混合微分-差分方程 $x'(t)=ax(t)+bx(t-\tau)$ 之解的穩定條件*

(The Stability Conditions on the Solution of Mixed Differential-Difference Equation: $x'(t)=ax(t)+bx(t-\tau)$)

吳 英 格

(一) 前言

有機會接觸到數理經濟學，發現 Kalecki(1935)〔9〕在 Trade Cycle 論上所利用的數學模型曾用及混合微分-差分方程式 $x'(t)=ax(t)+bx(t-\tau)$（其中 τ 表一正數），遂引起對這方面作進一步研究的興趣與留意。雖然用的還不算多，但 Gandolfo(1971)〔6〕認爲以後在更複雜的經濟理論中用及這種方程的機會當是可預期的。本篇僅將 $x'(t)=ax(t)+bx(t-\tau)$ 的一些理論以及其穩定條件作一探討。

(二) 預備理論

有關混合微分-差分方程式的基本原理都是從微分方程或差分方程的基本原理類推出來的，換句話說，關於微分方程或差分方程的一些基本原理一樣適合於混合微分-差分方程，茲列舉如下:

(i) 若 $y_1(t)$ 爲

$$x'(t)=ax(t)+bx(t-\tau) \tag{1}$$

之一解，則 $Ay_1(t)$ 亦爲一解，其中 A 爲任意常數。

(ii) 若 $y_1(t)$ 與 $y_2(t)$ 爲 (1) 之二個線性獨立解，則 $A_1y_1(t)+A_2y_2(t)$ 亦爲 (1) 之一解，其中 A_1，A_2 亦爲任意常數。此性質（卽所謂的重疊原理 (The Principle of Superposition) 可推廣到任何有限個的線性獨立解。

(iii) 若 $y(t)$ 爲 (1) 之一解，$\bar{y}(t)$ 爲

$$x'(t)=ax(t)+bx(t-\tau)+cg(t) \tag{2}$$

之一解，則 $y(t)+\bar{y}(t)$ 亦爲 (2) 之一解。

現在來研究 (1) 之解法:

設(1)之基本解爲 $e^{\lambda t}$（註），其中 λ 爲待定常數。代入 (1) 得

$$\lambda e^{\lambda t}=ae^{\lambda t}+be^{\lambda(t-\tau)} \tag{3}$$

可見 $e^{\lambda t}$ 爲 (1) 之解的充要條件爲 (3) 恒成立，此卽

$$\lambda=a+be^{-\lambda\tau} \tag{4}$$

---

* 本篇由山西基金 (Shansi Fundation) 支助，謹此致謝。

(註) 以 $e^{\lambda t}$ 作基本解比 λ^t 要好些，因微分比差分要强些。

(4) 稱爲 (1) 之固有方程 (Characteristic Equation) 而其根便稱爲固有根 (Characteristic Roots) 。

(4) 爲一超越方程，應有無窮多個解（複數解），故 (1) 之一解當所有固有根 λ_r 均相異時可寫成

$$y(t)=\sum_{r=1}^{\infty} C_r \exp(\lambda_r t)$$

之型，其中係數 C_r 爲任意常數（由上述之 (ii)）。或，當 λ_r 不全異時可寫成

$$y(t)=\sum_{r=1}^{\infty} P_r(t)\exp(\lambda_r t)$$

之型，其中 $P_r(t)$ 爲 t 之多項式，其次數小於對應根之重數 (Multiplicity) 。

今進一步討論 (4) 之實根個數

令 $$z=f(s)=s-be^{-s\tau} \tag{5}$$

則 (4) 之實根可由曲線 (5) 及直線 $z=a$ 之交點所決定。

由於

$$\frac{df}{ds}=1+b\tau e^{-s\tau},\quad \frac{d^2f}{ds^2}=-b\tau^2\cdot e^{-s\tau} \tag{6}$$

