

# 資料型態為指數分配之多屬性決策方法 模擬分析比較

翁振益\*      張淑卿\*\*

## 摘要

多屬性決策方法為管理決策領域中常被廣泛應用之評估技術。然而，多屬性決策方法種類繁多，每個方法所依據的理論也不盡相同，在使用不同的方法應用在同一個問題時，往往可能會產生不同的結果，此為多屬性決策方法常遭非議之處。爰此，研究中透過模擬實驗設計分別以方案數、屬性數、權重分配為模擬參數，並以資料型態是指數分配為研究對象，針對屬性資訊特徵屬於基數型態之簡單加權法、層級加權法、ELECTRE 法、TOPSIS 法及灰關聯分析法五種方法，以排序結果之誤差均方、絕對誤差、最佳方案之一致性、排序結果相同之方案數、權重與排序結果之交又分析及 Spearman 等級相關係數七項為衡量準則，進行五種方法之模擬比較。就整體評估而言，在以簡單加權法為基準之下，以 ELECTRE 法最接近簡單加權法、灰關聯分析法次之，而 TOPSIS 法相距最遠。此外，透過群集分析法，可將五種方法明顯區分為兩群：簡單加權法、ELECTRE 法與灰關聯分析法為一群，層級加權法與 TOPSIS 法為一群，各群中的方法在七項衡量準則的表現上具有相似的結果。

**關鍵字：**多屬性決策方法、決策理論、群集分析、模擬

## 1. 緒論

管理的決策領域中，決策者所處理的問題經常是包含多重評估屬性，而這些屬性卻往往都是互相衝突，例如選購一部車子，甚者如影響國家安

---

\* 銘傳大學企業管理學系副教授

\*\* 銘傳大學管理科學研究所碩士

全的政策制訂等。以選購一部車子為例，我們通常就會考慮多個因素，例如價格、舒適度、安全性、省油程度、折舊率、外觀等評估屬性，而這些評估屬性往往是相互衝突，如價格與安全性。多屬性決策方法（multiple attribute decision making, MADM）是可以幫助決策者在數目有限的可行方案中，根據每一方案的各個屬性的特徵下，從可行的方案之中，將各個方案做一優劣排序，評估和選擇一符合決策者理想的方案（Yoon 及 Hwang, 1985），為管理決策領域中常被廣泛應用之評估技術。然而，多屬性決策方法種類繁多，每個方法所依據的理論也不盡相同，在使用不同的方法應用在同一個問題時，往往可能會產生不同的結果，此為多屬性決策方法常遭非議之處。所以，各種多屬性決策方法，在各種管理問題的應用上所得結果是否有顯著之相關性？最後所選取之最佳方案是否相同？為值得令人探討的課題。此外，最近十幾年來，由鄧聚龍所提出之灰色系統理論（grey system theory）中的灰關聯分析（grey relational analysis, GREY）方法。因其能處理管理上不確定資訊及其計算上的簡單性，而漸漸廣泛的被應用在管理領域中。而灰關聯分析法是一種新的多屬性決策方法，在處理多屬性決策問題時，其所獲得之評估結果可能遭受決策者的存疑。故研究中亦探討灰關聯分析法應用於管理決策上之多屬性決策問題的適用性。

有關多屬性決策方法比較之相關文獻，有曾國雄等（1988）針對以成對比較為基礎的三類多評準決策方法：分析層級法（analytic hierarchy process, AHP）、ELECTRE 法（elimination et choice translating reality method）和 PROMETHEE 法，探討這三種方法之特性與求解過程，並分析比較其優缺點。曾國雄及王丘明（1993）採用多評準決策分析中較常使用之分析層級法、線性指派法、簡單加權法（simple additive weighting, SAW）、層級加權法（hierarchical additive weighting method, HAW）、TOPSIS 法（technique for order preference by similarity to ideal solution method）、ELECTRE III 與 IV 法七種方法來評估與比較，並以基隆港港口改善方案選擇之評估為例，

發現其中以分析層級法、簡單加權法、層級加權法及 ELECTRE III、IV 法之評估結果較一致，頗符合實際之問題。鄭博文（1997）以競值模式評估分析層級法、ELECTRE III、多屬性效用理論和模糊多屬性決策四種方法，其透過醫院選擇決策個案來評估決策者（受測者）對四種方法的優劣，驗證結果為使用者對四種決策方法在醫院選擇個案中並無差異存在。陳忠平（2000）以綜合不同領域的個案綜合討論，比較簡單加權法、層級加權法、ELECTRE、TOPSIS 及灰關聯分析等種方法之評選最佳方案等方面之相關性。翁振益等（2000）應用於台灣地區環境品質評估上各方法間的評估結果有顯著之正相關性，但其中，TOPSIS 法與簡單加權法、TOPSOS 法與層級加權法之間的相關係數值，較為偏低。翁振益等（2000）以大學院校研究發展績效為例比較簡單加權法、層級加權法、ELECTRE、TOPSIS 及灰關聯分析五種方法之評選最佳方案等方面之相關性。

