東 海 大 學 數 學 系 研 究 所

碩 士 論 文

指 導 教 授： 葉芳栢 博 士

On Some Properties of Structured Singular Values of Reciprocal Matrices

倒數矩陣之結構奇異值性質討論

研究生：范姜凱靖

中華民國一百年七月

東　海　大　學

數 學 系

碩士學位口試委員審定書

本系碩士班 范姜凱靖 君

所提論文　On Some Properties of Structured Singular Values of Reciprocal Matrices
(倒數矩陣之結構奇異值性質討論)

合於碩士班資格水準，業經本委員會評審通過，特此證明。

口試委員：曾旭堯

黃皇男

陳硯輝

指導教授：葉芳柏

所　長：陳文豪

中 華 民 國 一〇〇 年 七 月 二十七 日

誌謝

在這幾年碩士生涯當中，感謝我的指導教授葉芳栢老師對我的諄諄教誨；不論是做學術研究、論文指導甚至是人生態度，特別是擔任微積分助教時，學到了很多教學方式以及教育理念。另外要特別感謝黃皇男老師，解決我有關 Lyx 排版的問題、使用 MATLAB 上碰到的困境，以及指導論文上的一些細節。也感謝陳淑珍老師及其他老師對我的鼓勵，也感謝系上助教對我的幫忙。

除了老師之外也感謝學長姐、同學、學弟妹的互相鼓勵、幫忙；感謝偉良學長、明財學長、靖宏、俊廣、毅傑、國峰、雲慶、旭育、岳永、柏耕、柏諺、凡雅、大鈞、培瑛等等，讓研究所生活添增一份樂趣。

最後感謝的是我的家人以及許多親戚的支持與激勵，要感謝的人實在太多，感謝這求學路上任何曾經指導我、鼓勵我、陪伴我的人，使我不至感到孤單。若是沒有你們，這篇論文也無法完成，謝謝你們。

摘要

本篇論文主要是探討倒數矩陣及特徵矩陣的一些性質，並找出 2 階倒數矩陣的一般表示式。接著利用單元相似或稱單元等價於友矩陣的觀念計算最大奇異值，也整理出 2 階方陣單元相似於友矩陣的充要條件。並找出倒數矩陣在某些條件下，其結構奇異值爲 1。

關鍵字：倒數矩陣 (reciprocal matrix)、特徵矩陣 (signature matrix)、單元相似 (unitary similarity)、單元等價 (unitary equivalent)、友矩陣 (companion matrix)、結構奇異值 (structured singular value, SSV)、最大奇異值 (maximum singular value)。

Contents

符號表

$\mathbb{R}$	實數
$\mathbb{C}$	複數
$\mathbb{C}^r$	r 維行向量 (column vector)
O_n	n 階 0 方陣 (zero matrix)
I_n	n 階單位方陣 (identity matrix)
$\mathbb{R}^{n\times n}$	n 階實數方陣
$\mathbb{C}^{n\times n}$	n 階複數方陣
$\mathbb{C}^{n\times r}$	$n\times r$ 階複數方陣
$\mathrm{diag}(a_{11}\,,\,\ldots,\,a_{nn})$	對角元素 $a_{11}\,,\,\ldots,\,a_{nn}$ 的矩陣
$\det(A)$	A 的行列式值 (determinant)
$\mathrm{tr}\,(A)$	A 的對角線和 (trace)
A^{-1}	A 的反矩陣 (inverse)
A^T	矩陣 A 的轉置 (transpose)
$\overline{A}$	矩陣 A 的共軛 (conjugate)
A^*	矩陣 A 的共軛轉置
$\sigma\,(A)$	A 的奇異值 (singular value)
$\overline{\sigma}\,(A)$	A 的最大奇異值 (maximum singular value)
$\rho(A)$	A 的頻譜半徑 (spectral radius)
$\mathbb{D}$	$\{\lambda\,:\,\|\|\lambda\|\| < 1\}$
$\overline{\mathbb{D}}$	$\{\lambda\,:\,\|\|\lambda\|\| \leq 1\}$
i	$\sqrt{-1}$
$\mathcal{R}_n$	$\left\{M \in \mathbb{C}^{n\times n}\,\middle\|\,\exists\, S\right.$ 是特徵矩陣 $\left.\ni SM = M^T S\right\}$
$\triangle$	$\{\mathrm{diag}\,[\delta_1 I_{r_1},\cdots,\delta_S I_{r_S},\,\triangle_{S+1},\cdots,\triangle_{S+F}]\mid \delta_i\in\mathbb{C},\,\triangle_{S+j}\in\mathbb{C}^{m_j\times m_j}\}$

第 1 章　緒論

當在探討控制系統，所關切的問題視系統是否達到強健穩定 (robust stability) 和強健性能 (robust performance) 的要求。而在解決不確定 (uncertainty) 系統時，其處理法有非結構型 (unstructure) 與 結構型 (structure) 兩種方法。在解決非結構型的不確定系統中，我們通常藉由傳統 Nevanlinna-Pick 插值理論及 H^∞ 控制理論設計出控制器。一般在量測結構化不確定系統時，都所採用的方法爲 Doyle 在 1982 年所提出的 μ-synthesis 理論 [1]。

而後 Fan [2] 在 1986 年提出對某種特定矩陣的結構奇異值 (structured singular value, SSV) 計算，令

$$A_i(\alpha) = \alpha P_i - M^* P_i M$$

其中 $i = 1, \cdots, n$，$\alpha \in \mathbb{R}$ ，$P_i = \operatorname{diag}(O_{k_1}, \cdots, O_{k_1-1}, I_{k_1}, O_{k_1+1}, \cdots, O_{k_n})$。之後 Yamamoto 跟 Kimura [3] 在 1995 年發表了一個矩陣若是倒數矩陣 (reciprocal matrix) ，則結構奇異值等於最大奇異值。但是這個結果在不確定性結構是對角爲常數的矩陣時不一定成立。

在許多物理結構中，包含了很多種具有對稱的性質，而這些性質經過函數轉換可以表示其輸入以及輸出的關係。而這個倒數性質就是其中一種，對稱性質的轉換函數或是轉換矩陣常被用來處理某些具有交互作用的電子資料，或是在設計操作器、感應系統時也常常利用到。在應用控制的部份對稱性更是被廣泛地拿來使用以及研究 [4, 5]。

本篇論文則是針對倒數矩陣的性質作一些探討，以及藉著結構奇異值等於最大奇異值，利用 [6] 中單元相似 (unitary similarity) 於友矩陣 (companion matrix) 來計算最大奇異值。第二章主要是一些數學預備知識，第三章則是主要結果。

第2章　數學預備知識

本章節主要介紹本文中使用到的數學預備知識。

2.1　結構奇異值的定義及其性質

先定義一個不確定性結構集合 (structured perturbation set) Δ 為：

$$\Delta \triangleq \left\{ \operatorname{diag}\left[\delta_1 I_{r_1}, \cdots, \delta_S I_{r_S}, \triangle_{S+1}, \cdots, \triangle_{S+F}\right] \mid \delta_i \in \mathbb{C}, \triangle_{S+j} \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j} \right\}$$

其中 S 跟 F 為非負整數且滿足下列關係式：

$$\sum_{i=1}^{S} r_i + \sum_{j=1}^{F} m_j = n$$

則開始定義結構奇異值 (structured singular value, SSV) 如下：

定義 2.1. 對任意矩陣 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，相對於不確定性結構 $\triangle \in \Delta$， A 的結構奇異值定義為

$$\mu_{\triangle}(A) \triangleq \left[\min\left\{\bar{\sigma}(\triangle) \mid \triangle \in \Delta, \det(I - A\triangle) = 0\right\}\right]^{-1} \tag{2.1.1}$$

如果沒有 $\triangle$ 使得 $\det(I - A\triangle) = 0$ 時，便定義 $\mu_{\triangle}(A) = 0$。

從上述定義可以發現結構奇異值 $\mu_{\triangle}(A)$ 和最大奇異值 $\overline{\sigma}(A)$ 之間的區別，$\bar{\sigma}(A)$ 只跟已知矩陣 A 有關，而 $\mu_{\triangle}(A)$ 的計算還必須多考慮 $\triangle$ 進去，而從 $\triangle$ 的定義我們可以知道對於任意

