

# 第三章 微波共振腔微擾法理論

## 3.1 矩形波導理論推導[81]

一矩形波導管如圖 3-1，矩形橫截面的邊長為 a 與 b，在單一導體波導管內，僅存在 TE 波與 TM 波，對於 TE 波而言， $E_z = 0$ 。而  $H_z$  必須滿足波動方程式：

$$H_z(x, y, z) = H_z^0(x, y)e^{-j\beta z} \quad (3-1)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2\right)H_z^0(x, y) = 0 \quad (3-2)$$

$h^2$  為截止波數  $h^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ ，(3-2)式偏微分方程利用分離變數法可解得  $H_z^0$  的通解：

$$H_z^0 = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) \quad (3-3)$$

代入邊界條件：X 方向  $E_z^0(0, y) = 0$ ， $E_z^0(a, y) = 0$ ，Y 方向  $E_z^0(x, 0) = 0$ ， $E_z^0(x, b) = 0$

可求得：

$$H_z^0(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (3-4)$$

進一步可以得到 TE 波在波導的電磁場分量

$$H_y^0(x, y) = \frac{-j\beta}{h^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial y} = \frac{j\beta}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (3-5)$$

$$H_x^0(x, y) = \frac{-j\beta}{h^2} \frac{\partial H_z^0}{\partial x} = \frac{j\beta}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (3-6)$$

$$E_x^0(x, y) = \frac{\omega\mu}{\beta} H_y^0 = \frac{j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (3-7)$$

$$E_y^0(x, y) = \frac{-\omega\mu}{\beta} H_x^0 = \frac{-j\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (3-8)$$

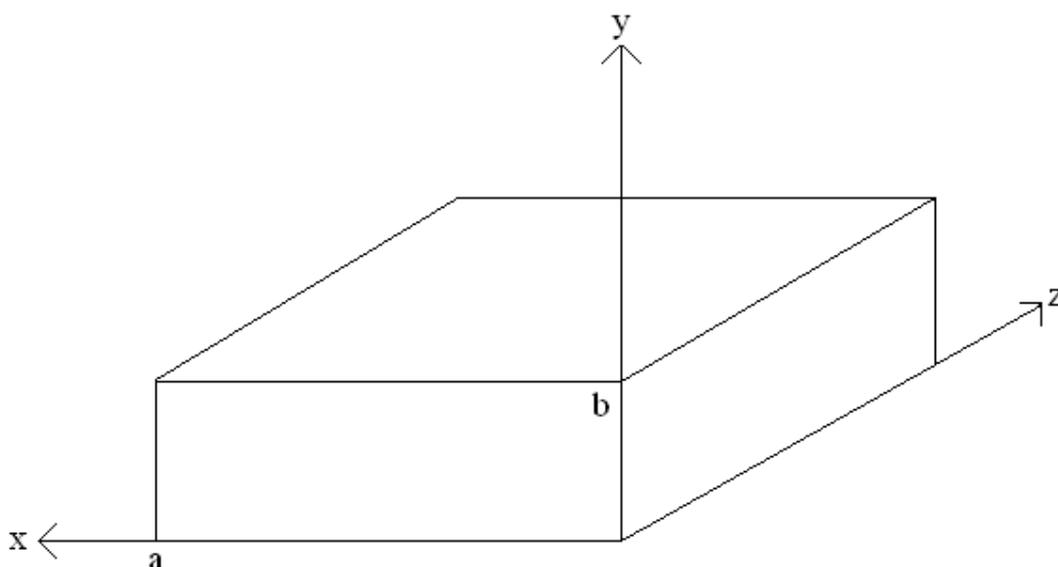


圖 3-1 矩型波導示意圖

### 3.2 Q 值定義

共振腔是將能量儲存在腔體內某一模態的電場與磁場，但真實的共振腔導體壁導電率非無窮大而是有限值，表面電阻不為零，由此電阻產生的功率損耗將會使得儲存能量減少，Quality factor(Q)值為此系統損耗程度的指標，利用共振腔微擾法量測材料的介電係數與導磁率時，必須量測共振頻率偏移與 Q 值，定義如下式：

