

積分型基礎樣條函數與利率期限結構估計

周建新* 于鴻福** 劉嘉烜***

摘要

在利率期限結構的配適模型中，積分型基礎樣條函數係將折現因子設定為積分函數形式，故能得到較為精確且平滑之殖利率曲線。本文擬應用 Ioannides(2003) 所提出之積分型基礎樣條函數，來配適台灣公債市場的利率期限結構。本研究的樣本期間為 2003 年 1 月 3 日至 2005 年 7 月 29 日，以到期日在 30 年以內的台灣政府公債為研究樣本，總計公債樣本數為 92 筆。本文利用修正高斯牛頓法來求解模型中之參數，反推求得折現因子，透過轉換過程便可求得利率期限結構。實證研究發現在三種判斷準則上，積分型基礎樣條函數均顯著優於基礎樣條模型與 Svensson 模型，這顯示積分型基礎樣條函數，在台灣公債市場的利率期限結構估計上，具有相當不錯之配適能力。

關鍵詞：利率期限結構、樣條函數、修正高斯-牛頓法

* 國立高雄第一科技大學風險管理與保險系副教授

** 國立虎尾科技大學院工管系教授

*** 國立高雄第一科技大學財管所碩士

1. 緒論

利率期限結構 (term structure of interest rate) 係指在相同違約風險下各期零息公債 (zero-coupon bond) 之殖利率曲線 (yield curve)。利率期限結構估計在財務領域中扮演著極為重要的角色，例如利用估計所得之利率期限結構，可以作為判斷合理債券價格之依據，及進行債券投資組合管理；利率期限結構可視為無風險利率之參考基準 (benchmark)，其可用於發掘不同年限債券間之套利機會與衡量投資績效；此外其可作為評估各種風險性金融資產及利率衍生性商品，例如選擇權、交換、利率上下限等定價時的輸入資料 (input)。由於利率期限結構反應了市場參與者對未來利率水準的預期，故其可作為政府在制定貨幣政策之分析工具，其重要性實不言而喻。故如何有效的建構利率期限結構，就成為學術界與實務界所面對之重要議題。

目前估計利率期限結構之相關研究方法，可以區分為一般均衡模型 (general equilibrium model)、統計配適模型 (curve fitting model) 與無套利模型 (no-arbitrage model) 等三大領域。在一般均衡模型中，代表性的學者有 Vasicek (1977)、Dothan (1978)、Brennan and Schwartz (1979)、Cox, Ingersoll and Ross (1985a,b) 等，其係假設某一經濟變數 (例如短期無風險利率、遠期利率等)，服從某一種隨機過程，藉由隨機過程來描述某一經濟變數之瞬間變動，進而推導出在隱含某些假設下之利率期限結構型態。此種作法主要受到之批評，在於其所估計之利率期限結構，只是一種理論上存在、但不一定能和真實市場上的利率期限結構一致；因此，所推估的利率衍生性商品價值，就可能會與其真實價值有著極大之誤差。無套利模型的代表性的學者，如 Ho and Lee (1986)、Hull and White (1990)、

Heath, Jarrow and Merton (1992)，根據事先給定的利率期限結構，代入無套利模型進而準確地評價利率衍生性金融商品。至於事先已知的利率期限結構，則必而透過統計模型配適求得。

統計配適模型是運用曲線配適方法，以市場上的債券交易價格來擬合利率期限結構，因為公司債具有違約風險，故一般會以付息政府公債之報價為樣本資料。由於付息債券可視為不同到期日之純粹折價債券 (pure discount bond) 的投資組合，因此折價債券的價格，可以藉由實際的付息債券價格拆解求得。統計配適模型之代表學者有 McCulloch (1971,1975)、Schaefer (1981)、Vasicek and Fong (1982)、Nelson and Sigel (1987)、Steeley (1991)、Adams and Van Deventer (1994)、Lin (1999,2002) 等。前述以統計配適方法來建構利率期限結構，是以一有效之配適函數，求得接近實際市場之零息殖利率曲線，亦即追求配適函數之精確性目標。然而目前已有許多文獻同時將曲線平滑性目標納入考慮，希望同時在曲線精確性與平滑性上，取得平衡，但此兩種因素間具有互抵 (trade-off) 之關係，此亦為目前學術界極欲克服之難題。

Subramanian (2001) 將配適函數分為下列五種類型：多項式樣條函數 (polynomial splines)；指數型樣條函數 (exponential splines)；基礎樣條函數 (B-splines)；指數型多項式遠期利率函數 (exponential polynomial forms for the forward rate)；及不平滑懲罰模型等五大類。不過配適函數之選擇由上述分類再作細分，大致可以分成樣條函數家族及指數型多項式函數家族兩種類型。其中樣條函數係採分段估計，具有確保整條利率曲線連續平滑的優點，故廣為實務界所採用，也是目前美國聯邦準備理事會，在計算固定期限公債殖利率所使用的方法。

樣條函數之演進大致可分為三個階段：多項式樣條函數 (polynomial

spline)、指數樣條函數 (exponential spline) 和基礎樣條函數 (basis spline approximation)。在多項式樣條函數估計上，McCulloch (1971) 首先提出分段二次多項式 (piece-wise quadratic polynomial spline) 直接估計美國國庫券的折現因子。其認為不同債券在相同的到期日下，應有相同的殖利率，並在連續複利的假設下，利用債券的評價公式與連續折現公式，建構利率期限結構。然而在 McCulloch (1971) 所提出之二次分段多項式中，所估計之遠期利率曲線會產生反曲點 (knuckles)，使得一次微分不連續，造成曲線變得不平滑；因此 McCulloch (1975) 又提出立方樣條函數解決上述缺點，然而因為公式彈性太大，導致折現因子無法呈現非遞增函數 (non-increasing)，使得遠期利率計算上產生負值。之後 Mastronikola (1991) 提出複合立方樣條函數 (complex cubic spline function)，來解決上述的問題。Schaefer (1981) 則是以 Bernstein Polynomials 做為折現因子的近似函數，嚴格限制折現因子為非負、和單調非遞增函數的條件，以避免產生負的遠期利率。

Vasicek and Fong (1982) 首先提出分段指數樣條函數 (exponential spline function)，直接以指數型態函數來配適折現因子，並認為利用此一方式估計而得之殖利率曲線，將具有足夠的彈性，且可以有效的捕捉各種利率期限結構的形狀；此外 Vasicek and Fong (1982) 認為利用前述的複合立方樣條函數和 Bernstein Polynomial 函數，在估計折現因子時，都會導致較遠到期日之遠期利率，產生估計錯誤的不佳結果。Shea (1985) 實證 Vasicek and Fong (1982) 的模型，發現指數函數並無法達成其所預期的結果，折現因子無法呈現穩定地遞減，而遠期利率曲線在短期的波動性，亦如同多項式函數一樣波動劇烈。此外，由於利用最小平方法估計該模型，會因為最小平方法對錯誤資料敏感性過高，故必須逐步地篩選資料，以避

免產生過大之估計誤差。

基礎樣條函數是由 Steeley(1991)首先應用於估計英國金緣債券(U.K. Gilt-Edged bond)之利率期限結構，其不僅可以獲得平滑的即期與遠期利率曲線，同時還可以減少大量之計算工作。在實證上，此一模型經 Lin and Paxson (1995)、Yu (1995)分別將其應用於估計 LIFFE 之德國及日本公債的利率期限結構，都得到令人滿意的結果。

在台灣公債市場利率期限結構之估計上，目前已經得到相當豐碩之成果，例如 Lin (1999,2002)、蔣松原 (2000)以樣條函數 (spline function) 來建構台灣公債市場之殖利率曲線；李桐豪 (2001)以立方樣條函數與 Nelson and Siegel 等方法估計台灣公債市場利率期限結構，並探討兩類估計結果的差異；陳美娥 (2001)以 Pham (1998)提出的契比雪夫多項式模型 (Chebyshev polynomials model) 配適台灣公債市場的利率期限結構；周建新、于鴻福、張千雲 (2003a)分別以 B-Spline 模型及 Nelson and Siegel (1987)的 Parsimonious 模型，比較兩者在估計台灣公債市場的利率期限結構之配適能力；另外周建新、于鴻福、張千雲 (2003b)採用 Allen, Zheng and Thomas (2000)所提出之線性規劃模型為基礎，加以連續平滑化之修正，來估計台灣公債市場的利率期限結構。周建新、于鴻福、鍾韻琳 (2004)以 Nelson-Siegel 模型、Extend Nelson-Siegel 模型與 Nelson-Siegel-Svensson 模型，利用修正高斯-牛頓法來估計模型參數，藉以建構台灣公債市場之利率期限結構。周建新、黃彥騰 (2005)以 Pham (1998)所提出的柴比雪夫多項式 (Chebyshev polynomials) 模型，來估計台灣公債市場之利率期限結構。周建新、于鴻福、陳振宇 (2006)針對改善利率期限結構平滑度之兩種 roughness penalty 方法，比較其配適能力優劣。一般而言，國內實證的結果發現以樣條函數來建構台灣公債市場之殖利率曲線，可以得到較