另外，有關於模擬應用於多屬性決策方法比較的相關研究，Zanakis（1998）以屬性的數目、方案的數目、方案的評估值及屬性的權重等為模擬實驗的參數，比較四種型態之分析層級法、ELECTRE、TOPSIS、多重指數權重法 Multiplicative Exponential Weighting（MEW）及簡單加權法八種方法在權重和排序結果的平均平方誤差項（mean squared error）、權重和排序結果的平均絕對誤差項（mean absolute error）、Spearman 等級相關係數及所評選出的最佳方案等方面之相關性。其所得的結果為四種型態之分析層級法與簡單加權法極為類似，而當屬性的數目較少時，TOPSIS 與 AHP 相近而與 ELECTRE 與 MEW 不同。Triantaphyllou 及 Mann（1989）以 3 個屬性與 21 個方案的隨機 AHP 矩陣進行模擬，其結果為當方案數愈趨增加時 AHP 法愈接近權重總和模型（weighted sum model）法，且最佳方案的改變並不是決定於屬性數。Zahedi（1986）分別以均勻分配、伽瑪分配（gamma）與對數常態分配（lognormal）模擬產生對稱與不對稱 AHP 矩陣，且權重方面分別使用固有特徵值（right eigenvalue）、行列幾何平均法（row

and column geometric mean)、調和平均數 (harmonic mean)、簡單列平均 (simple row average) 及平均數轉換法 (mean transformation method) 等進行模擬，討論其各種方法在權重與排序結果的平均平方誤差項、權重和排序結果的平均絕對誤差項、變異數 (variance)、Theil's 判定係數等方面之相關性。其所得的結果為當輸入矩陣為對稱矩陣時平均數轉換法其排序結果為最佳，而各種方法在伽僂分配時存在較大的差異，固有特徵值法較為拙劣，而當矩陣較龐大時行列幾何平均法排序較佳。

綜觀以上有關多屬性決策方法比較之相關研究，大多以單一個案、主題或綜合許多不同領域的個案綜合討論，進行不同方法之間的比較，其所得結果對決策者而言範圍較為侷限且參考性較嫌不足。因此，本研究將以電腦模擬的方式，透過模擬實驗設計分別以方案數、屬性數、權重分配為模擬參數，並以資料型態屬指數分配為研究對象，針對管理領域決策及評估時常用之多屬性決策方法：簡單加權法、層級加權法、TOPSIS 法、ELECTRE 法及灰關聯分析法進行模擬分析，比較五種決策方法彼此間的整體評估結果，是否有顯著之正相關性、排序結果的一致性及其離散程度。期能歸納出通則性的準則，俾提供管理決策者較廣泛之參考範圍。

## 2. 多屬性決策方法

多屬性決策方法常被使用在「選擇」或「評估」方案層面的問題，Hwang 及 Yoon (1981) 認為多屬性決策方法為決策者在多個質化或量化的評估準則下，對一組有限、可數且數目不大的已知可行替代方案進行評估，以決定各替代方案之優劣或執行的優先順序。然而這些方案下的各個屬性的評估值不一定是量化的數值。不過，最終多屬性決策方法還是必須將不是量化的評估值轉化為數量化的評估值才能進行分析 (Buede 及 Maxwell, 1995)，而其最終方案的選擇是經由各評估屬性相互之間，和各方案同一

評估屬性內相互比較而得來的。而這些比較則會包含清楚的或暗含的抵換 (trade-offs) 效果。

多屬性決策是屬於多評準決策 (multiple criteria decision making, MCDM) 領域的一個部分。多評準決策方法，起源於 Koopmans 所提出有效向量的觀念 (Zeleny, 1982)，其從四十多年前發展至今，已有許多研究，及決策者將其應用於設計、選擇或評估方面的問題。

## 2.1 簡單加權法

簡單加權法可能為眾多多屬性決策方法中最常使用之方法，因為它的内容原理簡單且運算容易。簡單加權法開始有基礎的研究源於 Churchman 及 Ackoff (1954)，而 Klee (1971) 則有更深入的討論與研究。在簡單加權法中，每一個屬性均分配有一權重，是為變數之係數，而決策者把每一個屬性項目下的值轉換成數字尺度，將每一方案的每一屬性之尺度乘以屬性權重數即可得每一個方案的總得分，然後依此算出每一方案之總得分再予以比較，其最高得分的方案則為第一優先方案。

研究中所採行之簡單加權法求算步驟，是依照曾國雄及王丘明 (1993) 所提之進行步驟求算各個案之評估結果。其進行步驟如下：

1. 假設決策者指派屬性的權重為  $W = (W_1, W_2, W_3, \dots, W_n)$ 。
2. 假設  $X_{ij}$  為  $i$  方案  $j$  屬性之數字比較尺度，當屬性為效益時，其尺度為：

$$r_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j^{\max}} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \dots \dots \dots (1)$$

當屬性為成本或費用時，其尺度為：

$$r_{ij} = \frac{X_j^{\min}}{X_{ij}} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \dots \dots \dots (2)$$

最優方案的選取準則  $A^*$  可由下式定義：

$$A^* = \left\{ A_i \mid \max \frac{\sum_{j=1}^n W_j r_{ij}}{\sum_{j=1}^n W_j} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

通常  $\sum_{j=1}^n W_j = 1$ 。

### 2.2 層級加權法

層級加權法係將簡單加權法中，每一個方案下的各項屬性延展分成各不同的層級，此方法即符合 Saaty (1980) 所提之層級結構，故稱為層級加權法。

層級加權法除了保有簡單加權法內容簡單及運算容易之優點外，更加入層級結構之觀念，使決策者遇到決策問題的評估屬性數目很多時（超過七個），能夠較容易分配及評估各屬性的權重（Hwang 及 Yoon, 1981），能更清晰有條理之解決問題。

研究中所採行之層級加權法求算步驟，是依照 Hwang 及 Yoon (1981) 所提之進行步驟求算各個案之評估結果。其進行之計算步驟如下所述：

1. 假設決策者指派屬性的權重為  $W = (W_1, W_2, W_3, \dots, W_n)$ 。
2.  $X_{ij}$  為  $i$  方案  $j$  屬性之評估值，當屬性為效益時，其尺度為：

$$K_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sum_{i=1}^n X_{ij}} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (4)$$

當屬性為成本或費用時，其尺度為：

$$K_{ij} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_{ij}}} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (5)$$

