表 $n!$ 為標準型及其應用

王　文　清

§ 1　緒言與符號

在數論中，有一個爲大家所熟知的定理：若 n 爲任一正整數，則 n 恒可唯一的表爲 $n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_m^{\alpha_m}=\overset{m}{\underset{i=1}{\pi}}P_i^{\alpha_i}$ 的標準型，其中 $P_1,P_2\cdots,P_m$ 爲相異的質數，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 爲正整數。從此定理又可引出關於 $T(n)$，$\sigma(n)$ 和 $\phi(n)$ 的計算公式。$T(n)$ 是表 n 的一切因數的個數；$\sigma(n)$ 是表 n 的一切因數的和；$\phi(n)$ 表示不大於 n 且與 n 互質之正整數的個數，此函數又叫做尤拉氏 ϕ 函數 (Euler's ϕ—Function)。本文的目的旨在導出 $n!$ 的標準型，然後利用其標準型的表示法求出計算 $T(n!)$ 和 $\sigma(n!)$ 的簡易公式，及關於 n 個連續正整數乘積之質因數的特性。

§ 2　預備定理

【預備定理 1】：設 $n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_m^{\alpha_m}$，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 爲相異的質數，且 α_1，α_2，$\cdots$，α_m 爲正整數，則 $T(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_m+1)=\overset{m}{\underset{i=1}{\pi}}(\alpha_i+1)$

【預備定理 2】：設 $n=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_m^{\alpha_m}$，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 爲相異的質數，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$，α^m 爲正整數，則

$$\sigma(n)=\left(\frac{P_1^{\alpha_1+1}-1}{P_1-1}\right)\left(\frac{P_2^{\alpha_2+1}-1}{P_2-1}\right)\cdots\left(\frac{P_m^{\alpha_m+1}-1}{P_m-1}\right)$$

$$=\overset{m}{\underset{i=1}{\pi}}\frac{P_i^{\alpha_i+1}-1}{P_i-1}$$

§ 3　$n!$ 的標準型

【定　義】：設 n 爲正整數，若 n 可表爲任一質數 P 的正整數次方，則 $\Lambda(n)=log\ P$；當 n 無法表爲任一質數 P 之正整數次方時，$\Lambda(n)=0$。

【　例　】：$\Lambda(1)=0$，$\Lambda(2)=log2$，$\Lambda(3)=log3$，$\Lambda(4)=log2$，$\Lambda(5)=log5$，$\Lambda(8)=log2$，$\Lambda(10)=0$，$\Lambda(125)=log5$。

【定理 1】：設 n 爲正整數，則 $log\ n=\sum_{d|n}\Lambda(d)$

【證　明】：設 $n=\overset{m}{\underset{i=1}{\pi}}P_i^{\alpha_i}$，此處 P_i 爲質數，α_i 爲正整數，$i=1,2,\cdots,m$。則

$$log\ n=log\left(\overset{m}{\underset{i=1}{\pi}}P_i^{\alpha_i}\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i logP_i=\sum_{P_i|n}(\Lambda(P_i)+\Lambda(P_i^2)+\Lambda(P_i^3)+\cdots+\Lambda(P_i^{\alpha_i}))$$

$$=\sum_{d|n}\Lambda(d)$$

$$(\text{因爲}\Lambda(P_i^j)=log\ P_i, 1\leq j\leq \alpha_i)$$

【定　義】: 設 a 爲任一實數，則小於或等於 a 的最大整數以〔a〕表示之。

【定理 2】: 設 a 爲大於 1 的實數，則

$$log([a]!)=\sum_{d=1}^{[a]}\Lambda(d)\left[\frac{a}{d}\right]$$

【證　明】: 由定理 1, $log([a]!)=log(1\cdot 2\cdot 3\cdots[a])=\sum_{b=1}^{[a]}log\ b=\sum_{b=1}^{[a]}\sum_{d|b}\Lambda(d)$。

對每一固定的 d, $1\leq d\leq[a]$, 且 $d|b$, 但 $1\leq b\leq[a]$, 則 $\Lambda(d)$ 出現的次數爲 $\left[\frac{a}{d}\right]$。所以, $log([a]!)=\sum_{b=1}^{[a]}\sum_{d|b}\Lambda(d)=\sum_{d=1}^{[a]}\Lambda(d)\left[\frac{a}{d}\right]$

【推論2—1】: 設 n 爲正整數, P 爲質數，則

$$n!=\pi_{P\leq n}P^{\alpha},\ \text{此處}\ \alpha=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]$$