佳之配適結果。

Ioannides (2003) 提出積分型基礎樣條函數 (Integrated B-Spline) 來近似折現函數，此一模型之優點在於改善折現因子為積分函數形式，故能得到較為精確且平滑之殖利率曲線。Ioannides (2003) 以英國金綠債券市場為研究對象，並以加權平均方根誤差 (weighted root mean square error) 作為配適模型優劣之衡量指標，實證發現 Integrated B-Spline 並未優於 B-spline 模型。不過在台灣公債市場之利率期限結構估計上，實證結果是否仍然一致，就不得而知。由於國內尚未有學者提出此一模型之實證成果，因此本文以 Ioannides (2003) 所提出的 Integrated B-Spline function，來估計在 2003 年 1 月至 2005 年 7 月間，台灣公債市場之利率期限結構。

本研究為國內首篇以 Integrated B-Spline function 應用於台灣公債市場利率期限結構估計之實證論文，本研究亦將此一實證成果，與基礎樣條函數 (B-Spline) 模型和 Svensson (1994) 模型之配適結果，作一比較，以提供國內實務界人士有更多之選擇。本文後續內容為：第二節為模型建構；第三節介紹求解的演算法；第四節為資料與實證結果分析；第五節為結論。

2. 模型建構

Steeley (1991) 首先應用基礎樣條函數 (B-Spline) 模型配適英國金綠債券之利率期限結構。Lin and Chou (1998)、Deacon and Derry (1994)、Lin (1999,2002) 亦採用 B-Spline 模型，來估計公債市場之利率期限結構，他們皆認為 B-Spline 模型獲得一致肯定及實務界的偏好。

債券理論價格等於未來所有現金流量以即期利率折現所得之現值，代

表債券理論價格，其定價關係式如下：

$$B_i = \sum_{m=t}^T CF_{im} d(m), \quad 1 \leq i \leq n \quad \dots\dots\dots (1)$$

其中 B_i 為第 i 種債券之理論價格； CF_{im} 表示為第 i 個債券在第 m 期的現金流量， n 為無風險債券個數； $d(m)$ 為折現因子； t 為距下次付息日的時間； T 為債券到期日。

根據威勒斯近似定理 (Weierstrass Approximation Theorem)，在任何給定的容許誤差內，折現函數可用多項式函數近似如下：

$$d(m) \approx \sum_{j=1}^k b_j G_j^r(m) \quad \dots\dots\dots (2)$$

其中 $b_j (j=1 \sim k)$ 為欲估計之模型參數， $G_j^r(m)$ 即為 B-Spline 函數，首先由 Powell (1981) 定義如下：

在閉區間 $[A, B]$ 中，若節點 $\xi_i (i=0, 1, \dots, s)$ 且滿足 $A = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_s = B$ 之關係，則 B-Spline 函數 $G_j^r(m)$ 定義為：

$$G_j^r(m) = \sum_{p=j}^{j+r+1} \left\{ \left[\prod_{q=j, q \neq p}^{j+r+1} \frac{1}{(m_q - m_p)} \right] [\max(m - m_p, 0)]^r \right\}, \quad j=1, \dots, k; \quad k=s+r \quad \dots (3)$$

其中， $G_j^r(m)$ 代表第 j 個 r 階 B-Spline 函數，若 m 落在區間 $[m_j, m_{j+r+1}]$ 內則函數值不為零，否則為零。在任何時區間 $[m_j, m_{j+1}]$ 兩個端點稱為節點， s 定義為 $m=0$ 到樣本債券中最長到期日之子期間個數。使用 B-Spline 模型需要 $s+r$ 個線性獨立基礎樣條函數來逼近欲擬合之曲線¹，但在閉區

1 此節係參考財團法人中華民國證券櫃檯買賣中心零息殖利率曲線說明 (<http://www.otc.org.tw>)。

間[A,B]中，只存在 $s - r$ 個基礎樣條函數，因此必須在樣本內節點最外側的兩個節點 ξ_0 與 ξ_s 之兩側，再分別向外延伸 r 個新節點（樣本外節點），舉例來說，在 $r=3$ 及 $s=3$ 之設定下，則須增加節點 $\xi_i (i = -3, -2, -1, s+1, s+2, s+3)$ ，可再新建立 $2r$ 個基礎樣條函數，再配合原先閉區間[A,B]內的 $s - r$ 個基礎樣條函數，故整個計算過程中共有 $s + r$ 個基礎樣條函數。整個時間水平軸上樣本內節點 $\xi_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 有 4 個節點，樣本外節點 $\xi_i (i = -3, -2, -1, 3+1, 3+2, 3+3)$ 有 6 個，故共有 $2r+s+1$ 個節點，總計 10 個節點。

Vasicek and Fong (1982) 指出以分段指數函數近似折現因子可使估計之遠期利率曲線連續且平滑。Ioannides (2003) 提出 Integrated B-Spline 模型近似折現因子，其函數形式表示如下：

$$d(m) = \exp \left[- \int_0^m \sum_{j=1}^k b_j G_j(m) \right] \dots\dots\dots (4)$$

因此以 Ioannides (2003) 之 Integrated B-Spline 模型為基礎，第 i 個債券市場價格與理論價格之關係式如下：

$$P_i = \sum_{m=t}^T CF_{im} \exp \left[- \int_0^m \sum_{j=1}^k b_j G_j(m) \right] + \varepsilon_i \dots\dots\dots (5)$$

其中 ε_i 為誤差項。

Integrated B-Spline 模型所近似之折現因子，具有今日 ($m=0$) 為 1 之特性，故可減低估計參數時所需加諸的限制式，對估計的效率性相當具有助益。此外，採用該模型配適利率期限結構時，必需選定式(3)中 B-Spline 模型的階數 (r)、子期間個數 (s) 及節點位置 (以年為單位)。經 Lin

(1999,2002) 實證結果發現採用 $r=3$ 的 B-Spline 函數，可獲得平滑之殖利率曲線，故本研究參照 Lin (1999,2002) 之作法，設定 $r=3$ (即立方基礎樣條函數)。子期間個數及樣本節點設定上，本研究依據 McCulloch (1971) 之法則為基礎，採用試誤方法比較模型的判定係數以決定 s 值。 k 取決於 r 和 s ，實證研究應用上， k 值越大配適效果越佳，但卻可能造成參數過多而產生無意義的參數估計，其試誤方法詳細步驟如下所示：

步驟一：根據期間內債券的最長到期日設定樣本內最右端的節點位置²。

步驟二：設定樣本內節點的位置。

步驟三：求算判定係數。

步驟四：重複步驟二，找出最佳判定係數之節點位置。

反覆進行上述步驟後，本文發現積分型基礎樣條模型 s 值設定 3 為較佳的值，樣本內節點設定為 0,10,20,30，基礎樣條模型 s 值設定為 5，樣本內節點設定為 0,6,12,18,24,30，積分型基礎樣條與基礎樣條模型樣本外節點位置依據 Lin (1999,2002) 之設定，在樣本內最左端節點外側，節點值向左以 1 遞減設定為 -1,-2,-3；樣本內最右端節點外側，節點值向右以 5 遞增設定為 35,40,45。

針對式(5)之非線性迴歸模型，根據實際價格與理論價格之差異最小化之準則並利用數值方法，則可得到 Integrated B-Spline 模型六個參數之最小平方估計值 (least-squares estimate)，如式(6)所示。

