東海大學統計研究所

碩士論文

偏常態衰退量模型之貝氏分析

Skew-Normal Degradation Model:
A Bayesian Approach

研究生：張鈞崴

指導教授：俞一唐　博士

中華民國一〇一年七月

謝誌

時光飛逝，兩年的研究生生活轉眼就過去了，剛進來時看著學長姐們各個帶著滿滿的知識與企圖心從這裡畢業，並踏入社會。如今這個角色卻換成了自己，真的覺得時間過很快，也很開心自己能有今天的成就。

兩年的研究生生活，真的不長，尤其對於在這兩年內要不斷吸收知識的我來說，時間更是一下子就消失了，但非常感謝上天讓我找到了我的指導教授　俞一唐博士來指導我，他與學生的相處方式一向都是亦師亦友的模式，也因爲這種模式讓我在遇到任何困難時，都可以隨時隨地、隨心所欲地向他請教我的問題，且老師不僅傳授我們課業方面的知識也會不時的教導我們生活上的一些禮儀觀念，因此，在這段期間真的受益良多，由衷的感謝老師。論文初稿方面，非常感謝　張玉媚博士與　陳春樹博士於百忙之中，抽空審閱與指正疏漏，更提出了各方面的想法，使我的論文更加精密完善，謝謝兩位教授的指導。

最後，當然要感謝一路上支持我的父母，不斷地讓我學習知識充實自己，並適時的給予鼓勵。另外，非常感謝一路陪伴我的同學們，在我需要幫助時總會給予我有力的協助。能有今天的成就，真的非常感謝大家。

摘要

本文中我們將探討如何以貝氏方法來分析可靠度研究中產品壽命的衰退量。不同於一般傳統假設衰退量模型中，隨機效果爲常態，我們假設隨機效果爲偏常態分配，使得即使在資料不具對稱性的情況下，不必經過任何轉換，也可直接對資料進行分析評估，且得到較適當的參數估計，其中我們以一實際衰退資料進行分析，並將傳統方法與此研究中所提出的方法之分析結果做比較，觀察其之間的差異。

關鍵字：可靠度、衰退量、偏常態分配、貝氏方法

目錄

第一章、 緒論 1
第二章、 研究動機 3
2.1 實例 3
2.2 資料分析－常態可靠度模型 5
第三章、 偏常態衰退量模型 10
第四章、 資料分析－偏常態衰退量模型 14
第五章、 模擬研究 17
第六章、 結論 18
參考資料 19

第一章、緒論

可靠度（reliability）通常定義為在一段特定的時間內，一個系統或機器設備在正常操作使用的狀態下將會表現出當初設計之功用。隨著科技的發達加上精密的實驗與品質控管等條件下，大幅降低了產品的故障率，因而要經由觀察產品壽命資料（lifetime data）去推估高可靠度（high reliable）產品壽命常常會出現問題。例如我們要收集到足夠的資訊去推估產品壽命，通常需要很長的測試時間，然而在激烈的競爭下，對於要如何更快地設計、研發及評估新的產品，將是生產者所面臨首要解決的問題。所以要在短時間內收集到足夠的資訊，我們可以選擇加速壽命試驗（accelerated life test）或衰退量資料（degradation data）（Meeker　and Escobar ,1998）。

衰退量（degradation measure）是一種在可靠度的分析上常用的資料型態，它是一種與產品壽命具有高度相關的產品特性測量，在分析衰退量資料時，我們會定義一個臨界值（threshold），由衰退特徵達到某個臨界值的情況下，將其定義為產品故障。此一故障相對於產品真正的失效（hard failure）稱為軟性故障（soft failure），例如：觀察產品裂痕尺寸，裂痕尺寸隨著時間成長，當裂痕尺寸成長到某個臨界值就認定其產品故障。或是螢光燈的亮度，亮度會隨著時間經過而漸少，觀察 100 個小時後，當亮度低於原本的 60%就將其認定為失效。

衰退量資料能夠在較短的時間內提供有效的產品壽命資訊，因此，常被用來推估高可靠度產品的壽命。

在一個 n 個實驗單位每個實驗單位測量 m 次的衰退量實驗中，衰退量資料常以以下統計模型表示：

$$y_{ij} = D_i(t) + \varepsilon_{ij}\ , i = 1,\cdots,n\ , j = 1,\cdots,m \qquad (1)$$

其中，$D_i(t) = D(t,\theta_i)$為此衰退量的衰退過程；ε_{ij}為隨機誤差。由於每一個實驗單位的衰退過程會受到某些因素的影響而有所不同，所以我們假設$\theta_i \sim N(\boldsymbol{\mu_\theta}, \boldsymbol{\Sigma_\theta})$（或經過一些轉換$H(\theta_i) \sim N(\boldsymbol{\mu_\theta}, \boldsymbol{\Sigma_\theta})$）。在給定臨界值τ的情狀下，藉由$P(T \le t) = P(D_i(t,\theta_i) > \tau)$，我們可以透過$\theta_i$的機率分配找到產品壽命的機率分配。

