

東海大學統計研究所

碩士論文

指導教授：劉家頤博士

台灣地區之地震發生頻度分析--以群集卜瓦  
松過程為適配工具

A study on earthquakes in Taiwan via  
frequency approach--an application of cluster  
Poisson processes.

研究生：朱家儀  
中華民國一零二年七月

## 摘要

我們知道有許多可以記錄成點過程的資料，例如：地震的發生、神經細胞發射的傳導流或交通流量等，其中地震的發生是由較強烈的主震引發一系列的餘震，發生過程類似群集卜瓦松過程。本研究即是以近年來台灣的地震發生過程作為研究資料，採用群集卜瓦松過程來建立地震模型，利用群集卜瓦松過程的頻譜特性及碎形特性觀察模型中參數的影響，推測配適真實地震資料的參數，進一步做比較，最後證實群集卜瓦松過程能夠相當近似台灣地區過去一年半以來的地震發生過程。



## 致謝詞

首先要感謝劉老師一年來的用心指導，讓我從一開始完全不懂到開始寫程式了解論文內容，最後終於把所有論文完成了，在這期間，我學到許多以前不太了解的知識，讓我對統計學方面有更進一步的了解。在這兩年研究所的求學過程中，我要感謝所有老師及同學，在我遇到瓶頸時能給我幫助，以及感謝默默支持我的家人。

102.07



# 目錄

第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機與目的.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.2.1 隨機點過程.....	2
1.2.2 卜瓦松過程.....	3
1.2.3 均齊性卜瓦松過程.....	4
1.2.4 非均齊性卜瓦松過程.....	4
1.2.5 自我引發點過程.....	4
1.3 地震概述.....	5
1.3.1 地震成因概論.....	5
1.3.2 地震相關名詞.....	6
第二章 群集卜瓦松過程.....	8
2.1 群集卜瓦松過程與地震資料間之關係.....	8
2.2 群集卜瓦松過程.....	8
2.2.1 群集卜瓦松過程之定義.....	8
2.2.2 主要過程內間隔時間之分配.....	10
2.2.3 群集內間隔時間之分配.....	10
2.2.4 群集個數分配.....	11
2.3 頻譜特性與應用分析.....	12
2.3.1 資料種類與特性.....	12
2.3.2 自我共變異函數.....	12
2.3.3 自我相關函數.....	13
2.3.4 頻譜密度函數.....	13
2.3.5 群集卜瓦松過程之頻譜特性.....	14
2.4 碎形特性與應用分析.....	15
2.4.1 碎形特性.....	15
2.4.2 碎形特性之點過程.....	16
2.4.3 群集卜瓦松過程之碎形特性.....	17
2.4.4 以發生次數為測量基準之碎形分析方法.....	18
第三章 模擬過程及實證分析.....	21
3.1 真實地震資料之特性.....	21
3.1.1 真實地震資料之頻譜特性.....	21
3.2 群集卜瓦松過程之模擬.....	24
3.2.1 參數之估計過程.....	24
3.2.2 模擬地震資料之頻譜特性.....	36

3.2.3 模擬地震資料之碎形特性.....	37
3.3 真實地震資料與適配模型之比較.....	39
第四章 結論與後續研究.....	46
4.1 結論.....	46
4.2 後續研究方向.....	46
參考文獻.....	47



# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機與目的

台灣在地理位置上，西臨歐亞大陸板塊，東環菲律賓海板塊，由於兩大板塊間長期互相擠壓使得台灣地區地震發生相當頻繁，屬於地震活躍區，也因為這樣的地體構造環境，使得台灣成為世界上著名的造山運動及地殼變形研究區域。

依地震的發生型態，台灣地區主要分成三個地震帶，分別為西部地震帶、東部地震帶及東北部地震帶。西部地震帶包括整個台灣西部地區，主要係因為板塊碰撞前緣的斷層作用而引發地震活動，因為震源深度較淺加上人口稠密及工商建設發達，因此發生大地震時容易造成嚴重災情。東部地震帶係直接肇因於歐亞板塊與菲律賓海板塊碰撞所造成，地震發生頻率高且震源深度較深。東北部地震帶係受沖繩海槽擴張作用影響，多屬淺層地震，並伴隨有地熱與火山活動現象[交通部中央氣象局，民國 97 年]。

身處地震頻繁的台灣地區，對於地震的認知是不可或缺的重要功課，但地震屬於天然災害，至今仍無法有效預測，不過我們知道地震的發生是隨機的，且可被記錄成點過程資料，因此，本研究即應用近似地震發生模式的群集卜瓦松過程來建立地震模型，並透過模擬，最後證實群集卜瓦松過程是可以近似地震的發生模式，希望能利用此研究對地震有進一步的認識。

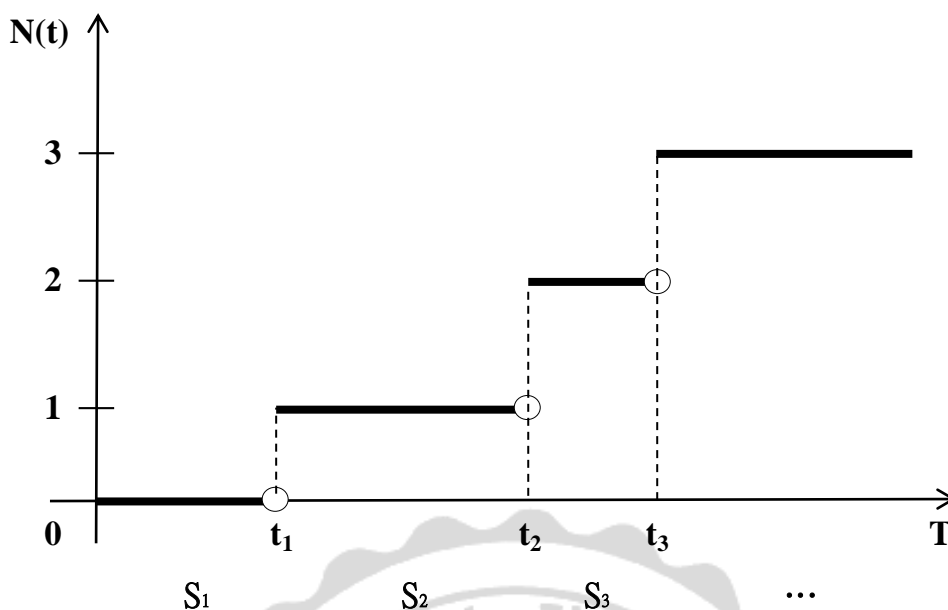
## 1.2 文獻回顧

### 1.2.1 隨機點過程 (Stochastic point process)

宇宙萬物中有許多不規則變動的自然現象，經過研究後發覺，其實一切事物的變化都遵循著某種規則，在統計學上我們說它服從某些特定機率分配函數而變化，由此發展出的統計理論稱為隨機過程(stochastic process) [Ozaki, 1992]。

若一隨機過程的實現值(realizations)是由一序列的點事件所組成，則稱為隨機點過程，也可簡稱為點過程。以時間觀點來看，一個隨機點過程是指在連續時間中某特定事件的隨機發生，範圍落在時間軸的半實數線上 $[0, \infty)$ 。因此，一個點過程的現實值可用事件發生時間(occurrence times)之序列 $\{t_n; n=0, 1, \dots\}$ 來描述，但此序列僅代表了事件發生的時間，並無法展現出一個點過程所具有的特性。為了提供更完整的訊息及強調點過程的特性，通常利用事件發生間隔時間(sojourn times)或次數兩種不同的方式將 $\{t_n; n=0, 1, \dots\}$ 拆解成新的序列，而新的序列將具有許多統計意義，並且可將點過程的特徵彰顯出來。

如下圖， $N(t)$ 定義為到時間  $t$  為止，某特定事件發生的累積個數，是一個右連續的階梯函數(step function)，稱為一個計數過程(counting process)。此計數過程 $\{N(t); t \geq 0\}$ 是定義在時間軸  $T=\{t; t \geq 0\}$  上的隨機過程，若在時間區間 $(s, t]$ 上發生的計數過程可記為  $N(s, t)=N(t)-N(s)$ ；其中  $t_0 \leq s < t$  ( $t_0$  表時間軸起點，通常令  $t_0 = 0$ )。另外，事件發生間隔時間之序列記為 $\{S_n; n=1, 2, \dots\}$ ， $S_n = t_n - t_{n-1}$  代表第  $n$  個間隔時間，也就是第  $n$  個事件與第  $n-1$  個事件の間隔時間[Pinsky and Karlin, 2011]。



### 1.2.2 卜瓦松過程 (Poisson process)

所有計數過程最重要的基礎理論為卜瓦松過程，滿足下列條件者稱為卜瓦松過程：

1.  $P[N(t_0)=0]=1$ ，指起始時間點發生 0 次事件的機率為 1，其中  $t_0 = 0$ 。
2.  $\{N(t); t \geq 0\}$  具有獨立之增量，例如： $N(t)$  與  $N(t+\Delta t)-N(t)$  是互相獨立的，指在不重疊的時間區間內，發生事件的次數互相獨立。
3.  $P[N(t+\Delta t)-N(t)=1 | H_t] = \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)$ ，其中  $H_t$  為時間  $t$  之前所發生之事件；當  $\Delta t$  趨近於 0 時，極限  $\frac{P[N(t+\Delta t)-N(t)=1 | H_t]}{\Delta t}$  是一個存在、可積且收斂與時間  $t$  有關之函數，以  $\lambda(t)$  表示，稱為強度函數(intensity function)。

亦即  $\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{P[N(t+\Delta t)-N(t)=1 | H_t]}{\Delta t} \right\}$ 。

4.  $P[N(t+\Delta t)-N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$ ，其中  $o(\Delta t)$  滿足  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right\} = 0$ ；此極限式目的在表示  $o(\cdot)$  之定義，表在極短時間區間內發生兩次或兩次以上事件的機率幾乎為 0。

卜瓦松過程是最簡單也是最重要的一個計數過程，具有精確的模式，是研究其它更複雜之雜計數過程不可或缺的主題[Pinsky and Karlin, 2011]。



### 1.2.3 均齊性卜瓦松過程 (Homogenous Poisson process, HPP)

均齊性卜瓦松過程的強度函數  $\lambda(t)$  為一固定值，不隨時間變動而改變且具無記憶性，指在時間點  $t_0$  事件的發生與否與其他任何時間點  $t (\neq t_0)$  時事件是否發生是完全獨立的。因此，它的事件發生間隔時間序列及發生次數序列皆獨立且服從同樣的分配 (independent and identically distribution; iid)，其中事件發生間隔時間服從指數分配 (exponential distribution) 而事件發生次數則是服從卜瓦松分配。因此均齊性卜瓦松過程滿足以下三個條件：

1.  $\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{P[N(t+\Delta t)-N(t)=1]}{\Delta t} \right\} = k$ ，其中  $k$  為常數。
2.  $P[N(t+\Delta t)-N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$ 。
3.  $P[N(t_0)=0]=1$ 。

### 1.2.4 非均齊性卜瓦松過程 (Nonhomogenous Poisson process, NHPP)

非均齊性卜瓦松過程具無記憶性，但強度函數  $\lambda(t)$  會隨著時間  $t$  而變，即  $\lambda(t)$  為時間  $t$  之函數。因此，非均齊性卜瓦松過程滿足以下三個條件：

1.  $\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{P[N(t+\Delta t)-N(t)=1]}{\Delta t} \right\} = g(t)$ ，其中  $g(t)$  為時間  $t$  之函數。
2.  $P[N(t+\Delta t)-N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$ 。
3.  $P[N(t_0)=0]=1$ 。

### 1.2.5 自我引發點過程 (Self-Exciting point process)

自我引發點過程之強度函數  $\lambda(t)$  會隨著時間  $t$  的變動而改變且會受到過去歷史  $H_t$  的影響。因此，自我引發點過程滿足以下三個條件 [Ozaki, 1979]：

1.  $\lambda(t, H_t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{P[N(t+\Delta t)-N(t)=1 | H_t]}{\Delta t} \right\}$ ，其中  $\lambda(t, H_t)$  為時間  $t$  與過去歷史的函數。
2.  $P[N(t+\Delta t)-N(t) \geq 2 | H_t] = o(\Delta t)$ 。
3.  $P[N(t_0)=0 | H_t]=1$ 。

### 1.3 地震概述

本節主要討論地震的成因以及地震的相關名詞解釋。

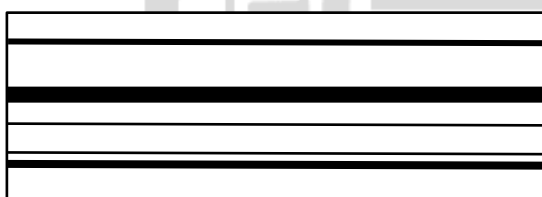
#### 1.3.1 地震成因概論

西元 1911 年美國地質學家李德提出「彈性回跳學說」。根據彈性回跳理論(elastic rebound theory)，就好像扭曲一片鋼片，當鋼片超過其彈性極限時，會突然斷成兩片，此兩片鋼片會彈回原來被扭曲前的位置，而彈跳時鋼片會來回振動，以釋放出因扭曲所貯藏的能量。

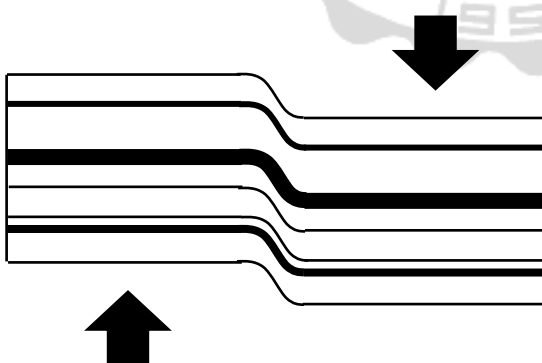
根據以上說法，若假設地殼為彈性體，當地殼受到應力時，會不斷地彎曲或變形並且累積應變能量，當應變能量累積到超出一定限度時，則發生斷折，岩體就會沿著斷面滑動形成斷層，此時沿斷裂面產生的振動便是地震。

地震產生過程之圖示如下：

1. 地殼在未受到任何應力行為前。



2. 地殼受到應力行為而產生扭曲變形。



3. 地殼彈性超過一定限度產生斷折回彈，造成地震，並形成斷層。



以上所述現象稱之為構造地震，是地球上最主要的地震類型，其他地震發生原因尚有火山地震、衝擊地震及激發地震。火山地震的成因為地底壓力過大引起岩漿噴發，造成地面震動。衝擊地震乃是自然或人為引起的撞擊所造成的地面小震動，如地層陷落、山崩、岩崩、地下核爆、隕石撞擊等。激發地震也就是觸發地震，如深井注水、大水庫，其地震規模都不大。

### 1.3.2 地震相關名詞

#### 1. 地震序列：

(1) 前震 (Fore-shock)：同一系列之地震中，於主震之前發生的地震稱為前震，為時甚短且不顯著。

(2) 主震 (Main-shock)：同一系列之地震中規模最大者稱為主震，若最大者有兩個，則先發生者稱為主震。

(3) 餘震 (After-shock)：同一系列之地震中，主震之後發生的地震稱為餘震。

(4) 群震 (Swarm earthquake)：一群不易區分前震、主震及餘震的地震。

#### 2. 地震發生：

(1) 震源 (Hypocenter)：地層發生錯動或斷裂的地點，依震源到地面上的距離分成淺源( $\leq 70\text{km}$ )、中源( $70\text{km}\sim 300\text{km}$ )、深源( $\geq 300\text{km}$ )地震。

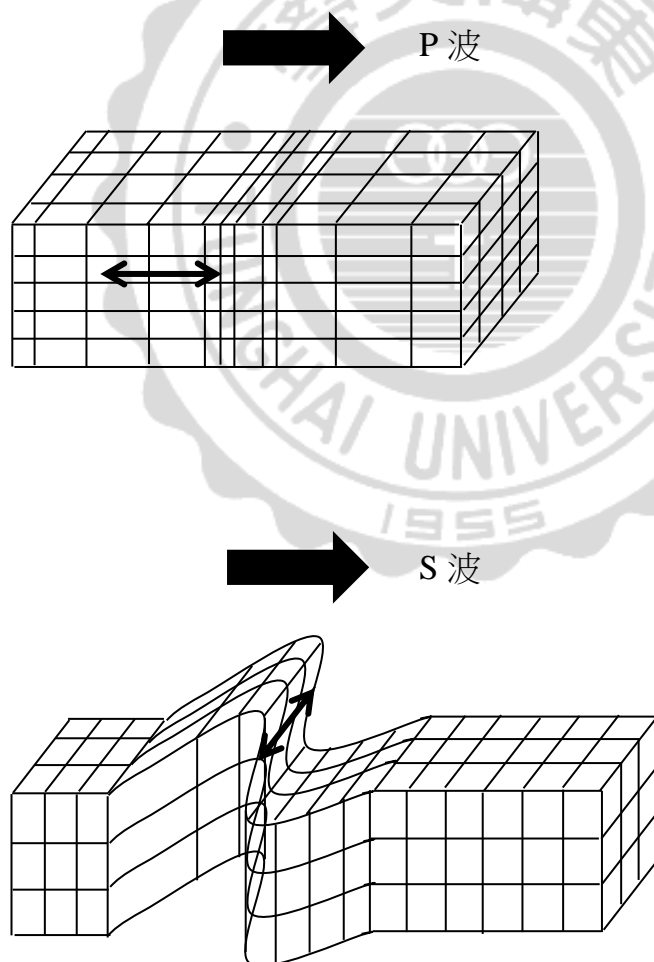
(2) 震央 (Epicenter)：震源垂直延伸到地表的投影點。

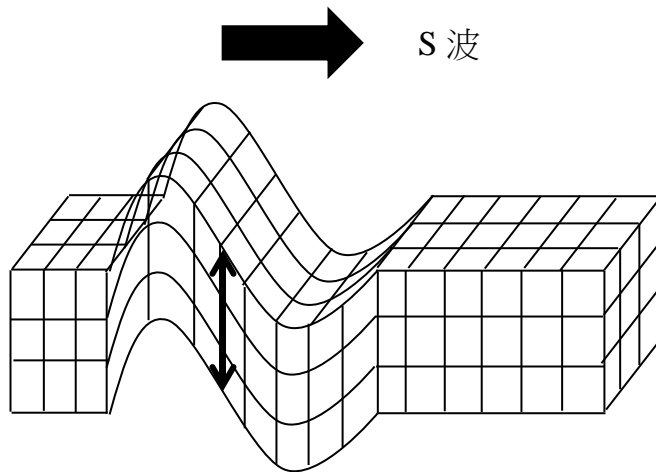
(3) 斷層：兩側岩石沿著岩石層裡一個破裂面發生相對移動，所造成的岩層錯動現象，便是斷層。此破裂面稱為斷層面，而斷層面在地面上出露的線稱為斷層線。