①當 $b>0$ 時：則 $\frac{df}{ds}$ 恒正，從 (5) 得 $\lim\limits_{s\to\pm\infty} f(s)=\pm\infty$，可見函數 $f(s)$ 恰交函數 $z=a$ 一次，但由於 $\frac{d^2f}{ds^2}$ 恒負（無反曲點）故實根僅有一個，不可能有重根。

②當 $b<0$ 時，則當 $-b\tau e^{-s\tau}=1$ 時 $\frac{df}{ds}=0$，卽當 $s=+\frac{1}{\tau}\log(-b\tau)$ (7)

時，$\frac{df}{ds}=0$，又 $\frac{d^2f}{ds^2}$ 恒正，可見 (7) 爲 $f(s)$ 產生最小値之處，亦卽

$$\min f(s)=\frac{1}{\tau}\log(-b\tau)+\frac{1}{\tau}$$

此與 $z=a$ 比較，可得，當 $\min f(s)>a, =a, <a$ 時，函數 $f(s)$ 將依次整個落在直線 $z=a$ 之上方，相切，交二次，隨之可知當

$$a\tau-\log(-b\tau)\gtreqless 1$$

時，(4) 依次爲無實根，兩實等根，二相異實根。由此可得結論，固有方程至多二實根，其他的根（仍有無窮多個）均爲複數根。

關於 (4) 之複數根性質，討論如下：

設

$$\lambda=\alpha\pm i\theta$$

代表 (4) 之一對共軛複根，代入 (4) 得

$$\begin{aligned}\alpha\pm i\theta&=a+be^{-\alpha\tau}\exp\tau(\mp i\theta)\\&=(a+be^{-\alpha\tau}\cos\tau\theta)\mp ibe^{-\alpha\tau}\sin\tau\theta\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}\alpha&=a+be^{-\alpha\tau}\cos\tau\theta\\ \theta&=-be^{-\alpha\tau}\sin\tau\theta\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

此仍表一超越方程，當 θ 取爲正數時，由 (8) 之第二方程可得 $\sin\tau\theta$ 與 b 爲異號，因此

當 $b<0$ 時 $\frac{2k\pi}{\tau}<\theta<\frac{(2k+1)\pi}{\tau}$

$$k=0,1,2,\cdots,n,\cdots \tag{9}$$

當 $b>0$ 時 $\frac{(2k+1)\pi}{\tau}<\theta<\frac{(2k+2)\pi}{\tau}$

利用圖解法，不難獲得 (8) 之解，總之，(4) 之解恒表一振動路線（Oscillatory Path）。至於單調路線（Monotonic Path）可以附加上去（當有實根時）或可省去（當無實根時），視 (4) 之根有無實根而定。

（三）本文

本篇的目的在於就是還沒有解出固有方程本身之根之前，卽可找出檢驗出固有方程式之解——不論是實或虛——的實部是否均爲負的條件，這也就是找 (1) 之穩定條件。很幸運的，這種情況（條件）不但存在，而且可以給成如下兩種型:

I. Hayes′ 定理〔1〕

(4) 之所有根具有負實部的充要條件爲

(i) $a\tau<1$,

且 (ii) $a\tau<-b\tau<(a_1^2+a^2\tau^2)^{\frac{1}{2}}$

其中 a_1 爲方程式 $x=a\tau\tan x$ 之一根，而 $0<x<\pi$

若 $a=0$，則取 $a_1=\frac{1}{2}\pi$

II. Burger′s 定理〔8〕

(4) 之所有根具有負實部的充要條件爲

(i) $b\tau\geq-1$ 且 $a<-b$

(ii) $b\tau<-1$ 且 $a<b$；或 $b\leq a<-b$ 且 $\cos^{-1}\left(\frac{-a}{b}\right)>(b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\tau$ 其中 $\cos^{-1}$ 之值限制在 $0<\cos^{-1}\left(\frac{-a}{b}\right)\leq\pi$ 中。