本研究將以貝氏統計的方法來分析衰退量資料，不同於傳統假設隨機參數具有常態分配（或經由一些轉換）的情況，在隨機參數的假設方面，我們假設隨機參數具有一個偏常態分配（skew-normal distribution）。

本論文的架構如下：第一章節是緒論，第二章爲本研究之研究動機，此研究動機來自一個實際的藥效實驗，第三章爲偏常態衰退量模型的建構與其所需的計算之演算法推導，在第四章中，我們將利用第三章所推導的模型，重新分析第二章的資料。在第五章中，我們例用統計模擬來比較兩種方法的差異。最後第六章爲結論。

第二章、研究動機

2.1 實例

藥效實驗:

研發一個新的藥物，需要做一個穩定性研究，以確定藥物的有效時間。因爲藥效強度會隨著時間經過而衰減，所以將藥物的有效時間訂爲當藥效強度衰退到原始的 90%所花費的時間。表 1 的資料是出自 Chow 跟 Shao（1991）的穩定性研究報告。其追蹤 24 批藥物藥效強度的衰退情況，最初的藥效強度爲 100%（會有測量誤差），追蹤時間共 36 個月，觀察了 4 次，分別爲 0 個月、12 個月、24 個月、36 個月。

表 1 藥效衰退資料

	Time(months)					Time(months)			
Batch	0	12	24	36	Batch	0	12	24	36
1	99.9	98.9	95.9	92.9	13	99.8	98.8	93.8	89.8
2	101.1	97.1	94.1	91.1	14	100.1	99.1	93.1	90.1
3	100.3	98.3	95.3	92.3	15	100.7	98.7	93.7	91.7
4	100.8	96.8	94.8	90.8	16	100.3	98.3	96.3	93.3
5	100.0	98.0	96.0	92.0	17	100.2	98.2	97.2	94.2
6	100.1	98.1	98.1	95.1	18	99.8	97.8	95.8	90.8
7	99.6	98.6	96.6	92.6	19	100.8	98.8	95.8	94.8
8	100.4	99.4	96.4	95.4	20	100.0	98.0	96.0	92.0
9	100.9	98.9	96.9	96.9	21	99.6	99.6	92.6	88.6
10	100.5	99.5	94.5	93.5	22	100.2	98.2	97.2	94.2
11	101.1	98.1	93.1	91.1	23	99.8	97.8	95.8	90.8
12	100.9	97.9	95.9	93.9	24	100.0	99.0	95.0	92.0