的不確定性結構集合 Δ 而言，必介於兩種情況之間

$$\{\delta I \mid \delta \in \mathbb{C}\} \subset \Delta \subset \mathbb{C}^{n\times n}$$

因此接下來我們將會把 $\triangle$ 考慮左右兩種極端的情況來藉此觀察 $\mu_{\triangle}(A)$ 上下限。

1. 當 $\triangle \in \{\delta I_n \mid \delta \in \mathbb{C}\}$ 時 $(S=1,\, F=0,\, r_1=n)$， 則 $\mu_{\triangle}(A)=\rho(A)$，其中 $\rho(A)$ 爲 A 的頻譜半徑，即 $\rho(A)=\max \mid \lambda(A) \mid$。

2. 當 $\triangle \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 時 $(S=0,\, F=1,\, m_1=n)$， 則 $\mu_{\triangle}(A)=\overline{\sigma}(A)$。

我們先對 Case 1. 作一個證明：

證明. $\det(I-A\triangle)=0$ 現可以化簡成 $\det(I-\delta A)=0$，可以轉換得知 $\frac{1}{\delta}$ 是 A 的特徵值 (eigenvalue)，且 $\overline{\sigma}(\triangle)=\mid \delta \mid$ 故從定義 2.1 可以寫成

$$\mu_{\triangle}(A)=\left[\min\{\mid \delta \mid :\ \det(I-\delta A)=0,\, \delta\in\mathbb{C}\}\right]^{-1}$$

因此 $\mu_{\triangle}(A)=\frac{1}{\min|\delta|}=\max \mid \lambda(A) \mid=\rho(A)$。

緊接著的是 Case 2. 的證明：

證明. 假設 $\overline{\sigma}(\triangle)<\frac{1}{\overline{\sigma}(A)}$，則 $\overline{\sigma}(A\triangle)\leqslant\overline{\sigma}(A)\overline{\sigma}(\triangle)<1$，也就是說 $I-A\triangle$ 非奇異，根據定義 2.1 可以知道 $\mu_{\triangle}(A)=0\leqslant\overline{\sigma}(A)$。另一方面，令 u 跟 v 爲單位向量並滿足 $Av=\overline{\sigma}(A)\,v$，且定義 $\triangle\triangleq\frac{1}{\overline{\sigma}(A)}vu^*$，把它寫成 $\overline{\sigma}(A)^{-1}=v^*\triangle u$，這表示 $\mathrm{rank}(\triangle)=1$，$\overline{\sigma}(\triangle)=\overline{\sigma}(A)^{-1}$，接著我們利用 $Av=\overline{\sigma}(A)\,v$ 可以得知 $I-A\triangle$ 必爲奇異，由定義 2.1 可以得到 $\mu_{\triangle}(A)\geq\frac{1}{\overline{\sigma}(\triangle)}=\overline{\sigma}(A)$，結合前半段可得 $\overline{\sigma}(A)\leqslant\mu_{\triangle}(A)\leqslant\overline{\sigma}(A)$，藉由夾擠定理得到結論 $\mu_{\triangle}(A)=\overline{\sigma}(A)$。

因此這樣的包含關係，同時決定了結構化奇異值的不等關係式

$$\rho(A)\leq\mu_{\triangle}(A)\leq\overline{\sigma}(A) \tag{2.1.2}$$

爲了使結構化奇異值的上下限再緊湊些，接著引入下面的集合：

$$\mathcal{Q}\triangleq\{Q\in\Delta \mid Q^*Q=I_n\}$$

$$\mathcal{D} \triangleq \left\{ \operatorname{diag}\left[D_1, \cdots, D_s, d_1 I_{m_1}, \cdots, d_F I_{m_F}\right] \mid D_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j > 0 \right\}$$

則對於任意 $\triangle \in \Delta$，$Q \in \mathcal{Q}$，$D \in \mathcal{D}$，我們有下面的結果。$Q^* \in \mathcal{Q}$，$Q\triangle \in \Delta$，$\triangle Q \in \Delta$，$\overline{\sigma}(Q\triangle) = \overline{\sigma}(\triangle Q) = \overline{\sigma}(\triangle)$，$D\triangle = \triangle D$。

定理 2.1.1. [7]對任意 $Q \in \mathcal{Q}$，$D \in \mathcal{D}$，$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$\mu_\triangle(AQ) = \mu_\triangle(QA) = \mu_\triangle(A) = \mu_\triangle\left(DAD^{-1}\right) \tag{2.1.3}$$

證明. 對所有 $Q \in \mathcal{Q}$，$D \in \mathcal{D}$ 而言，$\det(I - A\triangle) = \det(I - AD^{-1}D\triangle) = \det(I - AD^{-1}\triangle D) = \det(I - DAD^{-1}\triangle DD^{-1}) = \det(I - DAD^{-1}\triangle)$，因此可得 $\mu_\triangle(A) = \mu_\triangle(DAD^{-1})$。另一方面，藉由 $Q^*Q = I_n$ 得知 $\det(I - A\triangle) = \det(I - AQQ^*\triangle)$。因爲 $Q^*\triangle \in \Delta$，$\overline{\sigma}(Q^*\triangle) = \bar{\sigma}(\triangle)$，故 $\mu_\triangle(AQ) = \mu_\triangle(A)$。同理可證 $\mu_\triangle(QA) = \mu_\triangle(A)$。

結合 (2.1.2) 及 (2.1.3) 兩式我們可得：

$$\max_{Q\in\mathcal{Q}} \rho(QA) \leq \mu_\triangle(AQ) = \mu_\triangle(A) = \mu_\triangle\left(DAD^{-1}\right) \leq \inf_{D\in\mathcal{D}} \overline{\sigma}\left(DAD^{-1}\right)$$

簡化成下列有助我們計算結構化奇異值的式子：

$$\max_{Q\in\mathcal{Q}} \rho(QA) \leq \mu_\triangle(A) \leq \inf_{D\in\mathcal{D}} \overline{\sigma}\left(DAD^{-1}\right) \tag{2.1.4}$$

接著我們所關心的是 $\mu_\triangle(A) = \overline{\sigma}(A)$ 的部份，這邊先引進奇異值分解 (singular value decomposition) 如下：

$$A = \sigma_1 UV^* + U_\perp \Lambda V_\perp^* \tag{2.1.5}$$

其中 $\sigma_1 > 0$ 代表的是 A 的最大奇異值，且重數爲 r；$U, V \in \mathbb{C}^{n\times r}$；$U_\perp, V_\perp \in \mathbb{C}^{n\times(n-r)}$；$U^*U = V^*V = I_r$；$U_\perp^* U_\perp = V_\perp^* V = I_{n-r}$；$U^*U_\perp = 0$；$V^*V_\perp = 0$；$\Lambda \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ 是非負而且 $\sigma_1 I_{n-r} - \Lambda > 0$

$$U=\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_S\\ E_1\\ \vdots\\ E_F\end{bmatrix},V=\begin{bmatrix}Y_1\\ \vdots\\ Y_S\\ H_1\\ \vdots\\ H_F\end{bmatrix}\tag{2.1.6}$$

$X_i,Y_i\in\mathbb{C}^{r_i\times r}$, $E_i,H_i\in\mathbb{C}^{m_i\times r}$ 對每一個 $\eta\in\mathbb{C}^r$ 定義

$$P_i^{\eta}\triangleq X_i\eta\eta^*X_i^*-Y_i\eta\eta^*Y_i^*\tag{2.1.7}$$

$$p_{S+j}^{\eta}\triangleq \eta^*\left(E_j^*E_j-H_j^*H_j\right)\eta\tag{2.1.8}$$

$$\nabla_M\triangleq\left\{\mathrm{diag}\left[P_1^{\eta},\cdots,P_S^{\eta},p_{S+1}^{\eta}I_{m_1},\cdots,p_{S+F-1}^{\eta}I_{m_{F-1}},O_{m_F}\right]\mid P_i^{\eta},p_{S+j}^{\eta}\text{如}\,(2.7)\,,(2.8)\,,\eta\in\mathbb{C}^r,||\eta||=1\right\}\tag{2.1.9}$$