(4) 芮氏地震規模 (Richter magnitude scale)：地震釋出能量大小的量化，每增加 1.0，代表地震所釋放的能量增加約 30 倍。

(5) 地震強度 (Intensity)：描述地震所造成的破壞大小，共分成八級；0 級為無感，七級為劇震。

(6) 體波 (Body wave)：分為 P 波(primary wave)及 S 波(secondary wave)，可傳遞穿過物體內部；P 波的行進方向和物體振動方向平行，而 S 波的行進方向和物體振動方向垂直。詳細圖示如下。





 體波行進方向。

 物體振動方向。

## 第二章 群集卜瓦松過程

### 2.1 群集卜瓦松過程與地震資料間之關係

上一章提及，若一隨機過程其現實值是由一序列的點事件所組成的，稱之為隨機點過程。而實際紀錄地震的發生可視為一個點過程的現實值，故以點過程來配適地震資料應屬合理。

由[Gruneis, et al., 1989]得知群集卜瓦松過程為一隨機點過程，是由一連串主要事件各自觸發一連串的次要事件而形成之點過程，因為地震發生情形為主震各自引發其餘震，類似群集卜瓦松過程，因此本研究嘗試以群集卜瓦松過程為模型模擬地震資料。

### 2.2 群集卜瓦松過程 (Clustering Poisson processes, CPP)

#### 2.2.1 群集卜瓦松過程之定義

群集卜瓦松過程是以卜瓦松過程為基礎所發展而成。一個群集卜瓦松過程，顧名思義是由許多群集內含不同個數之隨機事件依發生時間所組成；它包含主要過程與次要過程兩個重要部分，說明如下：

1. 主要過程 (primary process)

主要過程為一連串主要事件所組成的事件發生序列。在地震中，主要事件即扮演主震的角色。

## 2. 次要過程 (secondary process)

在主要過程中，每個主要事件皆會各自觸發(trigger)一連串的次要事件，稱之為群集。一個主要事件觸發一連串次要事件，共發生  $M$  個隨機事件， $M$  為一隨機變數，具有特殊機率分配(詳見 2.2.4)。因此，當  $M=1$  時，表示此過程只有主要事件，未觸發任何次要事件，即為一均齊性卜瓦松過程，不具群集現象。當  $M > 1$  時，表示此過程為主要事件與其觸發的次要事件所組成，具有群集現象，即為一群集卜瓦松過程。群集間彼此是獨立的，具有相同分配，這些群集的集合即為次要過程。在地震中，次要事件即扮演餘震的角色。

## 3. 完整過程 (complete process)

將所有次要過程的發生事件依發生時間排序後，即形成一個由隨機事件所構成的無差別序列(indistinguishable sequence)。亦即當一完整的群集卜瓦松過程形成後，各群集的結構已合而為一。

以下以圖解方式說明群集卜瓦松過程：

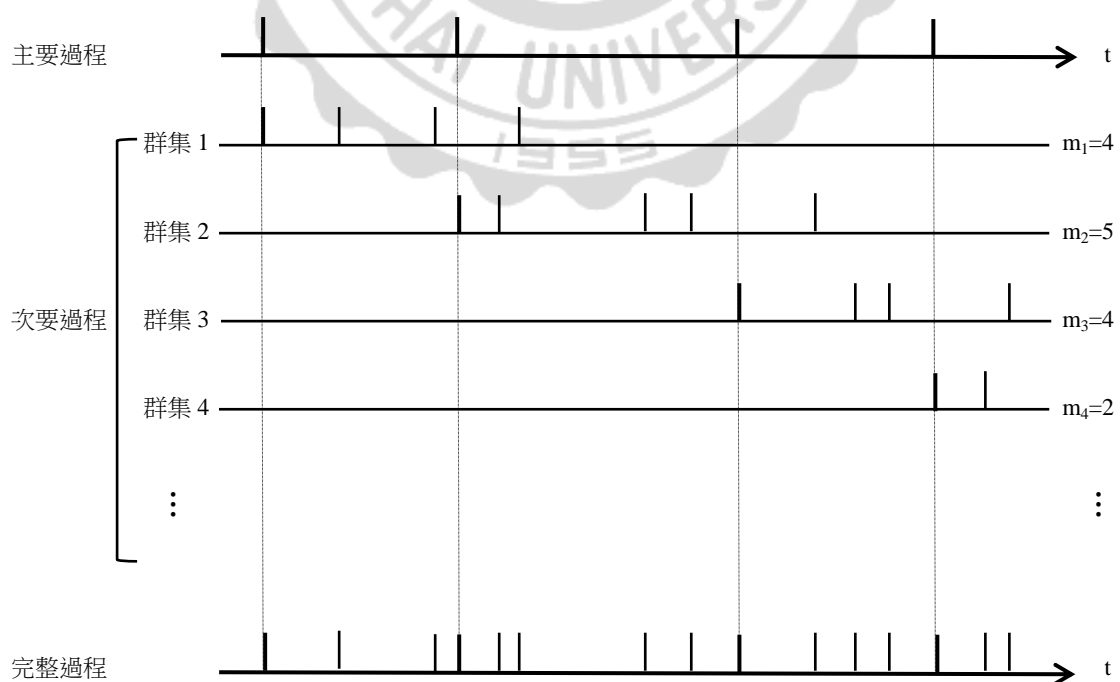


圖 2.1 群集卜瓦松過程。

### 2.2.2 主要過程內間隔時間之分配

主要過程是由一序列的主要事件所構成，這些主要事件運用在地震資料上，我們視為震度較大的主震，意即在時間 $[0, t]$ 間主震發生  $k$  次的機率，在此我們以卜瓦松分配定義之，其機率函數如下：

$$P\{N(t)=k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}; k = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq \lambda t < \infty, \quad (2.1)$$

$\lambda$  是卜瓦松分配的唯一參數，稱為強度參數，卜瓦松分配的期望值與變異皆為  $\lambda t$ 。

若發生次數呈卜瓦松分配，則主要過程內の間隔時間即呈指數分配，其機率密度函數如下：

$$f(x | \lambda) = \lambda e^{-\lambda x}; 0 \leq x < \infty; \lambda > 0, \quad (2.2)$$

$\lambda$  是指數分配的唯一參數，代表主要事件每單位時間的期望發生次數；指數分配的期望值為  $\frac{1}{\lambda}$ ，變異數為  $\frac{1}{\lambda^2}$ 。

### 2.2.3 群集內間隔時間之分配

假設群集內事件發生的間隔時間呈伽瑪分配(gamma distribution)，以隨機變數  $Y$  來表示，其機率密度函數如下：

$$g(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\beta}}; 0 \leq y < \infty; \alpha, \beta > 0, \quad (2.3)$$

其中，

$\alpha$  稱為型態參數(shape parameter)，

$\beta$  稱為尺度參數(scale parameter)，

$\Gamma(\alpha)$  稱為伽瑪函數(gamma function)。

伽瑪函數的數學式如下：

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad (2.4)$$

當伽瑪分配的型態參數  $\alpha=1$  時，函數會退化成指數分配。

下圖為伽瑪分配的重新尺度化圖(rescaled plot)，目的為觀察不同型態參數的伽瑪分配在常態化後的分配圖[陳景祥，民國 101 年]。

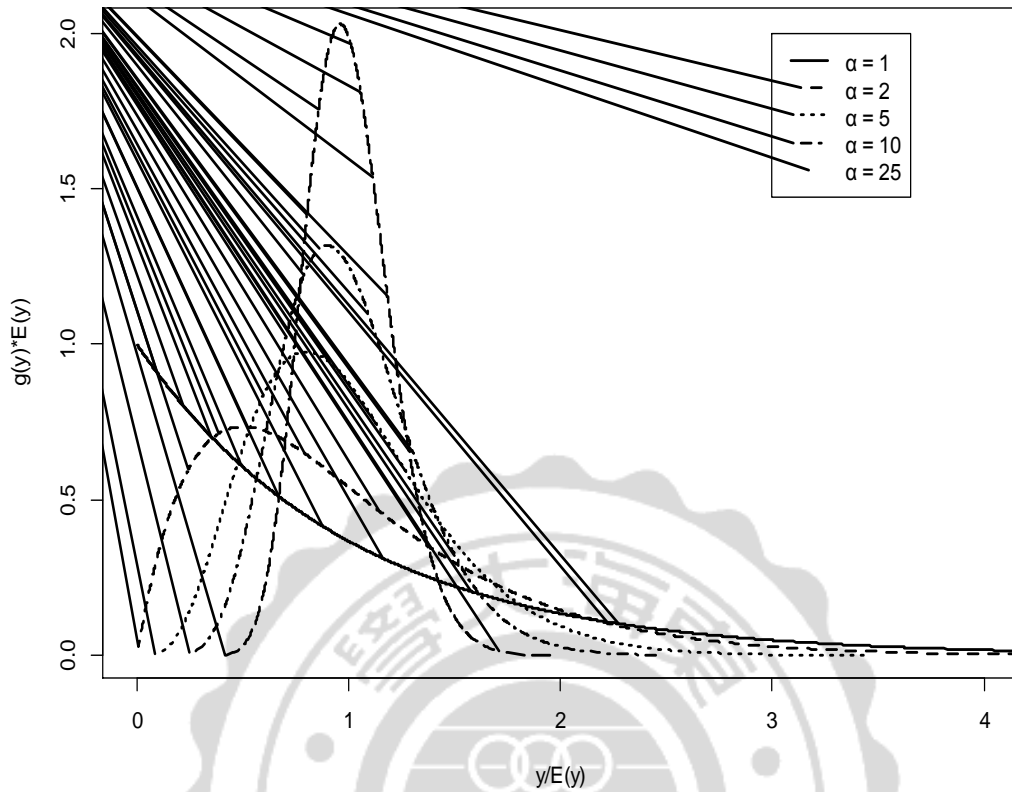


圖 2.2 不同型態參數  $\alpha$  之伽瑪分配重新尺度化圖。

#### 2.2.4 群集個數分配 (Cluster-size distribution)

群集個數分配是指每個群集中事件發生個數所成的分配，群集個數以隨機變數  $M$  來表示，它的特殊機率分配假設如下：

$$P(m) = \frac{m^z}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z}, \quad (2.5)$$

其中，

$N_0$ ：給定的最大群集個數，

$z$ ：特定實數。

期望值為

$$E(M) = \sum_{m=1}^{N_0} m P(m) = \frac{\sum_{m=1}^{N_0} m^{z+1}}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z}, \quad (2.6)$$

二次原動差為



$$E(M^2) = \sum_{m=1}^{N_0} m^2 P(m) = \frac{\sum_{m=1}^{N_0} m^{z+2}}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z} . \quad (2.7)$$

頻譜密度函數  $s(f)$  的型態與群集個數分配  $P(m)$  密切相關，因此對於尋找  $1/f$  頻譜特性(詳見 2.3.5)，群集個數分配有其重要性[Gruneis and Baiter, 1985]。

## 2.3 頻譜特性與應用分析

### 2.3.1 資料種類與特性

時間序列是依等距時間點記錄下來的觀察值所構成的序列，可以視為隨機過程的等距時間觀察值。一時間數列其統計特性不隨時間之變化而改變者稱之為平穩型時間序列。一個平穩型時間數列為一隨機過程之特殊現實值，此種隨機過程之統計特性不隨時間之變化而改變。若一隨機過程具有如此的統計平穩狀態稱之為平穩型隨機過程。

時間數列分析法可分為以下兩大類：

1. 時間定義域分析法 (time domain)：利用自我相關函數作為建立模型之依據。
2. 頻率定義域分析法 (frequency domain)：以頻譜(spectrum)作為分析之工具，又稱頻譜分析(spectral analysis)。

地震的發生可用間隔時間  $\{S_n; n=1, 2, \dots\}$  或計數過程  $\{N(t); t \geq 0\}$  來記錄，兩種紀錄法皆可用以上兩種分析法做分析，而本研究選擇採用 frequency domain 來分析計數過程  $\{N(t)\}$ 。

### 2.3.2 自我共變異函數 (Autocovariance function)

考慮一平穩的隨機序列  $\{Z_t\}$ ，定義其自我共變異函數  $\gamma(k)$  的數學式為

$$\gamma(k) = \text{Cov}(Z_t, Z_{t+k}); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.8)$$

其中  $\text{Cov}(Z_t, Z_{t+k}) = E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)$ ， $\gamma(k) = \gamma(-k)$ ， $k$  為時距(lag)， $\mu = E(Z_t)$ ，指對所有時間  $t$  都有相同值，此為平穩型時間序列之特性。

### 2.3.3 自我相關函數 (Autocorrelation function, ACF)

考慮一平穩的隨機序列 $\{Z_t\}$ ，定義其自我相關函數 $\rho(k)$ 的數學式為

$$\rho(k) = \frac{\text{Cov}(z_t, z_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(z_t)}\sqrt{\text{Var}(z_{t+k})}} = \frac{\gamma(k)}{\sqrt{\gamma^2(0)}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}, \quad (2.9)$$

其中 $\text{Var}(Z_t) = \text{Var}(Z_{t+k}) = \gamma(0)$ ，即在時間 $t$ 及 $t+k$ 具有相同之變異數，此亦為平穩型時間序列之另一特性。

### 2.3.4 頻譜密度函數 (Spectral density function)

考慮一平穩的隨機序列 $\{Z_t\}$ ，其自我共變異函數 $\gamma(k)$ 存在一個單調遞增(monotonically increasing)函數 $S(f)$ ，使得

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikf} dS(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kf) dS(f); \quad (2.10)$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;  $-\pi < f \leq \pi$  ( $f$ : 頻率, 單位是赫茲(Hz)或 1/sec),

其中 $e^{ikf} = \cos(kf) + i \sin(kf)$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ，由尤拉公式(Euler's formula)得到。

(2.10)式稱為自我共變異函數的頻譜展開式，在大部分點過程資料中 $S(f)$ 是連續且可微，故(2.10)式可寫成

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kf) s(f) df; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad -\pi < f \leq \pi, \quad (2.11)$$

其中 $s(f)$ 即為頻譜密度函數。

(2.10)式也可經傅立葉轉換(Fourier transform)得到 $s(f)$ 的長相，如下：

$$s(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-ikf}; \quad (2.12)$$

$e^{-if} = \cos(f) + i \sin(f)$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ;  $-\pi < f \leq \pi$ ,

由上得知，頻譜密度函數是自我共變異函數的一對一傅立葉轉換，且具有偶函數的性質[Brockwell and Davis, 1996]，即 $s(f) = s(-f)$ ，因為

$$\begin{aligned} s(f) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-ikf} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\cos(kf) - i \sin(kf)) \gamma(k) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(-kf) \gamma(k) + 0 \\ &= s(-f), \end{aligned}$$

其中 $\cos(\cdot)$ 與 $\gamma(\cdot)$ 是偶函數而 $\sin(\cdot)$ 是奇函數。

頻譜分析主要是研究時間數列的頻率特性，將數列中的週期波分離出來，此方法注重在解釋而非預測。頻譜密度函數  $s(f)$  是頻率  $f$  的函數，所以當某個頻率具有大的頻譜密度時，表示資料的週期性較顯著。

### 2.3.5 群集卜瓦松過程之頻譜特性

在[Gruneis, et al., 1989]中已廣泛討論過群集卜瓦松過程的頻譜特性，其中群集卜瓦松過程的頻譜密度函數  $s(f)$  包含兩部分，可表示為(2.13)式。右式第一項為白噪音(white noise)，第二項為額外噪音(excess noise)。

$$\begin{aligned} s(f) &= \{E[n_c] E[M]\} + \{2 E[n_c] \frac{c}{(fE[y])^b}\} \\ &= \{E[n_{tot}]\} + \{2 E[n_c] \frac{c}{(fE[y])^b}\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中，