Hayes′ 定理之使用不如 Burger′s 定理方便，因求 a_1 時，須解超越方程式 $x=a\tau\tan x$; Burger′s 定理僅須解 $\cos x=\frac{-a}{b}$，較簡單些，惟當 $a=0$ 時，Hayes′ 定理反而易於使用。

我們進一步在 $-e^{-1}<b\tau e^{-a\tau}<e$ 之情況下，研究 (1) 有實根存在時的穩定條件。

設 $a\neq0$, $b\neq0$, $\tau>0$ 爲實常數，則對任給的函數 $\phi\in C[(-\tau,0),R]$，恒有唯一函數 $x\in C[(-\tau,\ \infty),R]$ 滿足初期條件

$$x(t)=\phi(t) \text{ 對 } t\in[-\tau,0] \tag{10}$$

以及混合微分-差分方程

$$x'(t)=ax(t)+bx(t-\tau)\ [1] \tag{11}$$

定理〔7〕設

$$-\frac{1}{e}<b\tau e^{-a\tau}<e \tag{12}$$

則，在區間 $(a-\frac{1}{\tau},\ a+\frac{1}{\tau})$ 內，固有方程

$$\lambda=a+be^{-\lambda\tau} \tag{13}$$

恰有一解 λ。而且，假若 λ 爲 (13) 之一解，且 x 爲 (10)，(11) 之解，則

$$\lim_{t\to\infty}[x)t)e^{-\lambda t}]=\frac{1}{1+b\tau e^{-\lambda\tau}}[\phi(0)+be^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^{0} e^{-\lambda\tau}\ \phi(s)ds] \tag{14}$$

且此極限是以指數性地趨近 (Approached Exponentially) 。

證明 分下面兩步進行：

I. (13) 恰有一解：

由介值定理及 (12) 知，

當令 $f(u)=u-a-be^{-u\tau}$ 時

$$f(a-\frac{1}{\tau})\cdot f(a+\frac{1}{\tau})<0$$

且 $f'(u)=1+\tau be^{-u\tau}>1-e^{u\tau-1}\cdot e^{-u\tau}\geq 0(\because\ \ u\geq a-\frac{1}{\tau})$

又 $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=\infty$

II. (14) 成立：

(i) 令 $y(t)=x(t)e^{-\lambda t}$ 代入 (10)，(11)（利用 (13)）得

$$y'(t)=-be^{-\lambda t}\ [y(t)-y(t-\tau)]\ 當\ t>0 \tag{15}$$

初期條件爲

$$y(t)=\phi(t)e^{-\lambda t}\ 當\ -\tau\leq t\leq 0 \tag{16}$$

(15) 之兩邊積分得

$$y(t)=-be^{-\lambda\tau}\int_{t-\tau}^{t} y(s)ds+C\ 當\ t\geq 0 \tag{17}$$

其中 $C=\phi(0)+be^{-\lambda\tau}\int_{-\tau}^{0} \phi(s)e^{-\lambda s}ds$

令 $z(t)=y(t)-\dfrac{C}{1+b\tau e^{-\lambda\tau}}$

則得

$$z(t)=-be^{-\lambda\tau}\int_{t-\tau}^{t} z(s)ds\ 當\ t\geq 0$$

$$z(t)=\phi(t)e^{-\lambda\tau}\ -\frac{C}{1+b\tau e^{-\lambda\tau}}\ 當\ -\tau\leqq t\leqq 0$$

(ii) 令M爲 $|z(t)|$ 在 $[-\tau,0]$ 之上界，則 $|z(t)|\leqq M$，$\forall\ t\geq-\tau$. 若不然，$\forall\varepsilon>0$，$|z(t)|<M+\varepsilon$，對 $-\tau\leq t<t_1$，而 $|z(t_1)|=M+\varepsilon$，則

$$M+\varepsilon=|z(t_1)|\leqq be^{-\lambda\tau}|\int_{t_1-\tau}^{t_1} |z(s)|ds$$

$$\leqq|be^{-\lambda\tau}|\ \tau\ (M+\varepsilon)<M+\varepsilon$$

(其中由於 $\lambda\in(a-\frac{1}{\tau},\ a+\frac{1}{\tau})$ 得 $|be^{-\lambda\tau}|\tau=|\lambda-a|\tau<1$)