【證　明】: $log\ n!=\sum_{d=1}^{n}\Lambda(d)\left[\frac{n}{d}\right]=\sum_{p\leq n}\Lambda(p)\left[\frac{n}{p}\right]+\sum_{p\leq n}\Lambda(p^2)\left[\frac{n}{p^2}\right]+\sum_{p\leq n}\Lambda(p^3)\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$

$$=\sum_{p\leq n}\left[\frac{n}{p}\right]log\ p+\sum_{p\leq n}\left[\frac{n}{p^2}\right]log\ p+\sum_{p\leq n}\left[\frac{n}{p^3}\right]log\ p+\cdots$$

$$=\left[\frac{n}{p_1}\right]log\ p_1+\left[\frac{n}{p_1^{\ 2}}\right]log\ p_1+\left[\frac{n}{p_1^{\ 3}}\right]log\ p_1+\left[\frac{n}{p_1^{\ 4}}\right]log\ p_1+\cdots+$$

$$\left[\frac{n}{p_2}\right]log\ p_2+\left[\frac{n}{p_2^{\ 2}}\right]log\ p_2+\left[\frac{n}{p_2^{\ 3}}\right]log\ p_2+\left[\frac{n}{p_2^{\ 4}}\right]log\ p_2+\cdots+\cdots+$$

$$\left[\frac{n}{p_r}\right]log\ p_r+\left[\frac{n}{p_r^{\ 2}}\right]log\ p_r+\left[\frac{n}{p_r^{\ 3}}\right]log\ p_r+\left[\frac{n}{p_r^{\ 4}}\right]log\ p_r+\cdots$$

$$=\left(\sum_{p\leq n}log\ p\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]\right)\right)=\sum_{p\leq n}log\ p^{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]}=log\ \pi_{p\leq n}\ p^{\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]}$$

但 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 爲小於或等於 n 的質數，而級數 $\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]$ 爲收斂亦很明顯。所以,

$$n!=\pi_{p\leq n}\ p^{\alpha}\ \text{此處}\ \alpha=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]$$

【　例　】: $n=15$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{2^m}\right]=\left[\frac{15}{2}\right]+\left[\frac{15}{2^2}\right]+\left[\frac{15}{2^3}\right]=7+3+1=11$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{3^m}\right]=\left[\frac{15}{3}\right]+\left[\frac{15}{3^2}\right]=5+1=6,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{5^m}\right]=\left[\frac{15}{5}\right]=3,\ \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{7^m}\right]=\left[\frac{15}{7}\right]=2$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{11^m}\right]=\left[\frac{15}{11}\right]=1,\ \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{13^m}\right]=\left[\frac{15}{13}\right]=1$$

所以, $15!=2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$

§4 應用 $n!$ 的標準型所導出的一些結果

我們由預備定理 1, 2 及推論 2—1, 很容易的就可以得到下面二個關於計算 $T(n!)$ 和 $\sigma(n!)$ 等較簡易公式的定理。

【定理 3】: 設 n 為正整數, 則

$$T(n!)=\pi_{p\le n}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]+1\right)。$$

【定理 4】: 設 n 為正整數, 則

$$\sigma(n!)=\pi_{p\le n}\frac{p^{r+1}-1}{p-1}，\text{ 但 } r=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]$$

【注 意】: 1. 在應用定理 3 與 4 時, 最主要的是找小於或等於 n 的質數 p。但一整數 p 為質數的充分必要條件為 p 不能被小於 $\sqrt{p}$ 之所有的質數除盡。利用此事實, 可以縮小找 p 的範圍。

2. 其次利用 $\left[\frac{n}{p^{m+1}}\right]=\left[\frac{\left[\frac{n}{p^m}\right]}{p}\right]$, 可使計算簡化, 因為 $\left[\frac{n}{p^m}\right]$ 已在前項算出。

【 例 】: 設 $n=15$, 則 $T(15!)=4032$, $\sigma(15!)=1898252999760$。小於 15 的質數有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 又

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{2^m}\right]=\left[\frac{15}{2}\right]+\left[\frac{15}{2^2}\right]+\left[\frac{15}{2^3}\right]=7+3+1=11$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{3^m}\right]=\left[\frac{15}{3}\right]+\left[\frac{15}{3^2}\right]=5+1=6,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{5^m}\right]=\left[\frac{15}{5}\right]=3,\quad \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{7^m}\right]=\left[\frac{15}{7}\right]=2$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{11^m}\right]=\left[\frac{15}{11}\right]=1,\quad \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{15}{13^m}\right]=\left[\frac{15}{13}\right]=1$$