3. 計算各替選方案之得點分數：

$$A_i = \sum_{j=1}^n W_j K_{ij} \dots\dots\dots (6)$$

4. 依各替選方案之得點分數高低，排序各方案之優劣。

### 2.3 ELECTRE 法

ELECTRE 法最初由 Benayoun 等學者所提出，後經由 Roy、Nijkamp 和 van Delft 等人不斷的加以修正改良 (Hwang 及 Yoon, 1981)，至今，已發展有 ELECTRE I、ELECTRE II、ELECTRE III、ELECTRE IV 四種不同的評估方法。ELECTRE 法主要以成對比較為基礎並以各方案相互之間之凌越關係來幫助決策者求得最佳方案。

ELECTRE 有四種不同的評估方法，本研究擬以 ELECTRE I 法與其他多屬性決策方法作一比較。

研究中所採行之 ELECTRE 法求算步驟，主要是依照 Yoon 及 Hwang (1995) 所提出之進行步驟，進行評估。本研究所採行之 ELECTRE 法求算步驟，主要是依照 Yoon 及 Hwang (1995) 所提出之進行步驟，其進行之步驟如下：

1. 計算正規化評估值

$$r_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m X_{ij}^2}} \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (7)$$

其中， $X_{ij}$  為第  $i$  方案在第  $j$  屬性之原始評估值。

2. 計算加權後正規化評估值

$$v_{ij} = W_j r_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad \dots\dots\dots (8)$$

其中， $W_j$  為第  $j$  屬性的權重值。

3. 滿意 (concordance) 和不滿意 (discordance) 集合

將每一成對方案  $A_p$  和  $A_q$  ( $p, q=1, 2, \dots, m$  and  $p \neq q$ ) 其屬性的集合分成兩個個別的集合。滿意集合  $C(p, q)$  為  $A_p$  方案優於或等於  $A_q$  方案的屬性集合，其可寫成下式：

$$C(p, q) = \{j | v_{pj} \geq v_{qj}\} \dots\dots\dots (9)$$

其中， $v_{pj}$  為  $A_p$  方案在第  $j$  個屬性下之加權後正規化評估值。

不滿意集合  $D(p, q)$  為  $A_p$  方案劣於  $A_q$  方案的屬性集合，其可寫成下式：

$$D(p, q) = \{j | v_{pj} < v_{qj}\} \dots\dots\dots (10)$$

4. 滿意 (concordance) 和不滿意 (discordance) 指標

$C(p, q)$  的滿意指標  $C_{pq}$  定義成下式：

$$C_{pq} = \sum_{j^*} W_{j^*} \dots\dots\dots (11)$$

其中， $j^*$  為滿意集合  $C(p, q)$  所包含的各個屬性。

$D(p, q)$  的不滿意指標  $D_{pq}$  定義成下式：

$$D_{pq} = \frac{\sum_{j_0} |v_{pj_0} - v_{qj_0}|}{\sum_j |v_{pj} - v_{qj}|} \dots\dots\dots (12)$$

其中， $j_0$  為不滿意集合  $D(p, q)$  所包含的各個屬性。

5. 凌越關係 (outranking relationships)

Yoon 及 Hwang (1995) 建議以滿意指標  $C_{pq}$  之平均值  $\bar{C}$  和不滿意指標  $D_{pq}$  之平均值  $\bar{D}$  為  $A_p$  方案是否為凌越  $A_q$  方案之門檻值。即當  $C_{pq} \geq \bar{C}$  和  $D_{pq} \leq \bar{D}$ ，則表示  $A_p$  方案凌越  $A_q$  方案。而由各方案相互之間之凌越關係，求得最後的核心解。

6. 淨滿意指標和淨不滿意指標

由 van Delft 及 Nijkamp 對 ELECTRE 法的補充分析，建立每一方案之淨滿意指標和淨不滿意指標，藉由這兩項指標使每一方案可比較出彼此間的優勢關係 (Hwang 及 Yoon, 1981)。

淨滿意指標  $C_p$  定義成下式：



$$C_p = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^m C_{pk} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^m C_{kp} \quad \dots\dots\dots (13)$$

淨不滿意指標  $D_p$  定義成下式：

$$D_p = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^m D_{pk} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^m D_{kp} \quad \dots\dots\dots (14)$$

### 7. 決定方案之優劣排序

以各方案之淨滿意指標  $C_p$  和淨不滿意指標  $D_p$  決定其方案優劣順序。最佳的方案有最大之  $C_p$  值和最小之  $D_p$  值。方案  $A_p$  若有最大之  $C_p$  值和最小之  $D_p$  值，則其為最佳方案，若無任何方案能滿足上述條件，則選取有較高平均排序分數的方案為最佳方案。

依照 Yoon 及 Hwang (1995) 對 ELECTRE 法所提出之進行步驟，雖使決策者可依此求出各方案間之優勢關係，但卻無一可直接計算出各方案排序之算式。之後，陳忠平 (2000) 依 van Delft 及 Nijkamp 對 ELECTRE 法發展出淨滿意指標和淨不滿意指標之意含，提出一可求得各方案最後優劣排序之排序指標  $R_p$  (rank index)，其計算方式如下：

$$R_p = \frac{C_p + [(-1) * D_p]}{2} \quad \dots\dots\dots (15)$$

故本研究在最後進行方案優劣排序時，則應用 (15) 式進行排序，以得到最後之評估結果。

## 2.4 TOPSIS 法

TOPSIS 法是由 Hwang 及 Yoon (1981) 所發展出來的一種多屬性評估方法，之後經由 Yoon (1987) 和 Hwang 等 (1993) 的發展，使其理論更為豐富完整。TOPSIS 法的基本觀念乃在於先界定理想解 (positive-ideal solution) 與負理想解 (negative-ideal solution)。所謂理想解是各替選方案效益面屬性之評估值最大，成本面屬性之評估值最小者；而負理想解是各替選方案效益面屬性之評估值最小，成本面屬性之評估值最大者。在選擇方案時，以距離理想解最近，而距離負理想解最遠的方案為最佳方案。