$f$ ：頻率 (frequency)，

$E[n_c]$ ：群集平均發生率 (mean rate of cluster occurrence)，

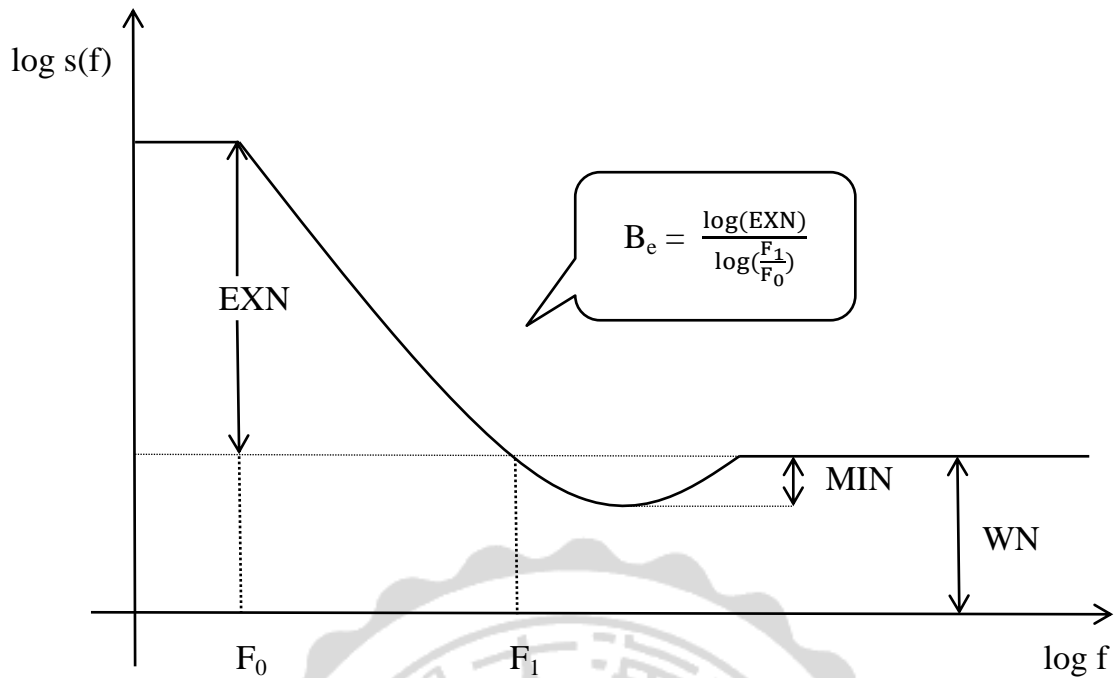
$E[M]$ ：群集平均個數 (mean rate of cluster size)，

$E[y]$ ：群集內事件發生之平均間隔時間，

$c$ ：常數 (constant)。

在頻譜分析中，頻率  $f$  與其頻譜密度  $s(f)$  成反比現象，因此稱為低頻率波動型態(low frequency fluctuation)或  $1/f$  波動型態。通常一碎形隨機點過程的頻譜密度函數在頻率很大時會趨近到一漸進值(asymptotic value) [Lowen and Teich, 1994]，而群集卜瓦松過程正具備此一特性。在數學上， $1/f$  波動型態可被建立為具有碎形特性的隨機過程，關於碎形特性在 2.4 節有詳細說明。

下圖為雙對數尺度頻譜圖(double-log-scale estimated spectrum)，可看出頻率  $f$  與頻譜密度  $s(f)$  成反比現象，且分別由白噪音及額外噪音所組成，其中又以額外噪音為構成頻譜圖  $1/f^b$  波動型態的主要部份。從額外噪音的上下界  $F_0$  與  $F_1$  及範圍  $EXN$  可求出頻譜圖的斜率  $B_e$ ，也就是當頻率  $f$  增加時頻譜密度  $s(f)$  遞減的快慢指標。



$B_e$ ：斜率 (slope) ，

WN：白噪音的範圍，

MIN：超出白噪音水平線的最小值 (minimum value beyond white noise level) ，

EXN：額外噪音的範圍 (range of excess noise beyond white noise level) ，

$F_0$ ：額外噪音下界 (lower limit to excess noise) ，

$F_1$ ：額外噪音上界 (upper limit to excess noise) 。

## 2.4 碎形特性與應用分析

### 2.4.1 碎形特性 (Fractal property)

碎形通常被定義為一個粗糙或零碎的幾何形狀，可以分成數個部分，且每一部分都（至少近似地）是整體縮小後的形狀，即具有自相似 (self-similarity) 的性質 [Fortin, et al., 1992]；以圖示表現碎形特性如下。

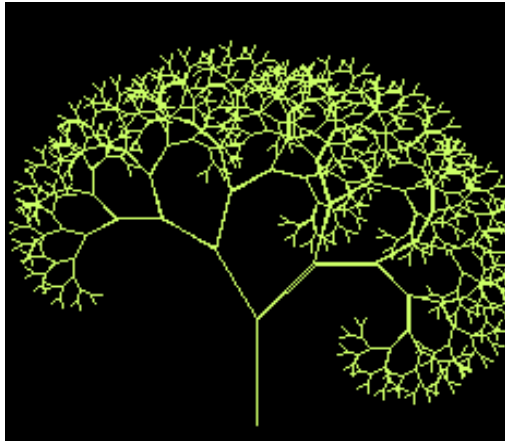


圖 2.3

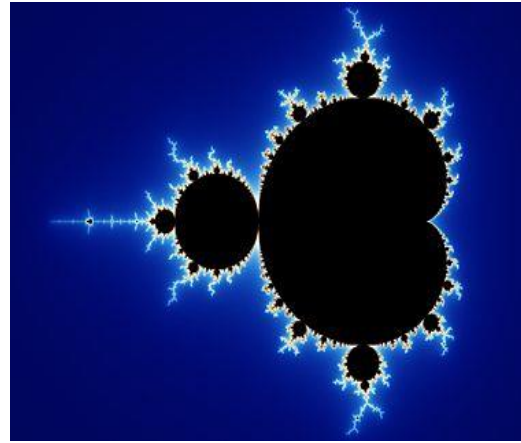


圖 2.4

碎形一開始是由數學而起，後來被廣泛發現於大自然中，如海岸線的形狀、蕨類的葉子及雪花結晶等。近年來，碎形特性的研究已延伸到其他領域。在醫學上，可利用碎形觀念作為組織切片的依據。在生理學上，碎形特性可運用在血管的結構上。在力學上，則可用在斷口分析。在信號傳播上，也可利用碎形進行圖像壓縮以便傳輸。在音樂學上，則可利用旋律中的不同碎形段落重新組合，製作出新的音樂。在藝術領域上，可利用碎形的自身相似性作為繪畫素材，如：美國抽象畫家 Jackson Pollock 的作品「藍色欄杆」即是。另外，在都市成長模擬上也可利用自我相似的成長尺度與時間軸進行都市成長的模擬預測。由此可見，碎形已成為和自然界及人類生活息息相關的新興科學。

#### 2.4.2 碎形特性之點過程 (Fractal point process)

在介紹點過程的碎形特性前，先定義隨機點過程表示法，以下為[Gruneis, et al., 1990]中所提及。

一隨機過程可用以下數學式表示：

$$y(t) = \sum_n \delta(t - t_n), \quad (2.13)$$

其中，

$\delta$ ：Dirac's delta 函數，

$t_n$ ：第  $n$  個事件的發生時間。

一隨機點過程也可用計數函數  $N(\tau)$  定義，如下式：

$$N(\tau) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} y(t) dt ; \tau > 0 , \quad (2.14)$$

代表從  $t_n$  到  $t_n+\tau$  的事件發生次數。

除了在前一小節中提到的自身相關特性外，冪次定理(power-law)關係式亦是具有碎形特性之點過程最大的特徵。若點過程滿足以下冪次定律關係式，則稱之為具有碎形特性之點過程。

$$N(a\tau) = a^H N(\tau) ; t_{\min} < \tau < t_{\max} , \quad (2.15)$$

其中，

$a$ ：尺度因子 (scaling factor) ，

$H$ ：Hurst 指數 (Hurst exponent) 。

碎形過程在時間軸所呈現的結果，其震動幅度的規模變化具有自身相似的性質，其頻譜密度函數與 Hurst 指數有下列相關式：

$$s(f) \propto \frac{1}{f^{2H-1}} ; f_{\min} < f < f_{\max} , \quad (2.16)$$

當  $H = \frac{1}{2}$  時，數列是不相關的(uncorrelation)，可視為一均齊性卜瓦松分配；

當  $\frac{1}{2} < H < 1$  時，此過程被稱為具有長期相關(long-term correlation)的特性。 $H$  可用計數次數的變方來估計，其關係式如下：

$$V(\tau) = \text{var}[N(\tau)] \propto \tau^{2H} . \quad (2.17)$$

### 2.4.3 群集卜瓦松過程之碎形特性

在 2.2.1 節提到，群集卜瓦松過程是由主要過程與主要事件引發的次要過程依事件發生時間排序後所程的無差別之完整過程，在[Gruneis, et al., 1991]中此完整過程可用數學式表示如下：

$$y(t) = \sum_i \sum_{j=1}^M \delta(t - t_i - t_j) , \quad (2.18)$$

其中，

$t_i$ ：主要過程的發生時間點 (time points of the primary process) ，

$t_j$ ：次要過程的發生時間點 (time points of the secondary process) ，

$M$ ：群集個數 (cluster size) 。

在 2.3.5 節提到群集卜瓦松過程的頻譜函數具有以下性質：

$$s(f) \propto \frac{1}{f^b}; 0 \leq b \leq 2, \quad (2.19)$$

與(2.16)式比較可得  $H = \frac{1+b}{2}$ ，因此，我們可以認定群集卜瓦松過程是一個具有碎形特性的隨機過程。

#### 2.4.4 以發生次數為測量基準之碎形分析方法

在 1.2.1 節提及，一隨機過程可用發生次數及間隔時間兩種方法表示，在此我們將討論以發生次數為測量基準下，用 Variance-Time-Curve 及 Fano Factor 兩種方法來探討資料是否具有碎形特性。

##### 1. Variance-Time-Curve (VTC)

VTC 為計數測量時間寬度  $\Delta t$  對事件發生次數之變異數 VAR 所做的曲線圖，其中 VAR 函數定義如下：

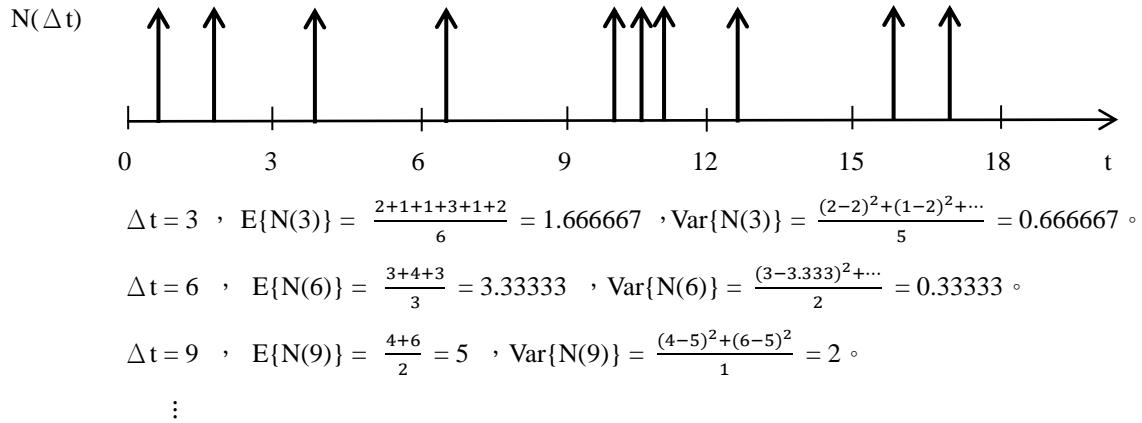
$$\text{VAR} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Var}\{N(\Delta t)\} = E\{N^2(\Delta t)\} - E\{N(\Delta t)\}^2, \quad (2.20)$$

VAR 會隨著計數測量時間寬度  $\Delta t$  的增加而增加。若一點過程具有碎形特性時，其增加的趨勢將近似於  $(\Delta t)^a$ ，其中  $a$  被稱為 VTC 指數，代表了隨著計數測量時間寬度  $\Delta t$  的增加，事件發生次數變異增加的快慢且  $a$  介於 0~2 之間，此趨勢為一種冪次定理關係，如下：

$$\text{VAR} = \text{Var}\{N(\Delta t)\} = b(\Delta t)^a \propto (\Delta t)^a, a \leq 2, \quad (2.21)$$

想法類似(2.17)式，即  $\Delta t = \tau$ ，而  $a = 2H$ 。若以均齊性卜瓦松過程為例，在不同計數測量時間寬度  $\Delta t$  時，其  $\text{VAR} = \lambda \Delta t$  [Meesmann, et al., 1993]。

下圖為事件發生時間數列圖之假想數字例，分別計算在不同測量時間寬度  $\Delta t$  的事件發生之平均數  $E\{N(\Delta t)\}$  與變異數  $\text{Var}\{N(\Delta t)\}$ 。



將 VTC 圖取雙對數後即成  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖。若模型為 HPP， $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖會成一直線且斜率  $\leq 1$ 。若模型為 CPP， $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖會成一直線且斜率  $> 1$  [Meesmann, et al., 1993]。

## 2. Fano Factor (FF)

FF 定義為事件發生次數之變異數除以其平均發生次數，以下列函數表示：

$$\text{FF} = F(\Delta t) = \frac{E\{N^2(\Delta t)\} - E\{N(\Delta t)\}^2}{E\{N(\Delta t)\}} = \frac{\text{Var}\{N(\Delta t)\}}{E\{N(\Delta t)\}} , \quad (2.22)$$

因為 FF 會隨著計數測量時間寬度  $\Delta t$  的不同而改變，因此它提供了一個較簡易的方式來描述一點過程事件序列之間的相關程度，並且可用來判斷一點過程事件發生之群集程度。若以均齊性卜瓦松過程為例，在不同計數測量時間寬度  $\Delta t$  時，其 FF 皆等於 1。下圖為模擬均齊性卜瓦松過程分別以單位時間間隔 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 做分割(記為  $\Delta t=2^n$ ,  $n=0, 1, \dots, 9$ )，求出每個 FF 值，發現皆近似 1。



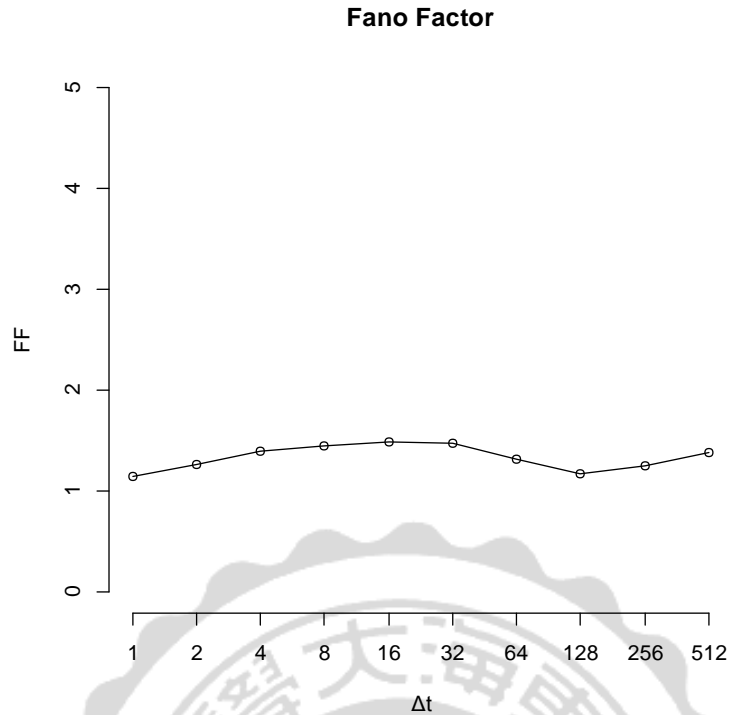


圖 2.5 均齊性卜瓦松過程在不同計數測量時間寬度  $\Delta t$  ( $2^n, n=0, 1, \dots, 9$ ) 時的 Fano Factor 圖。

因此以相同計數測量時間  $\Delta t$  而言，若一點過程之 FF 小於 1，則說這一點過程的事件發生比均齊性卜瓦松過程還要規則、有次序，相反地，如果一點過程之 FF 大於 1，則顯示這一點過程的事件發生有群聚的現象產生，所以 FF 又被稱為是散亂的指標 [Lowen and Teich, 1994]。

上述之 VTC 也可看出一點過程的事件發生是否具有群聚現象，但 FF 是將 VTC 常態化後之數值，因此大多數都會採用 FF 作為指標。通常一具有碎形的點過程事件序列是無法直接描述其自身相似的特性，此時 FF 提供了一個判別的指標，因為其 FF 具有特殊的型態—當計數測量時間寬度  $\Delta t$  很小時，FF 會近似 1，也就是說它的事件發生會近似於均齊性卜瓦松過程一樣地規則，而當計數測量時間寬度  $\Delta t$  增加時，FF 會隨之增大並滿足冪次定理的關係式

$$F(\Delta t) = c (\Delta t)^\delta, \quad (2.23)$$

也就是說其增加的趨勢近似於  $(\Delta t)^\delta$ ，其中  $\delta$  稱為 FF 指數且介於 0~1 之間，它可以充分表達群聚程度增加的情形。

### 第三章 模擬過程及實證分析

#### 3.1 真實地震資料之特性

我們收集了台灣地區從民國 100 年 10 月 01 日至民國 102 年 03 月 31 日，共 548 天的地震資料，以每半天為一時間單位，計算每半天地震的發生次數，共計 1096 筆[資料來源：中央氣象局]。以下兩節將討論其頻譜特性及碎形特性。