$$Q = 2\pi \frac{\text{在共振頻率下，一週期所儲存的能量}}{\text{在共振頻率下，一週期所消耗的能量}} \quad (3-9)$$

令 W 為共振腔裡一週期所儲存的總能量，可寫成  $W = W_e + W_m$ ， $W_e$  與  $W_m$  分別為電場與磁場儲存的能量， $P_L$  為共振頻率下一週期所消耗能量， $\omega$  為共振頻率，可將(3-9)改寫成下式：

$$Q = \frac{\omega W}{P_L} \quad (3-10)$$

### 3.3 共振腔微擾法理論推導[82]

在一共振腔體內，置入一材料，則腔體內的介電常數與導磁率將受到微擾動(perturbation)，即微量的改變，這改變的量設為 $\Delta\varepsilon$ 與 $\Delta\mu$ 。而原空腔體內的電場與磁場為 $\bar{E}_0$ 與 $\bar{H}_0$ ， $\bar{E}$ 與 $\bar{H}$ 為受擾動後共振腔內的電磁場， $\omega_0$ 與 $\omega$ 分別為空腔與受擾動後共振腔的共振頻率，上述電磁場皆可用

Maxwell 旋度方程式以下列四式表示：

$$\nabla \times \bar{E}_0 = -j\omega_0 \mu \bar{H}_0 \quad (3-11)$$

$$\nabla \times \bar{H}_0 = j\omega_0 \varepsilon \bar{E}_0 \quad (3-12)$$

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega(\mu + \Delta\mu)\bar{H} \quad (3-13)$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega(\varepsilon + \Delta\varepsilon)\bar{E} \quad (3-14)$$

將(3-11)取共軛複數，再乘上 $\bar{H}$ ，另外將(3-14)乘上 $\bar{E}_0^*$ 可得：

$$\bar{H} \cdot \nabla \times \bar{E}_0^* = j\omega_0 \mu \bar{H} \cdot \bar{H}_0^* \quad (3-15)$$

$$\bar{E}_0^* \cdot \nabla \times \bar{H} = j\omega(\varepsilon + \Delta\varepsilon)\bar{E}_0^* \cdot \bar{E} \quad (3-16)$$

將式(3-15)(3-16)相減利用向量恆等式 $\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot \nabla \times \bar{A} - \bar{A} \cdot \nabla \times \bar{B}$  可得：

$$\nabla \cdot (\bar{E}_0^* \times \bar{H}) = j\omega_0 \mu \bar{H} \cdot \bar{H}_0^* - j\omega(\varepsilon + \Delta\varepsilon)\bar{E}_0^* \cdot \bar{E} \quad (3-17)$$

以同樣方法將(3-12)取共軛複數再乘上 $\bar{E}$ ，將(3-13)乘上 $\bar{H}_0^*$ 可得：

$$\bar{E} \cdot \nabla \times \bar{H}_0^* = -j\omega_0 \varepsilon \bar{E}_0^* \cdot \bar{E} \quad (3-18)$$

$$\bar{H}_0^* \cdot \nabla \times \bar{E} = -j\omega(\mu + \Delta\mu) \bar{H}_0^* \cdot \bar{H} \quad (3-19)$$

將式(3-18)(3-19)相減利用向量恆等式可得：

$$\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}_0^*) = -j\omega(\mu + \Delta\mu) \bar{H}_0^* \cdot \bar{H} + j\omega_0 \varepsilon \bar{E}_0^* \cdot \bar{E} \quad (3-20)$$