2 零至期間內樣本債券最長到期日稱為樣本內，根據 Steeley(1991)之說法，樣本內節點之位置與樣本中具有最長到期日債券之到期日(maturity)有關。

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n \left\{ P_i - \sum_{m=t}^T CF_{im} \exp \left[- \int_0^m \sum_{j=1}^6 b_j G_j(m) \right] \right\}^2 = \text{Min} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

3. 演算法

在眾多非線性迴歸的求解問題上，高斯-牛頓法 (Gauss-Newton) 常用於求解參數的最小平方估計值。但相較於高斯-牛頓法，Hartley (1961) 所提出之修正高斯-牛頓法一般認為具較易收斂之優點。故本研究採用修正高斯-牛頓法估計 Integrated B-Spline 模型中式(6)參數 $b_j^{(0)}$ ($1 \leq j \leq 6$)，再將估計所得的參數代入式(4)求得折現因子、再將折現因子透過轉換便可求得利率期限結構。值得注意的是修正高斯-牛頓法反覆迭代求解參數時能否有效地收斂，估計參數之起始值良窳具有重要影響性。

關於 $b_j^{(0)}$ ($1 \leq j \leq 6$) 修正的高斯-牛頓法之計算步驟可分為下列兩個部份：1. 計算起始估計值 $b_j^{(0)}$ ($1 \leq j \leq 6$)；2. 利用步驟 1 之結果，以迭代程序求算 $b_j^{(0)}$ ($1 \leq j \leq 6$)。今分述如下：

1. 起始估計值 $b_j^{(0)}$ ($1 \leq j \leq 6$) 之計算：

首先，利用 $e^x \approx 1+x$ 的性質，我們可得

$$\exp \left[- \int_0^m \sum_{j=1}^6 b_j G_j(m) \right] \approx 1 - \int_0^m \sum_{j=1}^6 b_j G_j(m) \quad \dots\dots\dots (7)$$

將式(7)代入式(5)，經移項後可得³

3 $G_j^*(m)$ 為積分型基礎樣條函數。

$$P_i - \sum_{m=t}^T CF_{im} \approx \sum_{m=t}^T \sum_{j=1}^6 b_j \cdot CF_{im} \cdot G_j^*(m) + \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n \quad \dots\dots\dots (8)$$

因為式(8)為線性迴歸模式，故可轉換成矩陣形式：

$$Y = X \cdot g^{(0)} + \varepsilon \quad \dots\dots\dots (9)$$

則式(9)又可表示為：

$$\begin{bmatrix} P_1 - \sum_{m=t}^T CF_{1m} \\ P_2 - \sum_{m=t}^T CF_{2m} \\ \vdots \\ P_n - \sum_{m=t}^T CF_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{m=t}^T -CF_{1m} \cdot G_1^*(m) & \dots & \sum_{m=t}^T -CF_{1m} \cdot G_6^*(m) \\ \sum_{m=t}^T -CF_{2m} \cdot G_1^*(m) & \dots & \sum_{m=t}^T -CF_{2m} \cdot G_6^*(m) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{m=t}^T -CF_{nm} \cdot G_1^*(m) & \dots & \sum_{m=t}^T -CF_{nm} \cdot G_6^*(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ \vdots \\ b_6^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad \dots (10)$$

最後再利用複迴歸之最小平方法即可求得 $b_j (1 \leq j \leq 6)$ 之起始估計值 $b_j^{(0)} (1 \leq j \leq 6)$ ：

$$g^{(0)} = (X'X)^{-1}(X')Y \quad \dots\dots\dots (11)$$

2. $\hat{b}_j (1 \leq j \leq 6)$ 之迭代求算程序：⁴

此部分將利用步驟 1 中所求得 $b_j (1 \leq j \leq 6)$ 之起始估計值 $b_j^{(0)} (1 \leq j \leq 6)$ ，求算新的估計值，其關係如下：

⁴ \hat{b}_j 為模型參數 b_j 的不偏估計量(unbiased estimator)。

$$g^{(i)} = \begin{bmatrix} b_1^{(i)} \\ b_2^{(i)} \\ b_3^{(i)} \\ b_4^{(i)} \\ b_5^{(i)} \\ b_6^{(i)} \end{bmatrix} = g^{(i-1)} + v_{\min} D, i = 1, 2, 3, \dots \quad \dots\dots\dots (12)$$

其中 v_{\min} 和 $D = \begin{bmatrix} D_1^{(i-1)} \\ D_2^{(i-1)} \\ D_3^{(i-1)} \\ D_4^{(i-1)} \\ D_5^{(i-1)} \\ D_6^{(i-1)} \end{bmatrix}$ 分別表示 $g^{(i-1)}$ 時的修正幅度和修正向量

(corrections)。 v_{\min} 和 D 之求法如下所示：

首先，令 $g = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}$ ，而 $g^{(0)} = \begin{bmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ b_3^{(0)} \\ b_4^{(0)} \\ b_5^{(0)} \\ b_6^{(0)} \end{bmatrix}$ 表示 g 的起始向量，

再令

$$f(CF_{im}, g) = \sum_{m=t}^T CF_{im} \exp \left[- \sum_{j=1}^6 b_j G_j^*(m) \right] \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$Q(CF_{im}, g) = \sum_{i=1}^n \left\{ P_i - \sum_{m=t}^T CF_{im} \exp \left[- \sum_{j=1}^6 b_j G_j^*(m) \right] \right\}^2 \quad \dots\dots\dots (14)$$

則 $f(CF_{im}, g)$ 對 $b_j (1 \leq j \leq 6)$ 的一階微分如下：

$$\frac{\partial f(CF_{im}, g)}{\partial b_j} = f_j(CF_{im}, g), 1 \leq j \leq 6 \quad \dots\dots\dots (15)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f(CF_{im}, g)}{\partial b_1} &= f_1(CF_{im}, g) = \sum_{m=t}^T CF_{im} \exp \left[- \sum_{j=1}^6 b_j G_j^*(m) \right] [-G_1^*(m)] \\ \frac{\partial f(CF_{im}, g)}{\partial b_2} &= f_2(CF_{im}, g) = \sum_{m=t}^T CF_{im} \exp \left[- \sum_{j=1}^6 b_j G_j^*(m) \right] [-G_2^*(m)] \\ &\vdots \\ \frac{\partial f(CF_{im}, g)}{\partial b_6} &= f_6(CF_{im}, g) = \sum_{m=t}^T CF_{im} \exp \left[- \sum_{j=1}^6 b_j G_j^*(m) \right] [-G_6^*(m)] \end{aligned} \right.$$

另外， $Q(CF_{im}, g)$ 對 $b_j (1 \leq j \leq 6)$ 之一階微分別為：

$$\frac{\partial Q}{\partial b_j} = Q_j(CF_{im}, g) = -2 \sum_{i=1}^n \left\{ P_i - \sum_{m=t}^T CF_{im} \exp \left[- \sum_{j=1}^6 b_j G_j^*(m) \right] \right\} f_j, 1 \leq j \leq 6 \quad \dots (16)^5$$

接著，再由以下的式(17)可得修正向量 D ：

$$\left\{ \begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^6 \left\{ \sum_{i=1}^n f_1(CF_{im}, g^{(0)}) f_j(CF_{im}, g^{(0)}) \right\} D_j &= -Q_1(CF_{im}, g^{(0)}) \\ 2 \sum_{j=1}^6 \left\{ \sum_{i=1}^n f_2(CF_{im}, g^{(0)}) f_j(CF_{im}, g^{(0)}) \right\} D_j &= -Q_2(CF_{im}, g^{(0)}) \quad \dots\dots\dots (17) \\ &\vdots \\ 2 \sum_{j=1}^6 \left\{ \sum_{i=1}^n f_6(CF_{im}, g^{(0)}) f_j(CF_{im}, g^{(0)}) \right\} D_j &= -Q_6(CF_{im}, g^{(0)}) \end{aligned} \right.$$

⁵ f_j 表示 $f_j(CF_{im}, g)$ 的簡稱。

再令

$$Q(v) = Q(CF_{im}, g^{(0)} + vD), 0 \leq v \leq 1 \quad \dots\dots\dots (18)$$

那麼 v_{\min} 的近似值即可由式(19)求出，該方程式如下所示：

$$v_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{(Q(0) - Q(1))}{(Q(1) - 2Q(1/2) + Q(0))} \quad \dots\dots\dots (19)$$

