

時空四度空間曲度之簡易算法

章 其 鳴

提 要

本文對時空之彎曲，避免高深的數學推演，而以簡單的計算法向讀者介紹。說明何以我們必須要一個彎曲的時空來討論重力問題，以及彎曲時空的意義。

WHY SPACE IS CURVED AND HOW

Abstract

A heuristic argument is given for the necessity of using a curved space-time to discuss problems involving gravitation. Metrics (curvatures) are calculated without tensor manipulation.

序 言

狹義相對論可說是爲了解除 Michelson-Morley 實驗所引起的疑難而提出的，Lorentz 轉換式也是爲了使 Maxwell's eqs. 由一慣性系轉變到另一慣性系時其形式不變的要求（相對論）所產生。換句話說，狹義相對論的提出是爲了事實的須要，爲了補 Galilean 轉換式之不足。但是我們爲什麼還要一個彎曲的時空來討論重力的問題呢？關於這個問題，正規的討論須從廣義相對論中的場方程式着手，但其所言晦暗難懂，讀者不易在短時間內得到滿意的答案。本文系以簡單的實驗和數學來說明何以我們必須要一個彎曲的時空來討論重力問題以及曲度的計算法。過去曾有人以簡單的方法來討論時空曲度¹，因爲其理論不實，且爲近似的算法，故提出本文。

時 空 彎 曲

在討論空間的幾何性質時大家知道如果一個空間的無窮小線段長度 (metric) 可寫成

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

則此空間爲歐幾里德空間，空間的轉軸轉換不改變此量。相同的，在狹義相對論中也有一量

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 \quad (1)$$

爲一 Lorentz 轉換之不變量。此具有時空之四度空間與一般的四度歐幾里德空間差一負號且轉換式亦不同，但四度時空之空間部份仍爲一歐性空間。(1) 式中之單位係使光速 $C=1$ ，以下同。

(1)式所描述之空間稱爲類歐空間 (Pseudo-Euclidean)，這種空間我們仍然把它算做直的或平的 (flat)。(1) 之右式前三項是極小的空間差距，末項是時間之極小差距。這是在沒有任何重力場存在時空間的特性，如果我們加一重力場於空間，則(1)式就不對了，也就是 ds 的形式有了變化，新的 ds 一般來說是屬於一個彎曲的四度空間。但是因爲有等價原理 (equivalence principle) 的關係，在此空間取一極小的體積，則其極限仍爲一 flat space，所以此四度空間爲 locally flat 卽 Riemannian。

時間部份的彎曲

在重力場中時間項 dt 的改變有不同的計算法，其最簡單者如下：讓一光子由 potential 爲零處射到 potential 爲 ϕ 處。假設光子在零位處之頻率爲 ν_0 。則當其到達 ϕ 位之頻率可以下法算之。假設在某一點光子之頻率爲 ν ；potential 爲 ϕ ，則由於位能減少等於光子能量的增加，以及光子能量爲

$$E = h\nu$$

可得

$$-h\nu d\phi = h d\nu$$

積分得

$$\nu = \nu_0 e^{-\phi}$$

此卽爲時間 dilation 之結果，卽處於低位之時鐘走得比較快。若以 potential 爲零處之時間

為準則 potential 爲 ϕ 處之時間項應改爲

$$-e^{2\phi} dt^2 \quad (2)$$

爲方便起見，取一單位質量長度極小之棒如圖一在重力場中自由下落，在零位處其長度爲 l_0 ，在某一點 potential 爲 ϕ ，長度爲 l 。由特殊相對論知該棒下落一極小之距離時所得於場之能爲

$$-\gamma d\phi$$

其中

$$\gamma = \sqrt{1-U^2}; U \text{ 爲棒之速率。}$$

棒之總能量爲 γ ，位能所得應等於總能量之改變

故

$$-\gamma d\phi = d\gamma$$

積分得

$$\gamma = e^{-\phi} \quad (3)$$

此爲一有趣之結果。若由狹義相對論則得與位能有關係如 (3) 之縮短，但由另一方面來看，此棒之兩端點同時由靜止開始運動，且兩端點相靠很近，若場的變化不太劇烈則可假設二端點所受之力完全一樣。由此則二點之運動方程式應完全一樣。如此則兩點間之距離應不隨時間而變。由此分析，棒中應生一應力甚至斷去，但由等價原理一自由下落之棒等於完全處於一貫性系中，不應有內力產生，如此形成一疑難。

