \text{當 } 2h < a \leq 3h. \\ 15 & , \text{當 } 3h < a \leq 4h. \end{cases} \quad (4.1)$$

其中  $\kappa$  是覆蓋數，或者說是每一小單元內基底的數目。若 support 半徑  $a$  縮小至與質點距  $h$  差不多時，此時  $\kappa = 2$ ，帶寬  $\omega = 2\kappa - 1 = 3$ ，就與有限元素法的帶寬一樣。

接下來我們考慮一個橢圓邊值問題如下

$$-u'' + \pi^2 u = 2\pi^2 \sin \pi x, \quad (4.2)$$

$$u(0) = 0, \quad (4.3)$$

$$u(1) = 0. \quad (4.4)$$

將上述方程 (4.2) 重新整理寫成

$$-(pu')' + qu = f, \quad (4.5)$$

其中  $p(x) = 1$ ， $q(x) = \pi^2$ ，右端項  $f(x) = 2\pi^2 \sin \pi x$ 。此邊值問題 (4.2)-(4.4) 具有一真解為  $u(x) = \sin \pi x$ 。

首先採用有限元素法，網格距  $h$  分別採用 0.2, 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125。然後再採用再生核心質點法，質點距與網格距一致，考慮線性及二次兩種再生核心函數，而核心的半徑是質點距的  $p + 1$  倍， $p$  是再生核心函數的階。誤差及收斂率分別表列於下面表 4.1 至表 4.3 中。

$h$	$\ u - u^h\ _{\infty, \Omega}$	Rate	$\ u - u^h\ _{0, \Omega}$	Rate	$\ u - u^h\ _{1, \Omega}$	Rate
0.2	$1.56 \times 10^{-2}$		$1.63 \times 10^{-2}$		$3.97 \times 10^{-1}$	
0.1	$4.11 \times 10^{-3}$	3.792	$4.07 \times 10^{-3}$	4.014	$2.13 \times 10^{-1}$	1.865
0.05	$1.03 \times 10^{-3}$	3.997	$7.97 \times 10^{-4}$	5.107	$1.23 \times 10^{-1}$	1.739
0.025	$2.57 \times 10^{-4}$	3.999	$2.03 \times 10^{-4}$	3.919	$6.28 \times 10^{-2}$	1.953
0.0125	$6.43 \times 10^{-5}$	4.000	$4.79 \times 10^{-5}$	4.246	$2.88 \times 10^{-2}$	2.181

表 4.1: 有限元素法之誤差及收斂率

可由表觀察出，當有限元素法的網格距  $h$  加密時，誤差是以 1/4 倍率呈現遞減。下面表 4.2 及表 4.3 是再生核心質點法的誤差結果。

$h$	$\ u - u^h\ _{\infty, \Omega}$	Rate	$\ u - u^h\ _{0, \Omega}$	Rate	$\ u - u^h\ _{1, \Omega}$	Rate
0.2	$6.73 \times 10^{-3}$		$4.61 \times 10^{-3}$		$1.31 \times 10^{-1}$	
0.1	$1.70 \times 10^{-3}$	3.972	$1.18 \times 10^{-3}$	3.910	$5.13 \times 10^{-2}$	2.545
0.05	$4.19 \times 10^{-4}$	4.045	$2.62 \times 10^{-4}$	4.499	$2.76 \times 10^{-2}$	1.861
0.025	$1.04 \times 10^{-4}$	4.011	$6.58 \times 10^{-5}$	3.985	$1.29 \times 10^{-2}$	2.132
0.0125	$2.61 \times 10^{-5}$	4.003	$1.18 \times 10^{-5}$	5.560	$8.86 \times 10^{-3}$	1.459

表 4.2: 線性再生核心質點法 ( $p=1, a=2h$ ) 之誤差及收斂率

$h$	$\ u - u^h\ _{\infty, \Omega}$	Rate	$\ u - u^h\ _{0, \Omega}$	Rate	$\ u - u^h\ _{1, \Omega}$	Rate
0.2	$4.04 \times 10^{-3}$		$4.27 \times 10^{-3}$		$7.53 \times 10^{-2}$	
0.1	$5.81 \times 10^{-4}$	6.946	$3.77 \times 10^{-4}$	11.332	$1.37 \times 10^{-2}$	5.482
0.05	$7.53 \times 10^{-5}$	7.716	$3.70 \times 10^{-5}$	10.197	$2.25 \times 10^{-3}$	6.102
0.025	$9.54 \times 10^{-6}$	7.890	$3.38 \times 10^{-6}$	10.939	$3.14 \times 10^{-4}$	7.177
0.0125	$1.22 \times 10^{-6}$	7.848	$2.85 \times 10^{-7}$	11.843	$4.57 \times 10^{-5}$	6.863