定理 2.1.2. [7]給定一個 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$A$ 之奇異值分解 $A=\sigma_1UV^*+U_{\perp}\Lambda V_{\perp}^*$。

下列四個敘述爲等價關係：

1. $O_i\in\nabla_M$，其中 $1\le i\le n$；

2. 存在 $\eta\in\mathbb{C}^r$，$||\eta||=1$ 且 $Q\in\mathcal{Q}$ 使 $QU\eta=V\eta$ ；

3. 存在 $\xi\in\mathbb{C}^r$，$||\xi||=1$ 且 $Q\in\mathcal{Q}$ 使 $QA\xi=\bar{\sigma}\xi$ ；

4. $\mu_{\triangle}(A)=\overline{\sigma}(A)$ 。

其中 $\mathcal{Q}\triangleq\{Q\in\Delta\mid Q^*Q=I_n\}$。

證明. $1\Rightarrow 2$ ：

從 (2.1.9) 得知，假如 $O_i\in\nabla_M$ 可以找到 $\eta\in\mathbb{C}^r$，$||\eta||=1$ 使得 $X_i\eta\eta^*X_i^*-Y_i\eta\eta^*Y_i^*=0,\ i\le s$ 且 $\eta^*\left(E_j^*E_j-H_j^*H_j\right)\eta=0,\ j\le F-1$ 也就是說，對 $i\le s$ 的部份我們可以找到

一個相位角 $e^{j\theta_i}$ 讓 $e^{j\theta_i}X_i\eta = Y_i\eta$，對 $j \leq F-1$ 而言， $||E_j^{\eta}\eta|| = ||H_j\eta||$ 即便可以找出一個單元矩陣 (unitary matrix) Q_j 使得 $Q_jE_j\eta = H_j\eta$，剩下的部分因爲 $||U\eta|| = ||V\eta||$ 強迫 $||E_F\eta|| = ||H_F\eta||$，所以一樣可以找到一個單元矩陣 Q_F 讓 $Q_FE_F\eta = H_F\eta$，所以 Q 就由 $e^{j\theta_i}$，Q_j 跟 Q_F 組成，使得 $QU\eta = V\eta$。

$2 \Rightarrow 1$ ：

跟 $1 \Rightarrow 2$ 一樣的步驟證回去即可。

$2 \Rightarrow 3$ ：

從 (2.1.5) $A = \sigma_1 UV^* + U_\perp \Lambda V_\perp^*$ 跟 2 的敘述條件，因 $QA\left(V\eta\right) = Q\left(\sigma_1 UV^* + U_\perp \Lambda V_\perp^*\right)\left(V\eta\right) = \sigma_1 QU\eta + 0 = \sigma_1 V\eta$ 令 $\xi = V\eta$，即爲所求。

$3 \Rightarrow 2$ ：

同理，我們利用 (2.1.3) 做 QM 的奇異值分解可得 $QA = \sigma_1\left(QU\right)V^* + \left(QU_\perp\right)\Lambda V_\perp^*$ 假如 $QA\xi = \bar{\sigma}\xi$，那 ξ 就是相對應 σ_1 的奇異向量，也就是説存在一個向量 η 滿足 $\xi = V\eta$ 明顯地 $||\eta|| = 1$ 且使得 $QU\eta = QUV^*\xi = \frac{1}{\sigma_1}QA\xi = \xi = V\eta$。

$3 \Rightarrow 4$：

$QA\xi = \overline{\sigma}\xi$ 可以得到 $\mu_\triangle\left(A\right) = \max\limits_{Q\in\mathcal{Q}}\rho\left(QA\right) \geq \rho\left(QA\right) \geq \overline{\sigma}\left(A\right)$， 但是 $\overline{\sigma}\left(A\right)$ 恆爲 $\mu_\triangle\left(A\right)$ 的上界，所以強迫 $\mu_\triangle\left(A\right) = \overline{\sigma}\left(A\right)$。

$4 \Rightarrow 3$ ：

從 $\max\limits_{Q\in\mathcal{Q}}\rho\left(QA\right) = \mu_\triangle\left(A\right)$，顯而易見的得到證明。

至此，我們證明完此定理。

這個定理在接下來探討的倒數矩陣 (reciprocal matrix) 跟結構化奇異值的關係裡扮演很重要的角色。

2.2 倒數矩陣的基本性質

定義 2.2. [8]一個對角矩陣其元素由 1、-1 所組成的矩陣稱爲特徵矩陣 S (signature matrix)。當任意一個矩陣 $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$，對某一個特徵矩陣 S 符合

$$SM = M^T S$$

的條件時我們稱 M 爲倒數矩陣 (reciprocal matrix)。

範例 2.3. $M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$，$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$，

令 $S_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$， $S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

則 $S_1M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = M_1^T S$， $S_2M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = M_2^T S_2$，

因此 M_1, M_2 是倒數矩陣。

另外 $M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ 不是倒數矩陣，

因爲我們找不到 S 使得 $M_1 + M_2$ 符合倒數矩陣的定義，

同理 $M_1M_2 = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 13 & -4 \end{bmatrix}$， $M_2M_1 = \begin{bmatrix} -11 & 17 \\ -9 & 16 \end{bmatrix}$也不是倒數矩陣。

所以從上述範例中可以看出倒數矩陣沒有加法跟矩陣乘法的封閉性。

令一個集合 $\mathcal{R}_n = \left\{M \in \mathbb{C}^{n\times n} \,|\, \exists S \text{ 是特徵矩陣 } \ni SM = M^T S\right\}$，接著我們令 $a \in \mathbb{C}$ 是一個乘子 (scalar)，若 $M \in \mathcal{R}_n$ 則 $aM \in \mathcal{R}_n$；若 $M \in \mathcal{R}_n$ 則存在特徵矩陣 S 使得 $SM = M^T S$ ，現在 $S(aM) = aSM = aM^T S$ 即符合特徵矩陣的定義，因此 $aM \in \mathcal{R}_n$，具有純量乘法的封閉性。

引理 2.4. [8]假設 $M \in \mathcal{R}_n$ 是倒數矩陣，且能夠被奇異值分解如 (2.1.5)，則存在對稱單元矩陣 Θ 使得 $V = S\overline{U}\Theta$，其中 $\overline{U}$ 表矩陣 U 之元素的共軛。

引理 2.5. [8]給定一個對稱單元矩陣 $\Theta \in \mathbb{C}^{n\times n}$，則存在非零向量 $\eta \in \mathbb{C}^r$ 使得 $\Theta\eta = \overline{\eta}$，其中 $\overline{\eta}$ 表向量 η 之共軛向量。

爲了論文完整性，參考論文 [8] 重新整理定理如下。

定理 2.2.1. [8]假設 $M \in \mathcal{R}_n$ 是倒數矩陣，則

$$\mu_{\triangle}(M) = \bar{\sigma}(M)$$

證明. 從奇異值分解 $M = \sigma_1 UV^* + U_{\perp}\Lambda V_{\perp}^*$，根據引理 2.4，存在對稱單元矩陣 Θ 使得 $V = S\overline{U}\Theta$，再根據引理 2.5 找到一個對稱單元矩陣 Θ 之後，在引用引裡 2.5 便存在一個非零向量 $\eta \in \mathbb{C}^r$ 使得 $\Theta\eta = \overline{\eta}$，因此 $p_i^{\eta} = \eta^*(U_i^*U_i - V_i^*V_i)\eta = \eta^*U_i^*U_i\eta - \eta^*\Theta^*U_i^TS_iS_i\overline{U_i}\Theta\eta = ||U_i\eta||^2 - \eta^TU_i^T\overline{U_i}\overline{\eta} = ||U_i\eta||^2 - ||\overline{U_i}\overline{\eta}||^2 = 0$，其中 S_i 代表的是 S 的子矩陣，因爲 $SS = I$，理所當然 $S_iS_i = I$。因此， $0 \in \nabla_M$ 藉由定理 2.1.2 我們完成此定理。