將其衰退過程畫在圖 1，我們可以觀察出此衰退量具有一個線性衰退過程。

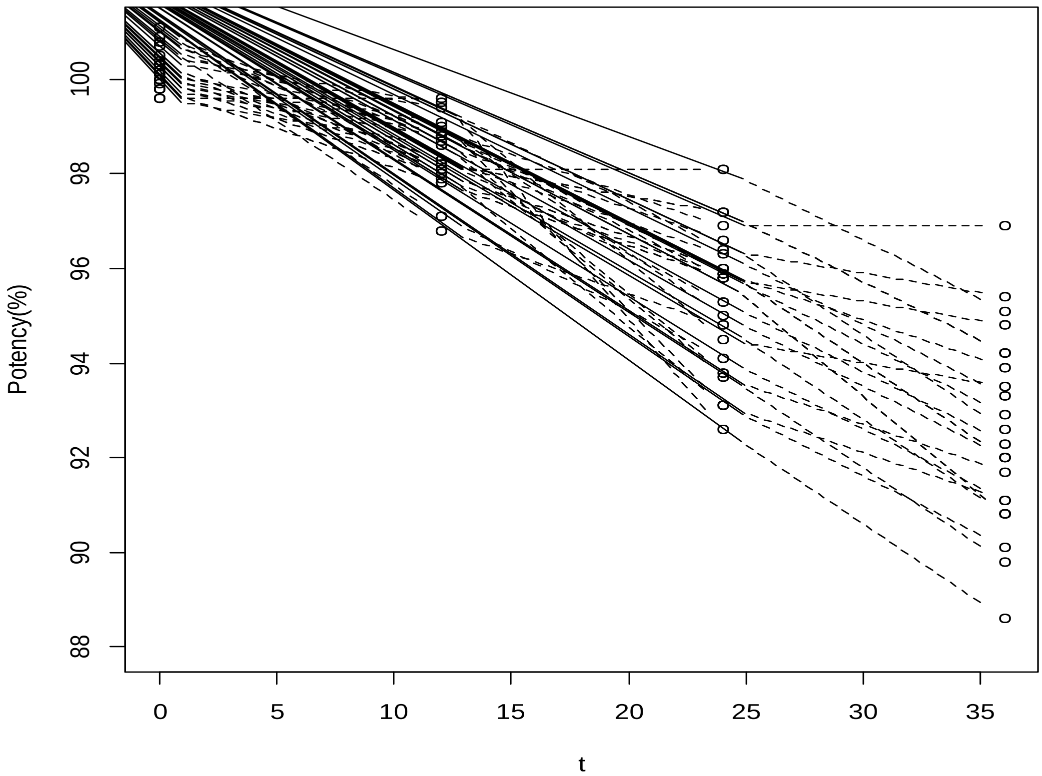

圖 1 藥效的衰退過程圖

在 Hamada et al.(2008)書上的分析中，假設

$$D_i(t) = D(t, \theta_i') = 100 - \left(\frac{1}{\theta_i'}\right) t \,,$$

由此衰退模型可得知在 t 時間點的藥效強度。將收集到的衰退資料或觀測值以y_{ij}'來表示，根據(1)，可以得到

$$y_{ij}' = 100 - \frac{1}{\theta_i'} t_{ij} + \varepsilon_{ij} \,, \mathrm{i} = 1 \cdots 24, \mathrm{j} = 1 \cdots 4$$

$$\varepsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

在隨機效果的假設方面，他們假設$\theta_i' \sim Lognormal(\mu_\theta', {\sigma_\theta'}^2)$，也就是將緒論中的$H(\theta) = log\theta$。根據他們的分析我們得到$\mu_\theta'$、$\sigma_\theta'$跟$\sigma_\varepsilon$的後驗分配（posterior distribution）中位數，分別爲 1.645、0.243 跟 0.916。在此實驗中有興趣的兩個量爲$R(36) = P(T > 36)$跟$t_{0.1} = F^{-1}(0.1)$其後驗分配結果如下

lognormal

			Quantiles		
Parameter	Mean	Std Dev	0.050	0.500	0.950
R(36)	0.9249	0.0468	0.8348	0.9343	0.9828
$t_{0.1}$	37.87	2.94	32.74	38.05	42.36

然而一般衰退量實驗中，實驗單位個數通常不會很多，例如在這個例子中有 24 個，以這樣的樣本數去判斷適當的$H(\theta)$形式，是相當困難的，常常會造成很多的$H(\theta)$的形式，都不會被拒絕的情況。所以常常有可能沒有考慮到此轉換。

2.2 資料分析－常態可靠度模型

在進一步分析之前，我們先重新改寫以上的模型，我們令

$$y_{ij} = y_{ij}' - 100 \,, \theta_i = -\frac{1}{\theta_i'}$$

因此，我們可以得到

$$y_{ij} = \theta_i t_{ij} + \varepsilon_{ij} \,, \mathrm{i} = 1 \cdots 24, \mathrm{j} = 1 \cdots 4$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \frac{1}{\lambda_\varepsilon})$$

在隨機效果的假設方面，我們假設$\theta_i \sim N\left(\mu_\theta, \frac{1}{\lambda_\theta}\right)$。

在先驗分配的假設方面，我們採用以下之獨立無訊息先驗分配（non-informative prior），

$$\pi(\mu_\theta) \propto 1$$
$$\pi(\lambda_\theta) \propto \frac{1}{\lambda_\theta}$$
$$\pi(\lambda_\varepsilon) \propto \frac{1}{\lambda_\varepsilon}$$

結合以上之先驗分配（prior distribution）再利用

$$f(\mu_\theta, \lambda_\theta, \lambda_\varepsilon, \theta | y) \propto \pi(\mu_\theta)\pi(\lambda_\theta)\pi(\lambda_\varepsilon) f(\theta | \mu_\theta, \lambda_\theta) f(\mathrm{y} | \theta, \lambda_\varepsilon)$$

我們可得到以下之參數的後驗分配：

$$f(\mu_\theta, \lambda_\theta, \lambda_\varepsilon, \theta | y)$$
$$\propto \lambda_\theta^{\frac{n}{2}-1} \lambda_\varepsilon^{\frac{nm}{2}-1} \exp\{-\frac{1}{2}\left[\lambda_\theta \sum_{i=1}^{n} (\theta_i - \mu_\theta)^2 + \lambda_\varepsilon \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(y_{ij} - \theta_i t_{ij}\right)^2\right]\}$$

