

東 海 大 學

工業工程與經營資訊學系

碩士論文

具有季節性之混沌時間序列預測模式

研究生：陳富源
指導教授：張炳騰 博士
曾宗瑤 博士

中華民國一〇二年六月

Forecasting Model for Chaotic Time Series with Seasonality

By
Fu-Yuan Chen

Advisors : Dr. Ping-Teng Chang
Dr. Tsueng-Yao Tseng

A Thesis
Submitted to the Institute of Industrial Engineering and Enterprise
Information at Tunghai University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
in
Industrial Engineering and Enterprise Information

June 2013
Taichung , Taiwan

具有季節性之混沌時間序列預測模式

學生：陳富源

指導教授：張炳騰 教授

曾宗瑤 副教授

東海大學工業工程與經營資訊學系

摘 要

對於具有季節性的混沌時間序列，首先用延遲嵌入定理去重構時間序列的相空間，它描敘了一個非線性系統的行為演變，再來使用了常見的混沌預測方法：全局預測法、局域預測法、加權最大 Lyapunov 指數預測法，去做混沌時間序列的預測，為了提高混沌預測的準確性，考慮到時間序列受季節性因素影響，所以用季節指數調整的方法，去更進一步降低混沌預測的誤差。

而混沌時間序列經由季節指數調整後，有些即不再呈現混沌現象，故選擇在相空間重構後才做季節指數調整，結果表明皆可讓原本的混沌預測結果更加準確，而對於在變動越明顯的混沌時間序列中，其預測結果的改善越多。

關鍵字詞：混沌時間序列、相空間重構、複線性迴歸、季節調整

Forecasting Model for Chaotic Time Series with Seasonality

Student : Fu-Yuan Chen

Advisors : Dr. Ping-Teng Chang

Dr. Tsueng-Yao Tseng

Department of Industrial Engineering and Enterprise Information
Tunghai University

ABSTRACT

For a seasonal chaotic time series, first we use the time-delay embedding theorem to reconstitute the sequence of phase space, which describes the behavior of a nonlinear system evolution, then we use the common chaotic prediction method: Full-area forecast method, Local-region forecast method, the weighted largest Lyapunov exponent forecasting method to do the chaotic time series forecasting. In order to improve the accuracy of chaotic prediction, we think the time series affected by seasonal factors, so we use the seasonal index adjustment methods, to further reduce the chaotic prediction errors.

Some of chaotic time series will not show chaotic phenomena after adjusting seasonal index. As a result, we decided to use the seasonal index adjustment after phase space reconstruction. The results indicate both make the prediction of chaotic phenomena more precise and improve the prediction more as the changes are more obvious in the chaotic time series.

Keywords : Chaotic Time Series, Phase Space Reconstruction, Multiple Linear Regression, Seasonal Index Adjustment

致謝詞

畢業了，在東海的日子轉眼間也六年了，充滿著許多回憶、不捨與感謝。研究所這兩年，讓我學習到做事情該有的正確態度，從不同的角度去思考事情，也時時檢視、反省自己，也從挫折中重新認識自己，補其自己不足的地方，更要勇敢的面對問題與接受事實，這段日子以來真的成長了不少。

感謝張炳騰老師在論文上耐心的指導，並給予相當多的鼓勵與幫助，讓論文能夠順利完成，而在學術研究和待人處世上，也提供了許多的參考經驗與想法，更讓我了解到做事情應有的嚴謹態度，在未來才能走得更加踏實，衷心感謝這份師恩情誼。而在研究過程中，感謝學長龍廷、義琳、士戎、世念在研究遇到問題的時候給予幫助；感謝子琪、葦柔、宜璟的陪伴，彼此互相加油、鼓勵，很珍惜這份情誼，謝謝你們；感謝學弟妹秀儒、凱雯、逸琮、博仁平日的幫忙和口試時的準備；也感謝小鈺、米血、士瑋、宇凡在論文研究過程中給予的加油和幫助。能進入到 IKS 認識大家的我很幸運，謝謝平時的照顧，感謝你們一路上的陪伴。

最後感謝父母多年來的養育與照顧，讓我無後顧之憂的在外求學生活，不僅適時的給予鼓勵與支持，並時時提醒我要在生活 and 課業中不斷的努力和自我要求，謝謝你們，我最親愛的家人。

謹以此篇成果獻給每一位給予我幫助和教導過我的所有夥伴和朋友們，有你們支持及鼓勵，才能完成此論文，並祝福大家未來一帆風順。

陳富源 謹誌於

東海大學工業工程與經營資訊研究所

中華民國一〇二年六月

目錄

摘要.....	i
ABSTRACT.....	ii
致謝詞.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	v
圖目錄.....	vi
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 研究目的.....	2
1.3 研究流程.....	3
第二章 文獻探討.....	4
2.1 混沌研究發展.....	4
2.2 混沌特性介紹.....	9
2.3 碎形結構.....	14
2.4 混沌現象鑑別法.....	16
2.5 相空間重構法.....	20
2.6 迴歸分析.....	23
第三章 研究方法.....	26
3.1 混沌序列相空間重構.....	27
3.2 混沌時間序列預測方法.....	29
第四章 實證結果與分析.....	33
4.1 電力負載資料.....	33
4.2 交通車流資料.....	45
第五章 結論與未來研究方向.....	54
5.1 結論.....	54
5.2 建議.....	54
參考文獻.....	55

表目錄

表 2.1 混沌理論提出者及論點.....	9
表 2.2 混沌鑑別法.....	16
表 4.1 電力負載預測準確度評估-MAPE.....	44
表 4.2 電力負載預測準確度評估-RMSPE.....	45
表 4.3 交通車流預測準確度評估-MAPE.....	52
表 4.4 交通車流預測準確度評估-RMSPE.....	53

圖目錄

圖 1.1 研究流程圖.....	3
圖 2.1 Lorenz 方程式在三維空間的軌跡圖.....	5
圖 2.2 Lorenz 方程式在 x、y、z 對時間 t 的軌跡圖.....	6
圖 2.3 Rössler 方程式在三維空間的軌跡圖.....	7
圖 2.4 Chen 混沌系統.....	8
圖 2.5 Lü 混沌系統.....	9
圖 2.6 兩個系統的迭代圖及誤差圖.....	14
圖 2.7 卡區雪花.....	15
圖 2.8 Sierpinski 三角形.....	15
圖 2.9 龐加萊基本定義圖（轉載自 wiki 百科）.....	19
圖 2.10 龐加萊截面與系統運動軌跡.....	19
圖 2.11 時間序列圖及相空間圖.....	20
圖 3.1 本研究方法流程圖.....	26
圖 3.2 相空間中相點軌跡移動圖.....	31
圖 4.1 電力負載資料時間序列圖.....	33
圖 4.2 電力負載資料的自我相關函數圖.....	34
圖 4.3 電力負載資料估計嵌入維度圖.....	34
圖 4.4 電力負載資料的觀察值與預測值關係圖(全局預測法).....	35
圖 4.5 電力負載資料(局域預測法 K 值的選擇).....	35
圖 4.6 電力負載資料的觀察值與預測值關係圖(局域預測法 k=35).....	36
圖 4.7 電力負載資料的觀察值與預測值關係圖(LLE).....	36
圖 4.8 電力負載資料的觀察值與預測值關係圖(WLLE, w=0.5).....	37
圖 4.9 電力負載資料的觀察值與預測值關係圖(TWLLE, w=0.5).....	37
圖 4.10 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)自相關函數圖.....	38
圖 4.11 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)估計嵌入維度圖.....	38
圖 4.12 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)觀測值和預測值關係圖(全局法)	39
圖 4.13 電力負載資料季節指數調整於相空間重構前(局域預測法 K 值的選擇).....	39
圖 4.14 電力負載資料季節指數調整於相空間重構前 (局域預測, k=40).....	40
圖 4.15 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)觀測值和預測值關係圖(LLE)...	40