表 4.3: 二次再生核心質點法 ( $p=2, a=3h$ ) 之誤差及收斂率

而再生核心質點法之質點距  $h$  加密，在線性基底函數時，誤差是以 1/4 倍率遞減，而選用二次基底函數時，誤差是以 1/8 倍率遞減。

將上述三個表中零範數下的誤差值繪於同一圖中，如圖 4.1 所示。

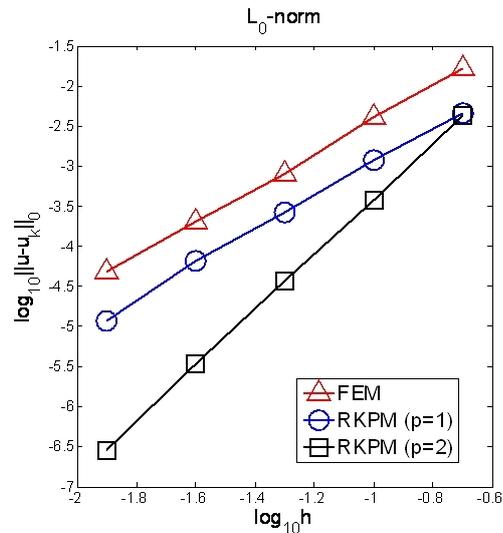


圖 4.1: 有限元素法及再生核心質點法之誤差比較

由表 4.1 至表 4.3 及圖 4.1 可清楚見到有限元素法及線性再生核心質點法之收斂行為都是  $O(h^2)$ ，就是誤差以 1/4 倍率遞減。而二次再生核心質點法之收斂行為是  $O(h^3)$ ，亦即誤差以 1/8 倍率遞減。這樣的結果與上一章第 2 節及第 4 節的誤差分析之理論相吻

合，即

$$\text{FEM} : \|u - u^h\|_{0,\Omega} \approx O(h^2) \quad (4.6)$$

$$\text{RKPM} : \|u - u^h\|_{0,\Omega} \approx \begin{cases} O(h^2) & , \text{ if } p = 1. \\ O(h^3) & , \text{ if } p = 2. \end{cases} \quad (4.7)$$

再生核心質點法雖計算之 CPU 時間比有限元多些，但其精度較高，由表 4.1 至表 4.3 可見到誤差之數量級是有些差距。有限元素法比再生核心質點法的誤差大一些。二次再生核心質點法比線性再生核心質點法更精確。另外值得一提的是，再生核心質點法階數提升，其線性系統中  $\mathbf{K}$  矩陣的尺度未增加，僅是矩陣帶寬增加而以。

由表 4.1 我們可約略估計有限元素法誤差的上界之常係數  $c_1$ ，如下所示

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega} \leq c_1 h^2 |u|_{2,\Omega}, \quad (4.8)$$

此外，從表 4.2，我們亦可約略估計出線性再生核心質點法上界之常係數  $c_2$ ，如下

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega} \leq c_2 a^2 |u|_{2,\Omega}, \quad (4.9)$$

在有限元素法中網格距  $h$ ，而再生核心質點法中核心半徑是隨基底函數的階增加而增大，線性基底為 2 倍的質點距  $a = 2h$ 。利用表 4.3，可估計出二階再生核心質點法上界係數  $c_3$ ，如下

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega} \leq c_3 a^3 |u|_{3,\Omega}, \quad (4.10)$$

此二階基底的核心半徑為 3 倍的質點距。上述  $c_1$ ， $c_2$  及  $c_3$  具有下列比值關係

$$\frac{c_1}{c_2} = 14, \frac{c_1}{c_3} = 29. \quad (4.11)$$

因此可知

$$\frac{c_2}{c_3} \approx 2. \quad (4.12)$$

通常  $c_1$  比  $c_2$  及  $c_3$  大的多，也就是有限元素法的誤差比再生核心質點法的誤差來得大。

## 第 5 章 應用

本章我們將介紹第 3 章中 FEM 型的網格法與 RKPM 型的無網格法的結合應用。其實這樣的結合已經成功應用於流體動力學及結構動力學 [20, 21]，但數學上的分析，卻尚未有完整的分析及理論結果。我們想知道要如何搭配才能有最佳的解及花費最少 CPU 時間。網格法的網格距及無網格法的質點距有什麼樣的關聯呢？我們將利用一個簡單的橢圓邊界值作問題範例來說明。