如此可求得 g 之新的估計值為 $g^{(1)} = g^{(0)} + v_{\min}D$ ，將 $g^{(1)}$ 視為 g 的新起始向量，並重覆上述程序，即可得到新的修正估計向量 $g^{(2)}$ 。繼續執行此一迭代的過程，直到對於某一 $S \in N$ ，使得

$$\|g^{(S+1)} - g^{(S)}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^6 (g_j^{(s+1)} - g_j^{(s)})^2} < \Delta \quad \dots\dots\dots (20)$$

其中 Δ 為事先給定的容差值。此時， $g^{(S+1)}$ 即可視為 g 之最小平方估計向量。最後，將此 $b_j (1 \leq j \leq 6)$ 之最小平方估計值代入式(4)即可求折現因子，再透過式(21)轉換便可求得即期利率。

$$R(m) = \left[\frac{1}{d(m)} \right]^{1/m} - 1 \quad \dots\dots\dots (21)$$

4. 實證結果分析

4.1 資料選取

本研究的樣本期間為 2003 年 1 月 3 日至 2005 年 7 月 29 日，以到期日在 30 年以內的台灣政府公債為樣本，總計公債樣本數為 92 筆，資料來源為台灣經濟新報及櫃檯買賣中心之交易資料。公債付息頻率為一年，公債樣本為每週星期五之最高和最低殖利率報價之平均值；若無交易資料時，亦即市場仍未有新的資訊來反應價格，則以最接近之交易日的資料代替之。同時，因為公債接近到期日時殖利率會異常地波動，為避免模型受到極端值的影響，距離到期日在 1 年以內之樣本公債予於刪除。觀察時點以週為單位，每一週的債券樣本數平均在 25 種以上。

4.2 模型配適能力之比較指標

根據周建新、于鴻福、張千雲（2003a）利用附息債券價格為零息債券之投資組合理論，比較各模型所推估之理論附息債券價格與市場價格之差異，定義三種判斷準則如下：

1. 判定係數：

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^n (P_i - B_i)^2}{\sum_{i=1}^n (P_i - \bar{P})^2}$$

其中 P_i 表示債券市場中第 i 個債券的報價， \bar{P} 為其平均數， B_i 則表示第 i 個債券之理論價格。本研究之判定係數與線性迴歸分析中的判定係數在概念上一致，可提供一明確的參照數值為模型優劣之判斷準則，此一數字越大，代表模型之配適能力越佳。

2. 平均方根誤差百分比 RMSPE (Root Mean Squared Percentage Error)：

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i - B_i}{P_i} \right)^2} * 100\%$$

為一相對量的誤差評估準則，數值愈小，模型愈能捕捉到市場價格。

3. 平均方根誤差：

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (P_i - B_i)^2}$$

為一絕對量的誤差評估標準。

4.3 模型配適能力之比較

本研究主要目的在比較基礎樣條模型、Svensson 模型（模型介紹列於附錄一）與積分型基礎樣條模型的配適能力優劣，茲將基礎樣條模型與積分型基礎樣條模型於樣本期間的判定係數、平均方根誤差百分比及平均方根誤差比較結果列於《表 1》，Svensson 模型與積分型基礎樣條模型比較結果列於《表 2》。由《表 1》可得知，基礎樣條模型配適能力就判定係數而言，其平均值為 94.52%，最高達 97.52%，最低為 74.71%；就平方根誤差百分比看來，於樣本期間內，平均每一張債券之理論價格與實際價格會相差 1.62%，差異最大為 5.29%，最小為 0.4%，平均方根誤差之平均值為 1.71，亦即每百元報價的實際價格與理論價格相差約 1.71 元，最小到 0.19 元，最大為 6.54 元。

由《表 2》可得知，Svensson 模型配適能力就判定係數而言，其平均值為 98.18%，最高達 99.59%，最低為 92.53%；就平均方根誤差百分比看來，於樣本期間內，平均每一張債券之理論價格與實際價格會相差 1.3%，差異最大為 2.74%，最小為 0.65%，平均方根誤差之平均值為 1.5，亦即每百元報價的實際價格與理論價格相差約 1.5 元，最小到 0.76 元，最大為 3.45

元。積分型基礎樣條模型配適表現就判定係來看，其平均值高達 98.61%，最高 99.72%，最低 91.89%；就平方根誤差百分比看來，在樣本期間內，平均每一張債券之理論價格與實際價格僅相差 0.8%，差異最大為 2.66%，最小僅為 0.31%。另外，平均方根誤差之平均值為 0.9 元，亦即每百元報價的實際價格與理論價格平均僅相差約 0.91 元，最小到 0.16 元，最大為 3.14 元。

從《表 1》和《表 2》中可觀察出不管基礎樣條模型、Svensson 模型或積分型基礎樣條模型，在台灣公債市場利率期限結構之估計上，其判定係數平均而言皆在 0.94 以上，代表三者皆有相當不錯之配適能力，其中在三種模型配適能力判斷準則上，積分型基礎樣條模型配適績效均優於基礎樣條模型及 Svensson 模型，顯示積分型基礎樣條模型在台灣公債市場利率期限結構估計之優越性。此外，藉由差異性統計檢定後，亦可發現積分型基礎樣條模型的三種判斷準則，在 0.01 之顯著水準下，均顯著優於基礎樣條模型與 Svensson 模型。

《表 1》樣本期間基礎樣條模型及積分型基礎樣條模型配適結果比較

	判定係數		平均方根誤差百分比		平均方根誤差	
	基礎樣條	積分型基礎樣條	基礎樣條	積分型基礎樣條	基礎樣條	積分型基礎樣條
平均值	0.9452	0.9861	1.62%	0.80%	1.71	0.9
標準差	0.0219	0.0129	1.04%	0.13%	1.33	0.03
最大值	0.9752	0.9972	5.29%	2.66%	6.54	3.14
最小值	0.7471	0.9189	0.4%	0.31%	0.19	0.16
Z 值	-18.65***		7.94***		7.04***	
(P-Value)	(0)		(9.99E-16)		(1E-12)	