圖目錄

圖 4.16 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)觀測值和預測值關係圖(WLLE, $w=0.7$).....	41
圖 4.17 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構後)觀測值和預測值關係圖(全局法).....	42
圖 4.18 電力負載資料季節指數調整於相空間重構後(局域預測法 K 值的選擇).....	42
圖 4.19 電力負載資料季節指數調整於相空間重構後(局域預測, $k=40$).....	43
圖 4.20 交通車流資料時間序列圖.....	46
圖 4.21 交通車流資料的自我相關函數圖.....	46
圖 4.22 交通車流資料估計嵌入維度圖.....	47
圖 4.23 交通車流資料的觀察值和預測值關係圖(全局預測法).....	47
圖 4.24 交通車流資料(局域預測法 K 值的選擇).....	48
圖 4.25 交通車流資料的觀察值與預測值關係圖(局域預測法 $k=5$).....	48
圖 4.26 交通車流資料的觀察值與預測值關係圖(LLE).....	49
圖 4.27 交通車流資料的觀察值與預測值關係圖(WLLE, $w=0.05$).....	49
圖 4.28 交通車流資料的觀察值與預測值關係圖(TWLLE, $w=0.05$).....	50
圖 4.29 交通車流資料(季節指數調整於相空間重構後)觀測值和預測值關係圖(全局法).....	50
圖 4.30 交通車流資料季節指數調整於相空間重構後(局域預測法 K 值選擇).....	51
圖 4.31 交通車流資料季節指數調整於相空間重構後(局域預測, $k=45$).....	51

第一章 緒論

1.1 研究背景與動機

在過去數十年中，混沌理論 (Chaos Theory) 被不同領域的學者發現存在於許多的自然系統中，並已被廣泛的應用於各個工程研究領域，例如：物理、化學、生物學、天文物理和地球科學等。混沌理論也被譽為是二十世紀的三大理論之一，與相對論、量子力學齊名。它是一種確定性的非線性系統，一個系統如果其歷程或未來狀態可完全由某一初始狀態來決定，則稱其為確定性 (Deterministic) 系統，而動態 (Dynamical) 系統就是在研究某一確定性系統之狀態隨時間變化的規律，雖然是一種看似隨機且非常複雜的動態行為，其實背後卻可由簡單的微分方程式所表示。

在我們所處的環境中，除了有少數現象屬於線性系統外，大部分現象都屬於非線性的。傳統的問題處理，研究者較偏愛線性模式 (classic linear models)，主要原因是較為簡便，且容易找到均衡解。惟其誤差項係基於常態分佈的假設，對於短期間內呈現巨幅的不連續變化現象，模式難以構建，且解釋能力不佳，早期的學者在進行非線性系統的分析時，常會發現一些亂象，將其解釋為實驗或數值誤差。隨著混沌理論的發展，非線性系統的分析逐漸受到廣泛的矚目，因為即使是簡單的非線性模式亦可能產生複雜的行為，一些非線性科學的研究成果已經改變以往對於複雜行為的看法，傳統上被認為是非常複雜沒有希望被解釋的系統，現在則可透過混沌理論對這些系統作進一步的了解或控制。混沌現象僅存在於非線性系統中，而非線性方程一般均無均衡解，故必須將其線性化，在線性化的過程中仍可能犧牲掉蘊含於其中的一些混沌現象。

混沌理論是研究複雜系統特徵的一種重要的方法，如果時間序列帶有不規則的運動特徵，可看成是一種混沌現象，可藉由混沌理論來做短期預測，準確度較高。關於混沌時間序列預測，透過測量混沌時間序列可獲得混沌吸引子。而透過相空間重構過程中的延遲座標嵌入，可保留混沌吸引子的屬性，這過程也包含了保留幾何和動力學特質。

在過去的二十年中，已經提出了各式各樣的時間序列預測方法，來讓預測準度提高，如迴歸分析，指數平滑法，ARMA 模型，而許多常見時間序列預測，被假定是線性的，事實上許多時間序列都是非線性的性質。混

沌時間序列預測已引起許多研究人員關注，在過去幾年已經制定了許多混沌預測方法，如全局預測法、局部區域預測的方法，基於最大 Lyapunov 指數預測的方法、人工類神經網絡方法，這是基於一些混沌預測方法動態重構技術，也取得了一些不錯的成果。

1.2 研究目的

混沌理論近年來已被廣泛的運用於各領域，並且用來作分析預測。由於電力負載量和交通車流量都是不規則現象的一種，因此應可用混沌理論的非線性時間序列分析去加以探討預測。

對於具有季節性的混沌時間序列，考慮其受到季節性因素影響，而為了提高混沌預測方法的準度，而對混沌時間序列做季節指數調整，若混沌時間序列在做季節指數調整後，並不具混沌現象了，則在原本的混沌時間序列相空間重構之後，才做季節指數調整。本研究選了幾種較常見的混沌預測方法分別去分析評估並比較其預測誤差。