##### 3.1.1 真實地震資料之頻譜特性

下圖為真實地震資料之頻譜圖，發現具有  $1/f^b$  型態，接著做雙對數尺度頻譜圖[彭昭英與唐麗英，民國 97 年]，如下圖所示：

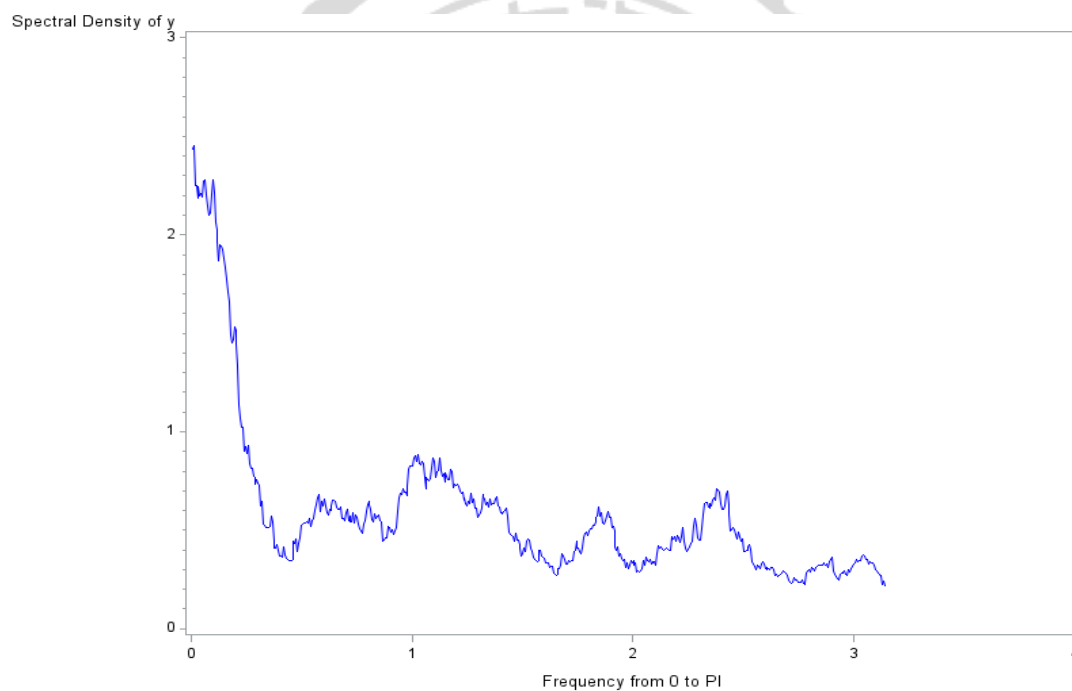


圖 3.1 真實地震資料之頻譜圖。

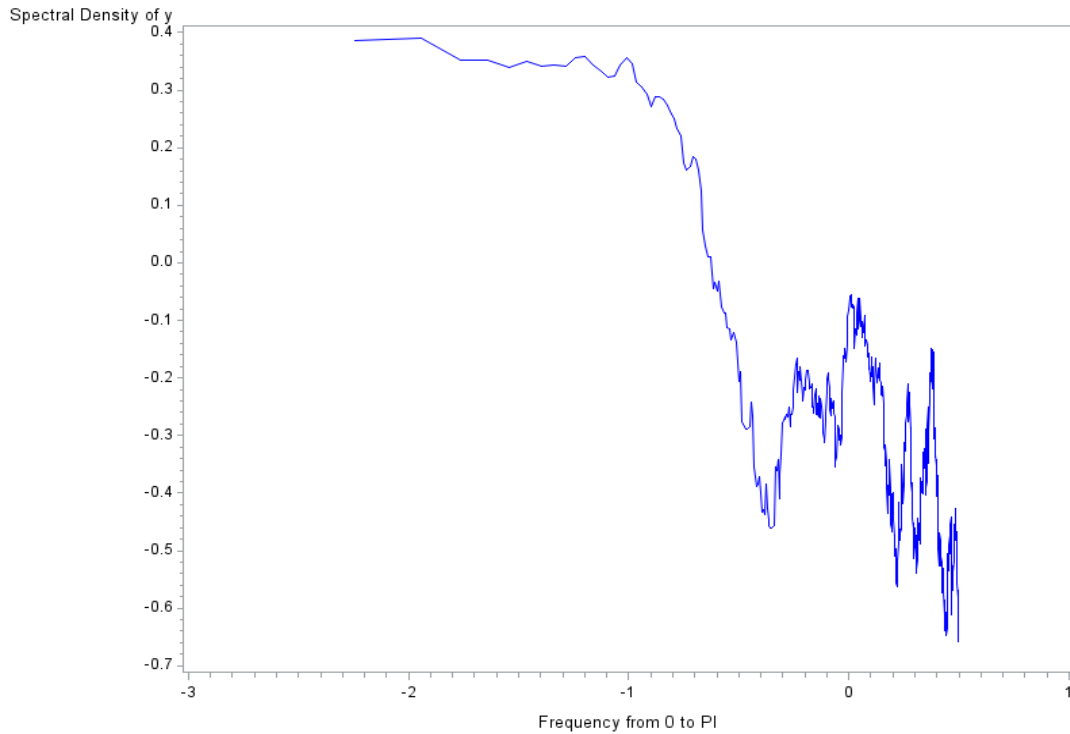


圖 3.2 真實地震資料之雙對數尺度頻譜圖。

由雙對數尺度頻譜圖來看，頻率與頻譜密度呈反向變動，而且明顯呈現  $1/f^b$  之波動型態，故可視此筆地震資料為群集卜瓦松過程且具有碎形特性。因此我們以群集卜瓦松過程作為模型去配適此筆真實地震資料是可行的。

### 3.1.2 真實地震資料之碎形特性

從前一小節之雙對數尺度頻譜圖可看出真實地震資料具有碎形特性，本節利用以發生次數為測量基準的兩種碎形分析方法加以佐證。

#### 1. Variance-Time-Curve

圖 3.3 為此筆真實地震資料的 Variance-Time-Curve，隨著計數測量時間寬度  $\Delta t$  的增加，地震發生次數的變異也隨之增加且增加的趨勢為  $(\Delta t)^a$ ，其中  $a$  值可利用取雙對數後之  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之斜率求得，即圖 3.4，經過簡單線性迴歸求得斜率為 1.241，即為 VTC 指數  $a$  的值。由於 VTC 指數介於 0~2 之間，表示此筆地震數據具有碎形性質。

### Variance-Time-Curve

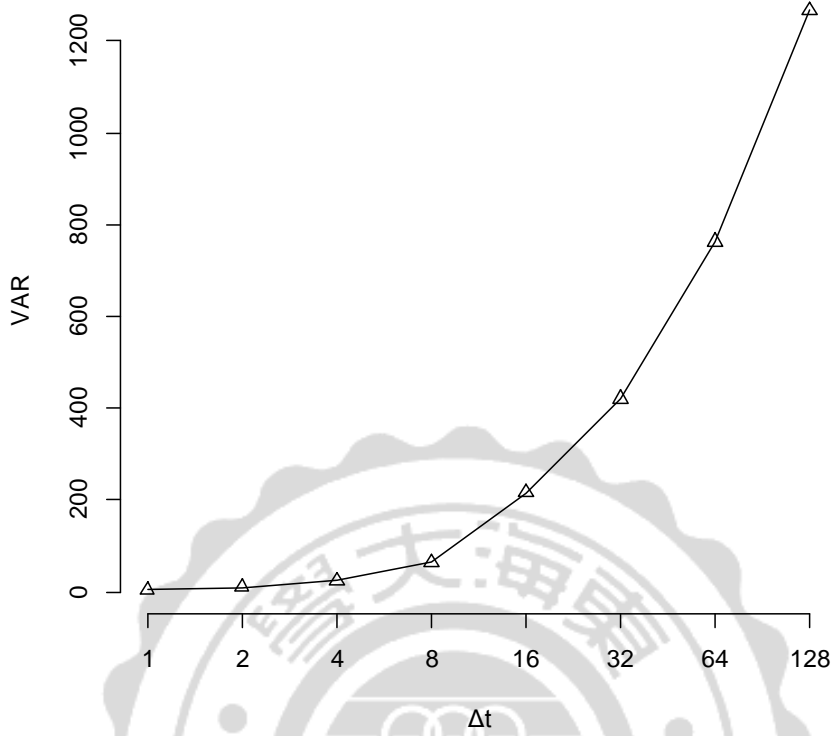


圖 3.3 真實地震資料之 Variance-Time-Curve。

### log(VAR) v.s. log( $\Delta t$ )

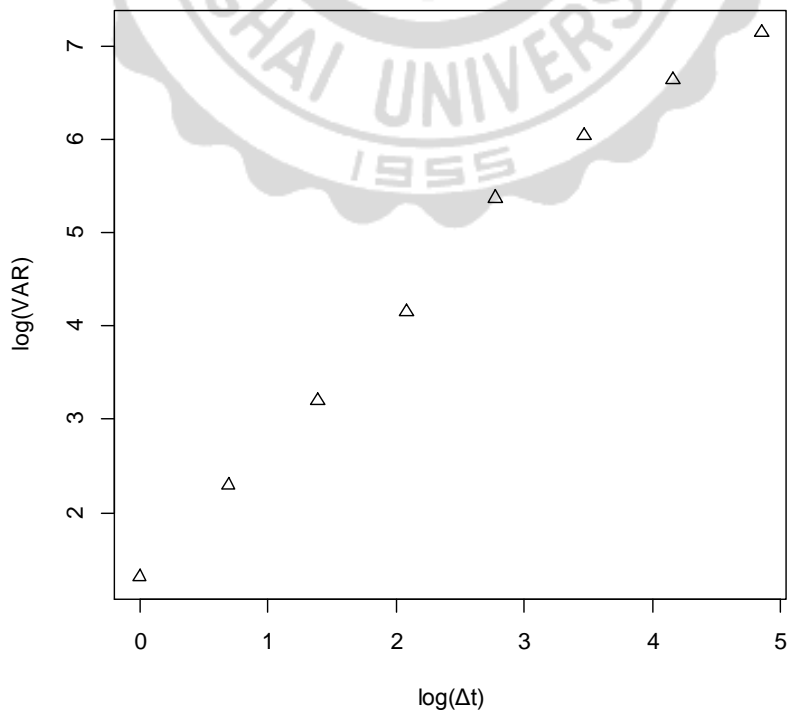


圖 3.4 真實地震資料之  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖。

## 2. Fano Factor

下圖為本研究之地震資料的 Fano Factor 圖，

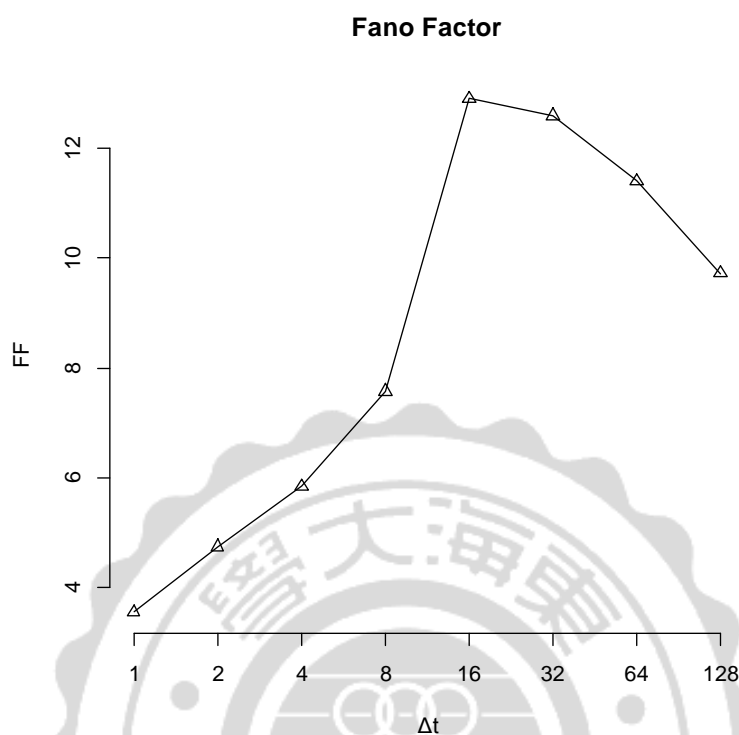


圖 3.5 真實地震資料之 Fano Factor 圖。

在不同計數測量時間寬度  $\Delta t$ ，其 FF 值皆大於 1，代表此筆地震資料有明顯的群聚現象，符合 CPP 性質；另外，透過對數轉換過後以簡單線性迴歸求得 FF 指數  $\delta=0.2448$ ，介於 0~1 之間，即滿足碎形點過程的特性。

根據以上分析在在顯示，我們所得到的真實地震資料為一群集卜瓦松分配且具碎形特性，因此 3.2 節將進行估計真實地震資料的群集卜瓦松過程參數值。

## 3.2 群集卜瓦松過程之模擬

### 3.2.1 參數之估計過程

此小節是依據真實地震資料的各種性質與特性以群集卜瓦松過程模型去做模擬，估計出模型參數。以下有三個步驟，先討論參數選取的依據，再依序尋找參數，最後固定模型參數。

1. 參數選取之依據：

本研究是以群集卜瓦松過程為配適模型去近似真實的計數地震資料，在配適模型中有五個參數，分別為主要過程中的  $\lambda$  參數、次要過程中的  $\alpha$  及  $\beta$  參數，以及群集個數分配中的兩參數  $z$  與  $N_0$ ；而如何找到最合適的參數，在經過使用不同參數值實際模擬後，發現以下四點現象：

(1) 藉由程式觀察  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$ 圖之斜率與參數間的關係，可得到下表：

參數	參數與 $\log(\text{VAR})$ v.s. $\log(\Delta t)$ 圖之斜率間的關係。
$\lambda$	斜率的變化沒有明顯趨勢。
$\alpha$	斜率隨著 $\alpha$ 的增加略呈遞增。
$\beta$	斜率隨著 $\beta$ 的增加略呈遞減。
$z$	斜率隨著 $z$ 的增加略呈遞增。
$N_0$	斜率隨著 $N_0$ 的增加略呈遞增。

，各參數影響斜率的大小為： $z > \alpha$ 、 $\beta$ 、 $N_0 > \lambda$ 。

(2) 由群集卜瓦松過程之定義得知，一個完整的群集卜瓦松過程是主要事件和次要事件的總和，由此可知，完整過程的期望發生次數會等同於主要事件與次要事件之期望發生次數的乘積，即

$$E(C) = \lambda [E(M)] = \lambda \frac{\sum_{m=1}^{N_0} m^{z+1}}{\sum_{m=1}^{N_0} m^z},$$

其中，

$E(C)$ ：完整過程之期望發生次數，

$\lambda$ ：主要過程之期望發生次數，

$E(M)$ ：群集之期望發生次數，群集個數  $M$  為隨機變數，

$N_0$ ：最大群集個數，

$z$ ：群集個數分配之參數。

(3) 在固定計數測量時間寬度  $\Delta t$  時，因為加上次要過程的關係，使得主要過程中發生 0 次事件之百分比會比完整過程中發生 0 次事件之百分比來得多，又主要過程中之發生次數服從卜瓦松分配，由(2.1)式得到如下：

$$P\{N(t)=0\} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} \geq \text{完整過程中發生 } 0 \text{ 次事件之百分比}$$

固定  $\Delta t$  時  
 $\longrightarrow$

$$e^{-\lambda} \geq \text{完整過程中發生 } 0 \text{ 次事件之百分比，}$$

其中  $\lambda$  為主要過程之期望發生次數。

- (4) 既然群集之期望發生次數  $E(M)$  會受到兩參數  $N_0$  及  $z$  的影響，因此，藉由觀察  $E(M)$  與兩參數的關係可較容易地找出合適的群集個數分配參數。圖 3.6 為固定  $N_0$  時，觀察  $z$  與  $E(M)$  的關係圖，可看出他們成正比關係；圖 3.7 為固定  $z$  時，觀察  $N_0$  與  $E(M)$  的關係圖，可看出他們亦成正比關係。

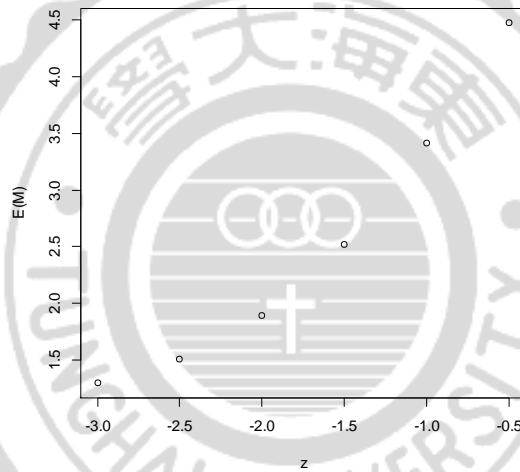


圖 3.6 固定  $N_0$  時，觀察  $z$  與  $E(M)$  的關係圖。

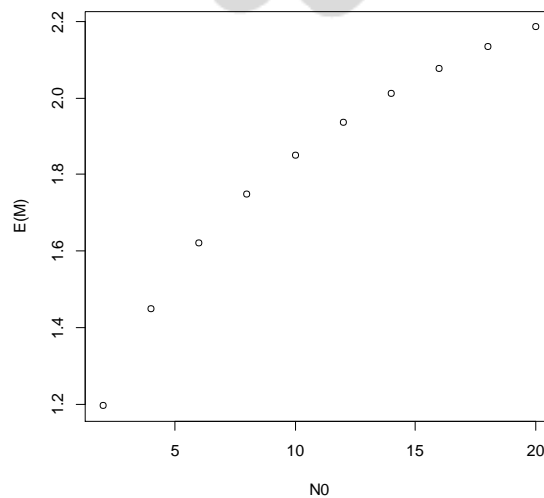


圖 3.7 固定  $z$  時，觀察  $N_0$  與  $E(M)$  的關係圖。

## 2. 尋找參數過程：

利用前述參數估計之依據套用在真實地震資料上，估計出所有參數。

下圖為本研究收集的真實地震資料之  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$ 圖，由簡單線性迴歸可得斜率為 1.241。