### 5.1 FEM-RKPM 結合法

考慮下列橢圓邊界值問題

$$-u''(x) = \pi^2 \sin \pi x, \quad -1 < x < 1, \quad (5.1)$$

$$u(-1) = 0, \quad (5.2)$$

$$u(1) = 0. \quad (5.3)$$

它具有真解為  $u(x) = \sin \pi x$ 。我們將定義域  $\Omega = (-1, 1)$  分成兩部分，左  $\Omega^- = (-1, 0)$  採用有限元素法 (FEM)，右  $\Omega^+ = (0, 1)$  則使用再生核心質點法 (RKPM)，而內邊界  $\Gamma : x = 0$ 。因此，這 FEM-RKPM 的結合法如圖 5.1 所示。取  $n$  個網格點及  $m$  個質點：

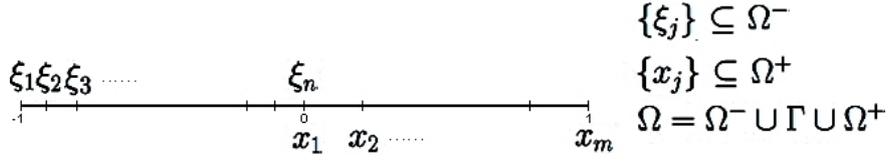


圖 5.1: 有限元素法及再生核心質點法之網格點及質點

其中  $m < n$ ，因為由第 4 章數值分析結果知道，有限元素法的網格距，若比再生核心質點法的質點距小，則誤差可達到平均，也就是誤差的數量級相當。

而 FEM-RKPM 結合法的基底函數定義如下

$$v = \begin{cases} v^- = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(x) \text{ in } \Omega^-, \\ v^+ = \sum_{i=1}^m b_i \varphi_i(x) \text{ in } \Omega^+, \end{cases} \quad (5.4)$$

並定義有限元素法之小單元  $e_j = [\xi_j, \xi_{j+1}]$ ，再生核心質點之小單元  $\omega_j = [x_j, x_{j+1}]$ 。橢圓邊界值問題 (5.1)-(5.3) 之有限元素及再生核心質點法解，即滿足一下列弱型式之解

$$a(u^h, v^h) = f(v^h), \quad \forall v^h \in \mathbf{V}, \quad (5.5)$$

其中雙線性形式

$$a(u, v) = \int_{\Omega^-} u'v' dx + \int_{\Omega^+} u'v' dx + \omega^2 \int_{\Gamma} (u^- - u^+)(v^- - v^+) dl, \quad (5.6)$$

而線性形式

$$f(v) = \int_{\Omega^-} f v dx + \int_{\Omega^+} f v dx, \quad (5.7)$$

在 (5.5) 中的有限維空間為

$$\mathbf{V} = \text{span}\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)\}, \quad (5.8)$$

而 (5.6) 中的  $\omega$  是代表權重，它與網格距或質點距有關。而 (5.5) 等價於下面泛函極小問題

$$E(u^h) = \min_{v^h \in \mathbf{V}} E(v), \quad (5.9)$$

泛函  $E(v)$  定義如下

$$E(v) = a(v, v) - 2f(v) = \int_{\Omega^\pm} ((v')^2 - fv)dx + \omega^2 \int_{\Gamma} (v^- - v^+)^2 dl, \quad (5.10)$$

我們利用相似於第 3 章所介紹的單元分析方式，來建立 FEM-RKPM 結合法所產生之線性系統，我們記為下列線性系統：

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad (5.11)$$

但  $\mathbf{M}$  矩陣的形成是由三個塊狀矩陣充零擴大組合而成，而  $\mathbf{F}$  向量的形成是由三個小向量擴充而成的。

首先我們將  $\Omega^-$  及  $\Omega^+$  的基底函數大致描繪出來，見圖 5.2。

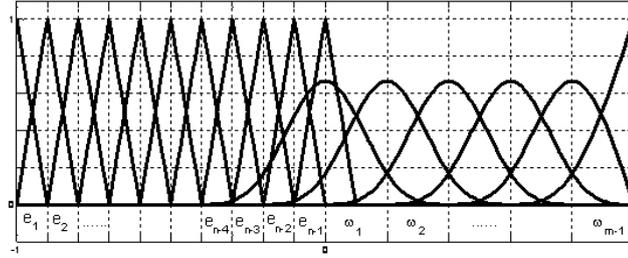


圖 5.2: FEM-RKPM 結合法之單元及基底函數分佈圖

接下來利用單元分析，逐一計算小單元內的積分。我們將 (5.10) 中的積分予以分類，分述如下：

$$\int_{\Omega^-} (v')^2 d\Omega = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{e_j} (v')^2 d\Omega = \sum_{j=1}^{n-5} \int_{e_j} (v')^2 d\Omega + \sum_{j=n-4}^{n-1} \int_{e_j} (v')^2 d\Omega, \quad (5.12)$$