1.3 研究流程

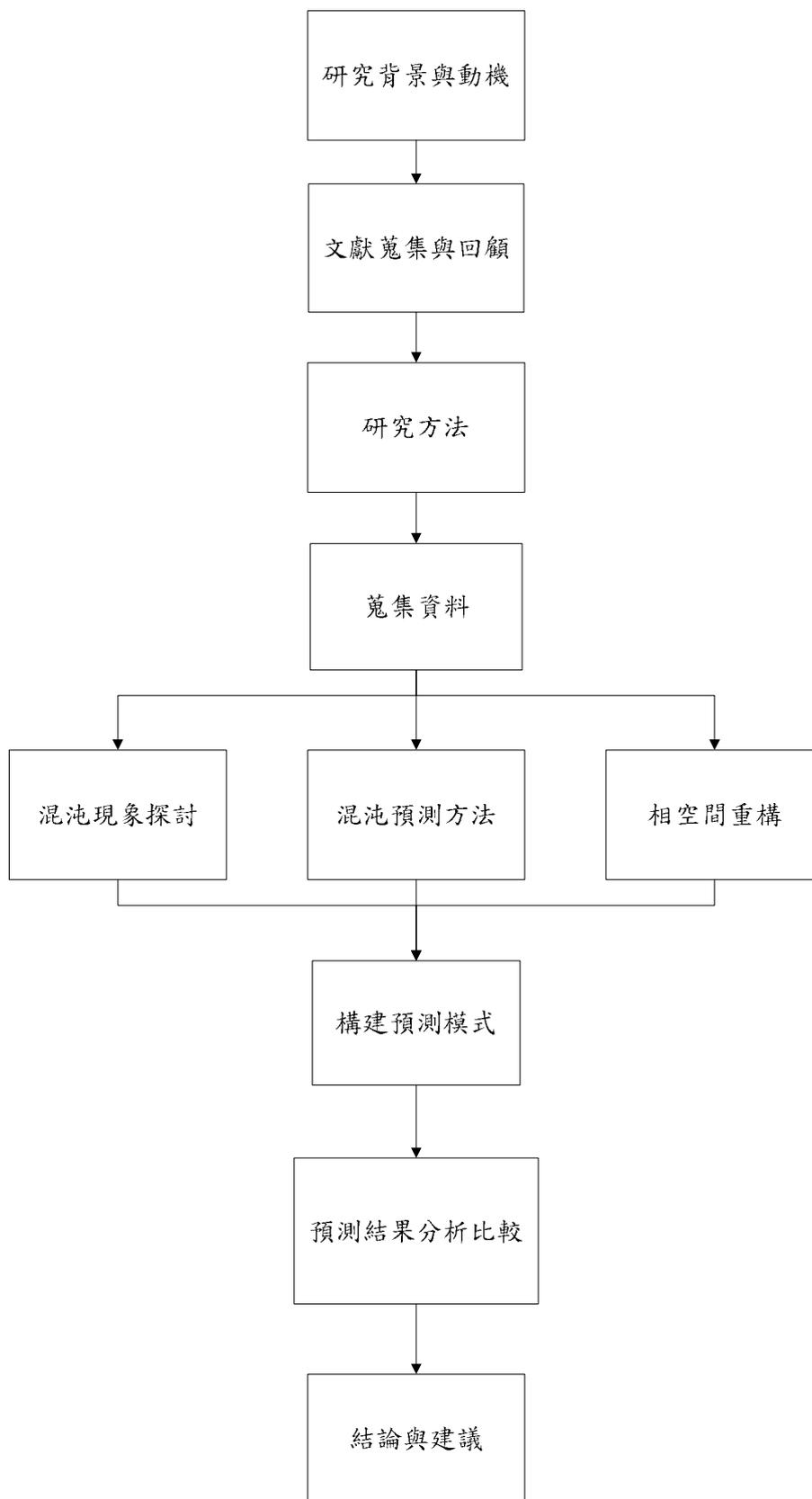


圖 1.1 研究流程圖

第二章 文獻探討

2.1 混沌研究發展

混沌理論的發展可以追溯到十九世紀末法國的物理學家龐加萊 (Henri Poincaré)；他在著名的「三體運動 (Three-body problem)」研究中指出：二個星體運行的軌道方程式，在加入第三星體的影響後，會變得無法求解。接著，1918年杜芬 (Duffing) 對具有非線性恢復力項之受迫振動系統進行研究，發現了許多非線性振動的奇異現象，並且將該系統標準化成為Duffing方程式。同時期，荷蘭物理學家Van der Pol在研究加有柵極真空管的控制電路上，建立的一個數學模型。Duffing與Van der pol方程式都是現代研究混沌現象常用之典型範例。混沌最重大的突破是美國氣象學家羅倫茲 (Edward N. Lorenz) 提出「確定性非週期流 (Deterministic Nonperiodic Flow)」(Lorenz, E. N., 1963)，有限系統中的確定性非線性常微分方程，被設計來代表耗散流體流動 (forced dissipative hydrodynamic flow)。這些方程式的解可以用來表示在相空間 (phase space) 中的軌道，即為羅倫茲方程式。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - x) \\ \dot{y} &= \beta x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \gamma z\end{aligned}\tag{2-1}$$

其中， x 、 y 、 z 表示空間的三個維度， t 表示時間， α 、 β 、 γ 為控制參數。當給定 $\alpha = 10$ 、 $\beta = 28$ 、 $\gamma = 2.6667$ ，且初始狀態 $x(0)=1.2$ 、 $y(0)=1.3$ 、 $z(0)=1.6$ 時，我們可以繪出此微分方程式在三維坐標上的運動軌圖。

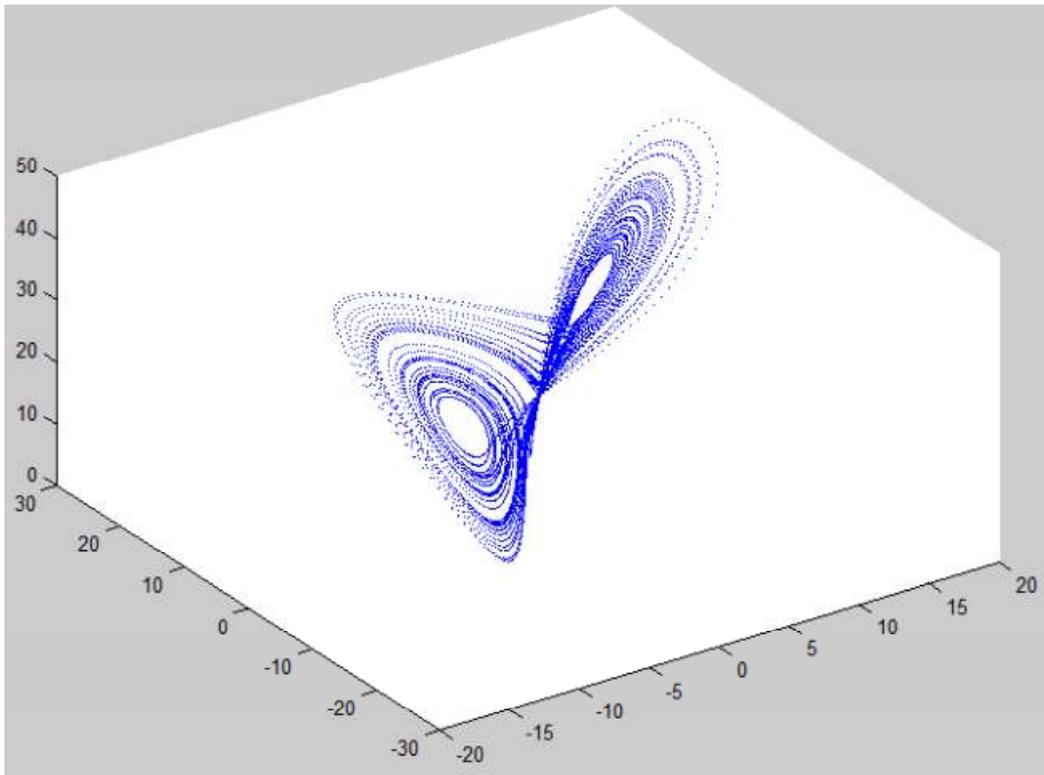


圖 2.1 Lorenz 方程式在三維空間的軌跡圖

由圖2.1可以看出，此方程式的軌跡不相互碰觸，且無止盡的呈現8字型的運動。雖然不重覆，但是軌跡會一直像是繞著這兩個吸子（attractors）的影響。進一步分析，由圖2.2中也可發現， x 、 y 、 z 之位移隨時間 t 的改變而改變，圖形呈現上下起伏的震盪，看似毫無規律的變化其實亂中有序。換言之，一粒子在 n 維空間活動時，因受空間中吸子吸引，致使其在 n 維空間呈扭曲之運動軌跡，故此時若只在某特定軸觀察粒子運動之軌跡投影，將發現粒子隨時間呈不規則但又似有週期之震盪，此即確定性混沌現象。

那羅倫茲系統是穩定的嗎？一般來說，系統如果達到穩定狀態，系統運動所產生的軌跡可能會到達定點而停止，影響系統的因子不再改變；或者是軌跡沿著相同的迴路打轉，這就是系統趨向週期性行為。但羅倫茲系統所呈現的皆和上述不同，圖形看起來相當複雜，軌跡像是有規則的在固定邊界內運動，軌跡間不會有交點、也不會收斂。因此對混沌系統要進行長期預測是不可行的，只能做短期的局部預測。

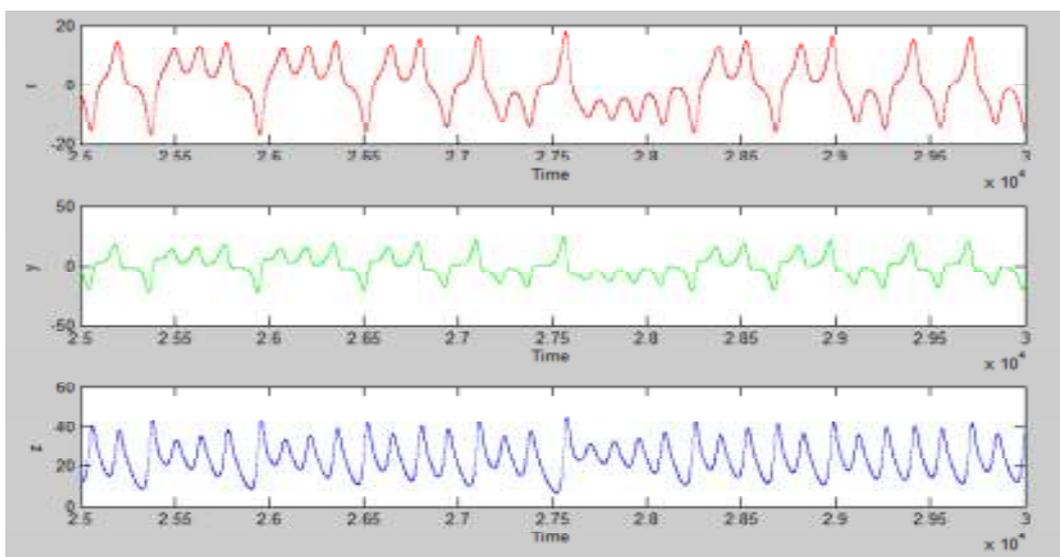


圖 2.2 Lorenz 方程式在 x 、 y 、 z 對時間 t 的軌跡圖

1975年美籍華人李天岩與美數學家共同發表論文「週期三意味混沌」(Period three implies chaos) (Li, T. Y., & Yorke, J. A., 1975)。由於論文被學界廣為引用，「混沌」至今甚至成為混沌理論的代名詞。這篇經典論文中指出：一個有「三週期點」的迭代函數就會有一切的週期點，也就是說，這個函數將會飄忽不定，完全不可預測。Li and Yorke替混沌現象作了精確的數學定義，讓人們相信：混沌的行為雖然不可捉摸，但仍然可以被充分解釋。然而混沌理論的數學基礎卻至費根堡 (Feigenbaum) 在1976年發現一個universal constant (Feigenbaum, M. J., 1983) 後才奠定下來，任何一個具有週期倍增現象的迭代函數，其分叉點的間距與寬度都呈現固定的比例 -4.669201609 ，也就是一般所稱的「費根堡常數」。一個系統在通向混沌的過程中，還是遵循著某種秩序的。同年Rössler在研究具有中間產物的化學反應問題時，通過適當的標度變換，提出了一個簡單的三維非線性方程組，即Rössler方程組 (Rössler, O. E., 1976)：