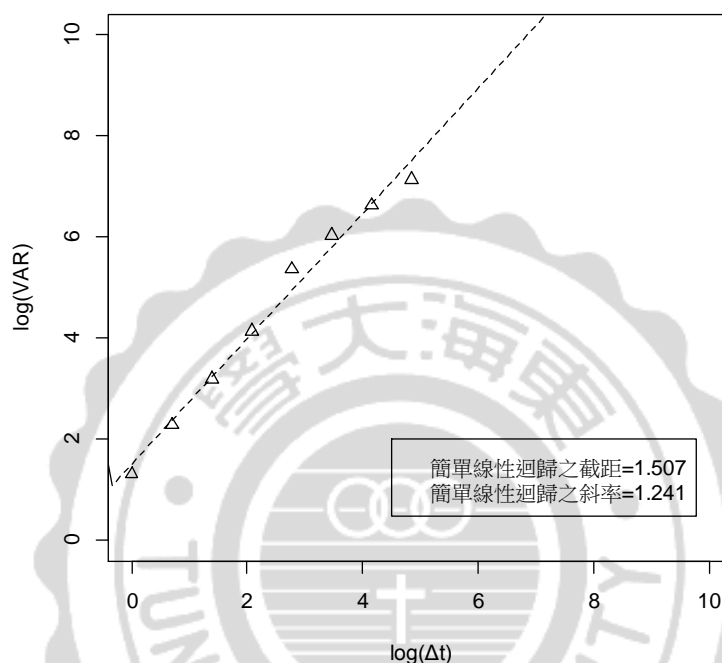


圖 3.8 真實地震資料之  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$ 圖，其中  $\Delta t = 2^n$ ； $n = 0, 1, \dots, 7$ 。

由前述依據，參數與  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$ 圖之斜率間的關係以參數  $z$  值影響最大；因此，我們藉由固定參數  $\lambda$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  及  $N_0$ ，變動  $z$  值，得到每個  $z$  值觀察點的對應斜率，再利用已知的真實地震資料之  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$ 圖斜率，畫斜率為 1.241 的水平線，觀察大約落在  $z$  值的哪個區間，如下圖：



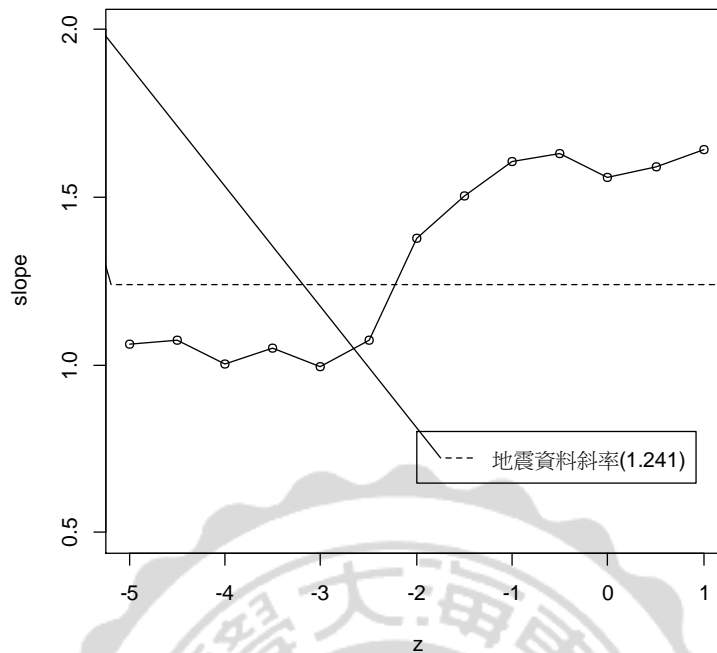


圖 3.9 固定參數  $\lambda$ 、 $\alpha$ 、 $\beta$  及  $N_0$ ，而變動  $z$  值時，所有  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  之斜率變化圖。

發現真實地震資料的  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之斜率對應到的  $z$  值大概在 -2.5 到 -2 之間；接著，針對此可能區間細部去觀察  $z$  值所對應到的  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖斜率值。

由前述依據，參數  $\lambda$  對  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖的斜率影響最小，故選擇參數  $\lambda$  去做變動，其他參數  $\alpha$ 、 $\beta$  及  $N_0$  固定，以降低參數影響  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之斜率的機率。如此一來，我們可以藉由  $\lambda$  的變動，算出 -2.5 到 -2 之間的  $z$  值在  $\lambda$  變動下的所有斜率之平均數，較精確地去找  $z$  值所對應的  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之斜率。由下表得知，真實地震資料的  $z$  值約為 -2.04。

z 值	變動 $\lambda$ 值時，所有斜率的平均數。
-2.5	1.123713
-2.4	1.149509
-2.3	1.168395
-2.2	1.198076
-2.1	1.209751
-2.05	1.224791
-2.04	1.240639
-2	1.251678

估計出參數  $\lambda$  後，接著看其他參數；本研究收集的地震平均發生次數為 1.04562 且每半天發生 0 次地震的百分比約為 46%，引用前述依據，也就是主要事件與次要事件之期望發生次數的乘積要為 1.04562 且  $e^{-\lambda} \geq 0.4616788$ ，推得  $\lambda \leq 0.7728858$ 。

因為主要過程加入次要過程後，發生 0 次事件的個數會減少，故從  $\lambda = 0.5$  找起，慢慢增加其值，並調整參數  $N_0$ ，直到找到相似真實地震資料的完整過程之次數分配，然後再藉由調整次要過程中的參數  $\alpha$  和  $\beta$  值，使  $\log(\text{Var})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之斜率更符合真實資料的  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之斜率。

下表為真實地震資料之次數分配，計數指每半天發生的地震次數，而個數指的是同樣計數的總個數，

表 3.1 真實地震資料之次數分配表，平均數為 1.04562，變異數為 3.718465。

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15	19	22	33
個數	506	349	133	53	19	13	10	1	3	1	2	2	1	1	1	1

我們希望模擬出來的計數分配中，次數分配能盡可能符合真實地震資料且平均數能接近 1.04562，以下為尋找參數值的過程：

(1)  $(\lambda, \alpha, \beta, z, N_0) = (0.5, 1/500, 500, -2.04, 16)$ 時。

表 3.2 次數分配表，平均數為 1.516423，變異數為 5.884662。

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
個數	511	263	116	61	37	24	16	16	15	12	12	6	3	1	1	1	1

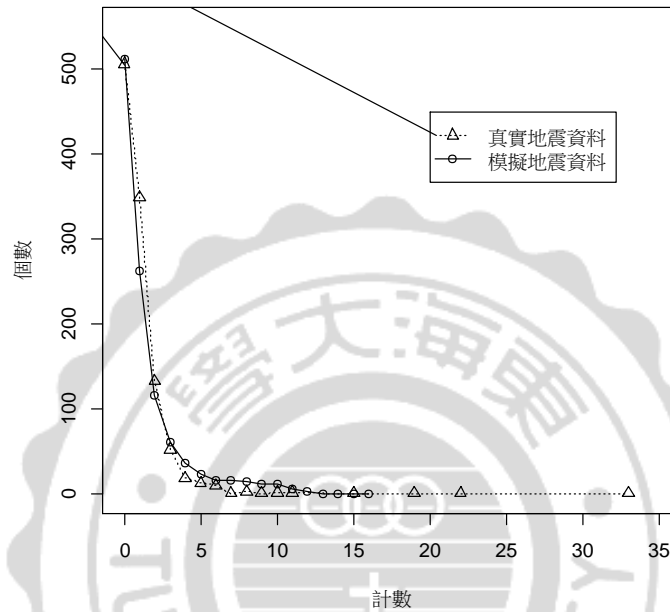


圖 3.10  $\lambda=0.5$  時之模擬與真實地震資料之次數分配比較圖。

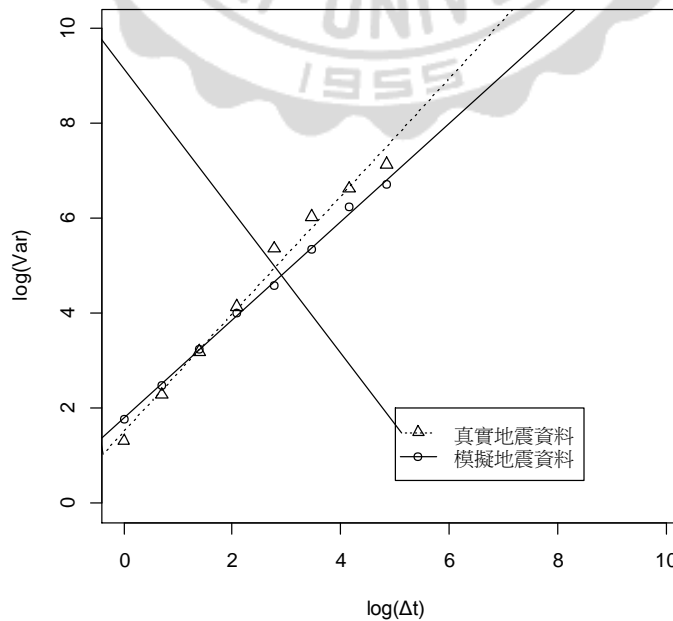


圖 3.11  $\lambda=0.5$  時之模擬與真實地震資料的  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之比較圖。

(2)  $(\lambda, \alpha, \beta, z, N_0) = (0.55, 1/500, 500, -2.04, 12)$ 時。

表 3.3 次數分配表，平均數為 1.386861，變異數為 4.608193。

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	20
個數	525	242	127	68	41	27	19	15	14	10	3	2	1	1	1

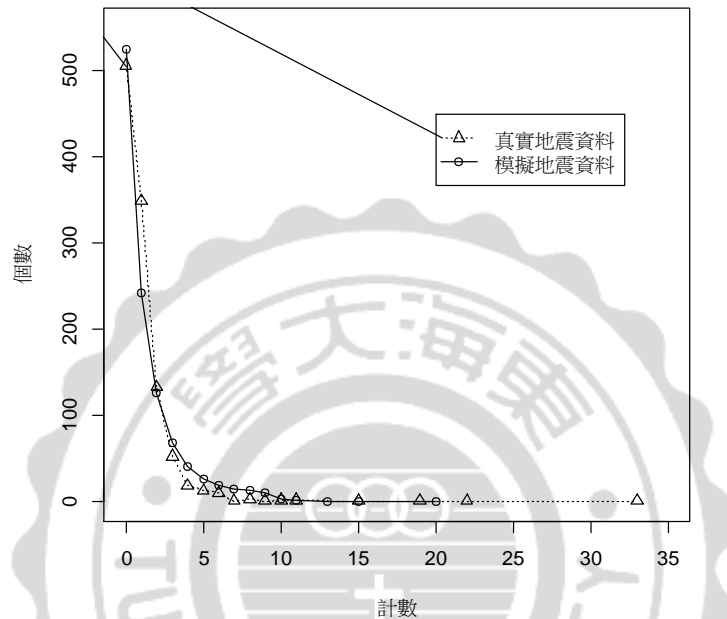


圖 3.12  $\lambda=0.55$  時之模擬與真實地震資料之次數分配比較圖。

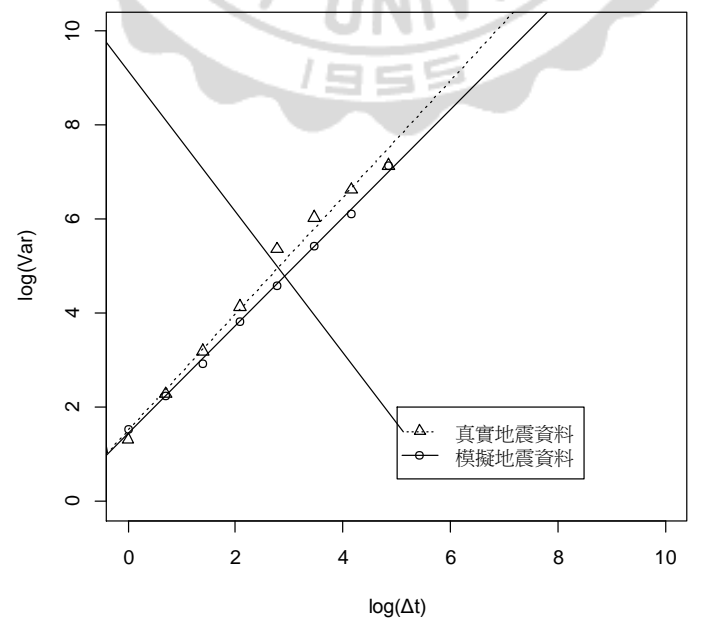


圖 3.13  $\lambda=0.55$  時之模擬與真實地震資料的  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之比較圖。

(3)  $(\lambda, \alpha, \beta, z, N_0) = (0.6, 1/500, 500, -2.04, 8)$ 時。

表 3.4 次數分配表，平均數為 1.315693，變異數為 3.902073。

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15
個數	520	250	131	71	51	24	9	17	8	6	5	1	1	1	1

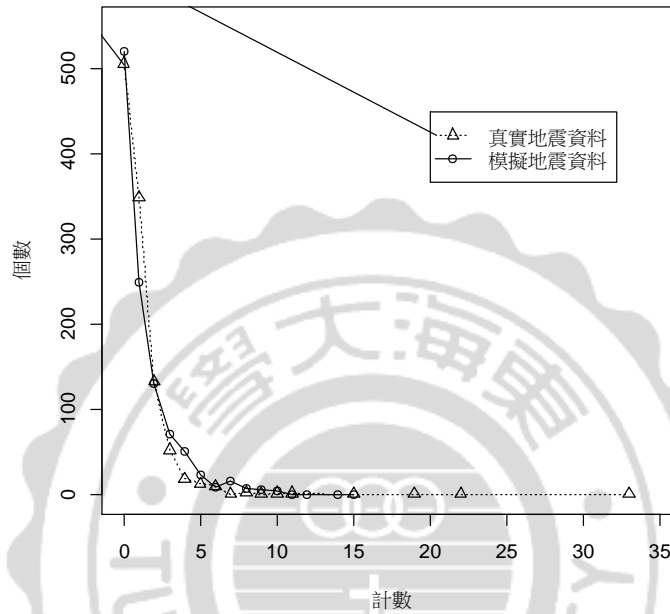


圖 3.14  $\lambda=0.6$  時之模擬與真實地震資料之次數分配比較圖。

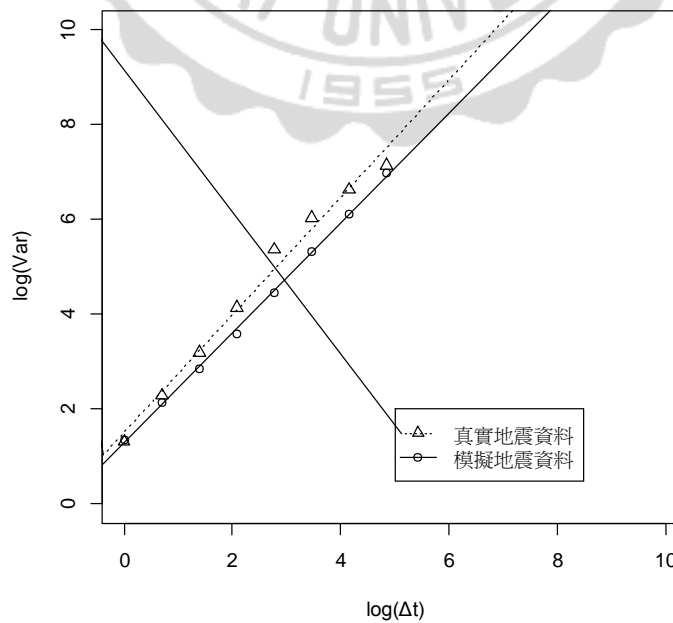


圖 3.15  $\lambda=0.6$  時之模擬與真實地震資料的  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之比較圖。

(4)  $(\lambda, \alpha, \beta, z, N_0) = (0.65, 1/500, 500, -2.04, 6)$ 時。

表 3.5 次數分配表，平均數為 1.224453，變異數為 2.809849。

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11
個數	512	257	142	78	37	30	21	13	4	1	1