將(3-17)(3-20)相加，對 $V_0$ 做體積分與利用散度定理，可得

$$\begin{aligned} & \int_{V_0} \nabla \cdot (\bar{E}_0^* \times \bar{H} + \bar{E} \times \bar{H}_0^*) dV \\ &= \oint_{S_0} (\bar{E}_0^* \times \bar{H} + \bar{E} \times \bar{H}_0^*) d\bar{s} = 0 \\ &= j \int_{V_0} \{ [\omega_0 \varepsilon - \omega(\varepsilon + \Delta\varepsilon)] \bar{E}_0^* \cdot \bar{E} + [\omega_0 \mu - \omega(\mu + \Delta\mu)] \bar{H}_0^* \cdot \bar{H} \} dV \end{aligned} \quad (3-21)$$

將(3-21)整理可得下列兩式

$$\begin{aligned} & j\omega \left[ \int_{V_0} \Delta\varepsilon \bar{E} \cdot \bar{E}_0^* dV + \int_{V_0} \Delta\mu \bar{H} \cdot \bar{H}_0^* dV \right] \\ &+ j(\omega - \omega_0) \left[ \int_{V_0} \varepsilon \bar{E} \cdot \bar{E}_0^* dV + \int_{V_0} \mu \bar{H} \cdot \bar{H}_0^* dV \right] \end{aligned} \quad (3-22)$$

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{- \int_{V_0} (\Delta\varepsilon \bar{E} \cdot \bar{E}_0^* + \Delta\mu \bar{H} \cdot \bar{H}_0^*) dV}{\int_{V_0} (\varepsilon \bar{E} \cdot \bar{E}_0^* + \mu \bar{H} \cdot \bar{H}_0^*) dV} \quad (3-23)$$

(3-23)式為共振腔受材料微擾後，共振頻率變動的公式，假設 $\varepsilon$ 與 $\mu$ 的變化量很小，未受微擾前的 $\bar{E}_0$ 與 $\bar{H}_0$ 近似於 $\bar{E}$ 與 $\bar{H}$ ，則共振頻率改變的百分比為

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} \cong \frac{- \int_{V_0} (\Delta\varepsilon |\bar{E}_0|^2 + \Delta\mu |\bar{H}_0|^2) dV}{\int_{V_0} (\varepsilon |\bar{E}_0|^2 + \mu |\bar{H}_0|^2) dV} \quad (3-24)$$

### 3.3.1 複數介電常數公式推導[69, 72]

量測介電係數時，將試片置於共振腔內電場最強且磁場最弱處，因此

式(3-23)可改寫成：

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{-\int_{V_s} \Delta \epsilon \bar{E} \cdot \bar{E}_0^* dV}{2 \int_{V_0} \epsilon |\bar{E}_0|^2 dV} \quad (3-25)$$

$V_s$  與  $V_0$  代表試片與共振腔體積，介電係數改變量  $\Delta \epsilon = \epsilon_s - \epsilon_0$  且  $\epsilon_s = \epsilon_r \epsilon_0$ ，

(3-25)式改寫成：

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{-\int_{V_s} (\epsilon_r - 1) \bar{E} \cdot \bar{E}_0^* dV}{2 \int_{V_0} |\bar{E}_0|^2 dV} \quad (3-26)$$

$TE_{mnl}$  模時的電場代入(3-26)式可得：

$$\begin{aligned} \frac{\omega - \omega_0}{\omega} &= -\left(\frac{\epsilon_r - 1}{2}\right) \frac{\int_{V_s} |\bar{E}_0|^2 dv}{\int_{V_0} |\bar{E}_0|^2 dv} \\ &= -\left(\frac{\epsilon_r - 1}{2}\right) 4 \frac{V_s}{V_0} \end{aligned} \quad (3-27)$$

若頻率偏移量為複數，則實部與虛部表示如下：

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{f_s - f_0}{f_s} + \frac{j}{2} \left( \frac{1}{Q_s} - \frac{1}{Q_0} \right) \quad (3-28)$$