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c) \end{aligned} \quad (2-2)$$

其中， x 、 y 、 z 表示空間的三個維度， t 表示時間， a 、 b 、 c 為控制參數。當給定 $a=0.2$ 、 $b=0.2$ 、 $c=5.7$ ，我們可以繪出此微分方程式在三維坐標上的

運動軌跡圖，如圖2.3。

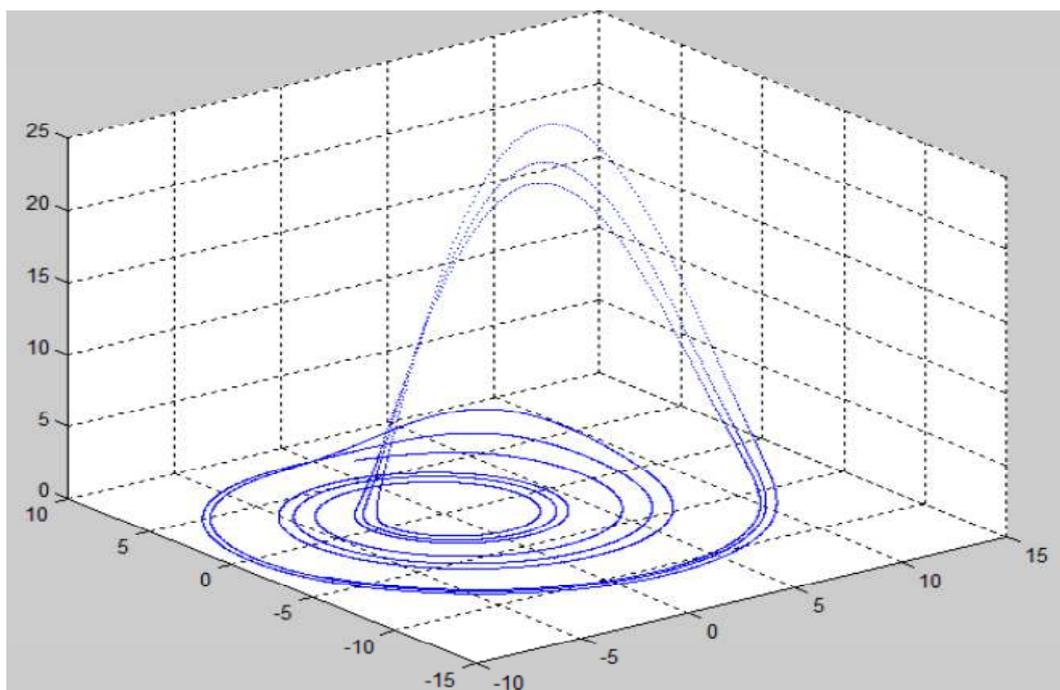


圖 2.3 Rössler 方程式在三維空間的軌跡圖

當然，混沌動力學系統不只有Lorenz和Rössler系統。1976年，法國天文學家M. Henon發現了一個離散時間的動態系統方程式：

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + by_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \quad (2-3)$$

當 $a=1.4$ 、 $b=0.3$ 時，此方程式在 (x, y) 平面上的映射會呈現混沌狀態。Chen (1999) 提出了一個與Lorenz系統互為對偶的系統，稱為Chen系統。Lü et al. (2001) 等人發現在Lorenz和Chen這兩個系統之間存在一個新的混沌系統，稱為Lü系統。根據Vaněček and Čelikovský (1996) 提出普適性勞倫茲系統 (Generalized Lorenz System) 的概念，Čelikovský et al. (2002) 提出了普適性勞倫茲系統邊界的標準型式。統一混沌系統 (Unified chaotic system) 包含Lorenz、Chen和Lü系統，可以由下列方程式表達：

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x) \\ \dot{y} = (25 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y \\ \dot{z} = xy - \frac{1}{3}(8 + \alpha)z \end{cases} \quad (2-4)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$ 為系統之參數。

對於參數 $\alpha \in [0, 1]$ 時，系統均為混沌狀態。且當 $\alpha \in [0, 0.8)$ 時，系統屬於廣

義Lorenz系統；當 $\alpha \in (0.8, 1]$ 時，系統屬於廣義Chen系統；而當 $\alpha < 0.8$ 時，系統屬於廣義Lü系統。它具有連接Lorenz和Chen系統的重要作用。廣義系統十分有趣，只需要一個參數 α 就可以控制整個系統，當 α 由0逐漸增加到1時，系統也由Lorenz系統逐漸過渡到Chen系統。

Chen系統如式(2-5)，其中， a 、 b 、 c 是常量， x 、 y 、 z 是自變量 t 的函數， \dot{x} 、 \dot{y} 、 \dot{z} 分別表示 x 、 y 、 z 對時間 t 之 t 導函數。

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = bx - y - xz \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (2-5)$$

給定一組系數 $a=35$ 、 $b=28$ 、 $c=3$ 時，初始值 $(1.2, 1.3, 1.6)$ ， $dt=0.005$ ，Chen混沌系統圖形如圖2.4。

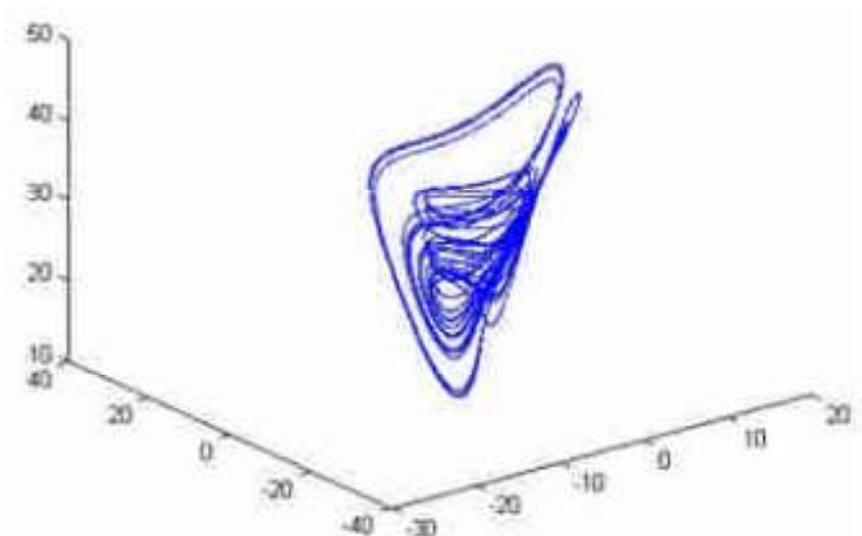


圖 2.4 Chen 混沌系統

Lü系統如式(2-6)，其中， a 、 b 、 c 是常量， x 、 y 、 z 是自變量 t 的函數， \dot{x} 、 \dot{y} 、 \dot{z} 分別表示 x 、 y 、 z 對時間 t 之導函數。

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = bx - y - xz \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (2-6)$$

給定一組系數 $a=36$ 、 $b=20$ 、 $c=3$ 時，初始值 $(1.2, 1.3, 1.6)$ ， $dt=0.005$ ，Lü混沌系統圖形如圖2.5。