研究中利用 Yoon 及 Hwang (1995) 所提出之 TOPSIS 法之進行步驟求算各個案之評估結果，其進行之步驟如下：

1. 計算正規化評估值

其向量正規化計算公式如下：

$$r_{ij} = \frac{X_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m X_{ij}^2}} \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n \quad \dots\dots\dots (16)$$

其中， $X_{ij}$  為第  $i$  方案在第  $j$  屬性之原始評估值

2. 計算加權後正規化評估值

$$v_{ij} = W_j r_{ij} \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n \quad \dots\dots\dots (17)$$

其中， $W_j$  為第  $j$  屬性的權重值。

3. 決定理想解  $A^*$  與負理想解  $A^-$

$$\begin{aligned} A^* &= \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_j^*, \dots, v_n^*\} \\ &= \{(\max_i v_{ij} | j \in J_1), (\min_i v_{ij} | j \in J_2), i=1, \dots, m\} \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^- &= \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_j^-, \dots, v_n^-\} \\ &= \{(\min_i v_{ij} | j \in J_1), (\max_i v_{ij} | j \in J_2), i=1, \dots, m\} \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

其中， $J_1$  為一效益屬性的集合， $J_2$  為一成本屬性的集合。

4. 計算各替選方案的理想解與負理想解的歐氏距離

(1) 理想解的歐氏距離

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^*)^2} \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n \quad \dots\dots\dots (20)$$

(2) 負理想解的歐氏距離

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n \quad \dots\dots\dots (21)$$

5. 計算各替選方案對理想解的相對近似度計算公式如下：

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{(S_i^+ + S_i^-)} \quad i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n \quad \dots\dots\dots (22)$$

其  $0 \leq C_i^* \leq 1$ ，當  $C_i^*$  值愈接近 1，則其方案與理想解  $A^*$  愈接近。

6. 按照  $C_i^*$  值之大小排定方案之優劣順序，其值越大者，方案的偏好程度越高。

## 2.5 灰關聯分析

灰關聯分析主要是透過參數間關聯性的比較，而瞭解到參數與實際理想變數間的關聯性。由於部分已知不明確條件中，找出所需要的訊息，進而明瞭參數間之互動關係（鄧聚龍，1987）。

灰關聯分析，係灰色系統理論中用以分析離散數列間之相關程度的方法（吳漢雄等，1996）。傳統上，統計迴歸是處理變數與變數間關係時較常被使用的數學方法，然而，迴歸分析規定變數之間必須存有相互影響的關係，而且在大量數據的情形下，才能做出函數關係，而數據也應服從典型的分配，如常態分配，在這些限制下往往無法讓研究者求出答案。至於灰關聯分析由於具有少數據及多因素分析的特點，恰可彌補迴歸分析的限制。本研究進行灰關聯分析法時，是以局部性分析求算各個案之評估結果，其評估值正規化的求算步驟為 Wu 及 Chen (1999) 所提出，而灰關聯度，則採陳忠平 (2000) 根據溫坤禮 (1999) 所提出之量化的灰關聯度修飾而得之的灰關聯度計算式進行求算，並依各方案之灰關聯度求得最後之評估結果。其求算公式如下：

$$\Gamma_{oi} = \Gamma(x_0(k), x_i(k)) = \frac{\Delta_{\min} + \Delta_{\max}}{\Delta + \Delta_{\max}} \quad \dots\dots\dots (23)$$

其中：

- a.  $i=1, \dots, m$  ;  $k=1, \dots, n$ .  
 b.  $x_0$  為參考數列， $x_i$  為一特定之比較數列。

c.  $\Delta = \sum_{k=1}^n w_k (\Delta_{oi})$  ,  $\sum_{k=1}^n w_k = 1$

d.  $\Delta_{oi} = |x_0(k) - x_i(k)|$

e.  $\Delta_{\min} = \min_{\forall j \in i} \min_{\forall k} \Delta_{oi}(k)$

f.  $\Delta_{\max} = \max_{\forall j \in i} \max_{\forall k} \Delta_{oi}(k)$

### 3. 實驗方法

本節依研究目的，加以說明實驗方法之設計。分別針對模擬實驗設計及比較各方法之衡量準則做一介紹。

#### 3.1 模擬實驗設計

透過 MATLAB 軟體撰寫程式，依據模擬模式建立程序，模擬參數為方案數、屬性數、權重分配型態三方面，如表 1 所示，設計本研究的模擬實驗模式。

《表 1》模擬參數項目及內容

| 參數項目  | 參數內容       |
|---|------------|
| 方案數 $n$   | 3、5、7、9    |
| 屬性數 $m$   | 5、10、15、20 |
| 權重分配型態 $w$ 等權重 ( $1/m$ )、均勻分配 (0-1)、Beta 分配 ( $U$ 型態) |            |

依據上述的參數組合，採取完全設計 (full design) 模擬方式，共產生 48 組問題型態組合：4 種方案數 x 4 種屬性數 x 3 種權重分配=48，而每一種問題組合理態模擬次數為 10000 次，共計模擬 480,000 次。以下就各項參數的選擇做詳細的說明。