根據上面的式子，我們可以推算出各參數的完全條件分配（full conditional distribution）：

$$\mu_\theta | \cdot \sim N(\bar{\theta}, \frac{1}{n\lambda_\theta})$$
$$\lambda_\theta | \cdot \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{2}{\sum_{i=1}^{n} (\theta_i - \mu_\theta)^2})$$
$$\lambda_\varepsilon | \cdot \sim \Gamma(\frac{nm}{2}, \frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(y_{ij} - \theta_i t_{ij}\right)^2})$$
$$\theta_i | \cdot \sim N(\frac{\lambda_\theta \mu_\theta + \lambda_\epsilon \sum_{j=1}^{m} y_{ij} t_{ij}}{\lambda_\theta + \lambda_\epsilon \sum_{j=1}^{m} t_{ij}^2}, \frac{1}{\lambda_\theta + \lambda_\epsilon \sum_{j=1}^{m} t_{ij}^2})$$

其中，$\Gamma(\mathrm{a}, \mathrm{b})$表示期望值爲ab，變異數爲$\mathrm{ab}^2$的伽瑪分配。

利用馬可夫鏈蒙地卡羅法（Markov chain Monte Carlo, MCMC）中的 Gibbs Sampler 方法抽取參數驗後分配的樣本（Press , 2003）。

在起始值方面，我們可以藉由以下兩階段方法求得，首先藉由原始資料，我們可以配適出一個線性模型$y_{ij} = \theta_i t_{ij} + \varepsilon_{ij}$，得到$\theta$與$\lambda_\varepsilon$的估計值，分別爲:

$$\widehat{\theta_i} = \frac{\sum_{j=1}^{4} t_{ij} y_{ij}}{\sum_{j=1}^{4} t_{ij}^2} \;, \widehat{\lambda_\varepsilon} = \frac{96}{\sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^{4} (y_{ij} - \widehat{\theta_i} t_{ij})^2}$$

再以$\bar{\hat{\theta}}$去估計μ_θ(當作μ_θ的起始值$\mu^{(0)}$)，然後用$\frac{1}{S^2(\hat{\theta})}$去估$\lambda_\theta$(可找出$\lambda_\theta$的起始值$\lambda_\theta^{(0)}$)，用$\widehat{\lambda_\varepsilon}$當作$\lambda_\varepsilon$的起始值$\lambda_\varepsilon^{(0)}$，原始資料的$\theta_i$當作新$\theta_i$的起始值$\theta_i^{(0)}$，我們先丟棄（burn-in）前面所抽出的 1000 個樣本，之後將各後面抽出的 5000 個樣本留下，將這些資料收集起來當作個參數來自驗後分配的樣本，再藉由這些參數樣本進行接下來的統計分析。

在產品壽命的機率分配方面，我們可以藉由$\mathrm{F(t)} = \mathrm{P(T} \le \mathrm{t)} = \mathrm{P}(D_i(\mathrm{t}) \le -10) = \mathrm{P}(\theta_i t \le -10) = \mathrm{P}(\theta_i \le \frac{-10}{t})$ 又$\theta_i \sim N\left(\mu_\theta, \frac{1}{\lambda_\theta}\right)$，所以$\mathrm{P(T} \le \mathrm{t)} = \Phi\left(\sqrt{\lambda_\theta}\left(\frac{-10}{t} - \mu_\theta\right)\right)$，$\lambda_\theta$跟$\mu_\theta$由先前的 MCMC 方法各生成了 5000 筆，在給定一個λ_θ跟μ_θ之下，我們可以得到一個累積機率函數，而在固定 t 之下，可以得到 5000 個累積機率值，並將它由小到大排序，找出中位數、以及 90%的可靠區間（credible interval），也就是找出第 5 百分位數與第 95 百分位數所形成的區間，我們將其結果畫在以下圖 2。