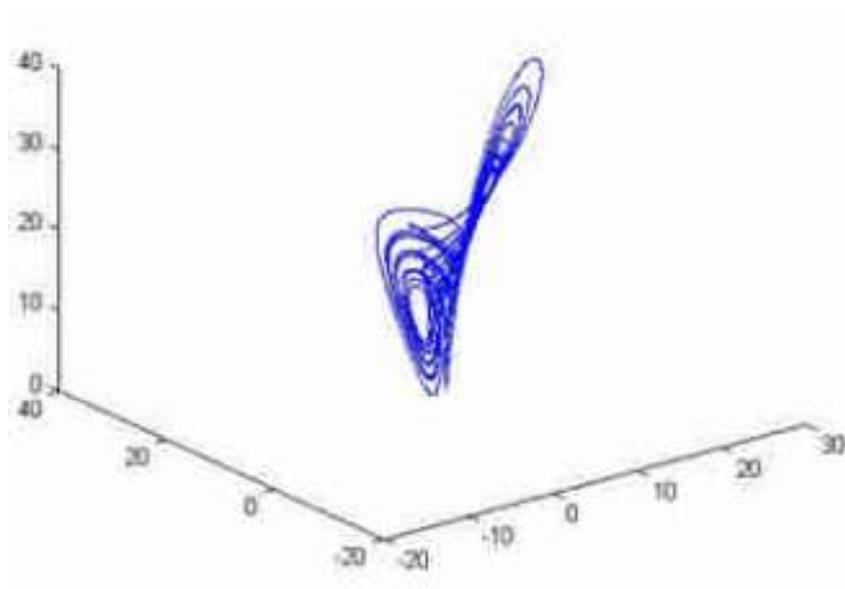


圖 2.5 Lü 混沌系統

2.2 混沌特性介紹

本研究將有關混沌理論發展依年份摘要如表 2.1 呈現。

表2.1 混沌理論提出者及論點

提出學者	論點說明
Lorenz (1963)	對天氣的觀察進行實驗後，發現初始值的微小改變會造成結果的巨大差異，進而提出蝴蝶效應。
Ruelle & Taken (1971)	奇異吸子為指數型分離的運動軌道，無數次伸展與對折的行為，表現出無窮層次的自相似性結構。
Mandelbrot (1977)	發現碎形之分數維度是藉著系統的不規則程度，用簡潔的圖形呈現混沌的抽象本質。
Feigenbaum (1983)	發現無論迭代映射函數為何，只要具有非線性的特徵，系統的長時間行為具有相同的收斂行為。
Gleick (1987)	強調混沌理論的出現打破了牛頓以來的物理學家認為宇宙現象是可以控制與預測的幻覺，相反的，在其認為可控制與預期的背後，是現象的隨機性與無序性。

表 2.1 混沌理論提出者及論點(續)

提出學者	論點說明
Hayles (1990)	<p>認為混沌是強調存在於雜亂現象之內潛藏的規律秩序結構，且對其有兩種不同的看法。一派認為混沌是規律秩序的前兆及夥伴，而非與其相對立者；而另一派則強調混沌是雜亂現象中所潛藏的規律與秩序結構。</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) 非線性 (2) 複雜形式 (3) 循環式的對稱 (4) 對起始狀態的敏感 (5) 回饋機制
Young (1991)	<p>混沌研究依賴於數量方法的計算，然而必須藉由隱喻的寬鬆結構，來加深意念表達</p>
Hilborn (1994)	<p>確定性系統行為包含三要素：</p> <ul style="list-style-type: none"> (1) 隨時間演化的非線性方程式 (2) 描述系統特性的內在參數因子 (3) 具有初始值
陳木金 (2001)	<ul style="list-style-type: none"> (1) 蝴蝶效應敏銳度 (2) 混亂的起源敏銳度 (3) 耗散結構敏銳度 (4) 隨機龐雜震撼敏銳度 (5) 奇異吸引子敏銳度 (6) 迴路遞移對稱敏銳度 (7) 回饋機制敏銳度現況

(資料來源：本研究整理)

混沌是系統處於非平衡過程中所呈現的隨機行為，因此非線性是產生

混沌的必要條件，但並非任何非線性系統都會產生混沌，本研究將上表的論點進行統整，認為當系統具有以下特質時，會產生混沌現象：

1. 非線性 (nonlinear)

「線性關係」通常是我們所熟知的概念，是指在因果關係中，呈現正向相關。也就是說可以藉由變數的改變來預測結果。然而「非線性關係」可以視為與「線性關係」之相對，非線性關係強調結果是不可預測 (Hayles, 1990)。但是在混沌理論的概念之中，「非線性」才是在自然與社會中的常態。因為在自然與社會科學界，系統是動態且複雜的，無法以單一因子來決定最終的結果，事物與事物之間常常受到彼此之間的交叉影響，而產生錯綜複雜的型態。

2. 對初始值敏感 (sensitive dependence on initial conditions)

混沌理論是一個數學分支，用來研究某些動力系統的行為，可能對於初始條件高度敏感 (Lorenz, 1963)。這種敏感性是普遍稱為「蝴蝶效應」。由於這樣的敏感性，顯現本身的誤差是由於指數增長，混沌系統呈現的行為是隨機的。也就是說，在初始狀態的微小差異對系統可能導致巨大的差異，導致混沌系統的不可預測性。

3. 具有奇異吸子 (strange attractors)

Ruelle & Taken (1971) 認為存在於相空間中的子集合，許多常見的動態系統，當系統軌跡隨著時間演化，往往就會進入某些特定的狀態，被限制在某特定區域中，則我們稱這些狀態是這個系統的“吸子”。Young & Kiel (1994) 在解釋吸引子時，提出了四種不同狀態的吸子。

(1). 點吸子 (point attractor) :

不管系統從甚麼初始條件出發，經長期的演化後收斂到一個固定點。就像在地球上的單擺運動，因為有引力的影響，單擺最後會趨近靜止狀態而不會再改變，最後停止的那一點就是點吸子；

(2). 週期吸子 (periodic attractor) :

也可稱極限環 (limit-cycle)，這種系統從某一初始狀態出發，經過一段時間後直接進入週期運動，一旦系統進入週期運動，其軌道在相空間中就會收斂到一封閉曲線，周而復始、永遠循環；

(3). 擬週期吸子 (quasi-periodic attractor) :

也可稱環面吸子 (torus attractor) ，是由兩個或兩個以上的系統相互影響所產生，它也是一個週期性的系統，可以看成兩個不同的極限環所組成；

(4). 奇異吸子 (strange attractor) :

奇異吸子不像上述三種呈現穩定狀態或不斷循環的重複自己的行為。當系統產生混沌運動時，吸子具有不同屬性的內外兩種方向，在吸子外的運動都會趨向吸子，為穩定方向；而吸子內的運動會互相排斥，因為軌道彼此間都不會相交且呈現指數型分離，為不穩定方向。

奇異的意思是指該吸子為一碎形 (Fractal) ，而此奇異吸子會產生一個吸收的區域稱為盆地 (Basin) ，將軌跡收斂在此範圍內，不致遠離發散。因此若系統處於混沌狀態時，則在相空間中 (Phase space) 存在奇異吸子。此外奇異吸子在相空間的維度是屬於一種非整數維度，這就是所謂的碎形維度。而在下列一小節我們將談到碎形。

奇異吸子是穩定、低維度且非週期性的。它從來不和自己交錯，因為一旦如此，就會回到曾經走過的點上，然後運動就會沿著週期性迴路來重複自己。Bobner et al. (1989) 在研究中提到，奇異吸子表示系統有一或多個潛藏的規準或原則，它會主導系統的演變，雖然千變萬化，但仍在某特定範疇內，它具有穩定的性質，可以被預測的，可視為影響系統運作的重要因素。