所以 $15!=2^{11}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2\cdot11\cdot13$, 且

$$T(15!)=(11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1)=4032$$

$$\sigma(15!)=\left(\frac{2^{12}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^7-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^4-1}{5-1}\right)\left(\frac{7^3-1}{7-1}\right)\left(\frac{11^2-1}{11-1}\right)\left(\frac{13^2-1}{13-1}\right)$$

$$=1898252999760$$

【定理 5】: 任意 n 個連續正整數的乘積可被 p^{α}, $\left(\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]\right)$, 所整除, 此處 p 為任一小於或等於 n 的質數。

【證 明】: 設 K 為任意正整數, 令 $K_n=K(K+1)(K+2)\cdots(K+n-1)$ 為 n 個連續正整數的乘積。用數學歸納法可證得:「K_n 可被 $n!$ 所整除」……(1), 當 $n=1$ 及對任一正整數 K, 和 $K=1$ 及對所有的正整數 n 而言, 顯然 (1) 式是成立的今假定 (i) 當 $n=N-1$ 及對任意的正整數 K, 和 (ii) 當 $n=N$ 及 $K=M$ 時, (1) 式成立。

因 $(M+1)_N=(M+1)(M+2)\cdots(M+1+N-1)=(M+1)(M+2)\cdots(M+N)$

$M_N=M(M+1)(M+2)\cdots\cdots(M+N-1)$

$(M+1)_N-M_N=[(M+N)-M](M+1)(M+2)\cdots(M+N-1)$

$=N(M+1)(M+2)(M+3)\cdots(M+N-1)=N(M+1)_{N-1}$

所以 $(M+1)_N=M_N+N(M+1)_{N-1}$

依假定 (i) 和 (ii) 可知$(N-1)$！能整除 $(M+1)_{N-1}$，且 $N!$ 能整除 M_N，故 $N!$ 能整除 $(M+1)_N$

此證得 (1) 式亦成立當 $n=N$, $K=M+1$ 時。則可推得，(1) 式亦成立當 $n=N$ 和所有的正整數K。(1) 式顯然成立當 $n=N+1$ 和 $K=1$ 時。

我們則可重複應用以上的論證，而證實 (1) 式的成立。但

$$n!=\pi_{p\le n} P^{\alpha}, \text{ 但 } \alpha=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]$$

所以對於任一小於 n 的質數 p 而言，恒有

P^{α}, $\left(\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]\right)$, 整除 K_N。

【推論5—1】: 若 K_N 爲任意 n 個連續正整數的乘積，則 K_N 含有 P^{α} 因子，但 K_N 不能被 $P^{\alpha+1}$ 所整除，且

$$\alpha\geqq\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]$$

此處 α 爲正整數，p 爲小於或等於 n 的任一質數。

參 考 書

〔1〕. Harriet Griffin, Elementary Theory of Numberes

〔2〕. Landau. E., Elementary Number Theory

〔3〕. I. N. Herstein, Topics in Algebra

〔4〕. G.H. Hardy and E.M. Wright, An Introduction to The Theory of Numbers

ON THE STANDARD EXPRESSION OF $n!$ AND SOME OF ITS APPLICATIONS

This article provides the standard expression of n! as the product of its prime divisors and some of its consequences. In fact, the Fundamental Theorem of Arithmetic tells us that any composite number can be uniquely expressed in standard form, but when n is very large, the operation is very hard. For a certain special n!, an easier method is provided in this article. Based on this expression, We can simplify $T(n!)$ and $\sigma(n!)$, and obtain that if the product of any n consecutive positive integers contains the highest power p^{α} of a prime number p, then α must be greater than or egual to $\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]$。

表$n!$為標準型及其應用

本文就 $n!$ 表爲質因數的乘積之標準型提供一個計算方法和應用該標準型導出一些結果。事實上，算術基本定理（Fundamental Theorem of Arithmetic）已告訴我們，對於任一合成數均可唯一地表爲標準型。惟在n很大時，其表法頗爲不易。對於特殊的 $n!$，本文提供了較簡便的方法。基於此方法，我們可以簡化 $T(n!)$ 和 $\sigma(n!)$ 而得到二個較簡易的計算公式，且證得若 n 個連續正整數的乘積包含質數p的最高次方 p^{α}，則α必大於或等於$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^m}\right]$的結論。