介電常數實部與虛部以下兩式表示：

$$\epsilon' = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{f_0 - f_s}{f_s} \right) \frac{V_0}{V_s} \quad (3-29)$$

$$\epsilon'' = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{Q_s} - \frac{1}{Q_0} \right) \frac{V_0}{V_s} \quad (3-30)$$

### 3.3.2 複數導磁率公式推導[71]

量測導磁率時，將試片置於共振腔內磁場最強且電場最弱處，因此式

(3-23)可改寫成：

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{-\int_{V_s} \Delta\mu \bar{H} \cdot \bar{H}_0^* dV}{2\mu_0 \int_{V_0} |\bar{H}_0|^2 dV} \quad (3-31)$$

導磁率變化量  $\Delta\mu = \mu_s - \mu_0$  與  $\mu_s = \mu_r \mu_0$ ，可得

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{-\int_{V_s} (\mu_r - 1) \bar{H} \cdot \bar{H}_0^* dV}{2 \int_{V_0} |\bar{H}_0|^2 dV} \quad (3-32)$$

$TE_{mnl}$  模時的磁場代入(3-32)式可得：

$$\int_{V_0} |\bar{H}_0|^2 dV = \frac{C^2 V_0^2 (\lambda_g^2 + 4a^2)}{4 \lambda_g^2} \quad (3-33)$$

$$(\mu_r - 1) \int_{V_0} \bar{H} \cdot \bar{H}_0^* dV = (\mu_r - 1) \frac{4C^2 a^2 V_s}{\lambda_g^2} \quad (3-34)$$

將(3-33)(3-34)兩式代入(3-32)式可得：

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -(\mu_r - 1) \frac{8a^2}{(\lambda_g^2 + 4a^2)} \frac{V_s}{V_0} \quad (3-35)$$

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{f_s - f_0}{f_s} + \frac{j}{2} \left( \frac{1}{Q_s} - \frac{1}{Q_0} \right) \quad (3-36)$$

導磁率實部與虛部以下兩式表示：

$$\mu' = 1 + \frac{(\lambda_g^2 + 4a^2)}{8a^2} \frac{(f_0 - f_s)}{f_s} \frac{V_0}{V_s} \quad (3-36)$$

$$\mu'' = \frac{(\lambda_g^2 + 4a^2)}{16a^2} \frac{V_0}{V_s} \left( \frac{1}{Q_s} - \frac{1}{Q_0} \right) \quad (3-37)$$

$Q_s$  與  $Q_0$  為試片置入空腔與空腔時的品質因素，而  $f_s$  與  $f_0$  分別代表有

試片與無試片在腔體內的共振頻率，當  $TE_{10n}$  模時， $\lambda_g = 2d/n$ ， $d$  為共振腔的長度， $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ 。

### 3.4 Drude model 理論[83]

光與金屬性物質的交互作用主要是電磁波對於金屬性物質組成中的電荷所產生的影響，導致電荷密度在空間分佈中的變化、能階躍遷與極化等效應。由於金屬內部具有可任意移動之自由電子，這些自由電子受到外加電磁場的作用時的行為表現，主導了此一金屬物質的光學性質。

金屬的導電率一般會隨著外加頻率的改變而變化，Drude model 可以用來解釋此一現象，在外加電場作用下，金屬內的自由電子沿著與電場反方向移動而形成電流，由於自由電子在運動過程中，將會與晶格中的缺陷或原子核產生碰撞，即為電阻形成的原因。但每個電子並不是都往同一個方向移動，因此對於描述金屬內部的自由電子運動狀態，需有別於以往的自由電子模型，而 Drude model 為簡單且有效的電子運動模型如圖 3-2。

Drude model 有兩大假設，第一為自由電子與其他電子或者原子核之間沒有任何電磁場作用時，當受到外加電場的作用時產生的運動將會遵守牛頓運動定律。第二假設為自由電子在運動的過程中將會與晶體中之原子核晶格缺陷產生碰撞而改變方向，當單位時間內與原子核產生碰撞的機率設為  $1/\tau$ ， $\tau$  為鬆弛時間(relaxation time)約為  $10^{-14}$  s，在 Drude model 中，金屬自由電子受外加電場作用時的運動方程式可寫成式(3-38):

$$\frac{d\bar{J}}{dt} + \frac{1}{\tau}\bar{J} = \frac{Ne^2}{m}\bar{E}_{ext} \quad (3-38)$$