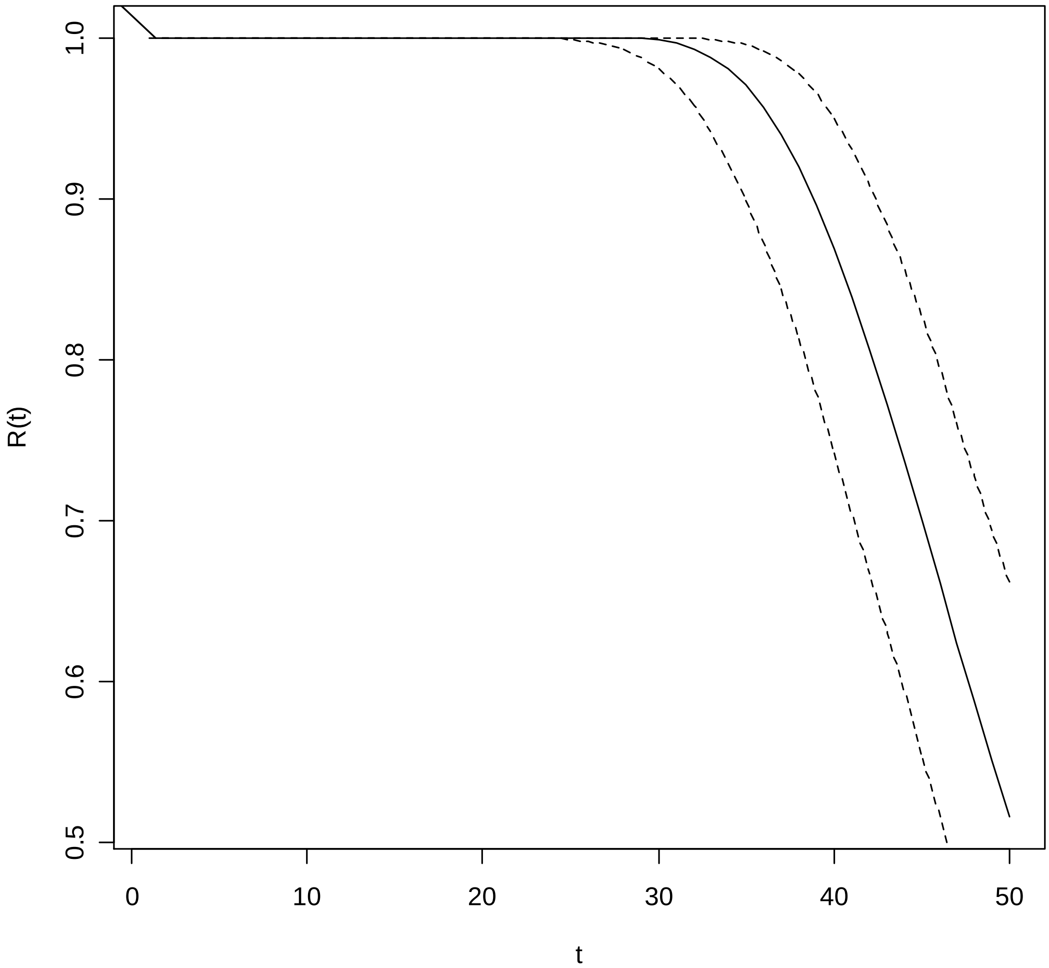

圖 2 常態假設下產品壽命的中位數、90%的可靠區間

在R(36)跟$t_{0.1}$方面，我們可以得到

$$\mathrm{R}(36) = \mathrm{P}(\mathrm{T} > 36) = 1 - \Phi\left(\sqrt{\lambda_\theta}\left(\frac{-10}{t} - \mu_\theta\right)\right)$$

$$t_{0.1} = \frac{-10}{\frac{1}{\sqrt{\lambda_\theta}}\Phi^{-1}(0.1) + \mu_\theta}$$

其後驗分配估計結果如下

normal					
			Quantiles		
Parameter	Mean	Std Dev	0.050	0.500	0.950
R(36)	0.9495	0.0379	0.8742	0.9589	0.9921
$t_{0.1}$	38.86	2.26	34.99	38.95	42.41

第三章、偏常態衰退量模型

本章我們將介紹本文所提之偏常態衰退量模型，不同於第二章之假設，在隨機效果的假設方面，我們假設$\theta_i \sim SN\left(\mu_\theta, \frac{1}{\lambda_\theta}, \rho\right)$，其累積機率函數為

$$F(s) = P(\theta \leq s) = \Phi\left(\sqrt{\lambda_\theta}(s-\mu_\theta)\right) - 2T(\sqrt{\lambda_\theta}(s-\mu_\theta), \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}})$$

其中μ_θ是位置參數，λ_θ是尺度參數，$T(h,\alpha)$是 Owen's 函數，定義如下

$$T(h,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\alpha \frac{e^{-\frac{1}{2}h^2(1+x^2)}}{1+x^2}dx$$

根據 Azzalini and Capitaino , (1999,2003) 我們可以將以上的偏常態分配隨機變數以下列方式重新表示，令

$$\theta_i = \mu_\theta + \frac{1}{\sqrt{\lambda_\theta}}z$$

其中

$$z = \begin{cases} -u & if\ u_0 \leq 0 \\ u & if\ u_0 > 0 \end{cases}$$

而

$$\begin{pmatrix} U \\ U_0 \end{pmatrix} \sim N(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix})$$

在先驗分配的選取方面，相同的我們假設

$$\pi(\mu_\theta) \propto 1$$
$$\pi(\lambda_\theta) \propto \frac{1}{\lambda_\theta}$$

$$\pi(\lambda_\varepsilon) \propto \frac{1}{\lambda_\varepsilon}$$

在ρ的先驗分配選擇方面，由 Peng and Tseng 的研究中提到，建議

$\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$要介於±2 之間，所以$\rho$的範圍爲$-\sqrt{\frac{4}{5}} \le \rho \le \sqrt{\frac{4}{5}}$，因此我們