2.3 單元等價與友矩陣的關係

此章節繼承上述倒數矩陣的特性：給定一矩陣 M 是倒數矩陣，則 $\mu_{\triangle}(M) = \overline{\sigma}(M)$，於是在思考如何讓 $\mu_{\triangle}(M) < 1$ 時，轉爲思考如何使得 $\bar{\sigma}(M) < 1$，在只考慮任意矩陣 $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 的情況下，令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，要找出使其最大奇異值小於 1 有太多的變數，因此利用友矩陣 (companion matrix) 的概念來減少變數。

定義 2.6. 給定一個矩陣 $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$，則其友矩陣 $C \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 定義如下：

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & s \end{bmatrix}$$

其中 $s = \mathrm{tr}(A)$ 爲對角線和，$p = \det(A)$ 爲行列式值。

藉由定義 2.6 可以得知 A 跟 C 兩個矩陣的特徵多項式相同，希望藉由 C 矩陣來減少計算最大奇異值的變數，是不是任意矩陣 A 的最大奇異值在何種條件下會跟 C 的最大奇異值相等？接下來就開始介紹單元等價 (unitary equicalence) 的概念。

定義 2.7. [6]給定一個任意矩陣 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 假如存在一個單元矩陣 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A = U^*BU$ ，其中 $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ，稱 B 單元相似 (unitary similarity) 或是單元等價 (unitary equivalent) 於 A。假如 U 是實數矩陣，稱 B 正交等價 (orthogonally equivalent) 於 A。

接下來就是如何判別兩個矩陣是不是單元等價；再此之前先說明一個引理。

引理 2.8. 假如 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 且 B 可逆，則 $\mathrm{tr}\,(B^{-1}AB) = \mathrm{tr}\,(A)$ 。

證明. $\mathrm{tr}\,(B^{-1}AB) = \sum\limits_{i,j,k=1}^{n} b_{ij}^{-1}a_{jk}b_{ki} = \sum\limits_{j,k=1}^{n} (bb^{-1})_{kj}\, a_{jk} = \sum\limits_{j,k=1}^{n} \delta_{kj}a_{jk} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk} = \mathrm{tr}(A)$。其中 $\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad i = j \\ 0 & \text{for} \quad i \neq j \end{cases}$ 。

有了此引理之後再說明下列定理：

定理 2.3.1. [6]假如 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $B = [b_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 兩者爲單元等價，則

$$\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

也就是 $||A||_F^2 = ||B||_F^2$ ，兩者的 Frobenius norm (Hilbert-Schmidt norm) 相等。

證明. 藉由矩陣運算可以得知 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \mathrm{tr}\,(A^*A)$ ，因此我們只要證明 $\mathrm{tr}\,(A^*A) = \mathrm{tr}\,(B^*B)$ 即可。因 A 跟 B 酉等價，所以可以找到一個單元矩陣 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $B = U^*AU$ ，則 $\mathrm{tr}\,(B^*B) = \mathrm{tr}\,(U^*A^*UU^*AU) = \mathrm{tr}\,(U^*A^*AU) = \mathrm{tr}\,(A^*A)$ 根據引理 2.8 跟單元矩陣的特性 $U^* = U^{-1}$ 得證。

從上述定理可以看出其僅僅是必要條件而已，而我們希望是有更強的充要條件，因此我們要另外定義一個符號，才能繼續說明下列充要條件的定理。

定義 2.9. [6]令兩個矩陣 S 及 T 定義

$$W\,(S,T) = S^{m_1}T^{n_1}S^{m_2}T^{n_2}\cdots S^{m_k}T^{n_k}$$

其中 $m_1, n_1, \cdots, m_k, n_k \geq 0$，而其階層 *(degree)* 爲 $m_1 + n_1 + m_2 + n_2 + \cdots + m_k + n_k$ 。

我們知道矩陣乘法是不能任意交換的，而我們眞正想要的是 $W(A,A^*)$ 跟 $W(B,B^*)$，假如 B 單元等價於 A ，那麼 $A=U^*BU$ 則

$$\begin{aligned}
W(A,A^*) &= (U^*BU)^{m_1}(U^*B^*U)^{n_1}\cdots(U^*BU)^{m_k}(U^*B^*U)^{n_k} \\
&= U^*B^{m_1}UU^*(B^*)^{n_1}U\cdots U^*B^{m_k}UU^*(B^*)^{n_k}U \\
&= U^*B^{m_1}(B^*)^{n_1}\cdots B^{m_k}(B^*)^{n_k}U \\
&= U^*W(B,B^*)U
\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{tr}W(A,A^*)=\mathrm{tr}U^*W(B,B^*)U=\mathrm{tr}W(B,B^*)$ 。當我們取 $W(S,T)=TS$ 之時，即爲定理 2.3.1 的結論。接著就是充要條件的定理。

定理 2.3.2. [6]給定兩個矩陣 $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是單元等價若且唯若 $\mathrm{tr}W(A,A^*)=\mathrm{tr}W(B,B^*)$對其階層 $W(S,T)$ 至多 $2n^2$。

根據定理 2.3.2 對 2×2 矩陣而言 $W(S,T)$ 要考慮的階層頂多 $2(2^2)=8$ 次，也就是 $m_1+n_1+m_2+n_2+\cdots+m_k+n_k\leq 8$，然而根據 [6] 實際上只要檢查 $W(S,T)=S,\ S^2,\ TS$ 三項條件即可；也就是 $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$ ，$\mathrm{tr}(A^2)=\mathrm{tr}(B^2)$ ，$\mathrm{tr}(A^*A)=\mathrm{tr}(B^*B)$。即下列推論成立：

推論 2.10. $A,\ B\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ 是單元等價若且唯若

$$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B),\ \mathrm{tr}\left(A^2\right)=\mathrm{tr}\left(B^2\right),\ \mathrm{tr}(A^*A)=\mathrm{tr}(B^*B)$$

2.4 n-頻譜單位球 Σ_n 與對稱雙盤 Γ_n

定義 2.11. n-頻譜單位球 (spectral unit ball)：

$$\Sigma_n \triangleq \left\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid \rho(A) \leq 1\right\}$$

由於 Σ_n 是一個 n^2 維的複數空間，且是一個非凸 (concave)，非平滑 (nonsmooth)，無界 (unbounded) 的集合，所以處理這個問題困難重重。如果 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，由[6]知 A 相似於 (similar) 其友矩陣 C；也就是說存在一可逆矩陣 T 使得 $A = TCT^{-1}$(若 $T^{*}T = I_n$ 即爲單元等價)，其中 C 可以寫成下列形式：

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} s_n & \cdots & \cdots & -s_2 & s_1 \end{bmatrix}$$

若考慮其特徵多項式：

$$\det\left(\lambda I_n - C\right) = \lambda^n - s_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} s_{n-1}\lambda + (-1)^n s_n$$

其 n 個特徵值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 滿足

$$\begin{aligned} s_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr}(A) \\ s_2 &= \prod_{i<j,\, i\neq j} \lambda_i\lambda_j \\ &\vdots \\ s_n &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det(A) \end{aligned}$$

在目前僅考慮 $n = 2$ 的情況下，C 如定義 2.6 所表示，$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & s \end{bmatrix}$。由上述特性我們考慮以下定義：

定義 2.12. 對稱雙盤 Γ_n(symmetrized n-disc)：

$$\Gamma_n \triangleq \left\{(s_1,\, s_2,\, \cdots,\, s_n) \mid \lambda^n - s_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\, s_{n-1}\lambda + (-1)^n\, s_n = 0,\, |\lambda_i| \le 1,\, i = 1,\, \cdots,\, n\right\}$$

相較於 Σ_n 不利的幾何性質，雖然 Γ_n 爲非凸，非平滑，但至少是一個緊緻集合 (Compact set)。現今只考慮 $n = 2$ 的情況下：

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &\triangleq \{(s,p) \mid \lambda^2 - s\lambda + p = 0,\, |\lambda| \le 1\}\\ &= \{(\mathrm{tr}\,(A)\,,\, \det\,(A)) \mid A \in \Sigma_2\}\\ &= \{(\lambda_1 + \lambda_2,\, \lambda_1\lambda_2 \,:\, |\lambda_1| < 1,\, |\lambda_2| < 1)\}\end{aligned}$$