解決此一疑難之一法，在於假設空間爲非歐性。此非歐性當然是重力所造成。如圖二，若假設空間之實際幾何性質非虛線之歐性結構而爲實線所示，則以上之疑難消失。若一人隨棒而下將不能發現棒之縮短，即合於等價原理。若此人留在零位處觀察則因空間在低位處之皺縮（圖二）而見此棒縮短。換言之，若用不太精密的說法，即加一重力場之後可使在低位處同樣的空間多容納一點東西。此效應與在歐性空間中高速所造成物體的縮短類似。

事實上在任何環境若有 time dilation 即有同比例之 length contraction 相伴而生，反之亦然。此空間皺縮之幅度即以 (3) 式表之。若此棒之方向與力場方向垂直，即橫着下落，或此棒所運動之方向與力場方向垂直，則易見此空間之皺縮現象不復出現。若將 (2), (3) 合併則得重力場時空 metric 的一般式爲

$$ds^2 = e^{-2\phi} dr^2 + d\sigma^2 - e^{2\phi} dt^2 \quad (4)$$

右式第一項爲重力方向之皺縮部份，第二項爲未變之歐性部份。

一次空間之彎曲

爲使讀者易於了解空間彎曲之意義，特分類舉例以說明之。首先假設最簡單的情形：力場完全在 z 方向，且僅爲 z 之函數。如圖三所示原來平坦的空間 S_0 。經重力場的皺縮而成了 S ，在 S 中 metric 可寫成（忽略時間部份）

$$ds^2 = e^{-2\phi} dz^2 + dx^2 + dy^2$$

比仍爲一歐性空間的形式，若令

$$z' = e^{-\phi} z$$

即可看出。由圖三此點已很明顯： S 猶如一捲曲的紙一樣，紙上的幾何關係仍爲歐性平面幾

何。雖然 S_0 與 S 都據有平面之 metric, 但 S 已和 S_0 有了根本上的差別, 即 S 已有皺縮在內。舉一個簡單的例子, S_0 中兩點間最短之距離當然為一直線, S 上兩點最短之距離, 若把 S 攤平固為一直線, 但若不攤平, 一人由 X 方向看去, 一般來說為一曲線。

二次空間之彎曲

假設一二次空間之有心力如圖四原來的歐性空間由於重力影響成了一個幾何性質如一帳篷表面的空間。原來的 S_0 其面積為 πr^2 但此帳篷的面積當然比 πr^2 來得大

$$A = \int 2\pi r e^{-\phi(r)} dr$$

即原來同樣的空間, 因為重力的關係可多容納一些東西。如果重力場夠強的話可容納下無窮多的東西。一般來說這個說法均成立: 重力場一律加大空間的容物性。在幾何學中, 以計算曲率的公式來計算, 這種空間均具有負的曲率。

三度空間之彎曲, Schwarzschild Metric

三度彎曲空間的圖形不太好畫, 但這是實際的問題, 我們要詳加說明, 在這裏我們要說明的是一個球對稱質量分佈的球體所產生的力場以及空間彎曲的計算。我們的基本假設是萬有引力定律, 但由於空間已彎曲, 距離的定義須重新考慮, 再加上力本身的量度與時間, 空間均有密切的關係故力的形式亦非簡單的距離平方反比。茲將上列因素一一考慮於下。

首先, 若沒有時空之彎曲, 如圖五, p 點之力場應為

$$Gm/r^2$$

其中 m 為圓球之質量。由於空間的皺縮若一人在 p 點以當地的尺度來衡量則由 p 點到圓球中心之距離為 σ , 故力場應為

$$Gm/\sigma^2 = Gm/e^{-2\phi} r^2 \quad (5)$$

其次, 為了方便起見, 假設一物在 p 點由靜止開始運動則力可寫成

$$m_0 a = m_0 d^2 \sigma / dt^2$$

其中 m_0 為質點之質量, σ 和 t 分別為 p 點之徑向長度以及時間之度量, 此時間及長度對零位處 ($r = \infty$) 之 dilation 及 contraction 即為影響力大小之另一因素。由 (4) 式並考慮 (5) 得力之最後形式為

$$\begin{aligned} F &= \frac{Gmm_0}{e^{-2\phi} r^2} \frac{e^{-\phi}}{e^{2\phi}} \\ &= Gmm_0 e^{-\phi} / r^2 \end{aligned} \quad (6)$$