可見矛盾。因此 $|z(t)|<M+\varepsilon,\ \forall t\geq-\tau$，即

$|z(t)|\leq M,\ \forall t\geq-\tau$ ($\because\ \varepsilon$: 隨意)

(iii) $|z(t)|\leq M \qquad \forall t\geq-\tau$

$|z(t)|\leq|b\tau e^{-\lambda\tau}|M,\ \forall\ t\geq0$ (由(ii))

$$|z(t)|\leq|b\tau e^{-\lambda\tau}|\int_{t-\tau}^{t}|z(s)|ds,\ \forall t\geq\tau$$

$$\leq|b\tau e^{-\lambda\tau}|^2\int_{t-2\tau}^{t-\tau}|z(s-2\tau)|ds$$

$$\leq|b\tau e^{-\lambda\tau}|^2\cdot M$$

……………………………………………………

故由歸納法知 $|z(t)|\leq|b\tau e^{-\lambda\tau}|^nM,\ \forall t\geq n\tau-\tau$

$(n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$

可見當 $t\to\infty$ (亦卽 $n\to\infty$)，$z(t)\to0$，Exponentially.

故 (14) 證畢。

從上面的證明過程，立卽可以得證以下的一些推論:

推論 1　設 $\frac{-1}{e}<b\tau e^{-a\tau}<e$，則

(i) $\lambda<0$ 只要 $a+b<0$ 且 $a\tau<1$

(ii) $\lambda=0$ 只要 $a+b=0$ 且 $a\tau<1$

(iii) $\lambda>0$ 只要 $a+b>0$ 或 $a\tau>1$

(1) 之平凡 (trivial) 解

在情況 (i) 中爲 (均勻地 (Uniformly)) 漸近地 (Asymptotly) 穩定。

在情況 (ii) 中爲 (均勻地) 穩定。

在情況 (iii) 中爲不穩定 (參見附圖)。

證明　只要 $a\tau<1$，則 $b\tau>-e^{a\tau-1}>-\frac{1}{e^{1-a\tau}}>-1$

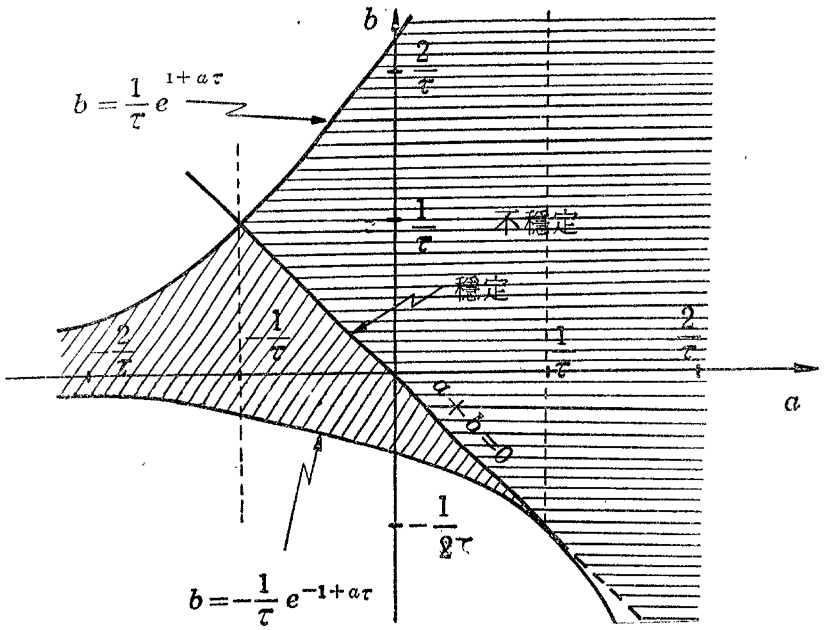
(i) 若 $a+b<0$ 且 $a\tau<1$，則 $f(0)>0$ 且 $0>a-\frac{1}{\tau}$，可見 $\lambda<0$。反之，$\lambda<0$，則 $f(0)>0$，$a-\frac{1}{\tau}<0$，可見 $a+b<0$ 且 $a\tau<1$。