假設

$$\pi(\rho) \propto 1 \quad if \quad -\sqrt{\frac{4}{5}} \le \rho \le \sqrt{\frac{4}{5}}$$

由列出的參數先驗分配，所推算出的後驗分配爲：

$$f(\rho, u_0, \mu_\theta, \lambda_\theta, \lambda_\varepsilon, \theta | y) \propto \pi(\rho) f(u_0) \pi(\mu_\theta) \pi(\lambda_\theta) \pi(\lambda_\varepsilon) f(\theta | \rho, u_0, \mu_\theta, \lambda_\theta) f(y | \theta, \lambda_\varepsilon)$$

藉由上面關係式所得到的後驗分配爲：

$$f(\rho, u_0, \mu_\theta, \lambda_\theta, \lambda_\varepsilon, \theta | y) \propto \lambda_\theta^{\frac{n}{2}-1} \lambda_\varepsilon^{\frac{nm}{2}-1} \exp\{-\frac{u_0}{2}\} \exp\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_\theta}{1-\rho^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\theta_i - \mu_\theta - \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_\theta}} |u_0|\right)^2 + \lambda_\epsilon \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(y_{ij} - \theta_i t_{ij}\right)^2\right]\}$$

藉由後驗分配，我們可以得知各參數完全條件分配爲：

$$f(\rho | \cdot) \propto \prod_{i=1}^{n} N(\theta_i; \mu_\theta + \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_\theta}} |u_0|, \frac{1-\rho^2}{\lambda_\theta})$$

$$\mu_\theta | \cdot \sim N(\bar{\theta} - \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_\theta}} |u_0|, \frac{1-\rho^2}{n\lambda_\theta})$$

$$f(u_0 | \cdot) = 0.5N(u_0, \tau, \upsilon)\mathrm{I}[u_0 \le 0] + 0.5N(u_0, \tau, \upsilon)\mathrm{I}[u_0 > 0]$$

$$f(\lambda_\theta|\cdot) \propto \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{2(1-\rho^2)}{\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta)^2})\exp\{\sqrt{\lambda_\theta}\frac{\rho}{1-\rho^2}|u_0|\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta)\}$$

$$\lambda_\varepsilon|\cdot \sim \Gamma(\frac{nm}{2}, \frac{2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{ij}-\theta_i t_{ij}\right)^2})$$

$\theta_i|\cdot \sim$

$$N(\frac{\lambda_\theta(\mu_\theta+\frac{\rho}{\sqrt{\lambda_\theta}}|u_0|)+(1-\rho^2)\lambda_\varepsilon\sum_{j=1}^{m}y_{ij}t_{ij}}{\lambda_\theta+(1-\rho^2)\lambda_\varepsilon\sum_{j=1}^{m}t_{ij}^2}, \frac{1-\rho^2}{\lambda_\theta+(1-\rho^2)\lambda_\varepsilon\sum_{j=1}^{m}t_{ij}^2})$$

其中 $\tau = \frac{\sqrt{\lambda_\theta}\rho}{1+(n-1)\rho^2}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta)$，$\upsilon = \frac{1-\rho^2}{1+(n-1)\rho^2}$

其中， I[・]為指標函數當其參數若在範圍內即為 1，其他則為 0。

由於我們無法經由推導得到ρ與λ_θ確切的完全條件機率分配（積分常數不易獲得），但我們可以知道其ρ與λ_θ的完全機率條件分配正比於某一些分配形式。 所以我們將引入 Metropolis-Hastings 步驟來抽取參數。

抽取ρ的部分，假設ρ目前的值為ρ_{old}

先從$U(-\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}})$中，抽出一個$\rho_{new}$，抽出後用以下的機率接受所抽出的$\rho_{new}$，

$$\min\{1, \frac{\prod_{i=1}^{n}N(\theta_i;\mu_\theta+\frac{\rho_{old}}{\sqrt{\lambda_\theta}}|u_0|, \frac{1-\rho_{old}^2}{\lambda_\theta})}{\prod_{i=1}^{n}N(\theta_i;\mu_\theta+\frac{\rho_{new}}{\sqrt{\lambda_\theta}}|u_0|, \frac{1-\rho_{new}^2}{\lambda_\theta})}\}$$

抽取λ_θ的部分，假設λ_θ目前的值爲$\lambda_{\theta(old)}$

先從$\Gamma(\frac{n}{2},\frac{2(1-\rho^2)}{\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta)^2})$中，抽出一個$\lambda_{\theta(new)}$，抽出後用以下的機率接受所抽出的$\lambda_{\theta(new)}$

$$\min\{1,\frac{\Gamma(\frac{n}{2},\frac{2(1-\rho^2)}{\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta)^2})\exp\{\sqrt{\lambda_{\theta(new)}}\frac{\rho}{1-\rho^2}|u_0|\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta)\}\Gamma(\frac{n}{2},\frac{2(1-\rho^2)}{\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta)^2})}{\Gamma(\frac{n}{2},\frac{2(1-\rho^2)}{\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta)^2})\exp\{\sqrt{\lambda_{\theta(old)}}\frac{\rho}{1-\rho^2}|u_0|\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta)\}\Gamma(\frac{n}{2},\frac{2(1-\rho^2)}{\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta)^2})}\}$$