由 potential 之定義得

$$-\frac{d\phi}{e^{-\phi} dr} = -\frac{me^{-\phi}}{r^2} \quad (G=1)$$

或

$$e^{2\phi} d\phi = mdr/r^2$$

積分得

$$e^{2\phi} = -\frac{2m}{r} + c$$

若考慮

$$\phi(\infty) = 0$$

則得

$$e^{2\phi} = 1 - \frac{2m}{r} \quad (7)$$

由此得

$$\phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{r} \right)$$

代此入 (6) 得力場之大小爲

$$f = \frac{m}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1/2}} \quad (8)$$

此力場與古典力學中之距離反平方略有差別，對一般天體而言，此差異可略去不計，例如地球之 m 爲 0.44 cm，太陽之 m 爲 1.47 km，但在如此小之距離對地球及太陽來說 (8) 已不適用。從 (8) 式亦可看出當 m 很小或 r 很大時力的形式趨近於牛頓型。

若將 (7) 代入 (4) 則得圓球周圍之 metric

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 \quad (9)$$

此即 Schwarzschild metric 爲 1916 年首先解場方程式而得。

若要了解此 metric 空間部份的性質，我們可以取一具有代表性之面來考慮，例如 $\theta = \pi/2$ ，此面之幾何性質如圖二所示， r 與 ϕ 所表示之面爲圖中所示曲面之上半部 ($z > 0$)，圖中 r 對應於 $(x^2 + y^2)^{1/2}$ 。此曲面叫做

Flamm's paraboloid，是以拋物線

$$z^2 = 8m(y - 2m), \quad x = 0$$

繞 z 軸旋轉而得。

(9) 式中當 $r = 2m$ 時是一特殊點。此時在 r 方向空間有無窮大的皺縮，時間亦有無限制的 dilation，而重力亦爲無窮大，potential 爲負無窮大。任何物體，包括光子，一旦陷於其中即無法逃出，因爲光線亦射不出來，故外界觀之爲一全黑之物。此即所謂之 black hole。一般星球之密度均無法達到此一條件，例如質量大如太陽之天體必須半徑小於 1.47 km 才可。一般恒星在退化過程中若條件適當在重力崩潰時有變成 black hole 的可能，近來天文上觀察到有類似 black hole 的天體存在，但未確定該天體即爲一 black hole。

Hyperbolically Moving Rocket

最後我們要舉一個一次空間實際問題的例子。我們知道如果一枚火箭各點均以同一等加速同時由等速開始運動終必斷裂。但若以火箭底點爲零點，各點的加速等於其到底點距離之倒數³ 則火箭可安然無事。如此火箭之運動稱爲 hyperbolic motion。若一人住在如此之火箭中則發現火箭中有一力場大小爲

$$\frac{1}{X}, \quad X \text{ 爲該點到火箭底的尺量距離}$$

Potential 爲

$$\phi = - \int_1^x - \frac{dX}{X} = \ln X$$

$$(X=1 \text{ 時 } \phi=0)$$

$$e^\phi = X$$

設未加力場之前座標 (距離) 爲 x , 加力場後若以 $X=1$ 點爲準則

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{-2\phi} dx^2 - e^{2\phi} dt^2 \\ &= X^{-2} dx^2 - X^2 dt^2 \end{aligned}$$

因 X 爲尺量距離故

$$ds^2 = dX^2 - X^2 dt^2$$

$$dX = X^{-1} dx$$

$$x = \frac{1}{2} X^2$$

因爲這是一次元的問題故其 metric 仍爲歐性。但如果把這個空間全看爲歐性空間就不對了, 因爲前面講過, 如此之空間已有皺縮存在。茲舉一例說明之: 假設在如此之火箭開動之後在 X_1 及 X_2 處同時各有一球自由下落 (圖七)。今假設有一人隨 X_1 之球下落, 試問此人見 X_2 球對 X_1 球之相對運動爲何? 若由火箭內的立場來看, 因重力場不均勻則必有一 tidal force 使二球作相對運動。 X_2 處之力較小, 故 X_1 球之觀察者必見另一球以加速遠離他而去。但若由火箭外觀之, 則當二球一旦被釋放後即無任何力作用於其上, 一球對另一球不應有加速運動。問題出在火箭內的空間已有皺縮。由此不能以普通空間的方法來推斷。例如有一長度爲一米之棒, 若有一人拿在手上看是一米長。但若此人將尺放在較靠近火箭底部而尺的方向與火箭平行, 則此人將見該尺縮短, 且相距愈遠則見其縮短愈劇。