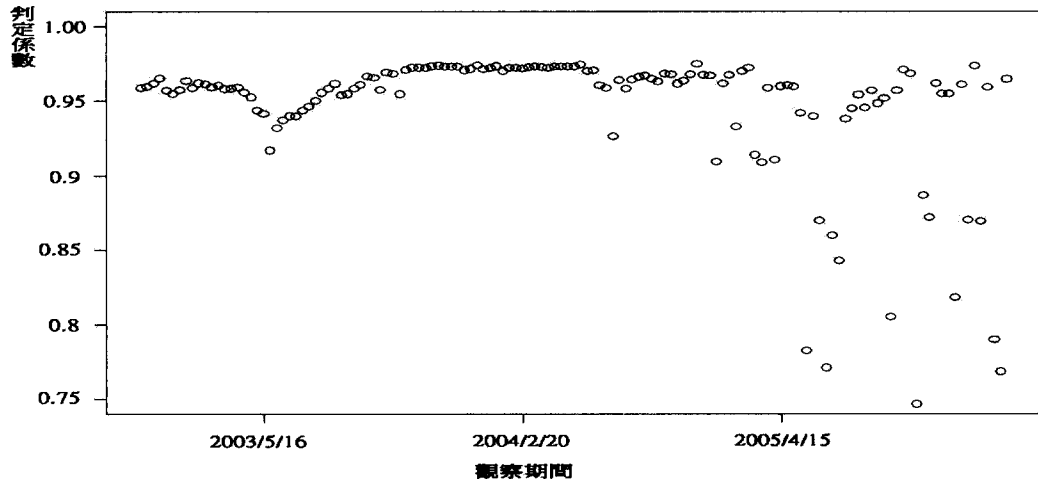
註：***表示在 0.01 顯著水準下，三種判斷準則之平均數間有顯著差異。

《表2》樣本期間Svensson模型及積分型基礎樣條模型配適結果比較

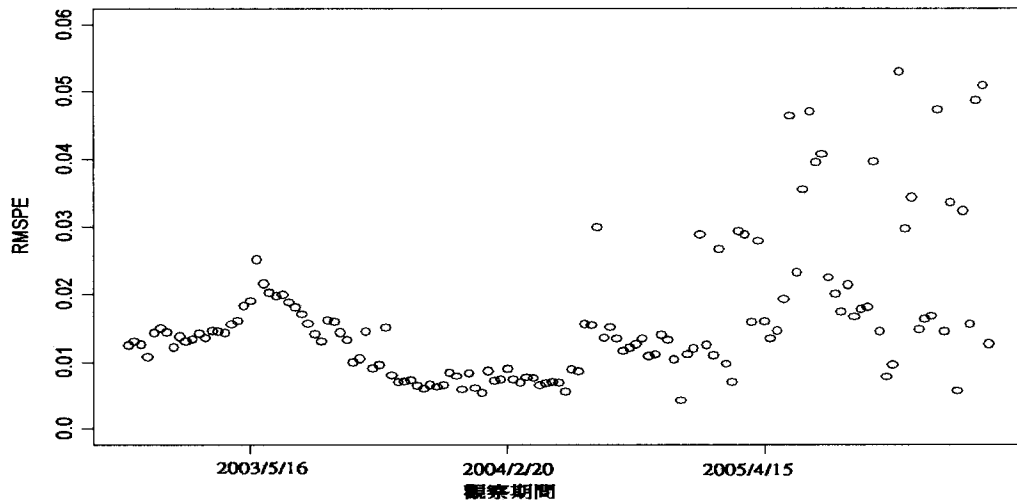
	判定係數		平均方根誤差百分比		平均方根誤差	
	Svensson 模型	積分型基 礎樣條	Svensson 模型	積分型基 礎樣條	Svensson 模型	積分型基 礎樣條
平均值	0.9818	0.9861	1.3%	0.80%	1.5	0.9
標準差	0.0125	0.0129	0.38%	0.13%	0.50	0.03
最大值	0.9959	0.9972	2.74%	2.66%	3.45	3.14
最小值	0.9253	0.9189	0.65%	0.31%	0.76	0.16
Z 值	-2.78***		14.47***		13.92***	
(P-Value)	(0.00272)		(0)		(0)	

註：“***”表示在 0.01 顯著水準下，三種判斷準則之平均數間有顯著差異。

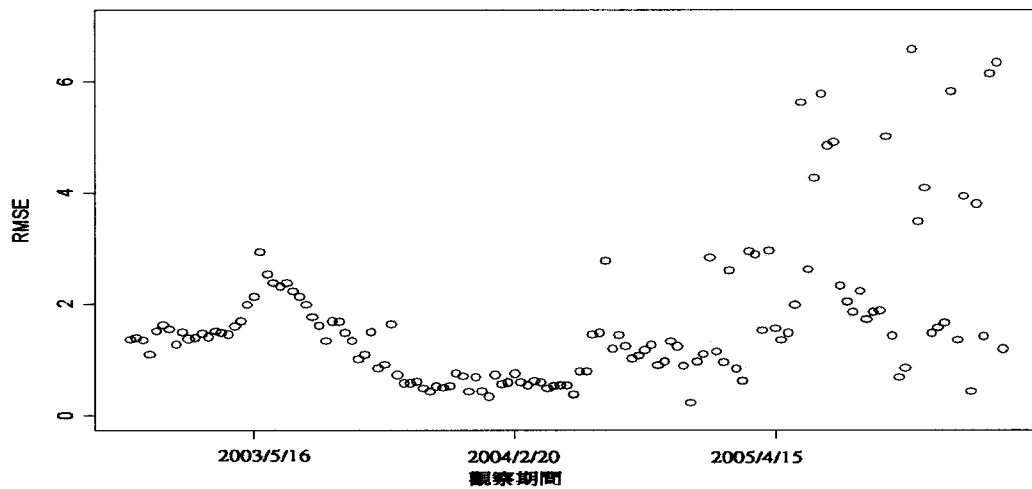
本研究亦檢視樣本期間中各判定準則的變化情形，觀察其在樣本期間的分佈。就基礎樣條模型而言，在整個樣本期間中，有89.62%的觀察時點，模型的判定係數是大於90%以上；其平均方根誤差百分比亦有46.67%的觀察時點是小於1%。其中判定係數最小值的74.71%是出現在樣本的第122週，推測可能是當週的資料不足或誤差所致。此外，從判定係數、平方根誤差百分比及平方根誤差分佈圖（詳見圖1~3）則可以發現，該模型在觀察期間前半段相當穩定，判定係數幾乎都高達90%，平方根誤差百分比在1.5%水準，平均方根誤差則平均落在1.5元。但在樣本期間後半段部分，三種判斷準則的變化較大且不穩定。



《圖 1》基礎樣條模型樣本期間判定係數分佈圖

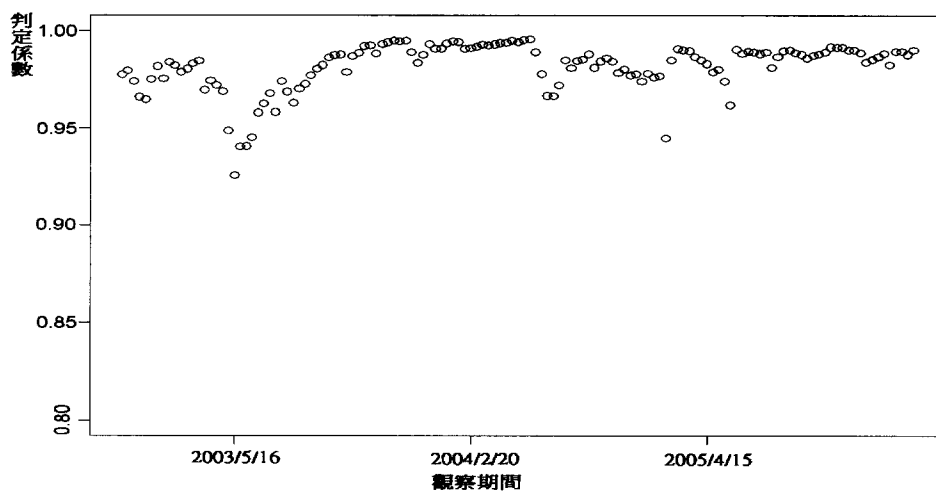


《圖 2》基礎樣條模型樣本期間平均方根誤差百分比分佈圖

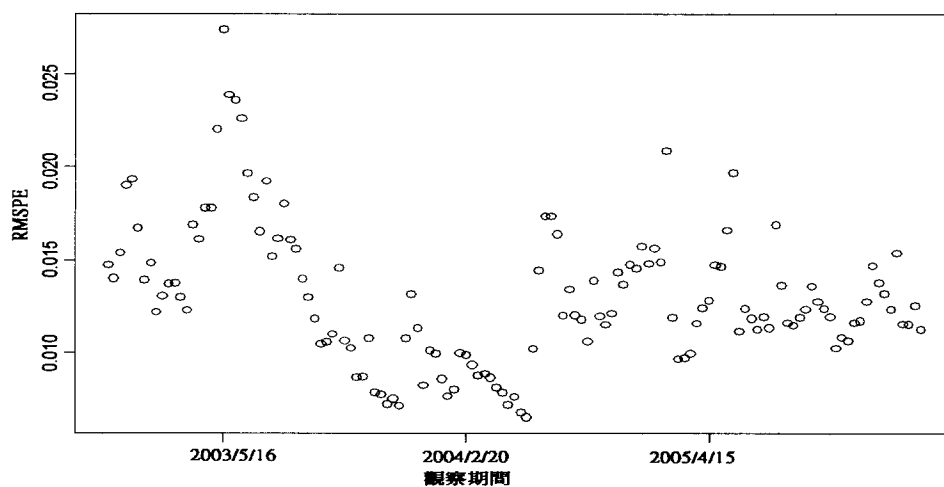


《圖 3》基礎樣條模型樣本期間平均方根誤差分佈圖

就 Svensson 模型而言，在整個樣本期間中，有 86% 的觀察時點，模型的判定係數是大於 97% 以上；其平均方根誤差百分比亦有 20% 的觀察時點是小於 1%。其中判定係數最小值的 92.53% 是出現在樣本的第 20 週，推測可能是當週的資料不足或誤差所致。此外，從判定係數、平方根誤差百分比及平方根誤差分佈圖（詳見圖 4~圖 6）則可以發現，該模型之判定係數在觀察期間較為穩定，但其平方根誤差百分比及平方根誤差兩判斷準則之變化則較大且不穩定。