接受機率可以簡化爲

$$\min\{1,\exp((\sqrt{\lambda_{\theta(new)}}-\sqrt{\lambda_{\theta(old)}})\frac{\rho}{1-\rho^2}|u_0|\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\mu_\theta))\}$$

得到各參數的完全條件分配後，與前面使用相同的方法，利用 MCMC 方法抽取參數樣本。

第四章、資料分析－偏常態衰退量模型

本章我們將使用第三章所介紹之偏常態衰退量模型，重新分析第二章的資料。

在起始值的設定方面，參考第二章的方法我們可以得到 $\mu_\theta^{(0)}$、$\lambda_\theta^{(0)}$、$\lambda_\epsilon^{(0)}$、$\theta_i^{(0)}$。而在u_0跟ρ方面，我們直接簡單選取 $u_0^{(0)}=0$、$\rho^{(0)}=0$，我們先丟棄前面所抽出的 1000 個樣本，之後將各後面抽出的 5000 個樣本留下，將這些資料收集起來當作個參數來自驗後分配的樣本，再藉由這些參數樣本進行接下來的統計分析。

在產品壽命的機率分配方面，λ_θ、μ_θ、λ_ϵ、u_0、ρ及θ_i，由先前的 MCMC 方法各生成了 5000 筆，所以我們可以藉由

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T \le t) \\ &= \Phi\left(\sqrt{\lambda_\theta}\left(\frac{-10}{t} - \mu_\theta\right)\right) - 2T(\sqrt{\lambda_\theta}\left(\frac{-10}{t} - \mu_\theta\right), \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}) \end{aligned}$$