$\bar{J} = N(-e)\bar{v}$  為電流密度， $N$  自由電子密度， $\bar{v}$  設為在外加電場作用下每個電子之移動速度， $\bar{E}_{ext}$  為外加電場。

當外加電場為 0 時由式(3-38)可解得  $\bar{J} = \bar{J}_0 e^{-t/\tau}$ ，代表當電流形成後將會隨著時間很快地衰減掉，因此對於金屬的電磁性質幾乎不造成影響。若外加電場為不隨時間變化的靜電場時，所形成的電流密度也會是不隨時間變化之靜電流，亦即  $d\bar{J}/dt = 0$ ，式可得  $\bar{J} = (Ne^2\tau/m)\bar{E}_{ext}$ ，由歐姆定律公式

$\bar{J} = \sigma_0 \bar{E}_{ext}$  對應下，可以得到電流密度正比於外加電場之比例常數

$\sigma_0 = Ne^2\tau/m$ ，此常數即為金屬之靜電導率(static conductivity)，由結果可知當一金屬的自由電子之密度愈大或弛豫時間愈長，其靜電導率愈大。考慮外加電場隨時間作諧波振盪即  $\bar{E}_{ext} = \bar{E}_{(f)} e^{-i\omega t}$ ，由式(3-38)之運動方程式可得

式(3-39):

$$\bar{J} = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau} \bar{E}_{ext} \equiv \sigma_{(\omega)} \bar{E}_{ext} \quad (3-39)$$

(3-39)式中  $\sigma_{(\omega)} = \sigma_0/(1-i\omega\tau)$ ，此結果說明了金屬中自由電子造成的電導率將會隨著外加電磁場頻率的不同而改變。

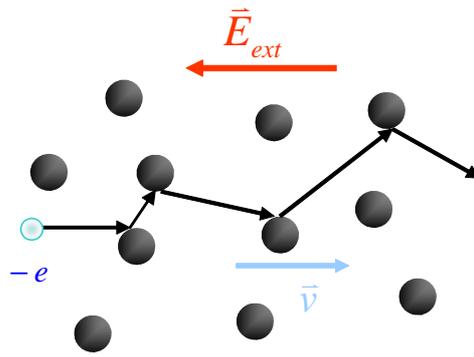


圖 3-2 外加電場作用下，Drude model 中金屬自由電子運動示意圖[83]

金屬物質中除了自由電子外，另外也有束縛電子的存在，這些束縛電子對於電磁波的反應就如同介電質一樣，會產生極化效應，若電磁場與金屬性物質之交互作用，則自由電子形成的電流密度與束縛電子所形成的電極化強度則無太大的區別。假設束縛電子在交變電場作用下偏離正電荷中心之位移為  $\vec{r}$  如圖 3-3 產生的電極化強度為  $\vec{P} = N_b(-e)\vec{r}$ ， $N_b$  為束縛電子密度，電極化強度對時間微分可得式(3-40):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = N_b(-e) \frac{d\vec{r}}{dt} = N_b(-e)\vec{v}_b = \vec{J}_b \quad (3-40)$$

$\vec{v}_b$  代表束縛電子在電場交變過程中移動速度，式(3-40)的結果說明了隨時間變化之電極化強度可視為一種電流密度。而這也代表在交變電場作用下，自由電子反應產生的電流密度也可視為電極化強度。考慮外加電場  $\vec{E}_{ext}$  隨時間作角頻率  $\omega$  之諧波振盪時，式(3-39)可改寫成式(3-41):

$$\vec{J} = \frac{\sigma(\omega)}{-i\omega} \frac{\partial \vec{E}_{ext}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{i\sigma(\omega)}{\omega} \vec{E}_{ext} \right] \quad (3-41)$$