$$\int_{\Omega^+} (v')^2 d\Omega = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\omega_i} (v')^2 d\Omega = \int_{\omega_1} (v')^2 d\Omega + \sum_{i=2}^{m-1} \int_{\omega_i} (v')^2 d\Omega, \quad (5.13)$$

$$\int_{\Omega^-} fvd\Omega = \sum_{j=1}^{n-5} \int_{e_j} fvd\Omega + \sum_{j=n-4}^{n-1} \int_{e_{n-1}} fvd\Omega, \quad (5.14)$$

$$\int_{\Omega^+} fvd\Omega = \int_{\omega_1} fvd\Omega + \sum_{i=2}^{m-1} \int_{\omega_i} fvd\Omega, \quad (5.15)$$

在內交界點  $x = 0$  位置，即  $\Gamma$  上，採用點估計：

$$\begin{aligned} \omega^2(v^- - v^+)^2|_{x=0} &= \omega^2(a_n\phi_n - b_1\varphi_1 - b_2\varphi_2)^2|_{x=0} \\ &= \omega^2 \cdot [a_n, b_1, b_2] \begin{bmatrix} \phi_n^2 & -\phi_n\varphi_1 & -\phi_n\varphi_2 \\ -\phi_n\varphi_1 & \varphi_1^2 & \varphi_1\varphi_2 \\ -\phi_n\varphi_2 & \varphi_1\varphi_2 & \varphi_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.16)$$

由前面基底分佈圖上可知在  $x = 0$  位置上有 3 個基底，分別為有限元函數  $\phi_n$  及再生核心函數  $\varphi_1$  及  $\varphi_2$ 。所以，泛函 (5.10) 中的最後一項化成一  $3 \times 3$  矩陣二次式。

我們若將 (5.4) 式中係數  $a_j$  及  $b_i$  用向量形式表示

$$\mathbf{x}_1^t = [a_1, a_2, \dots, a_n], \quad (5.17)$$

$$\mathbf{x}_2^t = [b_1, b_2, \dots, b_m], \quad (5.18)$$

並令總係數向量  $\mathbf{x}$  是

$$\mathbf{x}^t = [\mathbf{x}_1^t, \mathbf{x}_2^t], \quad (5.19)$$

那麼部分 (5.12) 的積分可化成下列形式

$$\sum_{j=1}^{n-5} \int_{e_j} (v')^2 d\Omega = \mathbf{x}_1^t \mathbf{M}_1 \mathbf{x}_1, \quad (5.20)$$

其中  $\mathbf{M}_1$  是一帶狀矩陣，帶寬為 3。另一方面，部分 (5.13) 可化成下列形式

$$\sum_{i=2}^{m-1} \int_{\omega_i} (v')^2 d\Omega = \mathbf{x}_2^t \mathbf{M}_2 \mathbf{x}_2, \quad (5.21)$$

其中  $\mathbf{M}_2$  也是一帶狀矩陣，帶寬為 7 (當  $p = 1$ ) 或為 11 (當  $p = 2$ )。而 (5.12) 式中剩餘的項可表成下式，其中四小單元  $e_{n-4} \cup e_{n-3} \cup e_{n-2} \cup e_{n-1}$  中含有含有基底  $\phi_{n-4}, \dots, \phi_n, \varphi_1$  及  $\varphi_2$  共七個基底：

$$\sum_{j=n-4}^{n-1} \int_{e_j} (v')^2 d\Omega = \sum_{j=n-4}^{n-1} \int_{e_j} (a_{n-4}\phi'_{n-4} + \dots + a_n\phi'_n + b_1\varphi'_1 + b_2\varphi'_2)^2 d\Omega$$

$$= [a_{n-4}, \dots, a_n, b_1, b_2] \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}_{7 \times 7} \begin{bmatrix} a_{n-4} \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

其中將  $e_{n-4} \cup e_{n-3} \cup e_{n-2} \cup e_{n-1}$  記為  $e^*$ ，且  $M_{11} = [\int_{e^*} \phi'_k \phi'_\ell d\Omega]_{5 \times 5}$ ， $M_{12} = [\int_{e^*} \phi'_k \varphi'_t d\Omega]_{5 \times 2}$ ， $M_{21} = M_{12}^t$ ， $M_{22} = [\int_{e^*} \varphi'_s \varphi'_t d\Omega]_{2 \times 2}$ ， $n-4 \leq k, \ell \leq n$ ， $1 \leq s, t \leq 2$ 。而 (5.13) 式中剩餘的一項可表成下面  $4 \times 4$  矩陣二次式，其中  $\omega_1$  中含有  $\phi_n$ ， $\varphi_1$ ， $\varphi_2$ ，及  $\varphi_3$  共四個基底：

$$\begin{aligned} \int_{\omega_1} (v')^2 d\Omega &= \int_{\omega_1} (a_n \phi'_n + b_1 \varphi'_1 + b_2 \varphi'_2 + b_3 \varphi'_3)^2 d\Omega \\ &= [a_n, b_1, b_2, b_3] \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}_{4 \times 4} \begin{bmatrix} a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