4. 具類週期 (quasi-periodic) 的時間序列

由於混沌系統不論時間的長短，不會重複出現相同的值，而其圖形具有極高的相似性，因此混沌系統是具有未知週期的週期性現象，此週期現象又稱為類週期。類週期的行為是一個復發與組成部分不可預測性的模式，不容易以精確測量它。在氣候學，類週期是一個表示振盪遵循的規律，沒有固定期限。Liu(1998)在「The meaning and significance of chaos」指出混沌現象具有類週期性。在形成混沌的過程中，會出現迭代循環的特性，因此在形成混沌後，不可能產生相同的輸出值，卻相當靠近，因此混沌現象界於週期與非週期之間。

5. 回饋機制 (feedback mechanisms)

混沌理論認為系統本身具有回饋機制，能將系統的輸出，再回饋轉為輸入，如此迭代形成回饋圈 (feedback loop)。混沌的系統是開放的、動態的，在系統中的回饋循環會不斷進行，使系統狀態逐漸變成穩定狀態。依據 Prigogine and Stengers (1984) 的看法，系統的過去歷史決定其進化過程；然後在隨機與動態之中，系統中各吸子導致成果的產出。一切過程可由非線性方程式來代表。而產出的成果會回饋到系統中，成為新的輸入，並且產生波動而激發出下一波的新結構，如此反覆進行。

6. 耗散結構 (dissipative structure)

耗散結構的存在，其主要特徵為能自外部環境中吸取能量。此因熱力學中的熵反應來自能量的消耗，並逐漸產生衰退 (decline) 現象為保持整個系統不會因熵反應而造成解體就必須自外界吸取能量因此基本上耗散結構是一個開放性系統隨著內部能量的消長，必須隨時與外部交會而產生新的形態。耗散結構中存在著不同的次系統，而其關係為非線性的。換言之，其性質並不如線性關係的平穩，彼此之間不相稱而沒有一定的比例關係。影響所及，系統中即使枝微末節的事，也會因非線性關係而產生巨大的影響，甚至摧毀現在的結構。

耗散結構屬非穩定系統，來自外部環境與系統本身的隨機波動 (random fluctuations) 與騷動 (disturbance) 不斷的發生。有時耗散結構呈現表現穩定狀態，有時卻因隨機波動事件的非線性關係所產生的震盪效果驟增，而極度不穩並且產生騷動。當這種不穩狀態達到臨界點或是分歧點 (bifurcation point) 時，系統內部的平衡宣告斷裂。其結果是導致長期的混沌狀態，或是趨向另一個新的更高層次的耗散結構。當新的耗散結構形成後會在各個次系統間重新建立另一種平衡關係。但在此同時，外部與系統內部的隨機波動又起，開啟了另一波變化。所以，耗散結構的變化可視為一種連續的過程。其模式為穩定→崩潰→自我重組。

經過以上的整理我們可以發現，這些特性間是彼此相關且影響，基於混沌的本質，即使是微小的初始差異，也可能引起軒然大波，而導致系統的崩潰。此一動態的過程會繼續進行並透過重組的行為，建構出另一個新的組織型態。以下藉由羅吉斯成長方程式 (Logistic Growth Equation:

$X_{t+1} = \mu X_t(1 - X_t)$ 來說明混沌之特性。當 $\mu=4$ 時，初始條件 $X_0=0.10001$ 與 $X_0=0.1$ ， $\mu=[0,4]$ ， $X=[0,1]$ 迭代出來的結果如下圖2.6：

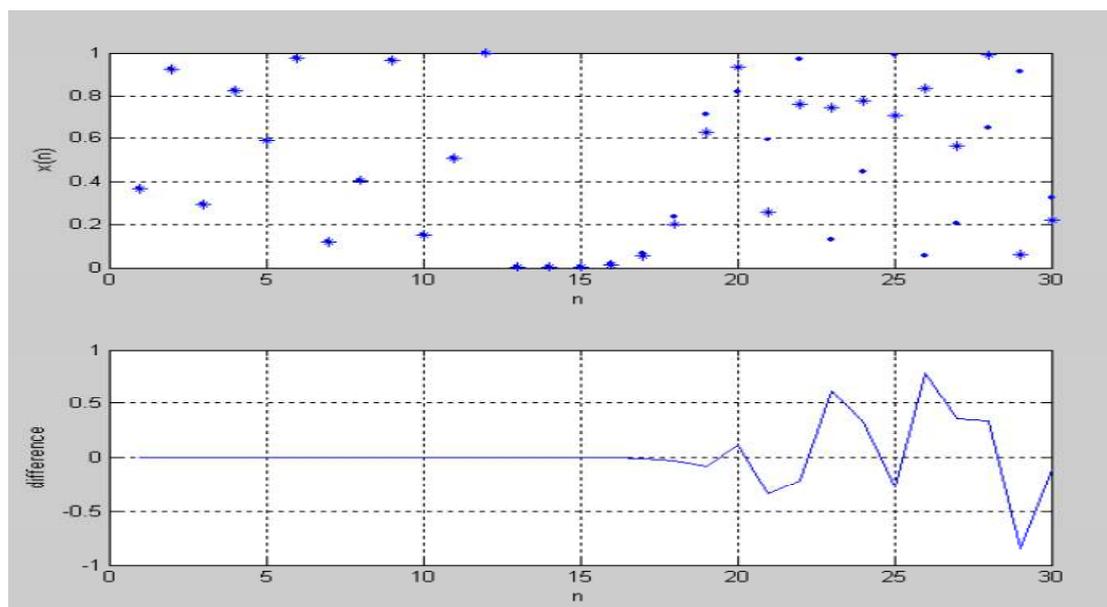


圖 2.6 兩個系統的迭代圖及誤差圖

由於非線性系統的關係，雖然初始值只有相差0.00001，但經由函數迭代運算之後，兩條軌道便差得很多了。

2.3 碎形結構

碎形 (Fractal) 的觀念首先在1970年代由Mandelbrot提出，他引入碎形的觀念，並將新的幾何觀念用來描述不規則形狀的物題。事實上，不管是「勞倫茲吸子」還是「奇異吸子」，都是屬於碎形的幾何圖形。以下介紹有關碎形幾何學的特性：

1. 具有尺度無關性：

對於「同一個」碎形結構，以不同大小的量尺來量度「可觀察的區域」，碎形會具有一致的碎形維度。以一條區線為例，取出曲線的一小部分加以放大後，仍與原曲線整體的形狀是一樣的。所以不管取出的線段大小，都是整體的縮影。然而，就時間序列而言，將資料的一小段放大後，所呈現的特徵和原先尺度所呈現的特徵相似。

2. 具有分數維度：

碎形是分數維度，維度 (dimension) 是用來測量物體的量化標準，與

度量的尺度有關。一維是線條概念；二維是平面概念，就像矩形一樣有長有寬；三維是空間概念，就像經常說的三度空間，有經度、緯度與高度的概念。但碎形維度是有分數的，就像無窮擴張的三分之四的卡區雪花曲線，維度 $\log 4 / \log 3 = 1.2618$ 。其維度就不是整數，是介於一及二的維度。

3. 具有自我模仿性：

指在愈來愈小的尺度中，重覆製造細節，並且以某種固定方式縮小細節，造成某種循環的複雜現象。

4. 有限區域的無限結構：

卡區的雪花曲線，是一條無限長，而結構不斷重複的線段，被限制在最初三角形的正圓區域內。

綜合以上特性，如圖2.7和圖2.8，所謂碎形指的就是一個幾何物件，外觀不像古典的歐基里德幾何的表面那麼平滑，有規則的在固定範圍內無限擴張，無論巨觀或微觀都不是連續的。因此混沌與碎形之間的關係為，由於混沌運動具有在時間尺度上的自我相似性，所以它可看作是時間上的碎形；反之，碎形即是一種空間上的混沌。