由式(3-40)與(3-41)可以定義出自由電子所形成之電極化強度為式(3-42):

$$\bar{P} = \frac{i\sigma(\omega)}{\omega} \bar{E}_{ext} = -\frac{Ne^2}{m} \frac{1}{(\omega^2 + i\omega\gamma_D)} \bar{E}_{ext} \quad (3-42)$$

式(3-42)中  $\gamma_D = \tau^{-1}$  為 Drude model 中自由電子運動的碰撞頻率

(collision frequency)或是阻尼係數(damping constant)。從式(3-42)可看出在

$\gamma_D$  很小或外加電磁波頻率遠大於電子碰撞頻率時，金屬中自由電子所形

成的電極化向量與外加電場方向相反，所以極化產生的感應電場方向與外

加電場反方向。在電磁波頻率不是很大的情形時，式(3-42)之極化產生的

感應電場大小幾乎與外加電場相同，這一結果即造成金屬內部之電場總和

趨近於零，電磁場能量會完全被排斥出來，使得電磁波無法穿透到金屬內

部，即為金屬對於電磁波之遮蔽效應。

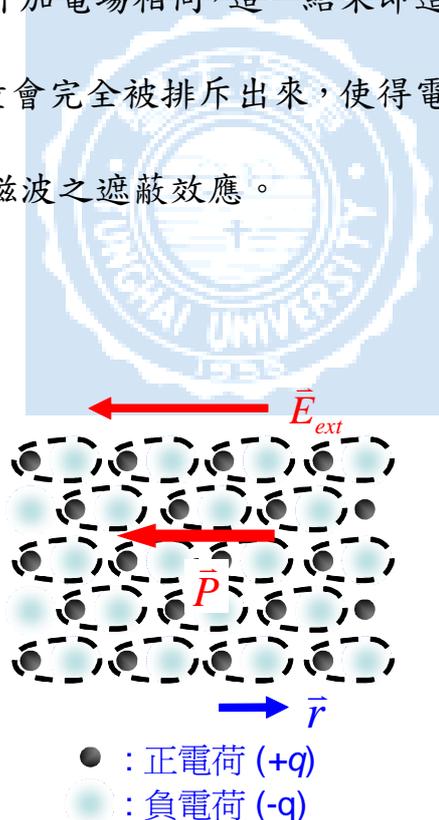


圖 3-3 晶格中之束縛電子受外加電場作用示意圖[83]

對於電磁波在物質中的傳播特性，可由介電常數等參數來描述，利用

式(3-42)所得之自由電子極化強度表示式，以及電位移向量的定義，可以得到在電磁波作用下金屬內部自由電子所反應之介電常數為式(3-43):

$$\varepsilon_{(\omega)} = 1 + \frac{i\sigma_{(\omega)}}{\varepsilon_0\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma_D} \quad (3-43)$$

其中  $\omega_p \equiv (Ne^2/m\varepsilon_0)^{1/2}$ ，即為金屬之電漿共振頻率(plasma frequency)。介電常數之實部與虛部可分別表示如下：

$$\varepsilon' = \varepsilon_R = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_D^2} \quad (3-44)$$

$$\varepsilon'' = \varepsilon_I = \frac{\omega_p^2\gamma_D}{\omega(\omega^2 + \gamma_D^2)} \quad (3-45)$$

一般金屬電漿共振頻率位在紫外光頻率，大於  $\gamma_D$ ，依(3-44)式可知在頻率未達電漿共振頻率時，在微波頻率下介電常數實部應為負值，且隨頻率增加而上升趨近於零，而虛部值隨頻率上升而下降至零。文獻中以銻為例，可得結果如圖 3-4，且文獻[84]的理論說明了金屬在微波頻段的介電常數都應該為負值，實部隨頻率增加而上升，虛部隨頻率增加而降低。