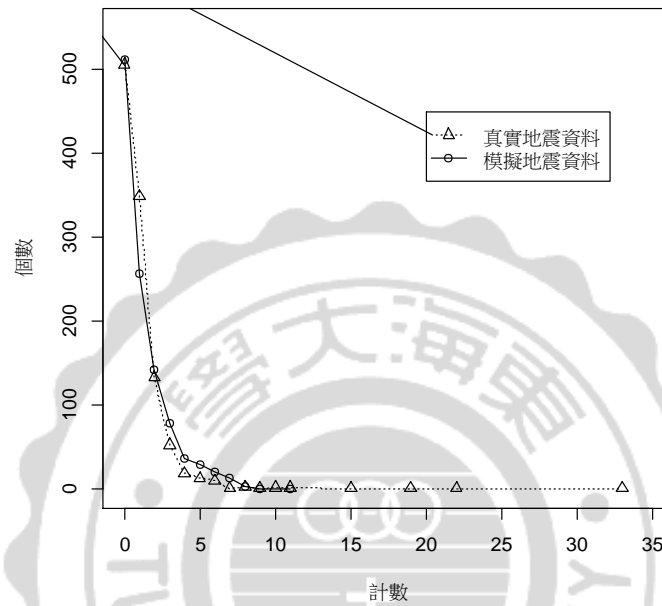


圖 3.16  $\lambda=0.65$  時之模擬與真實地震資料之次數分配比較圖。

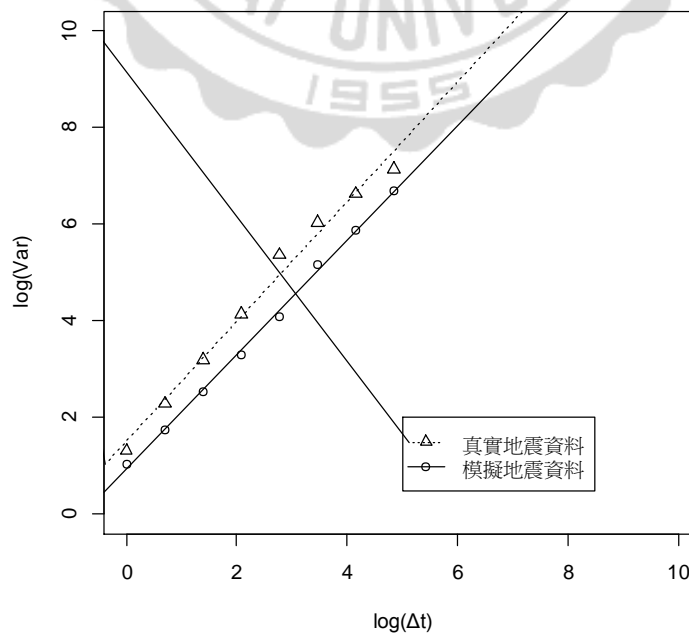


圖 3.17  $\lambda=0.65$  時之模擬與真實地震資料的  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之比較圖。

(5)  $(\lambda, \alpha, \beta, z, N_0) = (0.7, 1/500, 500, -2.04, 4)$ 時。

表 3.6 次數分配表，平均數為 1.065693，變異數為 1.869653。

計數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
個數	505	292	142	87	41	15	10	1	2	1

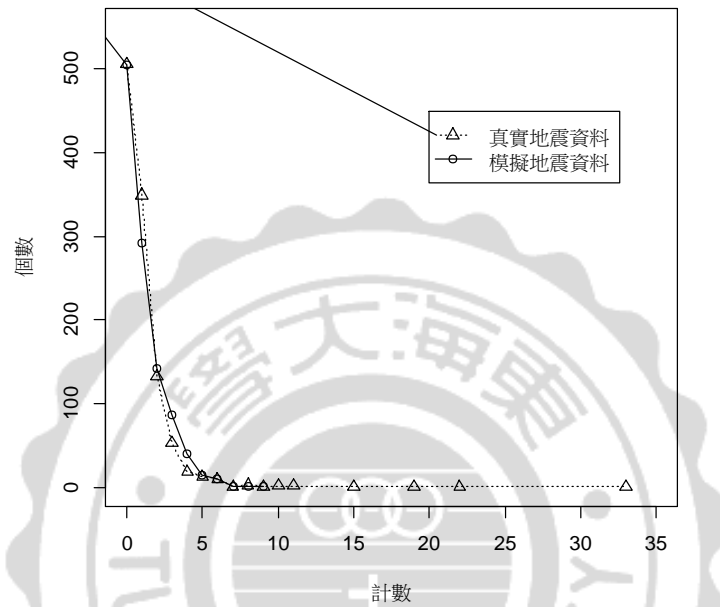


圖 3.18  $\lambda=0.7$  時之模擬與真實地震資料之次數分配比較圖。

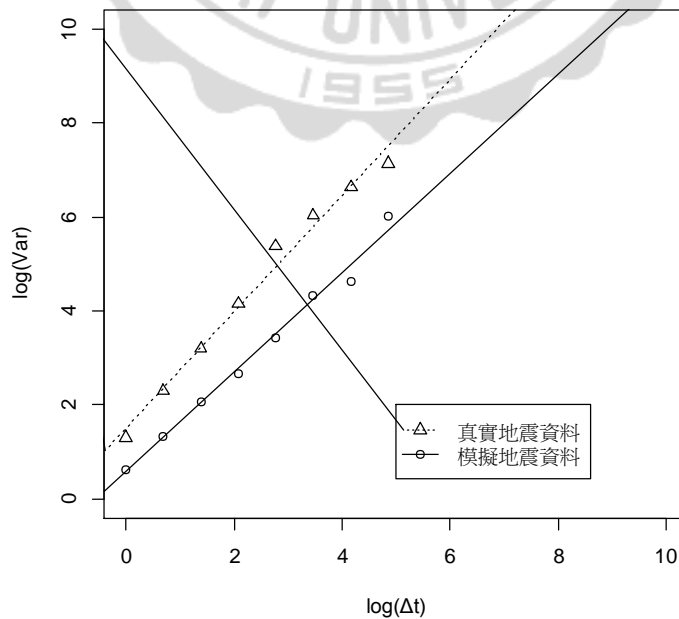


圖 3.19  $\lambda=0.7$  時之模擬與真實地震資料的  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖之比較圖。

### 3. 固定參數

以 $(\lambda, \alpha, \beta, z, N_0) = (0.7, 1/500, 500, -2.04, 4)$  此組參數來看，其模擬的地震計數序列每半天發生 1.065693 次地震與真實地震資料平均每半天發生 1.04562 次地震相近；從次數分配來看，除了在計數 3 與 4 的個數有差距，以及計數 10 以上，即較多的地震發生次數無法預估出來之外，其他算是與真實地震資料吻合。在此我們根據以下兩點去做解釋：

#### (1) 較高的地震發生次數無法預估出來

我們知道沒有一項預測能百分之百準確，即使再先進的儀器也不可能萬無一失。從歷史新聞可看到很多預測失準的例子，舉例來說，在 2009 年 8 月台灣受到莫拉克颱風的侵襲，創下台灣地區 50 年來最嚴重的水災，當初莫拉克在台灣中南部的兩天累積雨量都破 2000 毫米，然而一開始氣象局預測的中南部總雨量卻只有 800 毫米，與實際雨量相差兩倍多，引起不少詬病。因此，預測地震資料也是不可能百分之百準確，所以在本研究中每半天發生多次地震次數者較難預估出來。

#### (2) 計數 3 與 4 的個數有差距

本研究收集的真實地震資料共計 1096 筆，為了做準確的配適，實驗中也模擬出 1096 筆的完整計數過程。因為我們無法預估出較高的地震發生次數，導致每半天發生 3 次與 4 次的地震個數較真實地震資料來得多；另外，若無法模擬出較高的地震發生次數，相對地，模擬的地震資料離群值會比真實的地震資料離群值少，而整體的變異數就會較小，所以  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖會有些微差距，主要就是受到離群值的影響。

根據以上配適，最後參數固定如下：

參數 (parameter)	數值 (value)
$\lambda$ (主要過程之平均發生次數)	0.7
$\alpha$ (伽瑪分配型態參數)	1/500
$\beta$ (伽瑪分配尺度參數)	500
$Z$ (群集個數分配之參數)	-2.04
$N_0$ (最大群集個數)	4



### 3.2.2 模擬地震資料之頻譜特性

下圖為模擬地震資料之頻譜圖，發現具有  $1/f^b$  型態，接著做雙對數尺度頻譜圖，如下圖 3.21 所示：

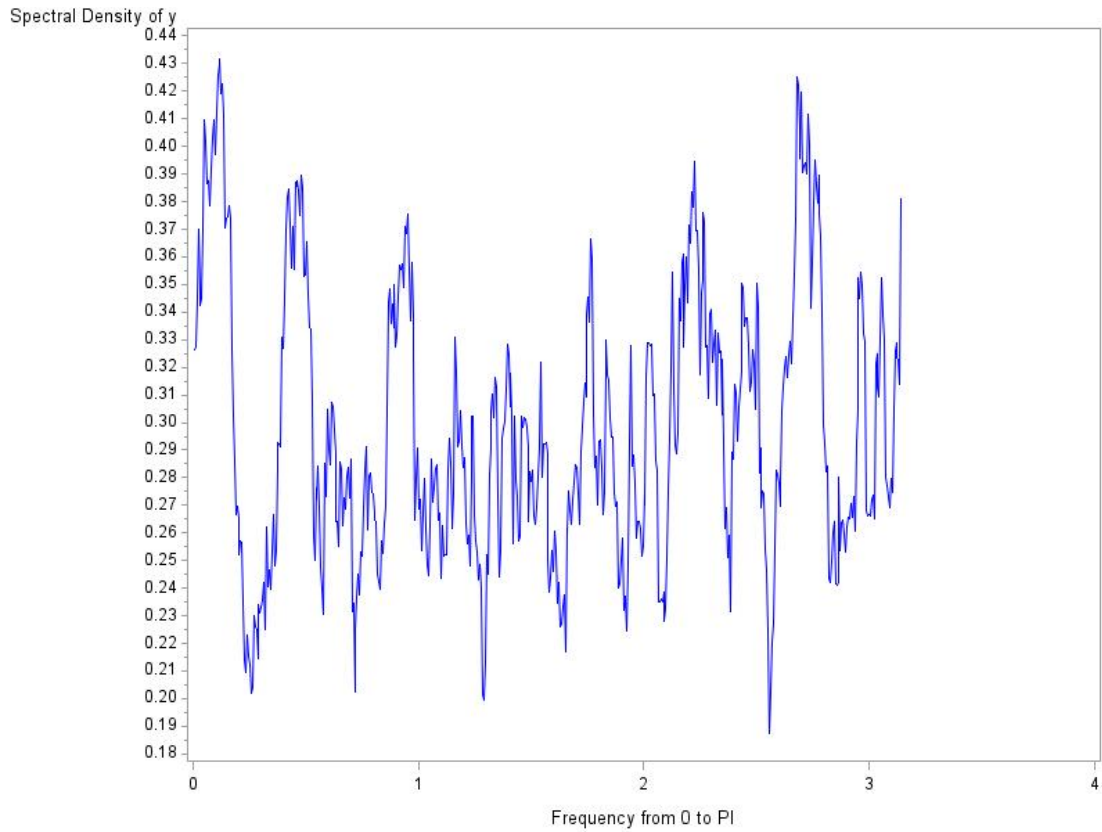


圖 3.20 模擬地震資料之頻譜圖。

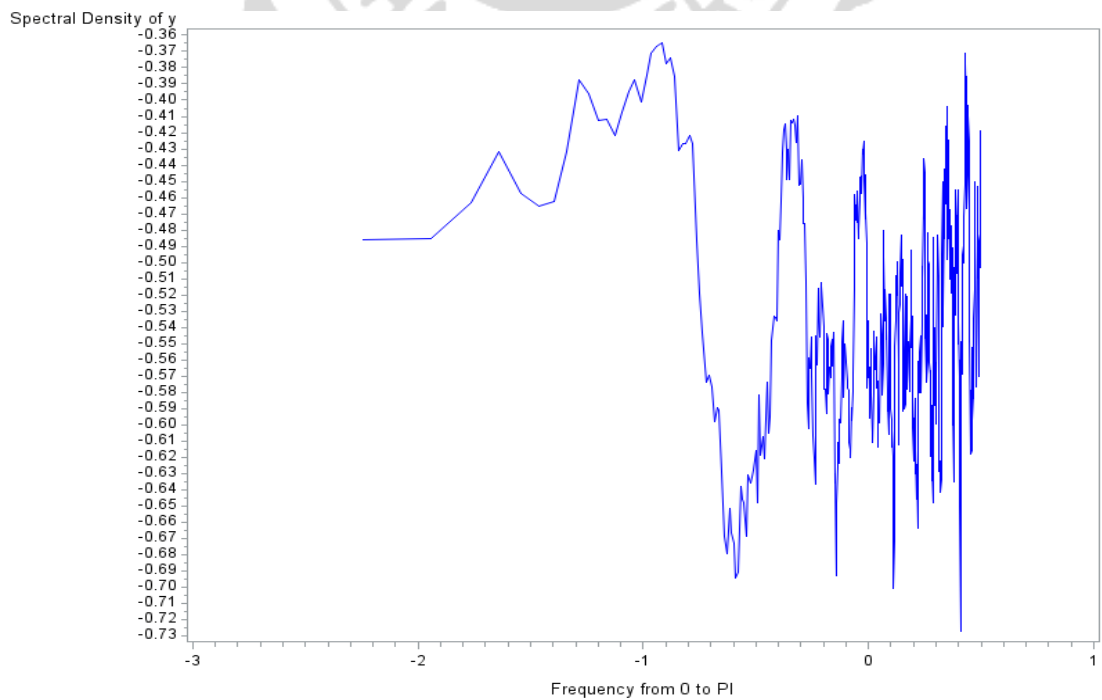


圖 3.21 模擬地震資料之雙對數尺度頻譜圖。

由雙對數尺度頻譜圖來看，頻率與頻譜密度呈反向變動，呈現  $1/f^b$  之波動型態，表示此模擬過程具有碎形特性。

### 3.2.3 模擬地震資料之碎形特性

本節利用兩種碎形分析方法分析模擬之地震資料。

#### 1. Variance-Time-Curve

圖 3.22 為模擬地震資料的 Variance-Time-Curve，隨著計數測量時間寬度  $\Delta t$  的增加，事件發生次數的變異也隨之增加，而增加的趨勢近似於  $(\Delta t)^a$ 。取雙對數後得到其  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖，即圖 3.23，經過簡單線性迴歸求得其斜率，即為 VTC 指數  $a$  的值 ( $a=1.058$ )，介於 0~2 之間，代表此筆模擬數據具有碎形性質。

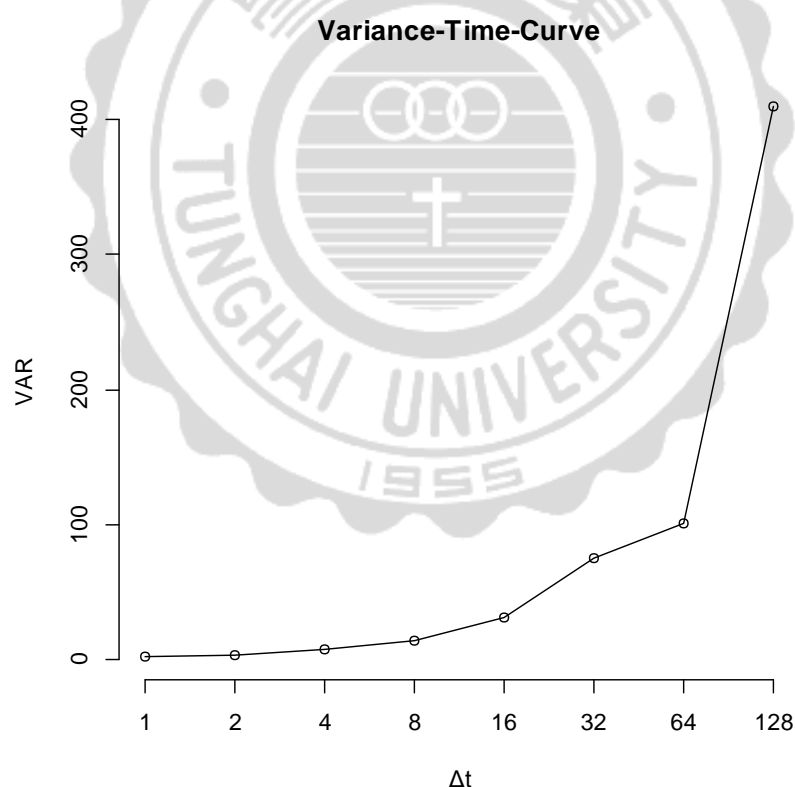


圖 3.22 模擬地震資料之 Variance-Time-Curve。

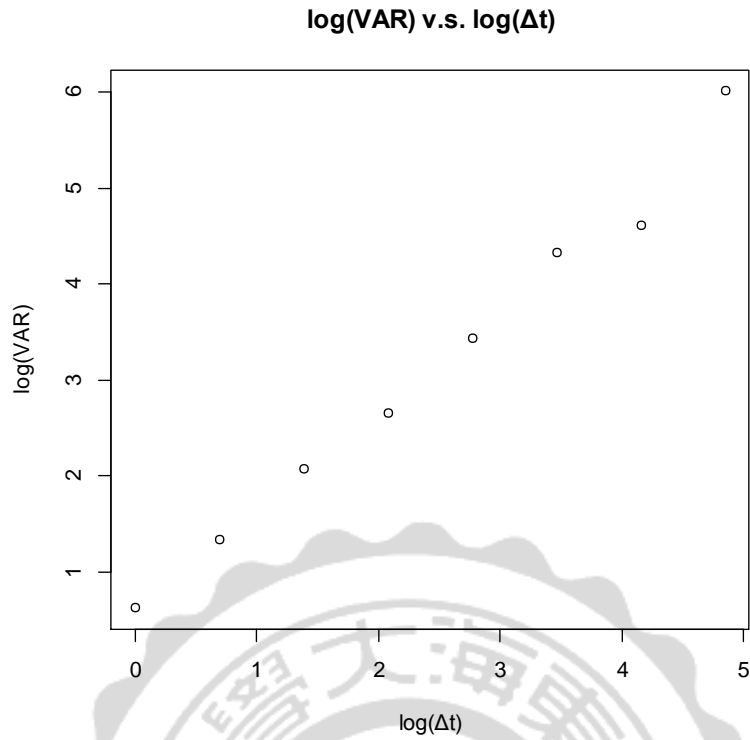


圖 3.23 模擬地震資料之  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$  圖。

## 2. Fano Factor (FF)

下圖為模擬地震資料的 Fano Factor 圖，

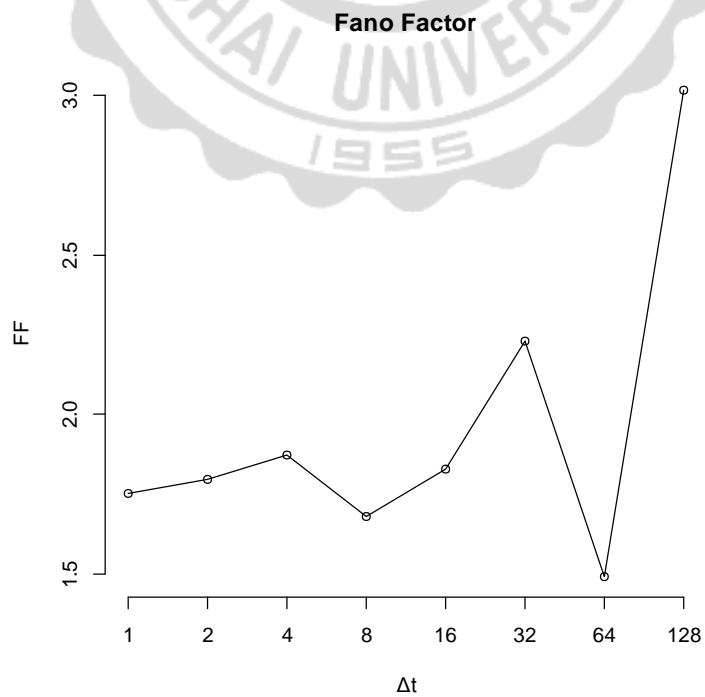


圖 3.24 模擬地震資料之 Fano Factor 圖。

在不同計數測量時間寬度  $\Delta t$ ，其 FF 值皆大於 1，代表此筆地震資料有明顯的群聚現象，符合 CPP 性質；另外，經過對數轉換後以簡單線性迴歸求得 FF 指數  $\delta=0.05945$ ，介於 0~1 之間，即滿足碎形點過程的特性。