《圖 4》Svensson 模型樣本期間判定係數分佈圖

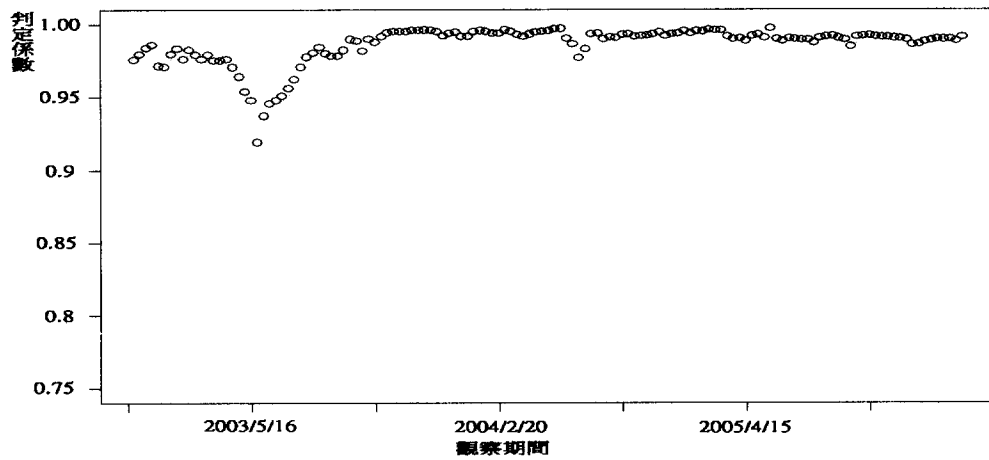


《圖 5》Svensson 模型樣本期間平均方根誤差百分比分佈圖

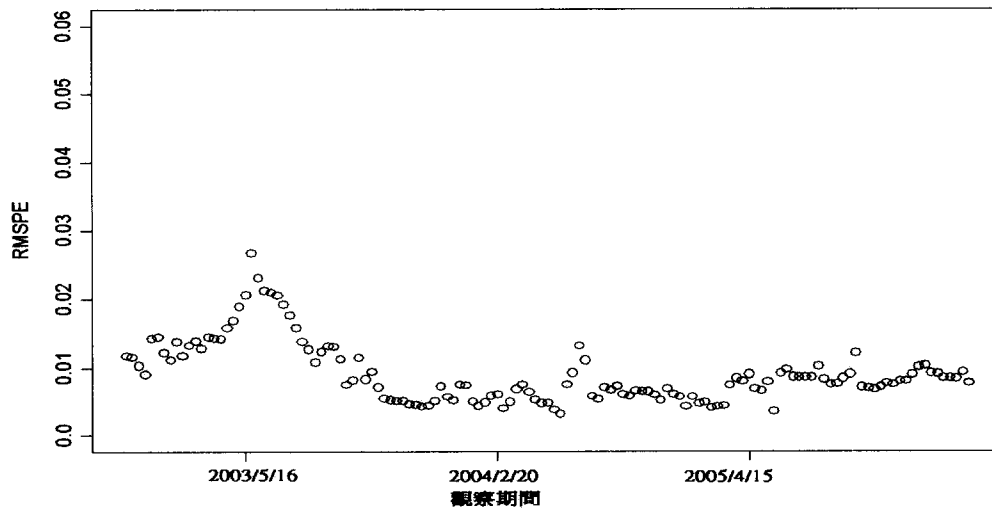


《圖 6》Svensson 模型樣本期間平均方根誤差分佈圖

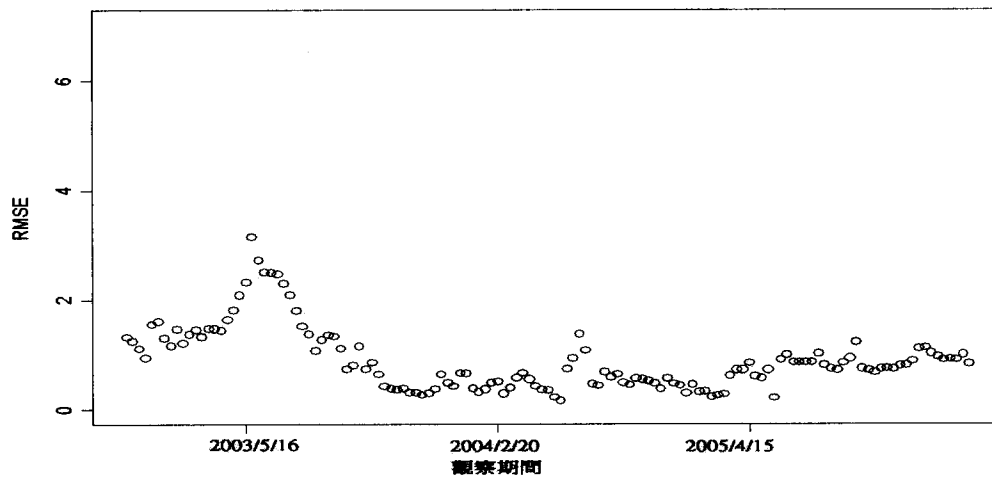
就積分型基礎樣條模型而言，在整個樣本期間中，有 92.6%的觀察時點，模型的判定係數是大於 97%以上；而亦有 69.63%的觀察時點，其平均方根誤差百分比是小於 1%。其中判定係數最小值的 91.89%是出現在樣本的第 21 週，從三種判斷準則分佈圖（詳見圖 7~圖 9）可以發現，該模型在整個觀察期間的配適能力表現上非常穩定，判定係數全部都高達 90%以上，平方根誤差百分比幾乎皆低於 1%，平方根誤差則大部份小於 1 元。整體而言，採用積分型基礎樣條模型估計的精確度配適結果相當穩定性 (robust)，在三種模型判斷準則上，皆證明積分型基礎樣條模型是顯著優於基礎樣條模型與 Svensson 模型。