因此 $A \in \Sigma_2$ 若且唯若 $(\mathrm{tr}\,(A)\,,\, \det\,(A)) \in \Gamma_2$。根據 [9]，Agler 和 Young 在 1999 年將 Σ_2上兩個點的 Spectral Nevanlinna-Pick 插值問題可以完全轉移到 Γ_2 上。Γ_2 是一個 2 維的空間，其爲非凸，非平滑，但至少是一個緊緻集合。下面的定理說明了 Γ_2 的一些性質：

定理 2.4.1. [10, 11]給定 $s,\, p \in \mathbb{C}$，下列敘述是等價的：

1. $(s,\, p) \in \Gamma_2$；
2. 方程式 $z^2 - sz + p = 0$ 的解都落在 $\overline{\mathbb{D}}$；
3. $|s - \overline{s}p| \le 1 - |p|^2$，且 $|s| \le 2$；
4. $|s| \le 2$ 且對任意的 $z \in \overline{\mathbb{D}}$，$|2zp - s| \le |2 - zs|$；
5. $|p| \le 1$，$|s| \le 2$ 且存在 $\beta \in \overline{\mathbb{D}}$ 使得 $s = \beta p + \overline{\beta}$；
6. $2|s - \overline{s}p| + |s^2 - 4p + |s|^2 \le 4$。

吾人將在後面章節利用此定理討論由倒數矩陣所形成的 Σ_n 之子集合是不是一個有界集合。

第3章　主要結果

對一般矩陣而言，MATLAB 程式提供了計算結構奇異值的指令 mussv，以及 mussvextract。接下來簡單介紹指令的使用方式：

mussv(M,BlockStructure)，其中 M 是給定矩陣，BlockStructure 選擇 $\triangle$ 的形式，

- 假如 BlockStructure(i, :) $=$ [-r 0], 代表 $\triangle_i \in \{\delta I_r \mid \delta \in \mathbb{R}\}$;
- 假如 BlockStructure(i, :) $=$ [r 0], 代表 $\triangle_i \in \{\delta I_r \mid \delta \in \mathbb{C}\}$;
- 假如 BlockStructure(i, :) $=$ [r c], 代表 $\triangle_i \in \mathbb{C}^{r\times c}$。

以下列矩陣為例：$M = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，已知 $\rho(M) = \overline{\sigma}(M) = 5$，由 (2.1.2) 得知 $\mu_\triangle(M) = 5$。

```
>> mussv([3 -4 0 0; 4 3 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1], [4 4])
% BlockStructure 在後面表格中有更多使用方法，此例先舉 4 階複數滿矩陣 [4 4]。
 ans =
 5.0000  5.0000
```

接著若是要找出相對應的 $\triangle$，

```
>> [bounds,muinfo] = mussv([3 -4 0 0; 4 3 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1], [4 4]);
>> VDelta = mussvextract(muinfo)
```

VDelta =

0.1200 0.1600 0 0

0 0 0 0

0 0 0 0

0 0 0 0

所以經 Matlab 計算的確 $\mu_{\triangle}(M)=5$，並找出其不確定性結構集合 $\triangle=\begin{bmatrix}0.12 & 0.16 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 是滿矩陣類型。下列表格是舉例更多 BlockStructure 的使用方法及相對應的 $\triangle$：

BlockStructure	$\triangle$	ans
[4 0]	$(0.12-0.16i)\,I_4$	[5.0000 5.0000]
[2 0; 2 2]	$\begin{bmatrix}0.12-0.16i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.12-0.16i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	[5.0000 5.0000]
[1 0; 2 2;-1 0]	$\begin{bmatrix}-0.2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$	[5.0000 5.0000]

3.1 倒數矩陣之結構奇異值計算

接下來我們將舉一個 4×4 的例子實作驗證定理 2.1.2，主要步驟如下：

1. 奇異值分解；

2. 驗證定理 2.1.2，$0\in\nabla_M$；

3. 從定理 2.1.2 知 $\mu_{\triangle}(M)=\overline{\sigma}(M)$。

範例 3.1. 1. 已知 $M=\begin{bmatrix}3 & -4 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$M$ 之奇異值分解如下：

$$M=\begin{bmatrix}-0.6 & -0.8 & 0 & 0\\ -0.8 & 0.6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=5\begin{bmatrix}-0.6 & -0.8\\ -0.8 & 0.6\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\sigma_1 UV^*+U_\perp \Lambda V_\perp^*$$

其中 $\sigma_1=5$ ，$U=\begin{bmatrix}-0.6 & -0.8\\ -0.8 & 0.6\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ E_1\\ E_2\end{bmatrix}$，$V=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\\ H_1\\ H_2\end{bmatrix}$

2.取 $S=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，則 $SM=M^TS$，

接著假設 $\Theta=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$，利用引理 2.4 $V=S\overline{U}\Theta$；

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.6 & -0.8\\ -0.8 & 0.6\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Theta$$，找出 $\Theta=\begin{bmatrix}-0.6 & -0.8\\ -0.8 & 0.6\end{bmatrix}$

現在我們將找出一個非零向量 $\eta \in \mathbb{C}$ 且 $||\eta|| = 1$ 使得 $\eta^* \left(X_i^* X_i - Y_i^* Y_i\right) \eta = 0$，

令 $\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$ 接著解連立方程組

$$\begin{cases} \eta^* \left(X_1^* X_1 - Y_1^* Y_1\right) \eta = 0 \\ \eta^* \left(X_2^* X_2 - Y_2^* Y_2\right) \eta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.64 & 0.48 \\ 0.48 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.64 & -0.48 \\ -0.48 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

在 $||\eta|| = 1$ 的限制下，$\eta = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$；

最後根據引理 2.5 利用 $\Theta\eta = \overline{\eta}$ 驗證 η；

$$\begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

所以 $\eta = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$。

根據 (2.1.9)，假設 $\nabla_M = \begin{bmatrix} X_i\eta\eta^* X_i^* - Y_i\eta\eta^* Y_i^* & 0 \\ 0 & \eta^* \left(E_j^* E_j - H_j^* H_j\right) \eta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$，

再從上述奇異值分解得知

$$X_i = \begin{bmatrix} -0.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{bmatrix}、Y_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}、E_j = H_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\nabla_M = \begin{bmatrix} 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$，也就是說 $O_2 \in \nabla_M$。

3. 因此藉由定理 2.2.1，$\mu_{\triangle}(M) = \overline{\sigma}(M) = 5$。

驗證 M 是倒數矩陣的同時發現：

$$S = S_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S_1 M = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M^T S_1$$，因此 M 是倒數矩陣；

同時也存在，$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, S_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$，

使得 $S_i M = M^T S_i$，$\forall i = 1, , 2, 3, 4$。

這表示特徵矩陣 S 不一定只有一個，從 $S_1 M = -S_3 M$ ，$S_2 M = -S_4 M$ 可以得知 ，更詳細有關特徵矩陣及倒數矩陣的整理將在章節 3.2 提出。

3.2 倒數矩陣與特徵矩陣之性質探討

給定一倒數矩陣 $M \in \mathcal{R}_2$，特徵矩陣 S 爲下列四個矩陣之一：

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$$

引理 3.2. 若 $S_iM = M^TS_i$，$M \in \mathcal{R}_2$，且 $S_iS_j = -I_2$，則 $S_jM = M^TS_j$。

證明. 假設其特徵矩陣是 S_3，從倒數矩陣的定義來看 $S_3M = M^TS_3$，此時兩邊同取負號 $-S_3M = M^T(-S_3)$，且 $S_3S_4 = -I_2$ 即等同於 $S_4M = M^TS_4$ ；同理 S_1 跟 S_2 也是。

引理 3.3. 對任意倒數矩陣 $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$，設 $D \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 爲任意對角矩陣，則 $M + D$ 爲倒數矩陣。