### 3.3 真實地震資料與適配模型之比較

此小節將運用許多統計工具來討論本研究所選取的模型是否真的能適配收集的真實地震資料。

#### 1. 基本統計量：

下表是利用各種統計特徵量數來比較兩筆計數過程的相似性。

	mode	min	max	median	mean	variance	sum
真實資料	0	0	33	1	1.04562	3.71847	1146
模擬資料	0	0	9	1	1.06569	1.86965	1168

#### 2. 條件區間圖 (Conditional interval plot)：

以計數數列  $\{N(t_n); n=1, 2, \dots\}$  做為觀察值，將其分成  $n-1$  組(前期，後期)對數列，即  $[N(t_1), N(t_2)]$ ,  $[N(t_2), N(t_3)]$ , ...,  $[N(t_{n-1}), N(t_n)]$ ；接著，依前期數列大小將對數列進行排序，產生新的對數列，記為  $[N(t_{(1)}), N(t_{(1)+1})]$ ,  $[N(t_{(2)}), N(t_{(2)+1})]$ , ...,  $[N(t_{(n-1)}), N(t_{(n-1)+1})]$ ，其中  $N(t_{(1)})$  為前期之最小順序觀測值，依序為  $N(t_{(2)}), N(t_{(3)}), \dots, N(t_{(n-1)})$ ，而  $N(t_{(1)+1}), N(t_{(2)+1}), \dots, N(t_{(n-1)+1})$  為隨前期觀測值排序變動後的後期觀測值。下述為一假設例子。

假設一計數過程為  $\{6, 5, 2, 8, 1, 4\}$ ，其排序過程以圖示呈現如下：

前期	後期
$N(t_1)=6$	$N(t_2)=5$
$N(t_2)=5$	$N(t_3)=2$
$N(t_3)=2$	$N(t_4)=8$
$N(t_4)=8$	$N(t_5)=1$
$N(t_5)=1$	$N(t_6)=4$

依前期大小作排序  
 $\xrightarrow{\hspace{2cm}}$

前期*	後期*
$N(t_{(1)})=1$	$N(t_{(1)+1})=4$
$N(t_{(2)})=2$	$N(t_{(2)+1})=8$
$N(t_{(3)})=5$	$N(t_{(3)+1})=2$
$N(t_{(4)})=6$	$N(t_{(4)+1})=5$
$N(t_{(5)})=8$	$N(t_{(5)+1})=1$

將得到的新對數列分成  $k$  組，分別計算前期\*中各組的中位數與後期\*中各組的平均數及標準差。視後期\*為主要觀察值，將其每組的平均數及標準差與前期\*各組的中位數繪製條件區間圖。藉由條件區間圖可觀察其資料受前一期觀測值影響之變化形態。

以下為真實地震資料及模擬地震資料的條件區間圖比較，兩筆計數過程皆為 1096 筆，因此各得到 1095 組對數列，皆分成 15 組繪製條件區間圖。從四張圖中，發現真實地震過程微呈正相關，而模擬的資料次數型態較為集中。

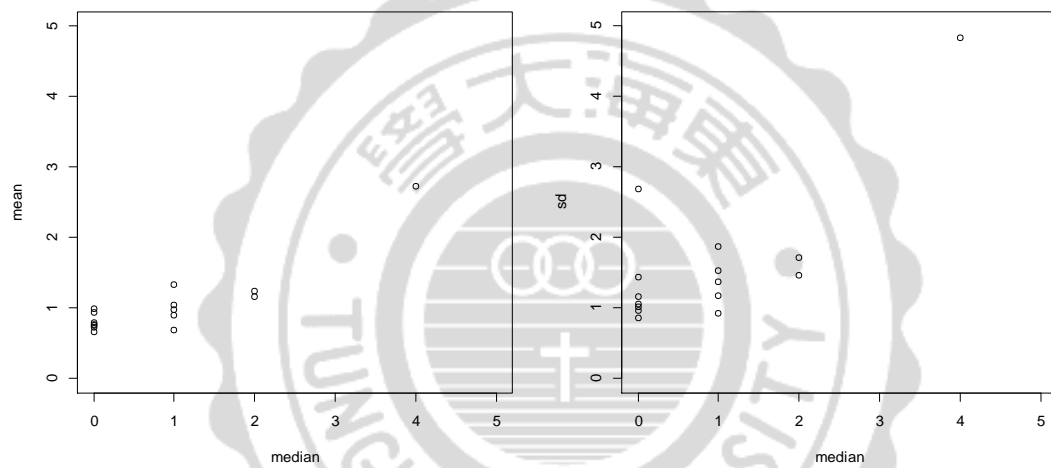


圖 3.25 真實地震資料。

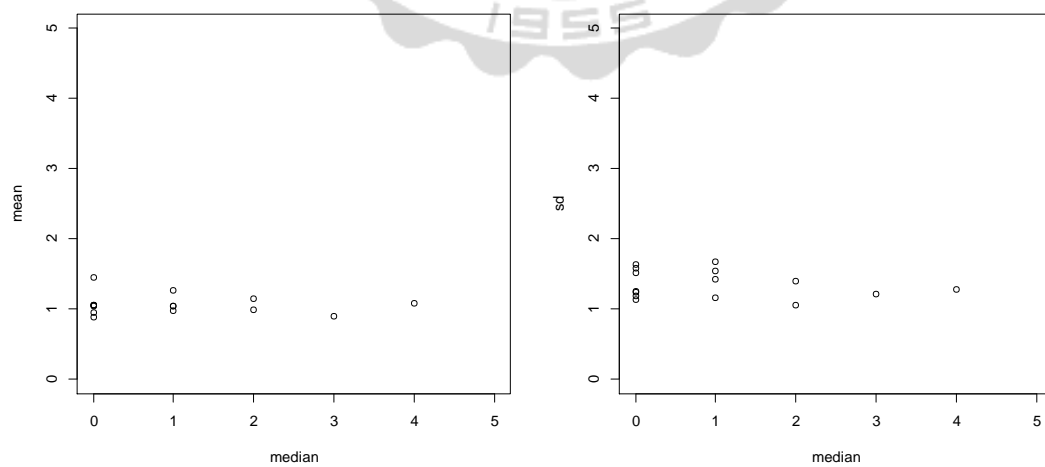


圖 3.26 模擬地震資料。

### 3. 事件發生次數之直方圖 (Event-Number Histogram, ENH) :

利用直方圖可了解資料的分布情形，因為兩筆資料皆為 1096 筆計數序列，故從比較兩筆資料的直方圖，可明顯看出真實地震的較高發生次數的個數在模擬資料上都補到發生次數 3 與 4 中，導致發生次數 3 與 4 的個數較真實資料多。

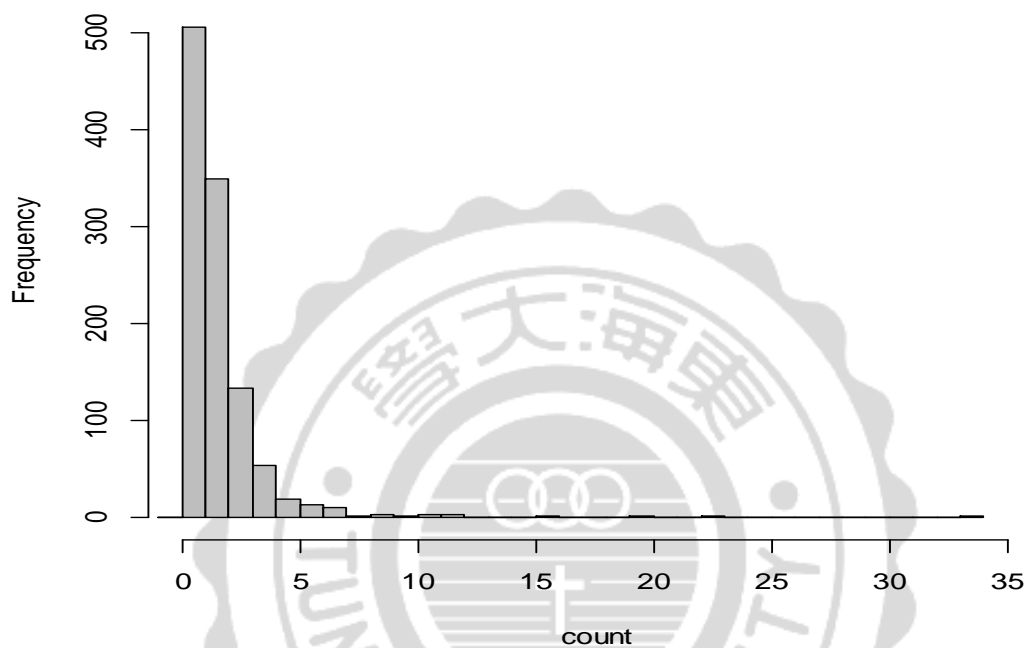


圖 3.27 真實地震資料次數直方圖，時間單位為 12 小時。

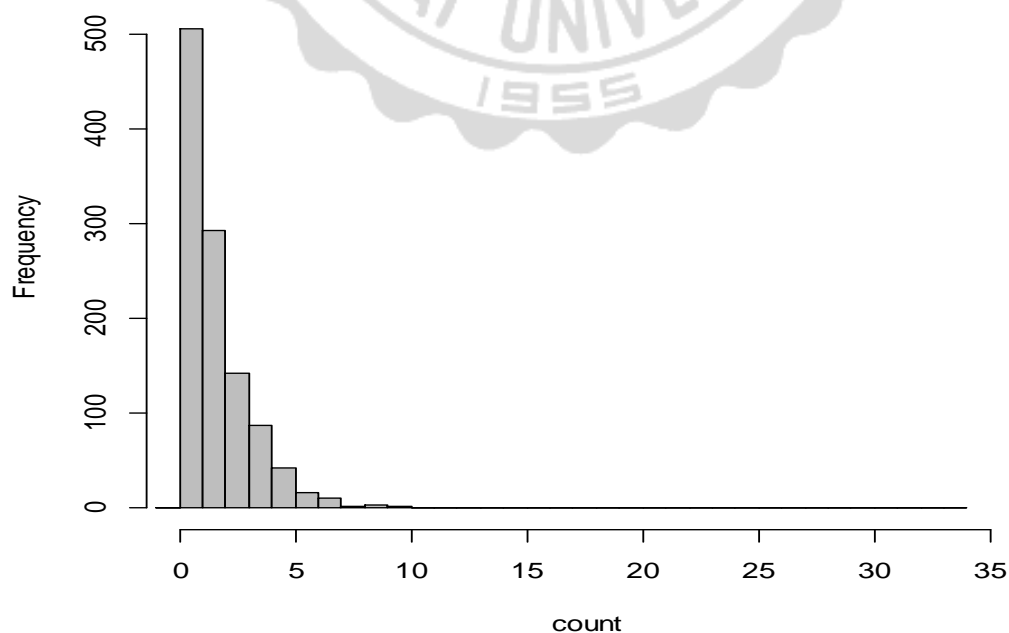


圖 3.28 模擬地震資料次數直方圖。

#### 4. 時間數列圖 (Time-series plot) :

運用時間數列圖我們能知道事件發生的先後及其發生次數，圖 3.36 為真實地震資料的時間數列圖，從圖中可看出台灣地區近一年半之地震發生頻繁狀況，幾乎每天都有地震發生，而在半天之內最高發生 33 次地震，與模擬的部分相比較，即圖 3.37，發現每半天發生 9 以內的地震次數我們較容易模擬出來，但較高的發生次數就較難去預估。這也就是為什麼會有預測失準的情形發生，畢竟地震是天災，我們的預估無法百密無一疏。

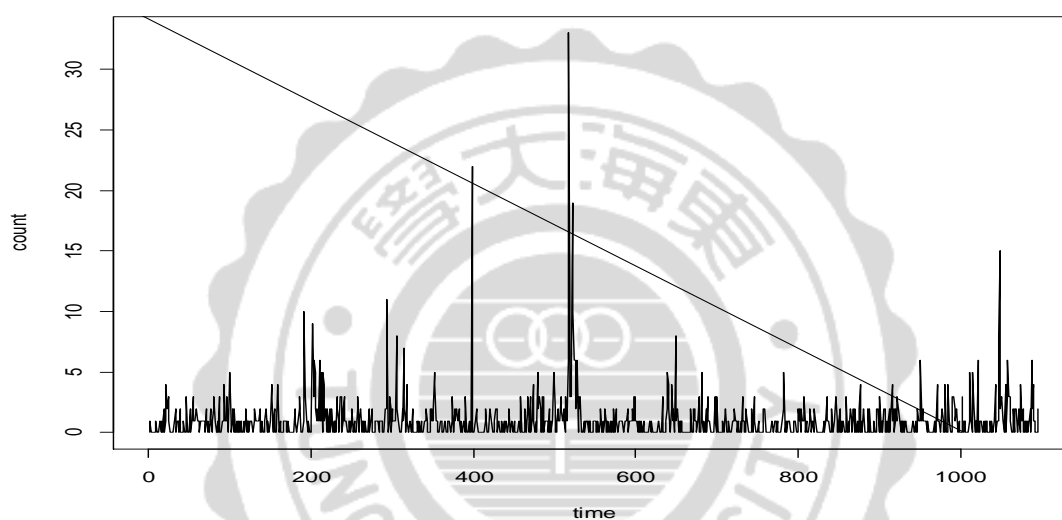


圖 3.29 真實地震資料時間數列圖，時間單位為 12 小時。

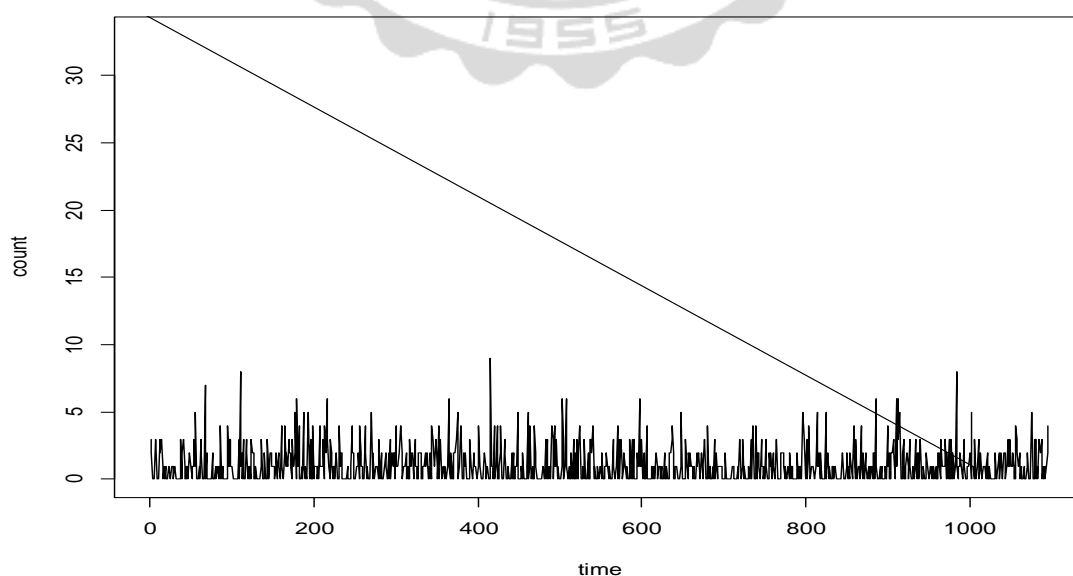


圖 3.30 模擬地震資料時間數列圖。

## 5. ACF 圖：

以下分別為真實地震資料與模擬地震資料之 ACF 圖，由 ACF 圖可發現真實資料的自我相關係數在-0.05 與 0.1 間上下震盪微呈正相關且平穩，而模擬資料亦在固定區間內上下震盪，因此也是平穩且正相關的時間序列。