其中  $M_{11} = [\int_{\omega_1} (\phi'_n)^2 d\Omega]_{1 \times 1}$ ， $M_{12} = [\int_{\omega_1} \phi'_n \varphi'_\ell d\Omega]_{1 \times 3}$ ， $M_{21} = M_{12}^t$ ，及  $M_{22} = [\int_{\omega_1} \varphi'_k \varphi'_\ell d\Omega]_{3 \times 3}$ ， $1 \leq k, \ell \leq 3$ 。

另將係數  $a_{n-4}, \dots, a_n, b_1, \dots, b_3$  記為一向量，如下

$$\tilde{\mathbf{x}}^t = [a_{n-4}, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3]_{1 \times 8}, \quad (5.24)$$

結合 (5.16)，(5.22)-(5.23) 之二次式可得

$$\int_{e_{n-4} \cup \dots \cup e_{n-1} \cup \omega_1} (v')^2 d\Omega + \omega^2 \int_{\Gamma} (v^- - v^+)^2 dl = \tilde{\mathbf{x}}^t \mathbf{M}_3 \tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.25)$$

其中  $\mathbf{M}_3$  是一  $8 \times 8$  子矩陣聯結  $\mathbf{M}_1$  ( $n \times n$ ) 及  $\mathbf{M}_2$  ( $m \times m$ ) 之矩陣，如圖 5.3。相同地，右邊向量也可由 (5.14)-(5.15) 建構出的三個子向量  $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_3$  組合而成，其中  $\mathbf{F}_3$  是  $8 \times 1$  的向量，如圖 5.4。

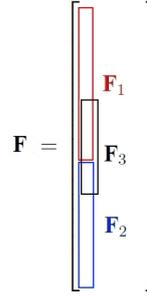
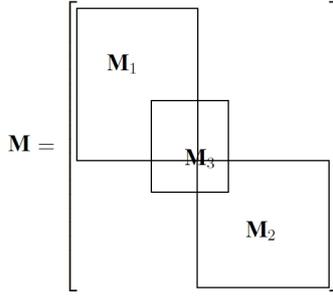


圖 5.3: 系統 (5.11) 中矩陣  $\mathbf{M}$  的結構

圖 5.4: 系統 (5.11) 中向量  $\mathbf{F}$  的結構

## 5.2 誤差分析

此章節我們要了解誤差收斂的行為。我們首先定義一個泛函空間  $\mathbf{H}$  及相應範數  $\|\cdot\|_H$ ，如下

$$\mathbf{H} = \{v \mid v \in \mathbf{H}^1(\Omega^\pm), \text{ and } v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \quad (5.26)$$

$$\|v\|_H = \left\{ \|v\|_{1,\Omega^-}^2 + \|v\|_{1,\Omega^+}^2 + \omega^2 \|v^+ - v^-\|_{0,\Gamma}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.27)$$

後面會用此範數去作估計誤差。此範數與前面定義之雙線性形式 (5.6) 具下列兩個不等式關係

$$a(u, v) \leq c_1 \|u\|_H \|v\|_H, \quad u, v \in \mathbf{V}, \quad (5.28)$$

$$a(v, v) \geq c_0 \|v\|_H^2, \quad v \in \mathbf{V}, \quad (5.29)$$

其中有限維空間  $\mathbf{V}$  已定義於 (5.8) 中。利用 (5.27) 可整理得到在內邊界  $\Gamma$  上的範數關係如下

$$\|v^+ - v^-\|_{0,\Gamma}^2 = \omega^{-2} \left\{ \|v\|_H^2 - \|v\|_{1,\Omega^-}^2 - \|v\|_{1,\Omega^+}^2 \right\}, \quad (5.30)$$

進一步可得

$$\|v^+ - v^-\|_{0,\Gamma} \leq \omega^{-1} \|v\|_H^2, \quad (5.31)$$

再利用 Lax-Miligram 引理 [18] 可證明得到下列之最優估計式

$$\|u - u^h\|_H \leq C \cdot \left\{ \inf_{v \in \mathbf{V}} \|u - v\|_H + \omega^{-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{0,\Gamma} \right\}, \quad (5.32)$$