在方案數及屬性數的範圍選擇上，係依循傳統的 MADM 問題的應用歸納而來，一般而言 MADM 決策問題所面臨的情境多為在眾多的屬性數下來評估少數的方案。根據 Gemunden 及 Hauschilde (1985) 研究指出，在消費者市場及企業管理方面的相關應用上，關於方案數的問題經過熱烈的討論指出，方案數並不會超過 4-5 個。因為在實務上會先根據各項屬性的特性先將不適的方案先行剔除。因此，在方案數的選擇上決定以少數方案數為試行內容，故選取方案數為 3、5、7、9 等四種。然而，在屬性數的選擇上便擴大選取範圍，試行屬性數為 5、10、15、20 等四種。另外，在權重的選取上，針對決策者對屬性的偏好情境不同選取三種不同分配型態：(1) 等權重：即各項屬性的重要程度並無差異，權重均相等，權重值為  $1/m$ 。(2) 均勻分配：此分配型態代表決策者對於各項屬性的偏好具有不偏性或呈均勻的型態時或者當屬性權重具無法決定性時。(3) Beta 分配 ( $U$  型)：此分配型態代表決策者

對於各項屬性存在強烈的偏好差異情形。

### 3.2 比較各方法之衡量準則

研究中透過七項衡量準則，分別針對離散程度、一致性以及相關性等特性比較各項方法之排序結果。其中，離散程度的衡量準則其值越小越好；一致性衡量準則其值越大越好；相關性衡量準則其值亦越大越好。

#### 1. 誤差均方 (mean squared error, MSE)

誤差均方為衡量變異情形的指標，分別針對各種決策方法的排序結果求算其誤差均方，加以衡量其變異情形，此為衡量離散程度的準則之一，其衡量值越小越好。其公式為：

$$MSE = \frac{\sum_{j=1}^m (n-1)s_j^2}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n-m} \dots\dots\dots (24)$$

#### 2. 平均絕對誤差 (mean absolute error, MAE)

平均絕對誤差係另一種常用衡量變異情形的指標，此方法與 MSE 最大的差異在於 MSE 由於誤差需取平方，所以較易受大的預測誤差所影響，研究中除採用 MSE 外，亦針對各種決策方法評估結果的權重與排序結果求算其平均絕對誤差來衡量其變異情形，此為另一衡量離散程度的準則，其衡量值亦越小越好。其公式為：

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x_{ij} - \bar{x}_j|}{n} \dots\dots\dots (25)$$

#### 3. 最佳方案之一致性 (top rank matched count, TOP)

最佳方案之一致性即兩種方法所選取之最佳方案若是相同，則兩方法在選取最佳方案方面的結果是一致的。綜合整理各方法選取最佳方案一致的次數，做一敘述性統計，計算最佳方案之一致性比例，以瞭解各方法選取最佳方案的差異情形，此為一致性衡量準則之一，其衡量值越大越好。

#### 4. 排序結果相同之方案數 (number of rank matched, MATCH%)

排序結果相同之方案數乃比較各方法最後排序的結果，統計最後排序結果相同之方案數比例，排序結果完全相同則 MATCH%=1，此為另一一致性衡量準則，其衡量值亦越大越好。

#### 5. 權重與排序結果之交叉分析 (weighted rank crossing, WRC1, WRC2)

權重與排序結果之交叉分析乃同時衡量最後排序結果的權重與等級，因此可能產生最後的方案權重雖然不同但排序結果的等級可能相同或不同，故進行權重與排序結果之交叉分析，此為衡量離散程度的準則之一，其衡量值越小越好，其公式為：

$$WRC1 = \sum_{i=1}^m W_i \left| R_{i,SAW} - R_{i,METH} \right| / \sum_{i=1}^m W_i ; \quad W_i = L + 1 - i, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad \dots (26)$$

$$WRC2 = \sum_{i=1}^m W_i \left| R_{i,SAW} - R_{i,METH} \right| / \sum_{i=1}^m W_i ; \quad W_i = 1/i, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad \dots (27)$$

L：表示方案數

#### 6. Spearman 等級相關係數 (sperman's correlatin for rank, SRC)

Spearman 等級相關係數係檢定各方法之評估結果及同一方法使用不同之屬性權重，其分別所得之評估結果是否有顯著正相關性，其衡量質越大越好。

Spearman 等級相關係數之求算公式為：

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)} \quad \dots \dots \dots (28)$$

其中信心水準 95%，即 0.05 之顯著水準整理各方法的評估結果有顯著正相關的次數，以瞭解各方法所求算之評估結果之差異情形。

## 4. 結果與分析

### 4.1 統計分析

研究中利用 SAS 統計套裝軟體針對 MATLAB 所模擬之結果進行分析。本章依衡量準則，藉由統計分析方法中的變異數分析 (ANOVA) 與無母數

統計中的 Kruskal- Wallis 分析探討各種不同決策方法在各種衡量準則上的表現。分析結果之 p-value 彙整如表 2 及表 3。

由表 2 及表 3 可知，在 95% 的顯著水準下，決策方法對於各項衡量準則具有顯著的影響，而權重分配對各項衡量準則則無顯著影響。

《表 2》各項衡量準則之 Kruskal -Wallis 顯著水準分析表

|          | <i>MSE</i> | <i>MAE</i> | <i>TOP</i> | <i>MATCH</i> | <i>WRC1</i> | <i>WRC2</i> | <i>SRC</i> |
|----------|------------|------------|------------|--------------|-------------|-------------|------------|
| <i>W</i> | 0.932      | 0.921      | 0.896      | 0.903        | 0.912       | 0.954       | 0.892      |
| <i>M</i> | 0.001*     | 0.001*     | 0.001*     | 0.001*       | 0.001*      | 0.001*      | 0.001*     |