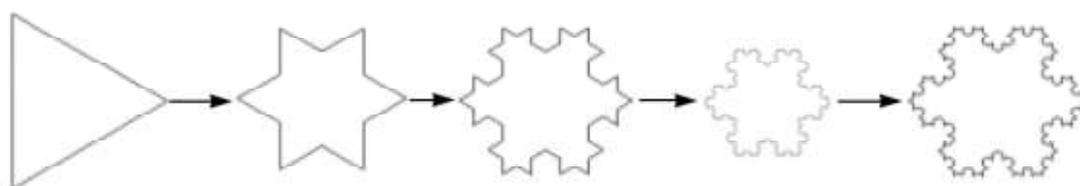


圖 2.7 卡區雪花

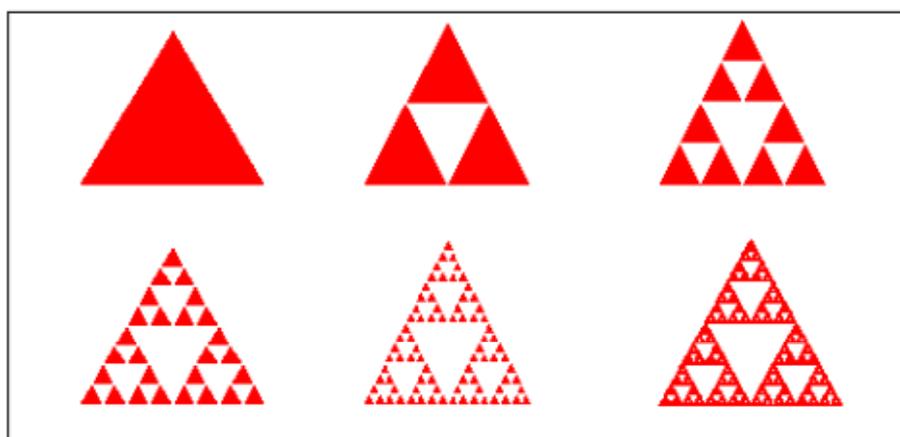


圖 2.8 Sierpinski 三角形

2.4 混沌現象鑑別法

在時間序列實證上，通常由檢視一系統是否具有奇異吸子，來判別系統是否屬於隨機、混沌抑或其他特性的系統。由幾何的角度觀示，混沌現象是屬於一種具有特別維度的碎形，可將軌跡顯示於座標為 (X_t, X_{t+1}) 的平面上，由於奇異吸子的存在，軌跡不會將平面填滿，所以軌跡圖不具有整數的維度，而是具有非整數的維度（碎形維度）。計算時間序列的碎形維度成為判斷是否具有混沌現象的依據，碎形維度的大小則為系統複雜度的依據。

那我們該如何鑑別一個系統是否具有混沌現象？已經有許多學者提出量化方法或圖形，其整理如表2.2：

表2.2 混沌鑑別法

方法	方法概念	鑑別方式
龐加萊圖 (Poincaremap)	以圖形方式觀察混沌的動態行為；將n 維的動態系統減為n-1 維的間斷系統，觀察其行為。	圖形呈現特殊的結構
R/S 分析 (rescaled range analysis)	計算Hurst 冪數 (H)，作為判斷系統是否具有持續性的指標，據此參數H 推估碎形維度	碎形維度 $D = 2 - H$ (D 值不為整數)
相關維度	以相關積分的概念，衡量資料組間之距離小於某一特定值的程度	維度值D (D 值不為整數)

表 2.2 混沌鑑別法 (續)

方法	方法概念	鑑別方式
容積維度 (capacity dimension)	與容積維度相同，只是以機率的型態表現	維度值D (D 值不為整數)
里亞普諾夫指數 (Lyapunov Exponent)	以軌跡追蹤的方式計算特定的關係式，直到包含所有資料，計算最大的Lyapunov指數	Lyapunov 指數>0

(資料來源：陳信維，2000)

2.4.1 Lyapunov 指數

由本世紀初的蘇俄數學家Lyapunov對動力學系統研究而發展出。計算Lyapunov指數和運動軌跡初始條件的選擇無關，它是基於系統長期的行為，用來測量動態系統中的相鄰兩點或兩吸子軌道分離的快慢。Lyapunov指數(λ)，可作為沿著軌道長期平均的結果，是一種整體特徵且值總是實數。若 $\lambda > 0$ 意味著起始相鄰兩條軌道局部不穩定。

軌跡隨著時間而不斷的以指數方式分離，並在反覆折疊下形成混沌吸子。故 $\lambda > 0$ 可以作為混沌行為的依據， λ 值由負變正之過程代表了運動是往混沌方向的轉變。Lyapunov指數越大代表對初始值敏感性越高，混沌特性越強，可預測的尺度越小。

2.4.2 R/S 分析法 (Rescaled Range Analysis)

R/S分析法是英國科學家赫斯特(Hurst)花費大量時間研究尼羅河流域的變化，所發展出的統計方法，此方法主要是用來衡量在一個時間序列中，是否存在長期記憶的現象。因為此方法對於不常發生的現象亦具有很好的解釋能力，所以推廣至研究許多自然界中的景象，如溫度的變化、海浪高

度的變化、河川的流量變化、降雨量的多寡、樹木年輪厚度的變化等等，皆有明顯的分析結果。這些自然現象所記錄下來的時間數列資料具有以下共同的特徵，即不論以長期或短期的時間尺度來觀測資料內容，皆呈現出混亂、不規則的行為。這些自然界的觀測現象，可用赫斯特定律(Hurst' Law)來解析，而從赫斯特的R/S分析中，可以求算一個參數值H，由H值的大小來判斷時間序列的持續性(persistence)。持續性係表示時間序列中前期的資料值會影響後期資料值的變化，有別於時間序列分析中的自我相關，此指的是長期(long-run)的影響，亦有人稱為記憶效應(memory effect)，至於影響的序列長度為多長，現在仍為研究的一個目標。R/S分析結果發現一個重要的根本問題，就是對於時間序列資料的假設，一般我們都會將其機率分配假設為常態分配，時間序列資料假設為隨機漫步，並根據常態分配的假設來進行分析，但是實際情形卻不全然如此，赫斯特冪數多介於0.6至0.8之間。

赫斯特冪數可明確的區分成三個部份，其意義說明如下：

1. $0 < H < 0.5$: 時間序列呈現負相關的持續性，愈接近0表示持續性愈明顯。
2. $H = 0.5$: 時間序列為一隨機漫步的過程，無持續性。
3. $0.5 < H < 1.0$: 時間序列呈現正相關的持續性，愈接近1.0表示持續性愈明顯。

Peters (1996) 認為R/S分析除了可區別數列是否為隨機或過程與估計數列的約略循環時間外，尚具有下列特性：

1. R/S分析中數列循環時間的倒數將近似Lyapunov指數。
2. 數列趨勢圖的碎形維度可以表示為 $D = 2 - H$ ；而數列機率空間的碎形維度則為 $1/H$ 。

2.4.3 龐加萊截面法

1892年，龐加萊(Poincare)首先指出了週期軌跡的重要性，並暗示對週期軌跡的研究能夠讓人們更了解非線性動力學。通常，吸子運動軌跡會沿著複雜路徑經過三維或更多維空間，擠在一起，根本讓外界無法窺視其內部結構。龐加萊截面是在相空間中，以圖形方式觀察混沌的動態行為，將n維的連續動態系統減為n-1維的離散間斷系統，分析系統運動軌跡穿過此截