若將雙線性形式中的內邊界上的權重  $\omega$  取下面的關係

$$\omega = a^{-\delta}, \quad \delta > 0. \quad (5.33)$$

其中次方  $(-\delta)$ ，可由後面誤差平衡後推導出，此權重  $\omega$  一定比 1 來得大。接下來我們再作一些假設可得到下面的定理。

**定理 5.2.1.** 假設  $u \in \mathbf{H}^{k+1}(\Omega^-)$ ， $u \in \mathbf{H}^{k+2}(\Gamma)$ ， $k \geq 1$ ，以及  $u \in \mathbf{H}^{p+1}(\Omega^+)$ ， $u \in \mathbf{H}^{p+2}(\Gamma)$ ， $p \geq 1$  和  $\|\frac{\partial u}{\partial n}\|_{0,\Gamma} \leq \|u\|_{2,\Omega^+}$ ，則可得到下面估計式

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_H &\leq c_1 h^k |u|_{k+1,\Omega^-} + c_2 \kappa a^p |u|_{p+1,\Omega^+} \\ &\quad + \omega c_3 h^{k+1} |u|_{k+2,\Gamma} + \omega c_4 \sqrt{\kappa} a^{p+1} |u|_{p+2,\Gamma} \\ &\quad + \omega^{-1} \|u\|_{2,\Omega^+}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

將 (5.33) 的假設考慮進來，可得到下面近似結果

$$\|u - u^h\|_H \approx O(c_1 h^k) + O(c_2 a^p) + O(c_3 a^{-\delta} h^{k+1}) + O(c_4 a^{p+1-\delta}) + O(a^\delta), \quad (5.35)$$

其中  $c_1 > c_2$ ， $c_3 > c_4$ 。根據第 4 章的數值分析得知，當  $p = 1$  時，則  $c_1$  約為 14 倍的  $c_2$ ，所以令  $c_1 \approx 15c_2$ ；當  $p = 2$  時，則  $c_1 \approx 30c_2$ ，更高階亦可找出相似關係。因此將定理 5.2.1 中，誤差的項彼此平衡，例如：

$$O(a^{p+1-\delta}) = O(a^\delta), \quad (5.36)$$

$$O(a^p) = O(\gamma \cdot h^k), \quad (5.37)$$

$$O(a^{p+1}) = O(\gamma \cdot h^{k+1}), \quad (5.38)$$

其中  $\gamma = \frac{c_1}{c_2} \approx \frac{c_3}{c_4}$ ，可得到參數彼此關係如下

$$p + 1 - \delta = \delta, \quad p \geq 1, \quad (5.39)$$

$$h = \min \left\{ e^{\frac{p}{k} \ln a - \frac{\ln \gamma}{k}}, e^{\frac{p+1}{k+1} \ln a - \frac{\ln \gamma}{k+1}} \right\}, \quad k \geq 1. \quad (5.40)$$

利用定理 5.2.1 及 (5.39)-(5.40) 可得到下面的推論。

推論 5.2.2. 當 FEM-RKPM 結合法中，子區域  $\Omega^+$  中再生核心基底的階  $p$  及半徑  $a$  決定後，子區域  $\Omega^-$  中的網格距  $h$  可考慮如下

$$h = \min \left\{ e^{\frac{p}{k} \ln a - \frac{\ln \gamma}{k}}, e^{\frac{p+1}{k+1} \ln a - \frac{\ln \gamma}{k+1}} \right\}, \quad k \geq 1. \quad (5.41)$$

因此，得到權重  $\omega$  取法如下

$$\omega = a^{-\delta}, \quad \delta = \frac{p+1}{2}, \quad p \geq 1, \quad (5.42)$$

並可得到下面的收斂行爲

$$\|u - u^h\|_H \approx O(a^\delta), \quad (5.43)$$

其中

$$\gamma = \begin{cases} 15 & , \text{當 } p = 1. \\ 30 & , \text{當 } p = 2. \end{cases}$$

FEM-RKPM 結合的策略如表 5.1。

RKPM ( $\Omega^+$ )	$p = 1$	$p = 2$
	$h = 0.1$	$h = 0.1$
	$a = 0.2$	$a = 0.3$
FEM ( $\Omega^-$ )	$k = 1$	$k = 1$
	$h = 0.013$	$h = 0.003$
	$k = 2$	$k = 2$
	$h = 0.12$	$h = 0.01$

表 5.1: 子區域內參數選取之策略

由表 5.1 可知，在子區域  $\Omega^-$  (有限元素法) 中，網格距  $h$  比子區域  $\Omega^+$  (再生核心質點法) 之質點距  $h$  來的小，所以在無網格法中的基底數目要比有網格法中的基底數

目來得少。這也是為什麼在上一節中，基底定義 (5.4) 中，在  $\Omega^+$  中有  $m$  個，在  $\Omega^-$  中有  $n$  個，而設  $m$  比  $n$  小的原因。