*W*：權重。共計 1.等權重；2.均勻分配；3.beta 分配 (u 型) 三種。

*M*：決策方法。共計 1.簡單加權法；2.層級加權法；3.ELECTRE 法；4.TOPSIS 法；5.灰關聯分析法五種。

\*：p-value < 0.01

《表 3》衡量準則之 ANOVA 顯著水準分析表

|          | <i>MSE</i> | <i>MAE</i> | <i>TOP</i> | <i>MATCH</i> | <i>WRC1</i> | <i>WRC2</i> | <i>SRC</i> |
|----------|------------|------------|------------|--------------|-------------|-------------|------------|
| <i>W</i> | 0.527      | 0.817      | 0.729      | 0.691        | 0.615       | 0.758       | 0.462      |
| <i>M</i> | 0.001*     | 0.001*     | 0.001*     | 0.001*       | 0.001*      | 0.001*      | 0.001*     |

*W*：權重。共計 1.等權重；2.均勻分配；3.beta 分配 (u 型) 三種。

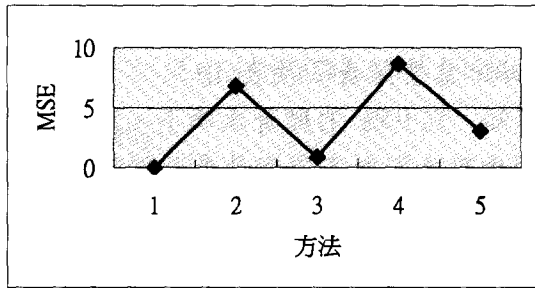
*M*：決策方法。共計 1.簡單加權法；2.層級加權法；3.ELECTRE 法；4.TOPSIS 法；5.灰關聯分析法五種。

\*：p-value < 0.01

## 4.2 各項衡量準則綜合分析

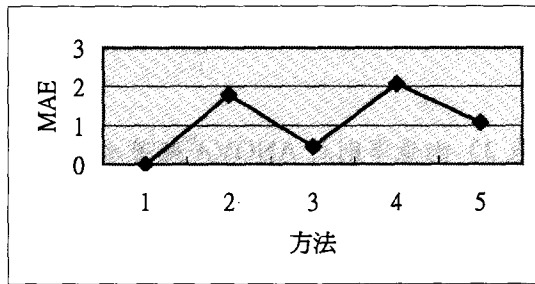
依據多屬性決策方法之方案優劣排序公式 (3)、(6)、(15)、(22) 及 (23) 分別求算每次模擬的排序結果，進而透過七項衡量準則，衡量各種方法在每一項衡量準則的表現情況。最後，每一種組合問題模擬 10000 次，進而求得各種方法其在七項衡量準則指標的平均水準。各種決策方法在各項衡量準則的表現如圖 1 至圖 7 所示。

由圖 1 可知，在以 SAW 為基準下，五種不同決策方法在離散程度衡量指標 MSE 的表現上，以 ELECTRE 之 MSE 值最小，最接近 SAW。而 HAW 之 MSE 值最大，離 SAW 法最遠。



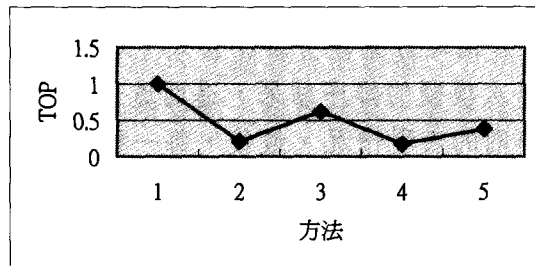
〈圖 1〉 MSE 在五種不同決策方法之結果

由圖 2 可知，五種不同決策方法在另一離散程度衡量指標 MAE 的表現上與 MSE 相同，以 ELECTRE 最接近 SAW。而 HAW 離 SAW 法最遠。



〈圖 2〉 MAE 在五種不同決策方法之結果

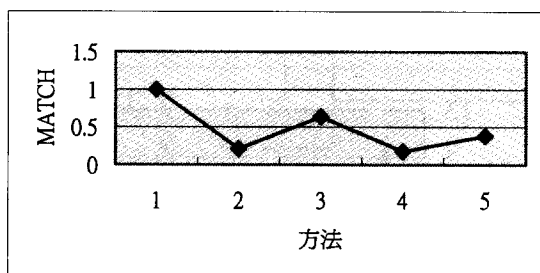
由圖 3 可知，在以 SAW 為基準下，ELECTRE 之 TOP 值最大，最接近 SAW。而 HAW 之 TOP 值最小，離 SAW 最遠。即在一致性的衡量準則表現上在以 SAW 為基準下，ELECTRE 之一致性相對高於其他方法，而 HAW 最低。



〈圖 3〉 TOP 在五種不同決策方法之結果

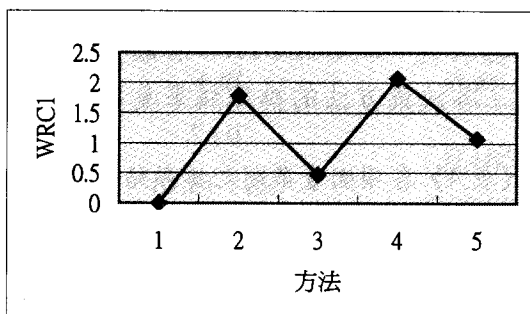


由圖 4 可知，五種不同決策方法在另一一致性衡量指標 MATCH 的表現上與 TOP 相同。

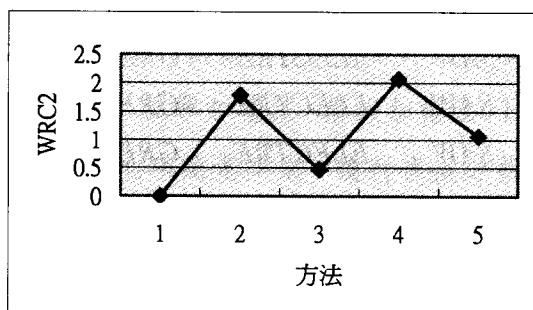


〈圖 4〉MATCH 在五種不同決策方法之結果

由圖 5 及圖 6 可知，在以 SAW 為基準下，五種不同決策方法在另一離散程度衡量指標 WRC1 及 WRC2 的表現上與 MSE 及 MAE 相同，以 ELECTRE 之 WRC1 及 WRC2 值最小，最接近 SAW。而 HAW 之值最大，離 SAW 法最遠。