所以我們會得到 5000 個累積機率函數。以相同的方法我們可以得到中位數、以及 90%的可靠區間，我們將其結果畫在以下圖 3。

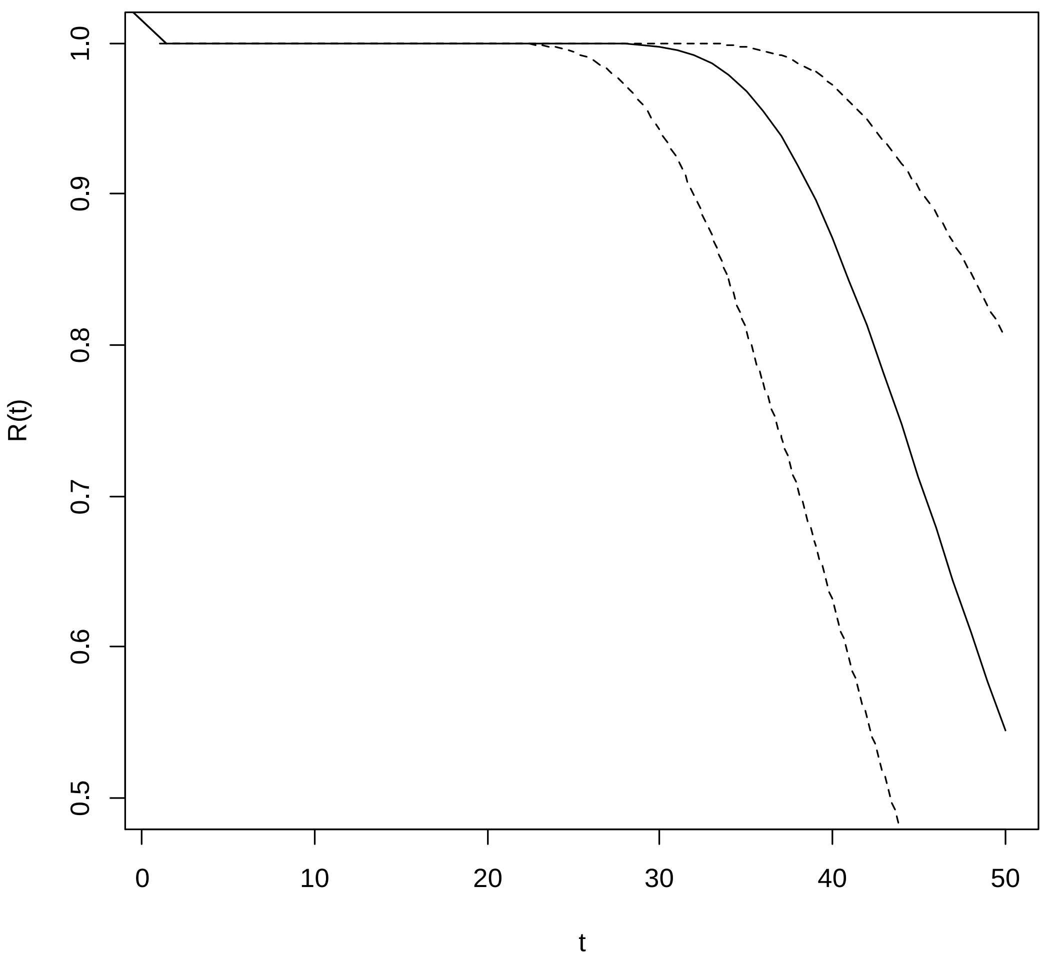

圖 3 偏常態假設下產品壽命的中位數、以及 90%的可靠區間

因此對於我們較有興趣的R(36)及$t_{0.1}$，

$$R(36) = P(T > 36)$$

$$= 1 - [\Phi\left(\sqrt{\lambda_\theta}\left(\frac{-10}{t} - \mu_\theta\right)\right) - 2T\left(\sqrt{\lambda_\theta}\left(\frac{-10}{t} - \mu_\theta\right), \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)]$$

$t_{0.1}$可以由下列式子中得到

$$P(T \leq t_{0.1}) = 0.1$$

$$= \Phi\left(\sqrt{\lambda_\theta}\left(\frac{-10}{t_{0.1}} - \mu_\theta\right)\right) - 2T\left(\sqrt{\lambda_\theta}\left(\frac{-10}{t_{0.1}} - \mu_\theta\right), \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

其估計結果如下表

skew-normal					
			Quantiles		
Parameter	Mean	Std Dev	0.050	0.500	0.950
R(36)	0.9301	0.0807	0.7743	0.9545	0.9949
$t_{0.1}$	38.87	4.32	31.96	38.82	45.21

由上表我們可以看出，其估計結果與假設隨機參數具有常態分配之結果差異很大，我們將在第五章例用模擬的方法比較其優劣性。

第五章、模擬研究

由於我們不知道第二章中對數常態分配真實的參數，所以在參數設定上，我們選取（μ'_θ，σ'_θ，σ_ε）＝（1.645，0.243，0.916）（後驗中位數），利用電腦模擬產生 1000 筆樣本資料，然後再分別利用偏常態衰退量模型與常態衰退量模型進行估計，我們將比較可靠區間的涵蓋機率與平均長度，及中位數的 MSE，其結果如下

	$R(36)$		$t_{0.1}$	
	normal	skew-normal	normal	skew-normal
涵蓋機率	0.808	0.961	0.830	0.967
平均長度	0.125	0.218	7.593	12.893
MSE	0.002228	0.002128	8.702	8.593

由上面的比較結果，我們可以看出利用偏常態模型所得之$R(36)$跟$t_{0.1}$的 MSE 都比常態模型來的小。從涵蓋機率與平均長度來看，雖然常態的平均長度都比較短，但涵蓋機率皆不高，所以會造成太過於樂觀的結果。

第六章、 結論

在一般的衰退量模型中，我們假設隨機效果具有一個常態分配，當隨機效果與常態假設相差較大時，例如呈現左偏或右偏的狀態，我們常常會藉由轉換的方式來解決此一問題，然而在少量樣本的情況下，不容易比較出轉換與轉換之間的差異。不同於一般假設衰退量模型中的隨機效果具有常態分配，本研究利用偏常態分配來描述衰退量模型中隨機效果的機率分配，此方法的優點在於，偏常態分配可以解釋隨機效果不具對稱性的情況，所以就算不考慮將隨機效果做任何轉換，也可以得到一個不錯的估計結果。

參考資料

1. Azzalini, A. and Capitaino, A. (1999). "Statistical Applications of the Multivariate Skew-Normal Distribution". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 61, 579-602.
2. Azzalini, A. and Capitaino, A. (2003). "Distributions Generated by Perturbation of Symmetry with Emphasis on a Multivariate Skew *t*-Distribution". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 65, 367–389.
3. Chow, S.C. and Shao, J. (1991). Estimating Drug Shelf-Life with Random Batches, *Biometrics*, 47,753-763.
4. Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley & Sons, New York.
5. Peng, C. Y. and Tseng, S. T. "Statistical Lifetime Inference with Skew-Wiener Linear Degradation Models". (under revise)
6. Press, S.J. (2003). *Subjective and Objective Bayesian Statistics: Principles, Models, and Applications (2nd edition)*, Wiley & Sons.
7. Hamada, M. S., Wilson, A. G., Reese, C. S. and Martz , H. F. (2008). *Bayesian Reliability*.