當然我們也可令權重  $\omega$  如下

$$\omega = h^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (5.44)$$

那麼，我們可得到下面推論 5.2.3。

**推論 5.2.3.** 當 FEM-RKPM 結合法中，子區域  $\Omega^-$  中有限元素法的網格距  $h$  及階  $k$  決定後，子區域  $\Omega^+$  中的再生核心質點法之基底半徑  $a$  需考慮，如下：

$$a = \min \left\{ e^{\frac{k}{p} \ln h + \frac{\ln \gamma}{p}}, e^{\frac{k+1}{p+1} \ln h + \frac{\ln \gamma}{p+1}} \right\}, \quad p \geq 1. \quad (5.45)$$

因而權重  $\omega$  取法如下

$$\omega = h^{-\alpha}, \quad \alpha = \frac{k+1}{2}, \quad k \geq 1, \quad (5.46)$$

則可得到下面收斂形式

$$\|u - u^h\|_H \approx O(h^\alpha). \quad (5.47)$$

在推論 5.2.2 及推論 5.2.3 中的誤差收斂行爲可換至零範數分別如下

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega} \approx O(a^{\frac{p+3}{2}}) = \begin{cases} O(a^2) & , p = 1. \\ O(a^{2.5}) & , p = 2. \\ O(a^3) & , p = 3. \\ O(a^{3.5}) & , p = 4. \end{cases} \quad (5.48)$$

以及

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega} \approx O(h^{\frac{k+3}{2}}) = \begin{cases} O(h^2) & , k = 1. \\ O(h^{2.5}) & , k = 2. \\ O(h^3) & , k = 3. \\ O(h^{3.5}) & , k = 4. \end{cases} \quad (5.49)$$

因此，我們知道當選取線性的階數，其點數加密時，誤差在零範數下，呈現  $1/4$  倍的遞減，當其中一子區域的參數決定時，另一子區域可以根據上述分析結果來搭配，以達到最節省 CPU 時間，及具有最優收斂的目標。

此論文中子區域彼此考慮互斥，當然亦可考慮部分區域有重疊的現象，分析的方法也將有些不同，關於這部分，我們計畫以後再進行此方向之研究。關於更多結合的理論及數值結果可參考文獻 [22, 23]。

## 第 6 章 結論

本論文第 3 章前半段先簡單介紹 FEM，採用單元分析方式，後半段再介紹 RKPM，我們可清楚地了解兩方法的離散系統之建構方式都是由小矩陣推疊而出，收斂性分析的作法都需定義雙線性形式及相應的範數。因此，我們才會將此兩種方法在論文中先後介紹。此外，可得知線性有限元素法 (linear FEM) 可視為線性再生核心質點法 (linear RKPM) 的特例。線性有限元素法的誤差上界與網格距  $h$  有關，其中我們假設方程解足夠平滑，如下

$$\text{FEM} : \|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq C_0 h |u|_{2,\Omega} \quad (6.1)$$

而再生核心質點法的誤差上界是與核心函數的半徑  $a$  及階數  $p$  有關，如下

$$\text{RKPM} : \|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq C_p a^p |u|_{p+1,\Omega}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (6.2)$$

在第 4 章數值結果顯示 RKPM 比 FEM 精度還高，兩方法中的基底都是局部函數，但因 RKPM 的核心半徑比 FEM 的網格距來得大才能得到較好的精度。RKPM 的核心半徑不宜過大，半徑太大會增加 CPU 計算時間，且 condition number 也會變大，雖穩定性變差但還是比強型式下配置法來得穩定 [24]。此外，另值得一提的是任何階 ( $p \geq 1$ ) 的 RKPM 產生的離散系統的尺度都相同，只是矩陣的帶寬不同，當使用愈高階再生核心基底函數，則會產生愈寬的帶寬。反觀 FEM，當使用高階 FEM 基底，其離散系統尺度將倍增。在論文第 4 章中只提供線性 FEM 與 RKPM 作比較，它們有相同尺度的離散系統，精度是 RKPM 較高。估計式 (6.1)-(6.2) 中的常數有下列關係

$$C_0 > C_p, \quad \forall p \text{ 且 } \frac{C_p}{C_0} > 10, \quad \forall p \quad (6.3)$$

論文的第 5 章則介紹 FEM 與 RKPM 之結合及應用，本章仍是介紹如何匹配為主，其中也詳細介紹建構離散系統。兩方法分別使用多少基底，相關的參數如何選取，此部分可透過分析獲得。我們推導出兩方法結合下所得之最優估計如下

$$\|u - u^h\|_H \approx O(a^\delta), \quad \delta = \frac{p+1}{2}, \quad p \geq 1 \quad (6.4)$$