《圖 7》積分型基礎樣條模型樣本期間判定係數分佈圖



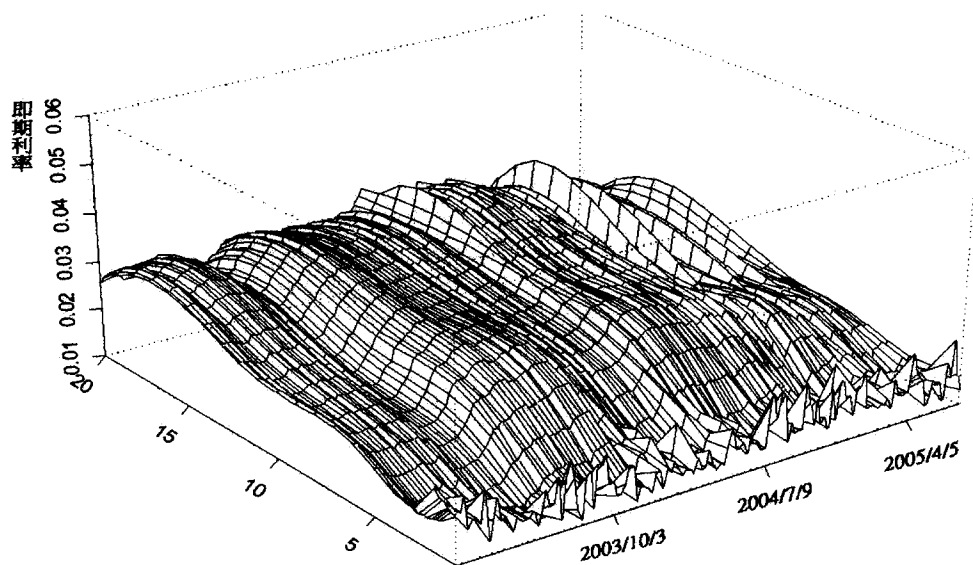
《圖 8》積分型基礎樣條模型樣本期間平均方根誤差百分比分佈圖



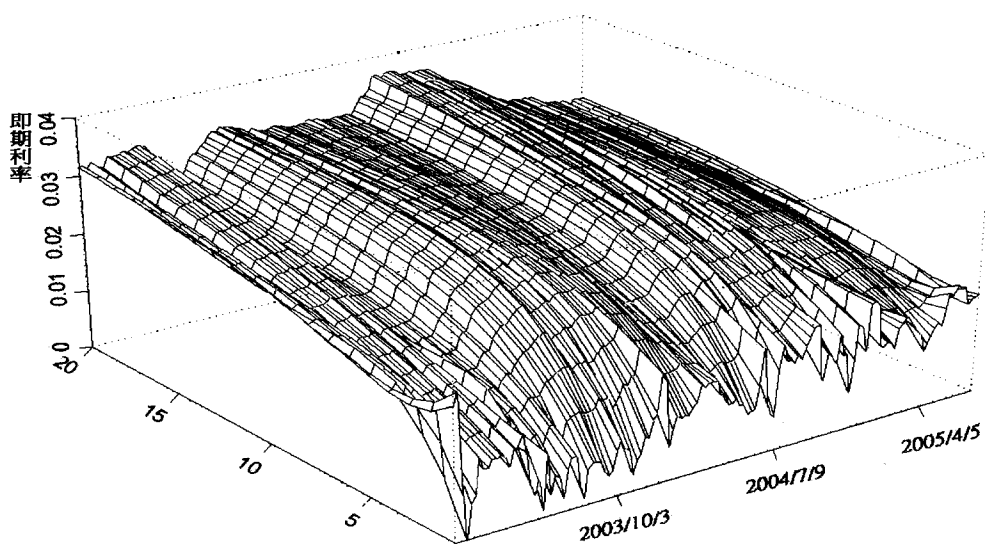
《圖 9》積分型基礎樣條模型樣本期間平均方根誤差分佈圖

4.4 利率期限結構之建構

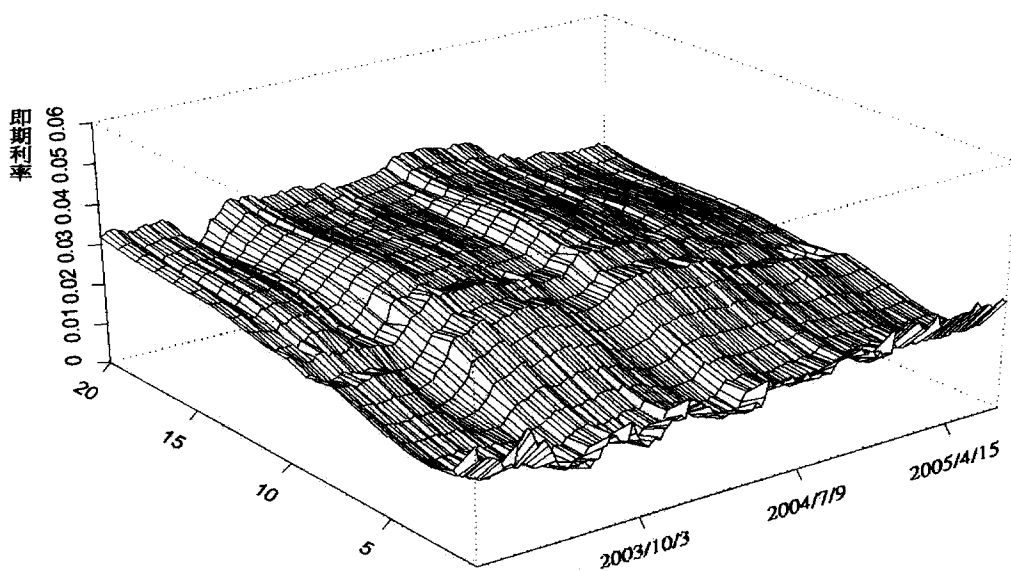
本研究使用每週五觀察之樣本政府債券，經由修正高斯-牛頓法求得到每週之最佳參數值後，代入模型即可得出該時點之利率期限結構。本文中將 m 值設定為 1~20，其間隔為 1，因為每一觀察時點之債券樣本數不同，所求得之參數並非固定不變，而會隨著觀察時點的不同而改變，因此該觀察時點所求得之參數，只適合用來配適該觀察時點之利率期限結構。三種模型所建構之利率期限結構如圖 10 至圖 12 所示，所建構之利率期限結構大致可分為上升型、下降型和駝峰型三種形狀。由圖 10 至圖 12 可觀察出積分型基礎樣條模型因其改善折現因子為積分函數形式，故其所配適之殖利率曲線較基礎樣條模型與 Svensson 模型精確且平滑。



《圖 10》基礎樣條模型估計台灣債券市場之利率期限結構



《圖 11》Svensson 模型估計台灣債券市場之利率期限結構



《圖 12》積分型基礎樣條模型估計台灣債券市場之利率期限結構

5. 結論

利率期限結構為在相同違約風險下各期零息債券之殖利率曲線。近年由於金融市場的開放與資本自由化，加上衍生性金融商品的蓬勃發展與創

新，與利率相關之金融商品，皆需要藉由估計而得之利率期限結構進行訂價。

本研究之主要目的在於比較受到學術界廣為使用之基礎樣條模型，與近年來才推出之積分型基礎樣條模型，在台灣公債市場利率期限結構估計的配適能力。由於積分型基礎樣條函數之優點在於改善折現因子為積分函數形式，故能得到較為精確且平滑之殖利率曲線。本文為國內首篇應用積分型基礎樣條函數，來估計國內公債市場之實證論文，而實證結果亦發現積分型基礎樣條模型在三種判斷準則上，均顯著優於基礎樣條模型與 Svensson 模型。因此本文認為積分型基礎樣條模型，較國內學者常用之基礎樣條模型與 Svensson 模型，對台灣公債市場的利率期限結構估計，具有更佳的配適能力。

台灣已在 2004 年初推出利率期貨，在國內債券市場發展日益受到重視之際，本研究之研究成果，除了可以提供政府主管機關作為制定貨幣政策之參考，並可作為債券投資人合理評價利率相關商品及債券投資組合利率風險管理之依據。

參考文獻

- 李桐豪 (2001)。債券市場發展對貨幣政策之影響。 *中國財務學刊*，23(1)，23-45。
- 周建新、于鴻福、張千雲 (2003a)。利率期限結構估計模型之實證研究。 *管理學報*，20(4)，767-796。
- 周建新、于鴻福、張千雲 (2003b)。以線性規劃法估計台灣公債市場利率期限結構之實證研究。 *管理科學研究*，1(1)，31-47。

- 周建新、于鴻福、鍾韻琳 (2004)。台灣公債市場之利率期限結構估計：Nelson and Siegel 家族之比較。 *財金論文叢刊*，1，25-50。
- 周建新、黃彥騰 (2005)。應用 Chebyshev Polynomials 模型估計台灣公債市場之利率期限結構。 *台灣金融財務季刊*，6(1)，11-29。
- 周建新、于鴻福、陳振宇 (2006)。台灣政府公債市場遠期利率期限結構之估計-GCV 模型與 VRP 模型之比較。 *商管科技季刊*，7(1)，103-127。
- 陳美娥 (2001)。 *台灣公債利率期限結構之配適-以契比雪夫多項式為例*。未出版之碩士論文，台灣科技大學企業管理研究所，台北市。
- 蔣松原 (2000)。建構台灣公債市場殖利率曲線。 *貨幣觀測與信用評等*，22，99-119。
- 薛立言、劉亞秋 (2004)。 *債券市場*。東華書局。
- Adams, K. J. and D. R. Van Deventer (1994). Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness. *The Journal of Fixed Income*, 4 (1), 52-62.
- Allen, D. E., H. Zheng and L.C. Thomas (2000). Stripping Coupons with Linear Programming. *Journal of Fixed Income*, September, 80-87.
- Brennan, M.J. and E.S. Schwartz (1979). A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds. *Journal of Banking and Finance*, 3 (2), 133-155.
- Cox, J.C., J. E.Ingersoll and S.A. Ross (1985a). An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. *Econometrica*, 53(2), 363-384.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross (1985b). A Theory of the Term Structure of Interest Rate. *Econometrica* , 53(2), 385-407.
- Deacon, M. and A. Derry (1994). Estimating the Term Structure of Interest Rates. *Working Paper*, 24, Bank of England.