今假設二球於 T 時分別由 X_2 及 X_1 兩點自由下落如圖八³。當第一球由 P_1 落至 Q_1 時回頭向上看第二球已由 P_2 點落至 Q_2 點。在第一球上看, P_1 與 P_2 點同時; Q_1 與 Q_2 同時。 $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ 爲一平行四邊形。若 OT 之斜率爲 m , Q_1 與 P_1 之橫座標相差爲 D , 經過 P_1 及 P_2 之正雙曲線在 x 軸之截距分別爲 X_1 及 X_2 , 則經過 Q_1 及 Q_2 之正雙曲線截距爲

$$X_1' = \sqrt{X_1^2 + D^2} - D^2/m^2$$

及

$$X_2' = \sqrt{X_2^2 + D^2} - D^2/m^2$$

若一球在火箭中自由下落由能量關係知

$$-\gamma d\phi = d\gamma$$

或

$$-\gamma \frac{dX}{X} = d\gamma$$

積分得 $\gamma = X_1/X$, X_1 爲起始座標

即當一球由 X_1 自由下落至 X_1' 時其 γ 爲 X_1/X_1' , 若考慮此 γ 以及 (10) 式空間之皺縮, 則當第一球在 Q_1 點看二球的距離應有

$$\overline{Q_1 Q_2} = \int_{X_1'}^{X_2'} \frac{1}{\gamma} \frac{X}{X_1'} dX$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2X_1} (X_2'^2 - X_1'^2) \\
 &= (X_2^2 - X_1^2) / 2X_1
 \end{aligned}$$

爲一常數，即二球無相對運動。

由上可知不是單純的一句話「力不均勻即應有 tidal force」，也不能說只要一空間之 metric 爲歐性，此空間即完全與歐幾里德空間一樣。

結 語

彎曲時空之 metric 雖可如 (4) 式寫出，但只有在簡單情形才好解，因爲在比較複雜的情況， r 及 σ 的方向，即場的方向，爲未知。這和廣義相對論中解場方程式的情形類似。

讀者也許在其它地方看到過，在廣義相對論的範圍中，力爲非線性，此與古典力學中所講不同。一般的解釋是，若有二重物存在，則二者對某一點之重力除去二者質量對該點的引力之外，還有二者周圍重力場對該點之引力。因重力場含能量而能量與質量同樣具有萬有引力。從以上的討論，我們可以對重力之非線性作另一種解釋。當有一物存在時其周圍的時空即被彎曲，而對某一點亦產生一引力。此引力如上述與時空之彎曲有關。今如再加一重物，則時空之曲度亦將改變。如此則第一物在上述該與所產生之力，因第二物之存在而改變，即重力爲非線性。

廣義相對論中假設質點在重力場中之運動爲時空中之 geodesics 所描述，由上述之方法，我們可以找出各點之重力。由此可以算出運動之軌道。以此二法之結果相比將是一件有意義的事，因爲前者僅一假設而已。

綜上所述讀者也許會發生這樣一個問題：電磁場是否也會產生一個彎曲的時空？答案是否定的。第一電場對光子沒有作用力，因爲光子不帶電。故由上述之推導電場中無時間之 dilation。其次，沒有完全均勻之帶電體，即在電磁場中沒有和等價原理相對應的原理存在。所以，用一個彎曲的四度時空來討論物體在重力場中的運動是有其必要性。物體的運動即可用彎曲時空中之 geodesics 來描述。也就是說，重力可以完全用時空的幾何性質來代替。然而電磁場就不同了，因爲電磁場不會使時空彎曲。若硬要把電磁場的作用吸收在空間的幾何性質中勢必遷強。這也許就是統一場論一直不易成功的原因吧！