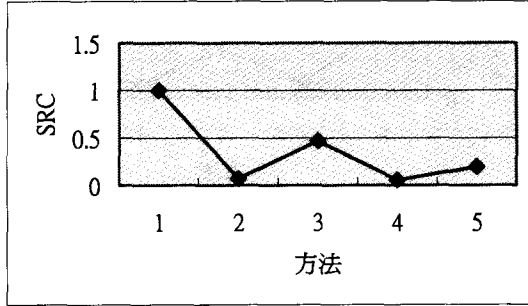
〈圖 5〉WRC1 在五種不同決策方法之結果



〈圖 6〉WRC2 在五種不同決策方法之結果

由圖 7 可知，五種不同決策方法相關係數的表現上，在以 SAW 為基準

下，ELECTRE 之 SRC 值最大，最接近 SAW。而 HAW 之 SRC 值最小，離 SAW 最遠。即在相關性的衡量準則表現上在以 SAW 為基準下，ELECTRE 之相關性相對高於其他方法，而以 HAW 最低。



《圖 7》SRC 在五種不同決策方法之結果

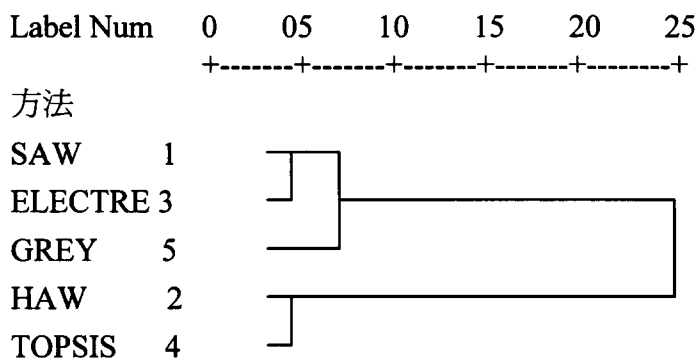
綜合以上的模擬結果分析顯示，各種決策方法之各項衡量準則的表現，在以簡單加權法為基準下，各決策方法在各項誤差均方衡量準則的表現上並無明顯的差異，其整體表現，以 ELECTRE 法最接近 SAW，灰關聯法次之，而 TOPSIS 相距最遠。各決策方法的排序結果彙整如表 4。

《表 4》各項衡量準則之排序結果分析表

| 衡量準則  | 排序結果 |         |      |     |        |
|-------|------|---------|------|-----|--------|
|       | 基準   | 1       | 2    | 3   | 4      |
| MSE   | SAW  | ELECTRE | GREY | HAW | TOPSIS |
| MAE   | SAW  | ELECTRE | GREY | HAW | TOPSIS |
| TOP   | SAW  | ELECTRE | GREY | HAW | TOPSIS |
| MATCH | SAW  | ELECTRE | GREY | HAW | TOPSIS |
| WRC1  | SAW  | ELECTRE | GREY | HAW | TOPSIS |
| WRC2  | SAW  | ELECTRE | GREY | HAW | TOPSIS |
| SRC   | SAW  | ELECTRE | GREY | HAW | TOPSIS |

### 4.3 群集分析

根據模擬的資料進行群集分析 (cluster analysis)，當資料型態為指數分配時，透過分層法中凝聚分層 (agglomerative) 之平均法，可得平均聯結法 (average linkage) 群集分析的樹形圖如圖 8。



〈圖 8〉平均聯結法群集分析樹形圖

本研究以 10 為切點，將五種決策方法分為兩群，則 A 群為簡單加權法、灰關聯分析法及 ELECTRE，而 B 群為層級加權法及 TOPSIS，如表 5 所示。

〈表 5〉群集分析結果

| 資料分配<br>型態 | 分群結果    |        |
|------------|---------|--------|
|            | A 群     | B 群    |
| 指數分配       | SAW     | HAW    |
|            | ELECTRE | TOPSIS |
|            | GREY    |        |

## 5. 結論

研究中利用資料型態是指數分配，透過模擬的方式，以方案數、屬性數、權重分配等三方面為參數設計模擬情境，主要針對五種資訊顯著特徵屬於基數型態之多屬性決策方法：簡單加權法、層級加權法、ELECTRE 法、TOPSIS 法及灰關聯分析法，共有七項衡量準則，進行模擬分析比較，主要獲致之結論如下：

### 1. 模擬結果

透過離散程度、一致性及相關性衡量準則評估，整體而言，在以簡單加權法為基準之下，以 ELECTRE 法最接近簡單加權法、灰關聯分析法次之，而 TOPSIS 法相距最遠。

## 2. 權重分配的影響

由研究結果得知，權重分配的改變對各種決策方法在各項衡量準則上的表現的影響弱，然而，權重對各種決策方法本身的影響是存在的。由此可知，五種不同決策方法其穩定性具有相當的穩定程度。

## 3. 群集分析結果

透過群集分析的結果發現，五種決策方法可明顯區分為 A、B 兩群。簡單加權法、ELECTRE 法及灰關聯分析法為一群，而層級加權法及 TOPSIS 法為一群。

## 4. 灰關聯分析法的適用性評估

當資料型態為指數分配時，經由各項模擬情境分析，灰關聯分析法僅次於 ELECTRE 法。此外，在群集分析中，灰關聯分析法與簡單加權法及 ELECTRE 法歸屬同一群組。所以，新興的灰關聯分析法為可供決策者使用的一種新多屬性決策方法。