(ii) 若 $a+b=0$ 且 $a\tau<1$，則 $f(0)=0$，且 $0>a-\frac{1}{\tau}$，可見 $\lambda=0$。反之亦然

(iii) 若 $a+b>0$，則 $f(0)=-a-b<0$，可見 $\lambda>0$。

且若 $a\tau>1$，則 $a-\frac{1}{\tau}>0$，亦可見 $\lambda>0$。反之亦然。

三種穩定性可直接從 (14) 獲得。



推論 2 設 $a+b=0$ 且 $-1<a\tau<1$，則

$$x(t)\to\frac{1}{1+b\tau}[\phi(0)+b\int_{-\tau}^{0}\phi s)ds],\ 當\ t\to\infty$$

證明 從 (14) 及推論 1，(因 $\lambda=0$)，即得此結論。

(四) 應用

本篇所討論的混合微分-差分方程應用頗廣:

1. 在經濟學上的 Kalecki 模型便是以 (1) 來表現的，它是 Trade Cycle Theory 的原理，另外，當 $a=0$ 時，(1) 也應用在 Classical Price-specie-Flow Mechanism of Balance of Payments Adjustment. [6]
2. 在數學上，質數的分佈可藉 $x'(t)=-cx(t-1)[1+x(t)]$ 表現，它的線性近似，即爲 (1) (當 $a=0$)。而此混合方程之平凡解之穩定性亦與其線性近似 $x'(t)=-cx(t-1)$ 之平凡解之穩定性有關。
3. 人口成長的某種模型及淋病流行病模型之一方程式爲 $x'(t)=g(x))-g(x(t-\tau))$，其線性近似也恰爲 (1) (當 $a+b=0$)。
4. 在化學上鹽水之混合，當有時間的延拖 (Delay) 時，其現象亦可藉 (1) 來解說。

(五) 參考資料

1. R. Bellman and K. L. Cooke: Differential-Difference Equations. Academic Press, New York, 1963.
2. Hildebrand: Methods of Applied Mathematics.
3. Hildebrand: Finite-Difference Equations and Simulations.
4. K. S. Miller: Intro. to the Calculus of Finite Difference and Difference Equations.
5. Spiegel: Finite Difference and Difference Equations.
6. G. Gandolfo: Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics, 1971.

7. R. D. Driver, D. W. Sasser and M. L. Slater: The Equation $x'(\mathrm{t})=ax(t)+bx(\mathrm{t}-\tau)$ With "Small" Delay, American Monthly, Oct. 1973.
8. Burger E., On the Stability of Certain Economic Systems, Econometrica 24, 488～493, (1956)
9. R. Allen : Mathematical Economics. (1960)

Summary of the Note

This note discusses stability conditions for the mixed differential-difference equation $x'(t)=ax(t)+bx(t-\tau)$. It has many applications in the real world. First, I give general theory about the solution of the equation. Second, two stability conditions, Hayes' theorem and Burger's theorem, are given for the roots of the characteristic equation of the above equation. Under the condition $-e^{-1}<b\tau e^{-a\tau}<e$ there exists a real root of the characteristic equation of the above equation in $(a-\frac{1}{\tau},\ a+\frac{1}{\tau})$. This shows that the solution $x(t)$ with this particular root approaches its limit exponentially. Finally I present some remarks concerning stability conditions for this particular root.