我們還可以由另外一個角度來看空間的彎曲，即在一歐性空間中有許多以不同速度運動之木棒。若安排得當，這些木棒之間的位置關係亦可形成一非歐空間。即速度有與重力同樣的作用。常舉的一例，以某角速度旋轉之走馬臺，此臺存在於普通之歐性空間中。其徑向長度不變，而切線方向長度因切向速度而應有一縮短。故臺之幾何關係即爲一非歐幾何（例如圓周率小於 3.1416）。或者另一方面來看，觀察者在臺中不見臺之旋轉，但覺有一離心力場。由以上之討論，此力場亦可將空間彎曲，這是一個不太令人滿意的結果；即一彎曲的空間存在於一同次之歐性空間中，好像一個曲面存在於一平面之中一樣。另一方面來說，我們如果能找到不受重力作用之木棒，則雖然在重力場中，棒與棒之間的位置關係仍爲一歐性幾何。故與其說重力將空間彎曲，倒不如說重力，像速度一樣，改變了物與物之間的位置幾何關係。

本文為作者個人的見解，讀者諸君若有高見，歡迎指正。

(本著作之完成，得「行政院長期科學發展委員會」之補助)

1. Adler, Ronald et al, "Introduction to general Relativity" (McGraw Hill 1965)
2. Rindler, W, "Essential Relativity" (Van Nostrand Reinhold 1969) P.62
3. Ibid. P.63, P.191



圖 一

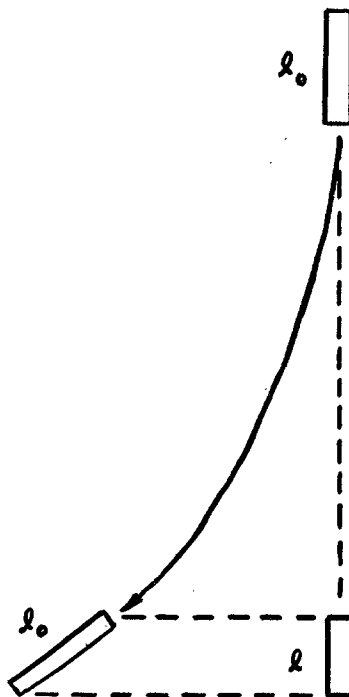
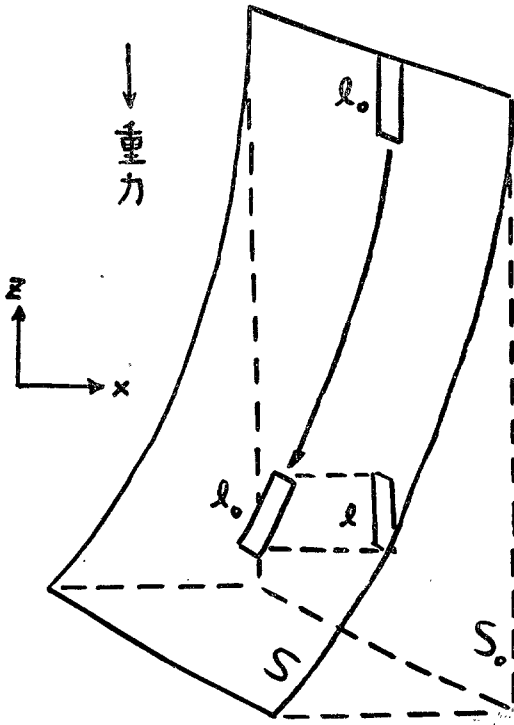
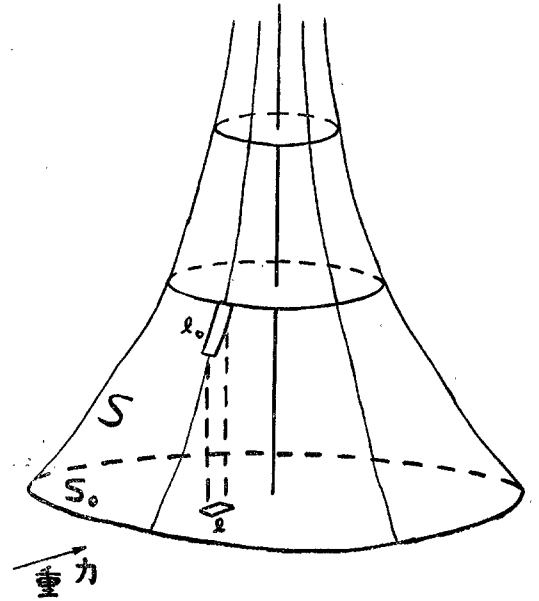