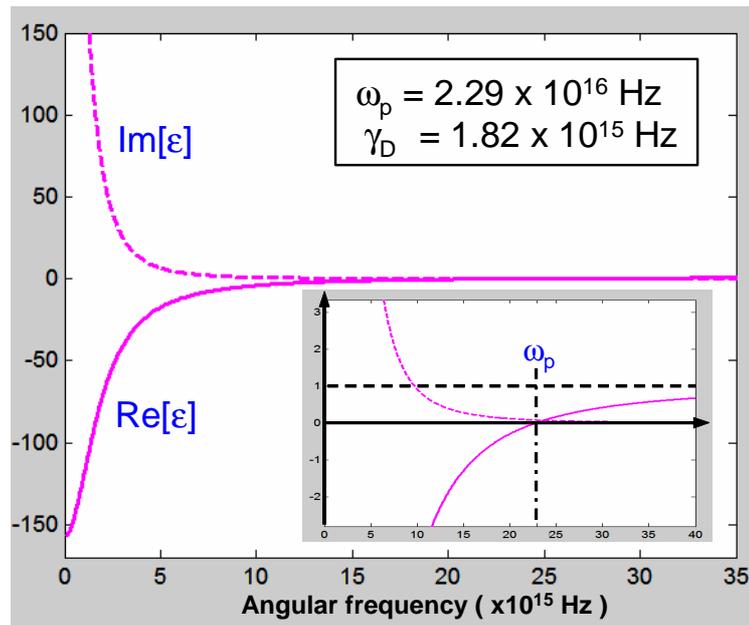


圖 3-4 銻介電常數隨頻率變化[83]

### 3.5 等效介質理論(Effective Medium Theory, EMT)

等效介質理論廣義上來說，是在計算兩種物質混和後等效的物理性質，如導電率、折射率與介電常數等。最早等效介質理論為Maxwell-Garnett理論，是討論折射率的問題，後來經由Bruggeman對Maxwell-Garnett理論做為修正後，便常用來計算塊材的等效介電常數，經修正後的理論稱為effective medium approximation(EMA)[85]。

#### Effective Medium Theory(EMT)[86]

介電常數為一個巨觀的物理量，當電磁場與介電質作用時，介電質內微觀的原子或分子會集體對外加電磁場產生反應，產生極化作用，就是所

謂的介電常數。而在介電質內部的一個小區域內的電場是多少，利用區域電場來說明，在介電質內定出一小區域如圖3-5，再把全部會對此區域有貢獻的電場累加起來可以得到在此區域的電場，這個電場稱為區域電場 (Local Field):

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (3-46)$$

(3-46)式稱為 Lorentz local field relation，加入兩電磁學中的關係式

$$\vec{P} = \sum_j N_j \alpha_j (\vec{E}_{loc}) \quad (3-47)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (3-48)$$

可得式(3-49)

$$\frac{(\epsilon_{eff} / \epsilon_0) - 1}{(\epsilon_{eff} / \epsilon_0) + 2} = \frac{1}{3\epsilon_0} \sum_j N_j \alpha_j \quad (3-49)$$

這裡的介電常數為等效介電常數  $\epsilon_{eff}$ ， $\alpha$  為極化率， $N$  是極化率為  $\alpha$  的原子或分子數。對於一個體積為  $V$  介電常數為  $\epsilon_A$  的球形物體其極化率為

$$\alpha = 3\epsilon_0 \left( \frac{(\epsilon_A / \epsilon_0) - 1}{(\epsilon_A / \epsilon_0) + 2} \right) V \quad (3-50)$$

將(3-50)代入(3-49)式，並將外圍介質從自由空間推廣為  $\epsilon_B$  的介質可以得到：

$$\frac{\epsilon_{eff} - \epsilon_B}{\epsilon_{eff} + 2\epsilon_B} = f_A \frac{\epsilon_A - \epsilon_B}{\epsilon_A + 2\epsilon_B} \quad (3-51)$$