其中  $\|\cdot\|_H$  範數相當於壹範數，而權重為

$$\omega = a^{-\delta} \quad (6.5)$$

當 RKPM 的核心半徑及階數決定後，則可計算出 FEM 適當的網格距，如下

$$h = \min \left\{ e^{\frac{p}{k} \ln a - \frac{\ln \gamma}{k}}, e^{\frac{p+1}{k+1} \ln a - \frac{\ln \gamma}{k+1}} \right\}, \quad k \geq 1 \quad (6.6)$$

其中參數  $\gamma$  代表 FEM 誤差上界之係數與 RKPM 的誤差上界係數之比值。

根據 (6.4)-(6.6) 的估計結果，來使用參數，則可讓整體誤差最小，且 CPU 計算時間最少，穩定性及收斂性兼顧。這樣的理論分析模式也適合於 FEM 與其他類的無網格法的結合。

從應用層面來看本論文使用一維的邊界問題模型似乎過於簡單，但若直接使用二維或三維問題來介紹 RKPM，離散系統之建構會有些複雜。本論文先由一維介紹是希望能先對 RKPM 有初步的認識，弄清楚此方法的概念，才能將它延伸至高維度模型中。而理論部分則不會因為維度增加而改變，分析方式並不困難。其他的無網格法的本質與 RKPM 相差不大，相信大家都能跟隨，將它們更加發揚光大，應用於各類的科學及工程問題中。

## - 參考文獻 -

- [1] W. K. Liu, T. Belytschko and J. T. Oden ( Eds. ) , Special Issue on Meshless Methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, 1996.
- [2] J. S. Chen and W. K. Liu ( Eds. ) , Special Issue on Meshfree Methods: Recent Advances and New Applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, 2004.
- [3] J. Dolbow and T. Belytschko, Numerical integration of Galerkin weak form in meshfree methods. *Computational Mechanics*, Vol. 23, pp. 219-230, 1999.
- [4] J. S. Chen, C. T. Wu, S. Yoon and Y. You, A stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, pp. 435-466, 2001.
- [5] E. J. Kansa, Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-I surface approximations and partial derivative estimates, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol.199(8/9), pp. 127-145, 1990.
- [6] E. J. Kansa, Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-II solutions to parabolic, hyperbolic

and elliptic partial differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol.199(8/9), pp. 147-161, 1990.

- [7] R. Schaback, Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation, *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 3, pp. 251-264, 1995.
- [8] N. R. Aluru, A point collocation method based on reproducing kernel approximation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, pp. 1083-1121, 2000.
- [9] D. W. Kim and Y. Kim, Point collocation method using the fast moving least-square reproducing kernel approximation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, pp. 1445-1464, 2003.
- [10] H. Y. Hu, J. S. Chen and W. Hu, Error analysis of collocation method based on reproducing kernel approximation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 27, pp. 554-580, 2011.
- [11] P. Lancaster and K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least squares methods, *Mathematics of Computation*, Vol. 37, pp. 141-158, 1981.
- [12] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229-256, 1994.
- [13] Y. H. Wu, *Reproducing Kernel Particle Method for Eegenvalue Problem*, Master thesis, Department of Mathematics, Tunghai University, 2010.
- [14] W. K. Liu, S. Jun and Y. F. Zhang, Reproducing kernel particle methods, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1081-1106, 1995.
- [15] J. S. Chen, C. Pan, C. T. Wu, W. K. Liu, Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 195-227, 1996.

- [16] J. S. Chen, W. Han, Y. You, and X. Meng, A reproducing kernel method with nodal interpolation property, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, 935-960, 2003.
- [17] G. Strang, *Linear Algebra and Its Application*, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., Orlando, Florida, 1988.
- [18] O. Axelsson and V. A. Barker, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems: Theory and Computation*, Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1983.
- [19] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, Elsevier North-Holland, Inc., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
- [20] T. Fries and H. Matthies, A stabilized and coupled meshfree/meshbased method for the incompressible Navier-Stokes equations-Part II: Coupling, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp. 6191-6204, 2006.
- [21] T.P. Fries, H.G. Matthies, Stabilized and coupled FEM/EFG approximations for fluid problems, *Proceedings of the Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI)*, Beijing, China, 2004.
- [22] Z. C. Li, *Combined Methods for Elliptic Equations with Singularities*, Interfaces and Infinities, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1998.
- [23] Z. C. Li, T. T. Lu, H. Y. Hu and A. H. D. Cheng, *Trefftz and Collocation Methods*, WIT press, Southhampton, 2008.
- [24] H. Y. Hu, J. S. Chen and S. W. Chi, Perturbation and stability analysis of strong form collocation with reproducing kernel approximation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011.