- Dothan, L.U. (1978). On the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Financial Economics*, 6(1), 59-69.
- Hartley, H.O. (1961). The Modified Gauss-Newton Method for the Fitting of Non-Linear Regression Functions by Least Squares. *Technometrics*, 3(2), 269-280.
- Heath, D., R. Jarrow and A. Merton (1992). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation. *Econometrica*, 60, 77-105.
- Ho, T.S. and S.B. Lee (1986). Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claim. *Journal of Finance*, 41, 1011-1028.
- Hull, J. and A. White (2000). Pricing Interest Rate Derivative Securities. *Review of Financial Studies*, 3(4), 573-592.
- Ioannides, M. (2003). A Comparison of Yield Curve Estimation Techniques Using UK Data. *Journal of Banking and Finance*, 27, 1-26.
- Lin, B.H. (1999). Fitting the Term Structure of Interest Rates for Taiwanese Government Bonds. *Journal of Multinational Financial Management*, 9(1), 331-352.
- Lin, B.H. (2002). Fitting the Term Structure of Interest Rates Using B-Spline: the Case of Taiwanese Government Bonds. *Applied Financial Economics*, 12(1), 55-75.
- Lin, B.H., and Chou J.H. (1998). Pricing and Hedging of Cash-settled Bond Futures. *Journal of Financial Studie* ,5(3), 1-32.
- Lin, B.H., and Paxson D.A. (1995). Term Structure Volatility and Bond Futures Embedded Options. *Journal of Business Finance and Accounting*, 22(1), 101-127.

- Mastronikola, K. (1991). Yield Curves for Gilt-Edged Stocks: A New Model. *Bank of England Discussion Paper (Technical Series)*, December, 49.
- McCulloch, J.H. (1971). Measure the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Business*, 44(1), 19-31.
- McCulloch, J.H. (1975). The Tax-Adjusted Yield Curve. *Journal of Finance*, 30(3), 811-830.
- Nelson, C.R., and Siegel, A.F. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *Journal of Business*, 60(4), 473-489.
- Pham, T.M. (1998). Estimation of Term Structure of Interest Rates : An International Perspective. *Journal of Multinational Financial Management*, 8(2), 265-283.
- Powell, M.J. *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press, New York, 1981.
- Schaefer, S.M. (1981). Measuring a Tax-Specific Term Structure of Interest Rates in the Market of British Government Securities. *The Economic Journal*, 91, 415-438.
- Shea, G.S. (1985). Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note. *The Journal of Finance*, 40(1), 319-325.
- Steeley, J.M.(1991). Estimating the Gilt-Edged Term Structure Basis Splines and Confidence. *Journal of Business Finance and Accounting*, 18(4), 513-529.
- Subramanian, K. V. (2001). Term Structure Estimation in Illiquid Markets. *The Journal of Fixed Income*, 11, 77-86.
- Svensson, L. E. O. (1994). Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994. *NBER Working Paper*, No. 4871.

- Vasicek, O.A. (1977). An Equilibrium Characterization of Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177-188.
- Vasicek, O.A., and Fong, H.G. (1982). Term Structure Modeling Using Exponential Splines. *Journal of Finance*, 37(2), 339-348.
- Yu, S.W. (1995), *The Impact of Delivery Options on Hedging with Bond Futures*, Ph.D Thesis, University of Birmingham.

附錄一、Svensson 模型介紹

Svensson (1994) 延伸 Nelson and Siegel (1987) 所提出的 parsimonious model，Svensson 增加一額外項來考慮殖利率曲線中另一額外的駝峰，因此該模型所配適之殖利率曲線可以出現兩個彎曲點，在殖利率曲線配適上更具有彈性及多樣性之優點。

Svensson (1994) 將 Nelson and Siegel (1987) 提出的瞬間遠期利率函數擴充為：

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(\frac{-m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \left(\frac{m}{\tau_1}\right) \exp\left(\frac{-m}{\tau_2}\right) + \beta_3 \left(\frac{m}{\tau_2}\right) \exp\left(\frac{-m}{\tau_2}\right) \dots\dots\dots (22)$$

經由式(23)的積分過程將瞬間遠期利率函數轉換為即期利率函數：

$$R(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f(x) dx \dots\dots\dots (23)$$

得到 Svensson 模型即期利率，表示如下式：

$$\begin{aligned}
 R(m) = & \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_1} \right) \right] + \beta_2 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_1} \right) \left(\frac{m}{\tau_1} + 1 \right) \right] \\
 & + \beta_3 \left(\frac{\tau_2}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_2} \right) \left(\frac{m}{\tau_2} + 1 \right) \right] \dots\dots\dots (24)
 \end{aligned}$$

即期利率函數之估計參數 β_0 、 β_1 、 β_2 、 β_3 、 τ_1 及 τ_2 ，其意義分別如下：

β_0 ：此參數為即期利率的漸近值，且必為正數，當 m 趨近無窮大時，殖利率曲線會傾向於漸近值。

β_1 ：此參數為短期因子，為殖利率曲線的斜率，若 β_1 為負值則殖利率曲線為正斜率，反之則為負斜率，且若 β_1 的絕對值愈大，則殖利率曲線愈陡峭。

β_2 ：此參數為中期因子，描述殖利率曲線第一個峰態的大小與趨勢，若 β_2 為正，則殖利率曲線為駝峰，若 β_2 為負，則曲線為 U 字型。

β_3 ：此參數與 β_2 有相同的特性，描述殖利率曲線第二個峰態的大小與趨勢。

τ_1 ：此參數必定為正數，它指出殖利率曲線第一個駝峰或 U 字型的位置，同時決定 β_1 和 β_2 的收斂速度，當 τ_1 值較小時收斂速度較快，反之則收斂速度慢。

τ_2 ：此參數與 τ_1 有相同之特性，指出殖利率曲線第二個駝峰或 U 字型

的位置。

由於 $R(m)$ 無法由台灣公債市場中觀察求得，故首先令 P_i 為觀察到的第 i 個債券的市場價格，其滿足下列條件：

$$P_i = B_i + \varepsilon_i, 1 \leq i \leq n \quad \dots\dots\dots (25)$$

其中 B_i 代表第 i 個債券理論價格，其定價關係式如下：

$$B_i = \sum_{m=t}^T \frac{CF_{im}}{[1 + R(m)]^{t_{im}}}, 1 \leq i \leq n \quad \dots\dots\dots (26)$$

由式(24)、(25)、(26)可得式(27)：

$$P_i = \sum_{m=t}^T \frac{CF_{im}}{\left\{ 1 + \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_1} \right) \right] + \beta_2 \left(\frac{\tau_1}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_1} \right) \left(\frac{m+1}{\tau_1} \right) \right] + \beta_3 \left(\frac{\tau_2}{m} \right) \left[1 - \exp\left(\frac{-m}{\tau_2} \right) \left(\frac{m+1}{\tau_2} \right) \right] \right\}^{t_{im}} + \varepsilon_i \quad \dots\dots\dots (27)$$

針對式(27)之非線性迴歸模型，利用實際價格和理論價格之差異最小化準則，以修正高斯-牛頓法反覆迭代，求解出滿足式(28)中，估計參數 β_0 、 β_1 、 β_2 、 β_3 、 τ_1 及 τ_2 的最小平方估計值。

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n (P_i - B_i)^2 = \text{Min} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad \dots\dots\dots (28)$$

Interest Rate Term Structure Estimation with Integrated B-Spline Model

*Jian-Hsin Chou** *Hong-Fwu Yu*** *Chia-Hsuan Liu****

Abstract

Among term structure fitting models, the Integrated B-Spline model proposed by Ioannides (2003) specifies the discount factor as an integrated form, hence, it usually can obtain a more accurate and smooth yield curve. In this paper, we use the Integrated B-Spline model to fit the term structure of interest rates in Taiwan Government Bond (TGB) market. We use the weekly prices of almost all the government bonds during the sample period from January 2003 to July 2005. The sample comprises 92 TGBs with maturity dates less than 30 years. The modified Gauss-Newton method is used to estimate the embedded parameters, and the term structure of interest rates is obtained by transforming the discount factor into spot rate. The empirical results indicate that, under three criteria, the fitting performance of the Integrated B-Spline model is better than that of the B-Spline model and Svensson model. Therefore, we may suggest that the Integrated B-Spline model is more suitable to fit the term structure of Taiwan Government Bond market.

Key words: Term structure of interest rate, Spline, modified Gauss-Newton method

* Associate Professor, Department of Risk Management and Insurance, National Kaohsiung First University of Science and Technology

** Professor, Department of Industrial Management, National Formosa University

*** Master, Department of Finance, National Kaohsiung First University of Science and Technology