(3-51)式為 Maxwell-Garnett 公式，為 EMT 理論的計算公式，它所代表的物理意義是當兩個介電常數分別為  $\epsilon_A$  和  $\epsilon_B$  的介質 A、B 均勻的混合在一起時， $f_A$  為介質 A 所佔的體積比，但  $f_A$  要非常的小至少在 0.1 以下，

這時介質 A 與介質 B 混合的等效介電常數為  $\epsilon_{eff}$ 。

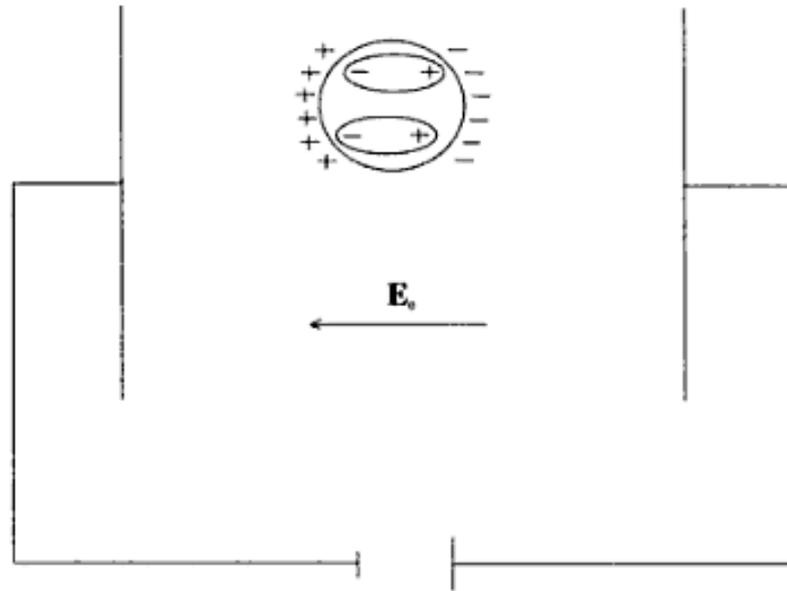


圖 3-5 區域電場示意圖[86]

### Effective Medium Approximation(EMA)

因為 EMT 理論在使用上有一重要限制，在公式中的 A 與 B 的體積比必須相差非常大，在使用上造成不便，若 A 與 B 的體積各佔 50%，使用公式中的若將 A 與 B 互換，會造成不一樣的公式，所以 EMT 只適用於 A 與 B 的體積比相差非常大時才適用。

因此 Bruggeman 推導了另一適用範圍更廣的等效介質理論，稱為 Effective Medium Approximation，簡稱 EMA，為公式(3-52)

$$f_A \frac{\epsilon_A - \epsilon_{eff}}{\epsilon_A + 2\epsilon_{eff}} + f_B \frac{\epsilon_B - \epsilon_{eff}}{\epsilon_B + 2\epsilon_{eff}} = 0 \quad (3-52)$$

式(3-46)中物理意義與 EMT 完全一樣， $f_B$  為代表介質 B 所含的體積

比，就算當 A 與 B 的體積比相差不大，仍適用 EMA 理論公式。而若超過兩種物質混和而成介電質，可將公式延伸到如式(3-53)所示

$$\sum_i f_i \left( \frac{\epsilon_i - \epsilon_{eff}}{\epsilon_i + 2\epsilon_{eff}} \right) = 0 \quad (3-53)$$

$f_i$  為各混合物的體積比，但因 EMA 與 EMT 理論都是在靜電場下推導而出，是否能適用於時變電磁場，文獻[77]指出要在時變電磁場適用 EMA 與 EMT 理論，則電磁波波長要遠大於材料的尺寸。而在本論文中量測頻率約在 7 ~ 14 GHz 範圍，其波長在 4 cm ~ 2 cm 之間遠大於 Buckypaper 的厚度。