致謝：本研究承蒙國科會專題研究計畫編號 NSC90-2416-H-130-009 之經費補助，特此致謝。

## 參考文獻

- 吳漢雄、鄧聚龍、溫坤禮，*灰色分析入門*，高立圖書公司出版，1996 年。
- 翁振益、莊懿妃、陳忠平、張淑卿(2000)，多屬性決策方法應用於台灣地區環境品質評估之探討，*銘傳大學企管系暨資管系學術論文研討會論文集*，台北，第 143-154 頁。
- 翁振益、莊懿妃、陳忠平、張淑卿(2000)，多屬性決策方法應用於大學院校研究發展績效之探討，*銘傳大學企管系暨資管系學術論文研討會論文集*，台北，第 155-169 頁。

- 陳忠平(2000), 多屬性決策方法之分析比較, 銘傳大學管理科學研究所碩士論文。
- 溫坤禮(1999), 灰關聯度的量化研究, *灰色系統學刊*, 二卷二期, 第 117-133 頁。
- 曾國雄、蕭再安、鄧振源(1988), 多評準決策方法之分析比較, *科學發展月刊*, 十六卷七期, 第 1008-1017 頁。
- 曾國雄、王丘明(1993), 多評準決策方法之比較與應用-以基隆港改善方案之選擇為例, *工業工程*, 十卷一期, 第 13-23 頁。
- 鄧聚龍, *灰色基本方法*, 華中理工大學出版社, 1987 年。
- 鄭博文(1997), 以競值模式比較四種多屬性決策方法之研究-以醫院選擇為例, 中山大學企業管理研究所博士論文。
- Buede, D.M. and D.T. Maxwell(1995), Rank Disagreement: A Comparison of Multi-criteria Methodologies. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 4(1), 1-21.
- Churchman, C.W. and R.L. Ackoff(1954), An Approximate Measure of Value. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(2),172-187.
- Gemunden, H.G. and J. Hauschilde(1985). Number of Alternatives and Efficiency in Different Types of Top-Management Decisions. *European Journal of Operational Research*, 22, 178-190.
- Hwang, C.L. and K. Yoon, *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, New York : Springer-Verlag., 1981.
- Hwang, C.L., Y.J. Lai, and T.Y. Liu(1993), A New Approach for Multiple Objective Decision Making. *Computers and Operation Research*, 20 (4),889-899.

- Klee, A.J.(1971). The Role of Decision Models in the Evaluation of Competing Environmental Health Alternatives. *Management Science*, 18(2), B52-B67.
- Saaty, T.L. ,*The Analytic Hierarchy Process*, New York : McGraw-Hill Co., 1980.
- Triantaphyllou, E. and S.H. Mann(1989). An Examination of the Effectiveness of Multi-dimensional Decision-making Methods: A Decision-making Paradox. *Decision Support Systems*, 5, 303-312.
- Wu, H.J. and C.B. Chen(1999). An Alternative Form for Grey Correlative Grader. *The Journal of Grey System*, 11(1), 7-12.
- Yoon, K. and C.L. Hwang(1985). Manufacturing Plant Location Analysis by Multiple Attribute Decision Making: Part I-Single-Plant Strategy. *International Journal of Production Research*, 23(2), 345-359.
- Yoon, K. (1987). A Reconciliation among Discrete Compromise Situation. *Journal of Operational Research Socienity*, 38(2), 277-286.
- Yoon, K. and C.L. Hwang, *Multiple Attribute Decision Making: An Introduction*, Beverly Hills : Sage Publications Inc., 1995.
- Zanakis, S.H., A. Solomon, N. Wishart, and S. Dublish(1998). Multi-Attribute Decision Making A Simulation Comparison of Select Methods. *European Journal of Operational Research*, 107(3), 507-529.
- Zahedi, F. (1986). A Simulation Study of Estimation Methods in the Analytic Hierarchy Process. *Socio-Economic Planning Sciences*, 20, 347-354.
- Zeleny, M., *Multiple Criteria Decision Making*, New York : McGraw-Hill Co.,1982.

# A Simulation Comparison and Analysis of Multiple Attribute Decision Methods with Exponential Distribution

*Jehn- Yih Wong\**   *Shu- Ching Chang\*\**

## Abstract

Multiple Attribute Decision Making (MADM) is an evaluation method often used by decision makers and widely used in many management areas. Several methods have been proposed for solving MADM. However, a major criticism of MADM is that different techniques may yield different results when applied to the same problem. In this paper, we run a simulation study using the number of alternatives and criteria, and choices of weights as the input parameters. The data sets were generated using exponential distributions. We investigate the performances of five methods: Simple Additive Weighting (SAW), Hierarchical Additive Weighting (HAW), ELECTRE, TOPSIS and Grey Relational Analysis (GREY) using seven measures of performance, including Mean Squared Error, Mean Absolute Error, top rank matched count, number of rank matched, weighted rank crossing 1, weighted rank crossing 2, and Spearman's correlation for ranks. The results show that, the solutions provided by SAW was used as the benchmark, ELECTRE behaves closer to SAW, followed by GREY, with TOPSIS the least similar to SAW. Furthermore, the cluster analysis shows that, we can cluster the five methods into two groups, with methods in each group yielding similar results.

**Keywords :** multiple attribute decision making, decision theory, cluster, simulation

---

\* Associate Professor of Department of Business Administration, Ming Chung University

\*\* Master of Department of Business and Administration, Ming Chung University