證明. 因 M 是倒數矩陣，也就是說 $\exists S$ 使得 $SM = M^TS$，

令 $D \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 是一個對角線矩陣，則

$$S(M + D) = SM + SD = M^TS + DS = M^TS + D^TS = (M + D)^T S$$

因此 $M + D$ 也是一個倒數矩陣。

引理 3.4. 設 $M = M^T \in \mathbb{C}^{2\times 2}$，令 $S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，則 SM 爲倒數矩陣。

證明. 當 $M = M^T$ 時，則根據上述的性質 2 得

$$S(SM) = M$$

另一方面

$$(SM)^T S = M^TS^TS = M^T = M$$

即

$$S\,(SM) = (SM)^T\,S$$

因此 SM 確實是倒數矩陣。

引理 3.5. 反對稱 $M = -M^T \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 是倒數矩陣。

證明. 因 $M = -M^T \in \mathbb{C}^{2\times 2}$，設 $M = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$，取 $S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$SM = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} = M^T S$，所以 $M = -M^T \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 是倒數矩陣。

以下舉一個 3×3 反對稱的例子說明不爲倒數矩陣：

範例 3.6. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = -A^T$，根據特徵矩陣的性質我們只需檢查

$$S_0 = I_3、S_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}、S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}、S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

其中一個是否會讓 $SA = A^T S$ 成立：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix};$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

因此找不到特徵矩陣 S 使得 $SA = A^TS$ 成立，也就是說 A 不爲倒數矩陣。

推論 3.7. $A = -A^T \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$n \geq 3$，$A$ 不是倒數矩陣。

由引理 3.4，$M = M^T$ 時，SM 爲倒數矩陣，雖然 $\mathcal{R}_2$ 內沒有加法封閉性， 但吾人想了解這兩種矩陣之線性組合會是倒數矩陣嗎？先討論 $n = 2$ 之情形。

引理 3.8. 設 $M = M^T \in \mathcal{R}_2$，$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 則下列矩陣爲倒數矩陣

$$\widetilde{M} = \alpha_0 M + \alpha_1 SM$$

其中 $\alpha_0,\, \alpha_1 \in \{0, 1\}$，且 $|\alpha_0| + |\alpha_1| = 1$。

證明. $\widetilde{M} = \alpha_0 M_0 + \alpha_1 SM$，且 $|\alpha_0| + |\alpha_1| = 1$ 及 $\alpha_0,\, \alpha_1 \in \{-1, 0, 1\}$；即代表 $(\alpha_0,\, \alpha_1) \in \{(1,\, 0)\,,\,(0,\, 1)\}$，依序帶入 $\widetilde{M}$ 可得 M、SM、，根據引理 3.4，可得 $\widetilde{M}$ 爲倒數矩陣。

接著綜觀所有 2×2 的倒數矩陣不外乎四種情況：

$$\begin{bmatrix} * & b \\ b & * \end{bmatrix}、\begin{bmatrix} * & -b \\ -b & * \end{bmatrix}、\begin{bmatrix} * & -b \\ b & * \end{bmatrix}、\begin{bmatrix} * & b \\ -b & * \end{bmatrix}$$

即 $\mathcal{R}_2 = \mathcal{M}_1 \bigcup \mathcal{M}_2$，其中

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \right\}, \mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \right\}.$$

引理 3.9. 對任意 $\widetilde{M} \in \mathcal{R}_2$，$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\exists M = M^T \in \mathcal{R}_2,\ \alpha_0,\ \alpha_1$ 使得

$$\widetilde{M} = \alpha_0 M + \alpha_1 SM$$

且 $\alpha_0, \alpha_1 \in \{0,1\}$，且 $|\alpha_0| + |\alpha_1| = 1$。

證明. 當 $\widetilde{M} \in \mathcal{M}_1$，取 $M = \widetilde{M}$，即 $\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0$。

當 $\widetilde{M} \in \mathcal{M}_2$，取 $\widetilde{M} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix}$，取 $M = \begin{bmatrix} -a & b \\ b & c \end{bmatrix}$，

則 $SM = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & c \end{bmatrix}$，所以 $\widetilde{M} = 0 \cdot M + 1 \cdot SM$。

給定矩陣 $M \in \mathcal{R}_n$ 。由定義 2.2 知特徵矩陣 S 是由 1 與 -1 爲主對角線元素所構成的矩陣。若 e_i，$1 \leq i \leq n = \dim(M)$，爲 n 維空間之標準基底 (standard basis)，則任意一個特徵矩陣可表成

$$S = \begin{bmatrix} (-1)^{m_1} e_1 \\ \vdots \\ (-1)^{m_n} e_n \end{bmatrix}$$

其中 $m_1, \cdots, m_n \in \{0, 1\}$。

那麼接下來是 3×3 的方陣，想法繼承 2×2，令 $M_0 = M_0^T$ 是對稱矩陣，$M_1 = \begin{bmatrix} -e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} M_0$，$M_2 = \begin{bmatrix} e_1 \\ -e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} M_0$，$M_3 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ -e_3 \end{bmatrix} M_0$，則下列 3×3 矩陣爲倒數矩陣：

$$\widetilde{M} = \sum_{l=0}^{3} \alpha_l M_l \tag{3.2.1}$$

其中 $\alpha_l \in \{0,1\}$，且 $\sum_{l=0}^{3} |\alpha_l| = 1$。然而 $\sum_{l=1}^{3} |\alpha_l| = 3$；也就是說在 $\alpha_0 \in \{0,1\}$ 的前提下，α_l 同時爲 1 ，意即 $M_1 + M_2 + M_3 = M_0$ 還是符合倒數矩陣的特性。在 3×3 的表示法當中比 2×2 多一個可能性，很理所當然的會繼續往高階上面去觀察是不是會有跟 3 階方陣一樣的特性，而 2×2 只是特例？最理想的當然是能寫成 n 階的一般表示方法。

在 $n = 4$ 的方陣中，如同上面想法，假設 $M_0 = M_0^T$，$M_1 = \begin{bmatrix} -e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} M_0$，$M_2 = \begin{bmatrix} e_1 \\ -e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} M_0$，$M_3 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ -e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} M_0$，$M_4 = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ -e_4 \end{bmatrix} M_0$，$M_5 = \begin{bmatrix} -e_1 \\ -e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} M_0$，$M_6 = \begin{bmatrix} -e_1 \\ e_2 \\ -e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} M_0$，$M_7 = \begin{bmatrix} -e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ -e_4 \end{bmatrix} M_0$，則下列 4×4 矩陣爲倒數矩陣：

$$\widetilde{M} = \sum_{l=0}^{7} \alpha_l M_l \tag{3.2.2}$$

其中 $\alpha_l \in \{0,1\}$，且 $\sum\limits_{l=0}^{7} |\alpha_l| = 1$。然而 $\sum\limits_{l=1}^{4} |\alpha_l| = n = 4$；跟 3 階方陣相同，在 $\alpha_0 \in \{0,1\}$ 的前提下，α_l 同時爲 1 ，意即 $M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 2M_0$ 還是符合倒數矩陣的特性，但除此之外另有一些條件使得 $\widetilde{M}$ 亦爲倒數矩陣，例如取：$\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = 1$ 且 $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = 0$ 則 $\widetilde{M} = (\alpha_0 + 3) M_0$ 亦爲倒數矩陣，更甚者取 $\alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = 1$ 且 $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = 0$ 則 $\widetilde{M} = M_1$ 依然符合倒數矩陣的特性。跟 3×3 比起來多了一些瑣碎的條件。

至於任何的 3 階倒數矩陣是否可以表成 (3.2.1)，任何的 4 階倒數矩陣是否可以表成 (3.2.2)，由於可能性過多，未找到確切結論。

3.3 Σ_n 之倒數矩陣子集合

引理 3.10. 在考慮 $n=2$ 的情況下，其中 $\mathcal{M}=\mathcal{R}_2\bigcap\Sigma_2$，$\mathcal{M}$ 是一個無界集合。

證明. 令 $M=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_2\bigcap\mathcal{M}\subset\Sigma_2$，