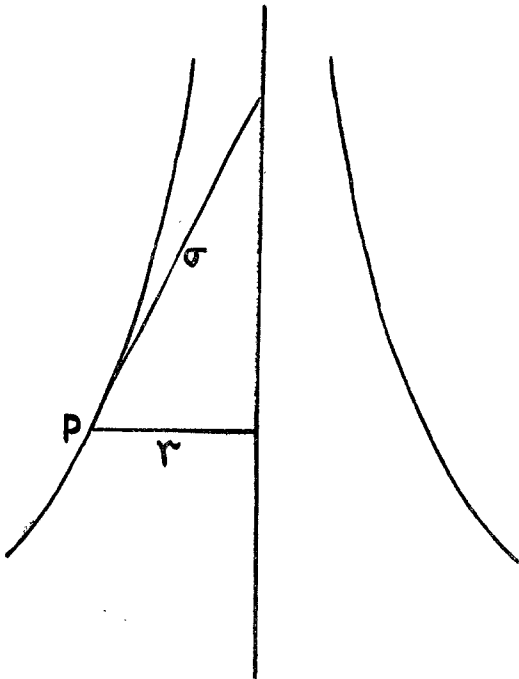
圖 二



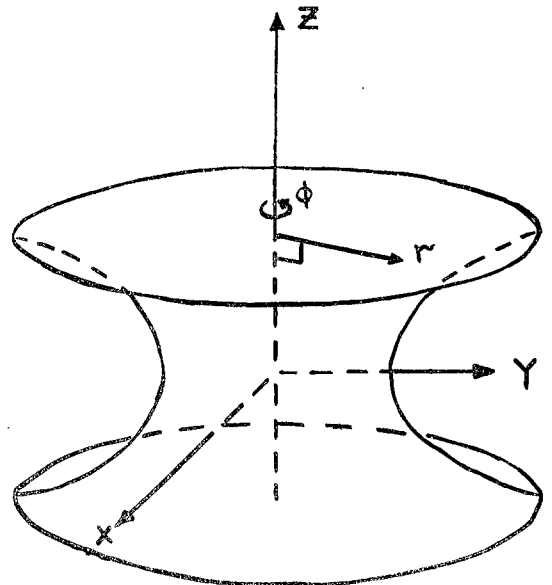
圖三



圖四



圖五



圖六

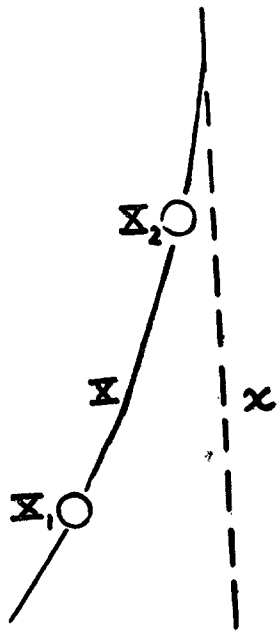


圖 七

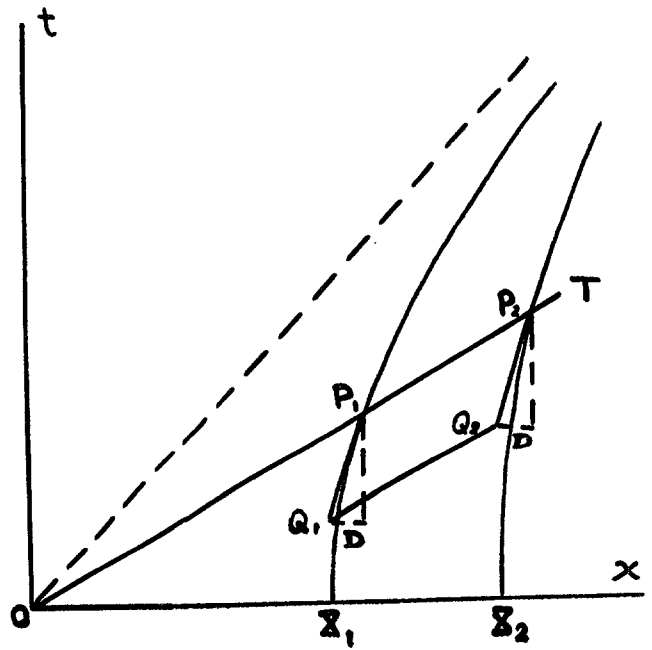


圖 八