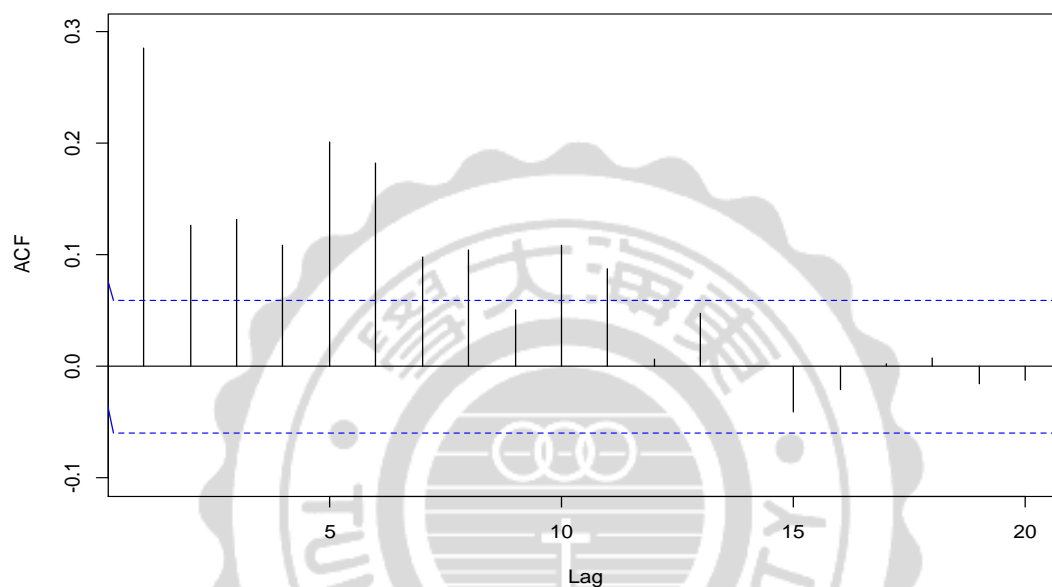


圖 3.31 真實地震資料 ACF 圖。

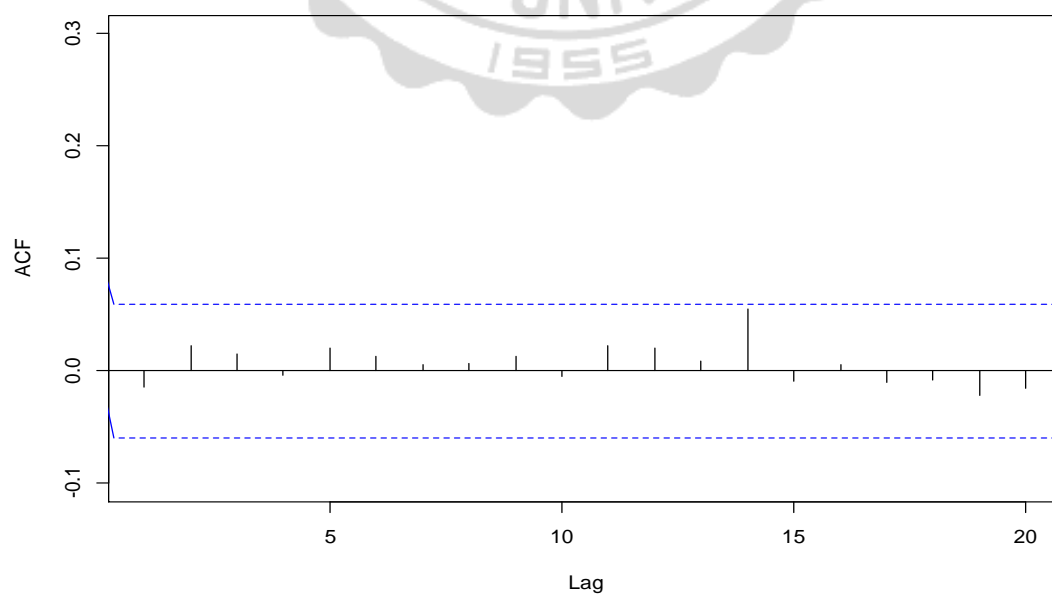


圖 3.32 模擬地震資料 ACF 圖。



6. PACF 圖：

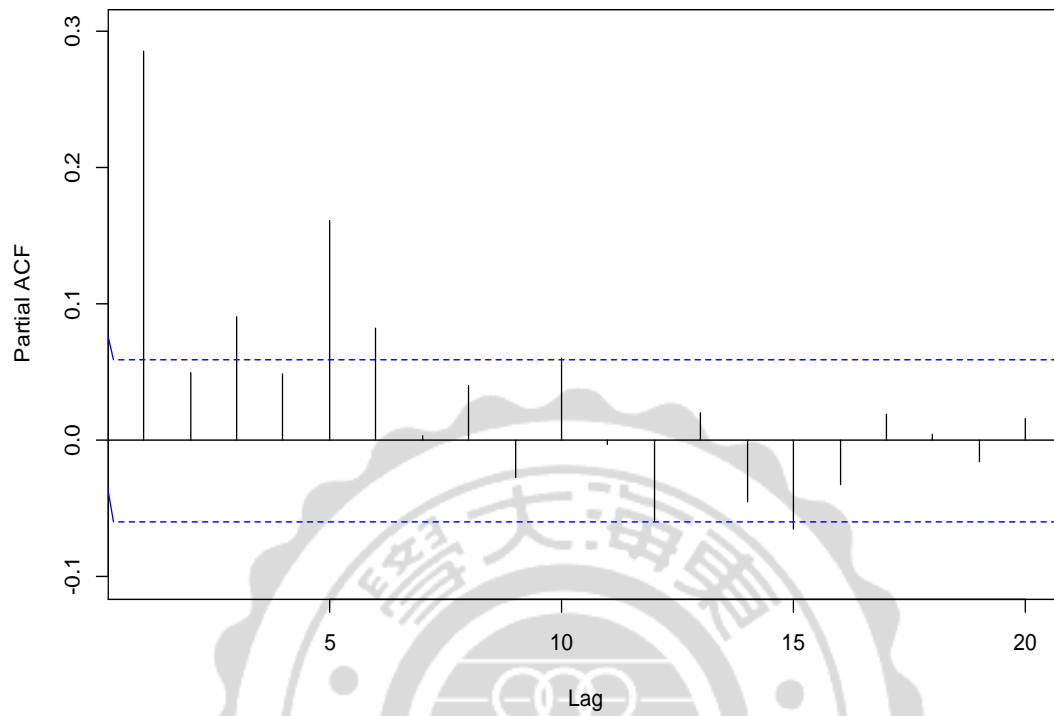


圖 3.33 真實地震資料 PACF 圖。

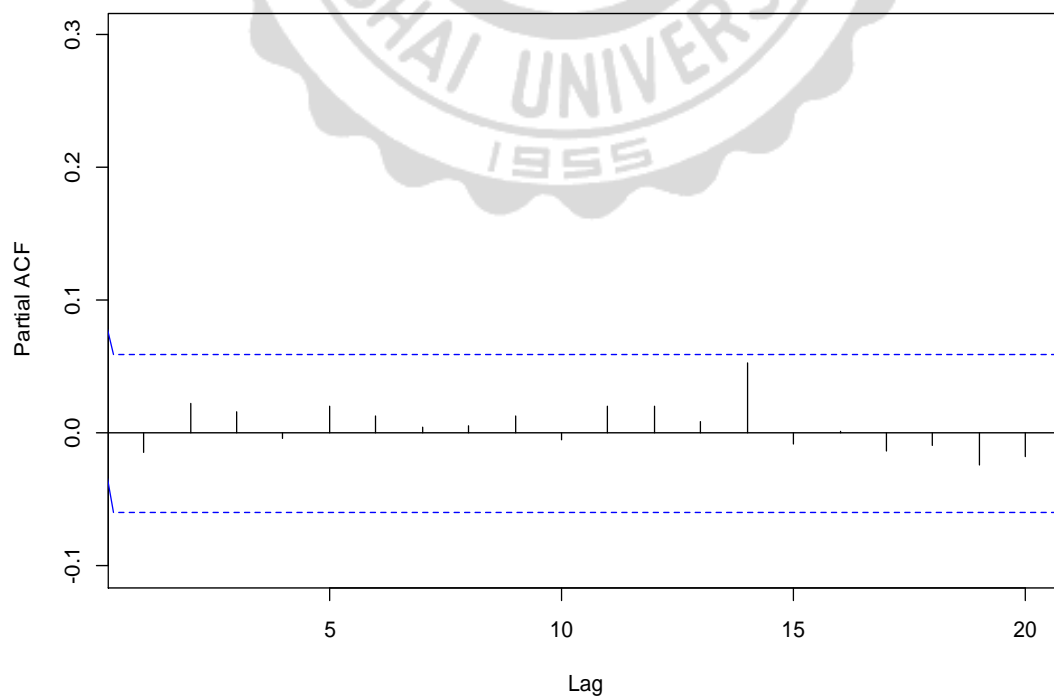


圖 3.34 模擬地震資料 PACF 圖。

### 7. $\log(\text{VAR})$ v.s. $\log(\Delta t)$ 圖：

以下兩張圖中，兩資料的  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$ 圖皆呈一直線且斜率  $>1$ ，表示皆為 CPP，兩圖雖斜率相近但截距相差 0.936，原因是真實地震資料有較多離群值，也就是受高地震發生次數的影響，導致變異數較大。

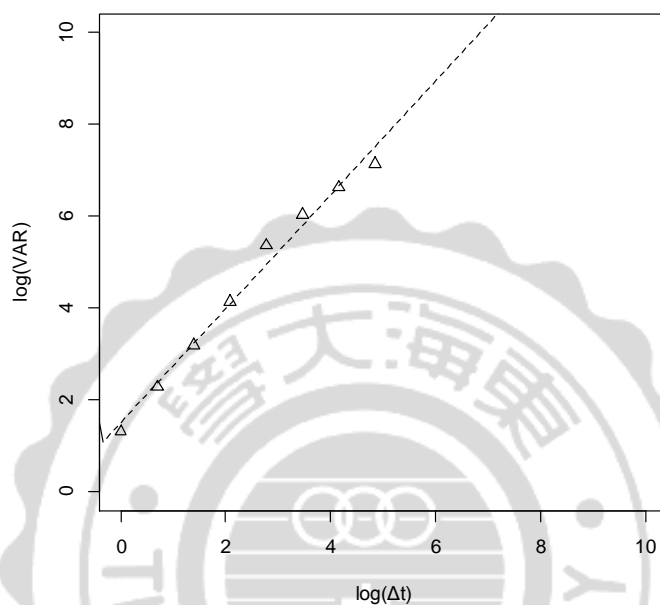


圖 3.35 真實地震資料之  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$ 圖，截距為 1.507，斜率為 1.241。

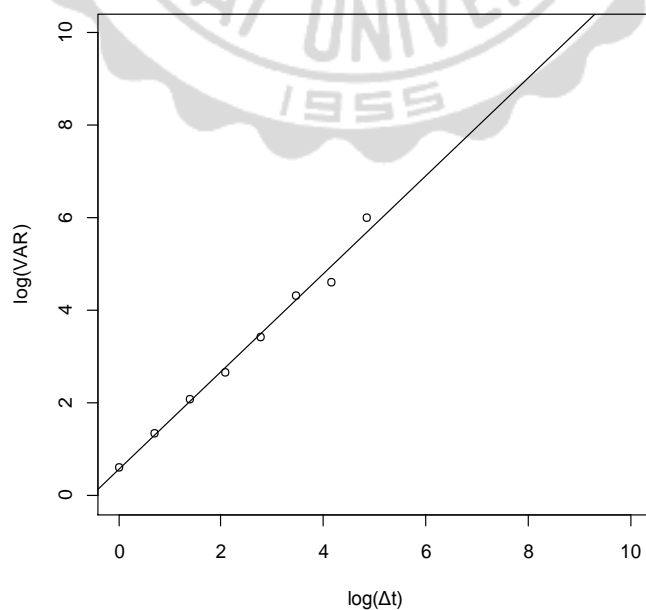


圖 3.36 模擬地震資料之  $\log(\text{VAR})$  v.s.  $\log(\Delta t)$ 圖，截距為 0.571，斜率為 1.058。

## 第四章 結論與後續研究

### 4.1 結論

經過各項觀察我們得到：

1. 一系列地震是由主震引起一連串的餘震，而 CPP 是一連串主要事件各自引發一連串次要事件。
2. 頻譜圖中，地震資料具有  $1/f$  之頻譜特性，而 CPP 也具有此性質。
3. 分析顯示地震資料具有碎形特性，而 CPP 也具有碎形的特質。

，本研究根據以上性質，故採用群集卜瓦松過程去模擬地震資料。最後，我們找到一組與地震資料最符合的參數，再透過多種統計方法做比較，看是否相似。結果發現，有些比較雖有差異，但透過了解與分析，此模型的配適亦在合理範圍內。

本研究之目的在於探討地震發生時點之機率模型，了解地震的發生機制，而非預測地震的發生，畢竟目前科學家只能透過對地下結構的瞭解做震災危害度評估，提供特定規模的地震在未來發生在某區域的機率，因此對於地震的預測目前似乎還不可能。

### 4.2 後續研究方向

本研究所選取的配適模型在頻率方面與真實地震資料相似，但卻無法完全捕捉序列的相關性。因此，為了更進一步了解地震過程，列出以下三點後續研究方向，看能否藉此了解更多地震發生過程的相關資訊，讓模型更加完備，使序列的相關性更強烈。

1. 尋找更多能使模型的群聚現象更加明顯的方法。
2. 運用本研究模型做未來台灣地震過程的預測，看是否符合。
3. 將地震資料測量時間改為一天，看是否較能捕捉序列的相關性。
4. 嘗試利用其它點過程模型去適配地震資料，看是否有更合適的模型。

## 參考文獻

中文部份：

1. 交通部中央氣象局，民國 97 年，地震百問，  
網址：<http://scman.cwb.gov.tw/eqv5/eq100/100/eq100-all.pdf>。
2. 周峰成，民國 90 年，1/f 型態隨機點過程之應用以台灣地震紀錄為例，東海大學統計研究所。
3. 賴志傑，民國 90 年，應用心率變異之頻譜分析監測手術後病人危險因子之研究，國立中山大學應用數學系碩士班。
4. 洪祥齡，民國 90 年，碎形特性於點過程之應用—區分重度自律神經病變糖尿病病人與健康人之脈搏波動，東海大學應用統計研究所。

英文部份：

5. Brockwell, P. J., Davis, R. A., 1996, Introduction to Time Series and Forecasting., Springer-Verlag, New York.
6. Fortin, C., Kumaresan, R., Ohley, W., Hofer, S., 1992, Fractal Dimension in the Analysis of Medical Images., IEEE Engineering in Medicine and Biology:65-70.
7. Gruneis, F., 1983, A Number Fluctuation Model Generating 1/f Pattern., Physica 123A:149-160.
8. Gruneis, F., 1985, Is 1/f Noise A Doubly Stochastic Process ?, Noise in Physical Systems and 1/f Noise:369-372.
9. Gruneis, F., Baiter, H. J., 1985, More Detailed Explication of A Number Fluctuation Model Generating 1/f Pattern., Physica 136A:432-452.
10. Gruneis, F., Nakao, M., Yamamoto, M., Musha, T., Nakahama, H., 1989, An Interpretation of 1/f Fluctuations in Neuronal Spike Trains During Dream Sleep., Biological Cybernetics 60:161-169.
11. Gruneis, F., Nakao, M., Yamamoto, M., 1990, Counting Statistics of 1/f Fluctuations in Neuronal Spike Trains., Biological Cybernetics 62:407-413.
12. Gruneis, F., Nakao, M., Yamamoto, M., Musha, T., 1991, 1/f Fluctuations in

- Stochastic Point Processes:New Tools for Characterizing Neuronal Outputs.,  
Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations:583-586.
13. Lowen, S. B., Teich, M. C., 1994, Estimation and Simulation of Fractal Stochastic Point Processes., *Fractals*, Vol. 3:183-210.
  14. Meesmann, M., Gruneis, F., Flachenecker, P., Kniffki, K-D., 1993, A New Method for Analysis of Heart Rate Variability:Counting Statistics of 1/f Fluctuations., *Biological Cybernetics* 68:299-306.
  15. Ozaki, T., 1979, Maximum Likelihood Estimation of Hawkes's Self-Exciting Point Process., *Annal of the Institute of Statistical Mathematics*, 31, Part B:145-155.
  16. Ozaki, S., 1992, *Applied Stochastic System Modeling*, Springer-Verlag, New York.
  17. Pinsky, M. A., Karlin, S., 2011, *An Introduction to Stochastic Modeling*. Academic Press is an Imprint of Elsevier.

統計軟體部份：

18. 陳景祥，民國 101 年，*R 軟體應用統計方法*，東華書局。
19. 彭昭英，唐麗英，民國 97 年，*SAS 1-2-3*，儒林圖書公司。