則 $(\mathrm{tr}\,(M)\,,\,\det\,(M))\in\Gamma_2,\ \forall M\in\mathcal{M}_2$，

再來令 $s=\mathrm{tr}\,(M)=a+c$，$p=\det\,(M)=ac+b^2$，

接著代入定理 2.4.1 (3) $|s-\overline{s}p|\leq 1-|p|^2$，

可得 $|(a+c)-\overline{(a+c)}(ac+b^2)|\leq 1-|ac+b^2|^2$，

此時吾人取 $ac=-b^2$，

得到 $|a+c|\leq 1$，

觀察 $||M||_\infty=max\{|a|+|b|,\,|b|+|c|\}$，

從 $ac=-b^2$ 得到 $|b|=\sqrt{|a||c|}$，

所以 $||M||_\infty=\max\{|a|+|b|,\,|b|+|c|\}=\max\limits_{|a+c|\leq 1}\left\{|a|+\sqrt{|a||c|},\,\sqrt{|a||c|}+|c|\right\}$，

再取 $a+c=-\frac{1}{2}$，則

$$||M||_\infty=\max_{|a+c|\leq 1}\left\{|a|+\sqrt{|a||c|},\,\sqrt{|a||c|}+|c|\right\}\geq\max_{a\in\mathbb{R}}\left\{|a|+\sqrt{|a||a+\frac{1}{2}|},\,\sqrt{|a||a+\frac{1}{2}|}+|a+\frac{1}{2}|\right\}$$

也就是說 $||M||_\infty\to\infty$，

因此 $\mathcal{M}_2\bigcap\mathcal{M}$ 是一個無界集合，然而 $\mathcal{M}_2\bigcap\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$，倒數矩陣所形成的集合 $\mathcal{M}$ 也是一個無界集合。

推論 3.11. 對任意的 $n\in\mathbb{N}$，$\mathcal{R}_n\bigcap\Sigma_n$為無界集合。

3.4 倒數矩陣的單元相似友矩陣之結構奇異值計算

兩矩陣若是單元等價，其兩者最大奇異值有什麼關係？結構奇異值又有什麼關係？於是有了下列定理。

定理 3.4.1. 若 A，B 爲單元等價，則

1. $\overline{\sigma}(A)=\overline{\sigma}(B)$；
2. $\mu_{\triangle}(A)=\mu_{\triangle}(B)$。

證明. 1：根據定義 2.7 ，存在一個單元矩陣 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A=U^{*}BU$，

令 $\overline{\sigma}(A)=\sqrt{|\lambda_{\max}(A^{*}A)|}$ ，則

$$\det(\lambda I-A^{*}A)=\det(\lambda I-U^{*}B^{*}UU^{*}BU)=\det(U^{*})\det(\lambda I-B^{*}B)\det(U)=\det(\lambda I-B^{*}B)$$

代表 $\overline{\sigma}(A)=\overline{\sigma}(B)$ 。

2：根據定義 2.1 ，

$\mu_{\triangle}(A)=\left[\min\left\{\bar{\sigma}(\triangle)\mid\triangle\in\Delta,\det(I-A\triangle)=0\right\}\right]^{-1}$，

因 A，B 爲單元等價，即存在一個單元矩陣 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $A=U^{*}BU$，其中

$$\det(I-A\triangle)=\det(I-U^{*}BU\triangle)=\det(U^{*}U-U^{*}BU\triangle U^{*}U)=\det(U^{*})\det(I-BU\triangle U^{*})\det(U)$$

根據定理 2.1.1，

因 $U\triangle\in\triangle$， $\overline{\sigma}(U\triangle)=\overline{\sigma}(\triangle)$，$\triangle U^{*}\in\triangle$，$\overline{\sigma}(\triangle U^{*})=\overline{\sigma}(\triangle)$

所以 $\mu_{\triangle}(A)=\mu_{\triangle}(B)$。

接著吾人對 2.3 節最後提到的推論 2.10 做進一步的整理。

定理 3.4.2. 令 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times2}$，設 $C=\begin{bmatrix}0&1\\-p&s\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times2}$，爲 A 之友矩陣，其中 $s=\operatorname{tr}(A)$、$p=\det(A)$，則 A，C 爲單元等價之充要條件爲：

$$|a_{11}|^{2}+|a_{12}|^{2}+|a_{21}|^{2}+|a_{22}|^{2}=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|^{2}+|a_{11}+a_{22}|^{2}+1$$

證明. 根據推論 2.10 及定義 2.6 ，

任意矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 單元等價於 $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & s \end{bmatrix}$ 的充要條件，

若且唯若 $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(C)$ ，$\operatorname{tr}(A^2)=\operatorname{tr}(C^2)$ ，$\operatorname{tr}(A^*A)=\operatorname{tr}(C^*C)$ 三者同時成立，

其中 $s=\operatorname{tr}(A)=a_{11}+a_{22}$ ， $p=\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 。

接著我們就來觀察這三個條件：

$\operatorname{tr}(A^*A)=\operatorname{tr}(C^*C) \iff |a_{11}|^2+|a_{12}|^2+|a_{21}|^2+|a_{22}|^2=|p|^2+|s|^2+1$

以上條件可從定理 2.3.1 得知；

$\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(C) \iff a_{11}+a_{22}=s=0+s$ ；

$\operatorname{tr}(A^2)=\operatorname{tr}(C^2)$。

至於 $\operatorname{tr}(A^2)=\operatorname{tr}(C^2)$ 整理如下：

$$A^2=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}^2+a_{12}a_{21} & * \\ * & a_{12}a_{21}+a_{22}^2 \end{bmatrix};$$

$\operatorname{tr}(A^2)=a_{11}^2+2a_{12}a_{21}+a_{22}^2$ ；

$$C^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -p & * \\ * & -p+s^2 \end{bmatrix};$$

$\operatorname{tr}(C^2)=-2p+s^2=-2(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})+(a_{11}+a_{22})^2=a_{11}^2+2a_{12}a_{21}+a_{22}^2$。

最後得到 $\operatorname{tr}(A^2)=a_{11}^2+2a_{12}a_{21}+a_{22}^2=\operatorname{tr}(C^2)$，

所以這三個條件整理之後，$\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(C)$ 跟 $\operatorname{tr}(A^2)=\operatorname{tr}(C^2)$ 是本來就成立的事實，

只要符合 $\operatorname{tr}(A^*A)=\operatorname{tr}(C^*C)$ 的條件，即 $||A||_F^2=||C||_F^2$，條件寫開式爲：

$$|a_{11}|^2+|a_{12}|^2+|a_{21}|^2+|a_{22}|^2=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|^2+|a_{11}+a_{22}|^2+1$$

任意矩陣 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 可表示成 $U^*\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & s \end{bmatrix}U$。

範例 3.12. 給定 $A=\begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{2}}{2} & \frac{5-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{2}}{2} & \frac{3-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$，則 A 之友矩陣 $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$ ，

接著驗證定理 3.4.2 的條件：

$||A||_F^2=\left(\frac{5+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{5-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)^2=19$

$||C||_F^2=\sqrt{2}^2+4^2+1=19$

即 A 單元等價於 C，找到單元矩陣 $U=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$，使得 $A=U^*CU$。

根據前面定理 3.4.1 提到 $\overline{\sigma}(A)$ 也會等於 $\overline{\sigma}(C)$ ，接下來吾人以此作跳板對 $\overline{\sigma}(A)\geq 1$ 做探討。

定理 3.4.3. 令 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2}$、$C=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & s \end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2}$，其中 $s=\operatorname{tr}(A)$、$p=\det(A)$，若 A、C 爲單元等價，即 $A=U\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & s \end{bmatrix}U^*$，其中 $U^*U=I_2$，則 $\overline{\sigma}(A)\geq 1$。

證明. 先考慮 C 的最大奇異值：

$$C^*C=\begin{bmatrix} 0 & -\overline{p} \\ 1 & \overline{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |p|^2 & -\overline{p}s \\ -p\overline{s} & 1+|s|^2 \end{bmatrix} ,$$

令 z 爲 C^*C 的特徵值，

則 $\det(zI_2-C^*C)=z^2-(1+|s|^2+|p|^2)z+|p|^2=0$ ，利用公式解可得

$$z=\frac{(1+|s|^2+|p|^2)\pm\sqrt{(1+|s|^2+|p|^2)^2-4|p|^2}}{2}$$

接著利用最大奇異值必爲正實數的特性可以知道 $(1+|s|^2+|p|^2)^2-4|p|^2\geq 0$，

假設 $\overline{\sigma}(C)<1$ 也就是 $\sqrt{|z_{\max}|}<1$ ，即

$$\frac{(1+|s|^2+|p|^2)+\sqrt{(1+|s|^2+|p|^2)^2-4|p|^2}}{2}<1$$

整理如下：

$$\left(\sqrt{\left(1+|s|^2+|p|^2\right)^2-4|p|^2}\right)^2<\left(2-\left(1+|s|^2+|p|^2\right)\right)^2 \ ;$$

$$\left(1+|s|^2+|p|^2\right)^2-4|p|^2<4-4\left(1+|s|^2+|p|^2\right)+\left(1+|s|^2+|p|^2\right)^2 \ ;$$

$$4|s|^2<0 \ ;$$

最後得到 $|s|^2<0$ ，至此出現矛盾；

因此我們知道只要 $A=U^*\begin{bmatrix}0 & 1\\ -p & s\end{bmatrix}U$ 的形式下，$\overline{\sigma}(A)=\overline{\sigma}(C)\geq 1$ 。

Note. 當 $|s|=0$ 時，且 $|p|=0$ 或是 $|p|=1$時， 也就是說 $a_{11}=-a_{22}$，且 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0$ 或是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\pm e^{i\theta}$ 時，其中 $\theta\in[0,\,2\pi]$，$\overline{\sigma}(A)=\overline{\sigma}(C)=1$。

再者若 M 爲倒數矩陣，且考慮 M 跟 C 單元等價，由 $\mu_{\triangle}(M)=\overline{\sigma}(M)$，$\mu_{\triangle}(M)=\mu_{\triangle}(C)$，以及 $\overline{\sigma}(M)=\overline{\sigma}(C)$，得知 $\mu_{\triangle}(M)=\mu_{\triangle}(C)=\overline{\sigma}(C)\geq 1$。

根據定理 3.4.3 證明的最後，C 有下列三種情況，使 $\overline{\sigma}(C)=1$：

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}0 & 1\\ e^{i\theta} & 0\end{bmatrix}、\begin{bmatrix}0 & 1\\ -e^{i\theta} & 0\end{bmatrix}$$

其中 $\theta\in[0,\,2\pi]$。

於是利用上述一些定理性質最後整理出一個定理；$M\in\mathcal{R}_2=\mathcal{M}_1\bigcup\mathcal{M}_2$ 及其友矩陣 C，符合某些條件，使得 $\mu_{\triangle}(M)=1$。

定理 3.4.4. $M\in\mathcal{R}_2\subset\mathbb{C}^{2\times 2}$，$C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -p & 0\end{bmatrix}$，其中 $p=\det(M)$，若 M 滿足下列條件之一：

1. $\det(M)=0$ 且 $|a|^2+|b|^2=\frac{1}{2}$；
2. $|\det(M)|=1$ 且 $|a|^2+|b|^2=1$；

則 M、C 兩者單元等價，且 $\mu_{\triangle}(M)=1$。

證明. 從 M 的友矩陣 $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -p & 0\end{bmatrix}$，設 $M=\begin{bmatrix}a & b\\ b & -a\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_1\subset\mathcal{R}_2$，

1. 從 $\det(M)=0=p$，得到 $C=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$\overline{\sigma}(C)=1$，且 $||C||_F^2=1$。從 $|a|^2+|b|^2=\frac{1}{2}$，得到 $||M||_F^2=1$，因此藉由定理 3.4.2 得知 M、C 爲單元等價，再根據定理 3.4.1 得到 $\overline{\sigma}(M)=\overline{\sigma}(C)=1$ 且 $\mu_\triangle(M)=\mu_\triangle(C)$。因 $M\in\mathcal{R}_2$ 是倒數矩陣，從定理 2.2.1 最後得到 $\mu_\triangle(M)=\overline{\sigma}(M)=1$。

2. 從 $|\det(M)|=1=p$，得到 $C=\begin{bmatrix}0&1\\\pm e^{i\theta}&0\end{bmatrix}$，其中 $\theta\in[0,2\pi]$，$\overline{\sigma}(C)=1$，且 $||C||_F^2=2$。從 $|a|^2+|b|^2=1$，得到 $||M||_F^2=2$，因此藉由定理 3.4.2 得知 M、C 爲單元等價，再根據定理 3.4.1 得到 $\overline{\sigma}(M)=\overline{\sigma}(C)=1$ 且 $\mu_\triangle(M)=\mu_\triangle(C)$。因 $M\in\mathcal{R}_2$ 是倒數矩陣，從定理 2.2.1 最後得到 $\mu_\triangle(M)=\overline{\sigma}(M)=1$。

同理可證 $M=\begin{bmatrix}a&-b\\b&-a\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_2\subset\mathcal{R}_2$。

範例 3.13. 由於 $M=\begin{bmatrix}a&b\\b&-a\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}a&-b\\b&-a\end{bmatrix}$，針對上述可能性舉例如下：

$\det(M)$	$\lvert a\rvert^2+\lvert b\rvert^2$	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$
0	$\frac{1}{2}$	$\begin{bmatrix}\frac{i}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{i}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$
1	1	$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}i&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}i&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}i\end{bmatrix}$
-1	1	$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}i\\\frac{\sqrt{2}}{2}i&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

第 4 章　結論

本篇論文整理出特徵矩陣及倒數矩陣的一些性質，並找出 2 階倒數矩陣的一般表示式。而且知道 $\mathcal{R}_n$ 只有純量乘法的封閉性而沒有矩陣加法及乘法的封閉性、$\mathcal{R}_n \bigcap \Sigma_n$ 爲無界集合。並整理出任意 2 階方陣單元等價於友矩陣的條件，利用友矩陣簡少計算最大奇異值的變數。再者若 $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ 爲倒數矩陣，且考慮 M 跟 C 單元等價，由 $\mu_\triangle(M) = \overline{\sigma}(M)$，$\mu_\triangle(M) = \mu_\triangle(C)$，以及 $\overline{\sigma}(M) = \overline{\sigma}(C)$，得知 $\mu_\triangle(M) = \mu_\triangle(C) = \overline{\sigma}(C) \geq 1$，並找出 $\mu_\triangle(M) = 1$ 中 M 的條件。

Bibliography

[1] J. C. Doyle, Analysis of feedback system with structure uncertainties, *IEE Proceedings* D 133 (1982) 45-56

[2] K. H. Fan, *Characterization and computation of the structured singular value*, Ph. D. Thesis, University of Maryland (1986)

[3] S. Yamamoto and H. Kimura, On structured singluar values of reciprocal matrices, in: *Proceedings of the American Control Conference* 5 (1995) 3358-3359.

[4] A. J. van der Schaft, *System Theoretic Descriptions of Physical Systems*, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam (1984)

[5] P. A. Fuhrmann, On Symmetric Rational transfer Functions, *Linear Algebra and Its Applications* 50 (1983) 167-250

[6] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1985).

[7] A. Packard and J. C. Doyle, The complex structured singluar value, *Automatica* 29 (1) (1993) 71-109.

[8] S. Yamamoto and H. Kimura, On structured singluar values of reciprocal matrices, *Systems and Control Letters* 26 (1995) 163-166.

[9] J. Aglar and N. J. Young, A model theory for Γ-contractions, *J. Operatory Theory* 49 (2003) 56-60.

[10] J. Aglar and N. J. Young, The two-point spectral Nevalinna-Pick problem, *Integral Equations and Operator Theory* 37 (2000) 375-385.

[11] J. Aglar and N. J. Young, The two-by-two spectral Nevalinna-Pick problem, *Trasactions of the America Mathematical Society* 356 (2) (2003) 573-585.