面上的分布規律，進而推測出原系統的運動特徵。

基本想法如圖2.9所示：

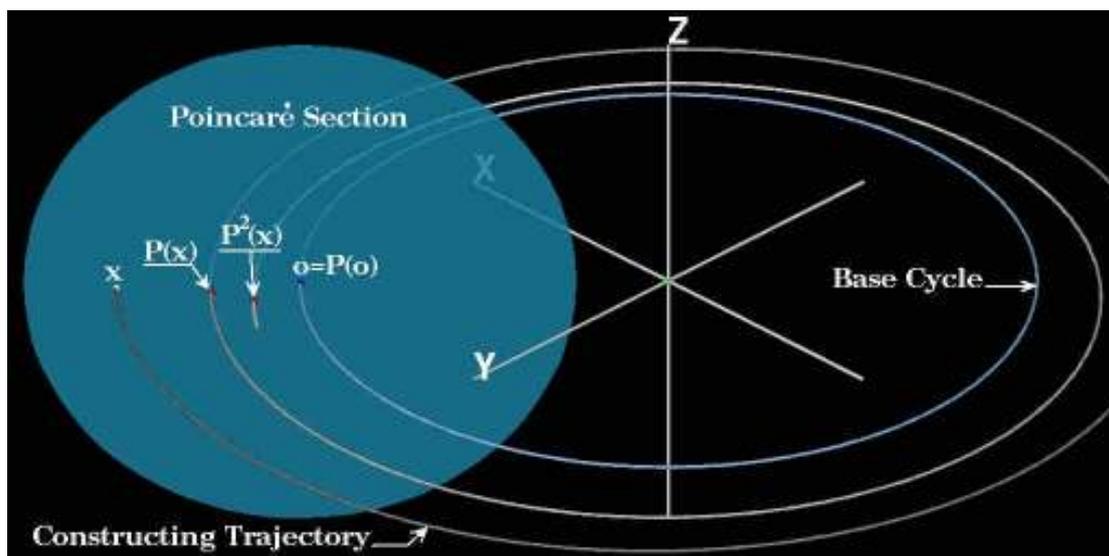


圖 2.9 龐加萊基本定義圖（轉載自 wiki 百科）

這裡以三維的非線性系統為例說明龐加萊截面的操作過程，假設： $x = F(x, \mu)$ ，其中， $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ； $F = (f_1, f_2, f_3)^T$ ； μ 是系統中的可調參數，欲使系統降維，選擇截面的最好方式是令 (x_1, x_2, x_3) 中的任一變量為常數，選擇 $x_3 = h$ （ h 為一常數），這是一個平行 x_1x_2 且在 x_3 軸上截距為 h 的平面，即為龐加萊截面， $x = F(x, \mu)$ 的軌跡與龐加萊截面的交點為龐加萊截點，我們可以從這些穿過截面的點，來判斷系統的運動週期。

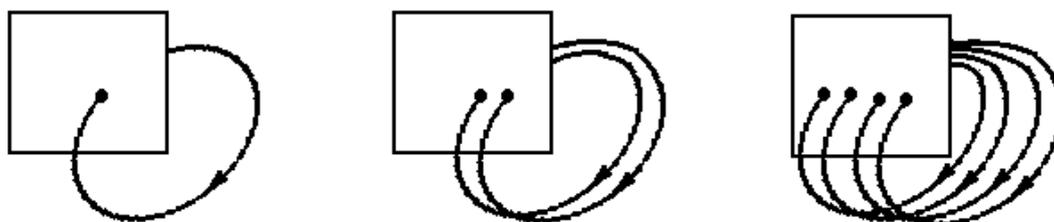


圖 2.10 龐加萊截面與系統運動軌跡

從圖2.10觀察出，當系統運動每次都重複在原有軌道上，截點總是在截面上的同一位置穿過，並留下同一個點，這就是週期一運動；當系統做週期 K 的運動時，則有 K 個獨立點；系統做擬週期運動時，截面則呈現封閉曲線；若系統的響應為混沌運動時，截面上可能呈現有界的線或帶狀的密集點。

2.5 相空間重構法

在分析複雜的動態系統時，因受限於在時間軸上所觀察到的系統變量之表徵，使得我們通常無法知道系統真正的內部情形。此時，就必須把這些訊息轉移到另一個空間中，稱為相空間(phase space)。系統雖然在時間軸上是非週期的，但在相空間的表示中具有混沌的特性。換句話說，如何藉由單一變量時間序列獲得整個系統特徵，於是便提出了相空間重構法。

相空間內的相點代表動力系統中某個時刻之特定狀態，這些點的連線構成相空間的軌跡(Trajectory)，表示系統狀態隨時間演變的過程。其中一種重組的方法：嵌入定理(Embedding theorem)或延遲方法(Method of delays)，由Takens (1981)所提出，容易使用於重繪成相空間。

一個吸子可用狀態向量來重組，描繪成吸子軌跡上的一個點。

在動力學系統中可發現三個典型的吸子：固定點，有限循環和奇異吸子或稱混沌吸子。固定點為一動力行為不隨時間改變的系統中之一點，有限循環為具週期性動力行為軌跡的系統，只有具奇異吸子的系統才存在混沌動力行為。一個奇異吸子的軌跡不會重複，而且其維數不是整數。

在圖2.11中，上排圖為時間序列圖，下排為二維映射圖，將二維中的一個維度對時間作圖，就可以得到變數對時間之序列圖。從第一張圖的時間序列來看，到最後會收斂至定值，所以我們發現在相空間中收斂至一個定點；第二張圖呈現週期性運動，相空間為環狀軌道；第四張圖即為混沌。

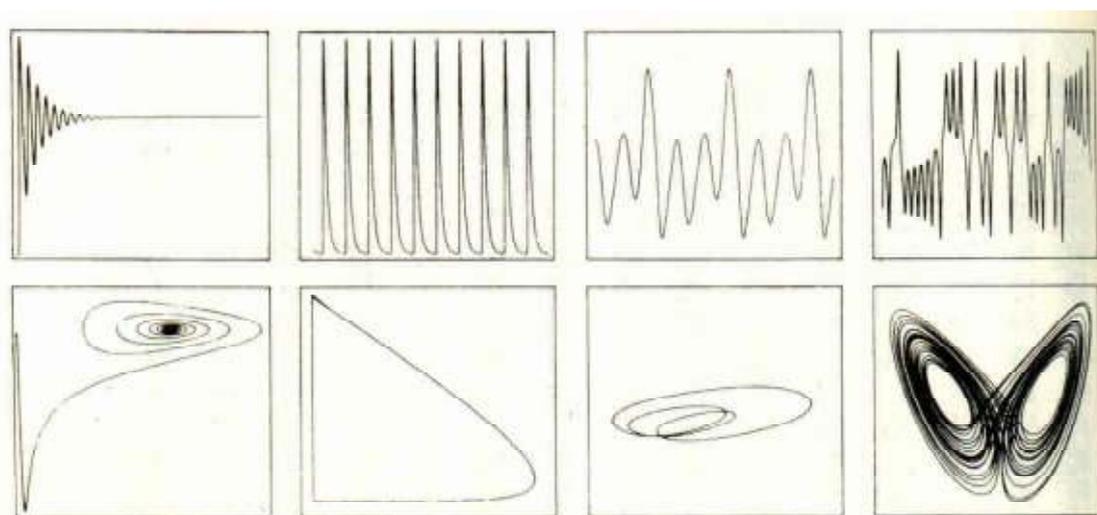


圖 2.11 時間序列圖及相空間圖

在混沌方法論的研究方面，局域近似預測法(local approximation)的第一個方法是由Lorenz(1969)所提出，其內容為在一個混沌時間序列 $x_i(i=1,2, \dots,t)$ 中，欲預測 x_{t+1} 之值，必須先找到距現值 x_t 最近的點 x_T 後，假設 x_{T+1} 就是 x_{t+1} 的預測值，此在Farmer and Sidorowich (1987)的分類中稱為零階近似(zeroth-order approximation)；另一個方法則是選擇一群相近的鄰點，計算出這些鄰點的平均值當作代表點，以此點來做預測。

Farmer and Sidorowich(1987)進一步提出相空間(phase space)局域預測法，該研究對相空間局部近似法作最完整的描述，其對欲使用來預測的鄰點配適一階或高階的多項式，將可比上述兩種方法得到較佳的預測結果，而此也是較多研究者常使用的方法。

在實例應用方面，Chen, Islam and Biswas(1998)建立多維度相空間以預測辛辛那提的每小時臭氧濃度的變化。其以PS(phase space)及AR(autoregressive)分別代表局部非線性及整體線性模式比較預測結果，PS(8)模式之相對誤差(relative error)為0.42；而在AR(2)、AR(5)與AR(10)之不同測試結果，其相對誤差為0.92、0.94與0.98，明顯的以相空間局域預測法預測效果佳；此外，為探討PS模式之穩定性，其對不同的觀測資料數做測試，結果預測準確度並不會有顯著的改變，這說明了相空間模式可由有限的資料數中獲得潛在動態行為，且其預測準確度不會因新增加資料數而有顯著的變化。

同樣的，Perez-Munuzuri and Gelpi(2000)對西班牙西北部的雲霧吸收(cloud absorption)時間序列、Liu et al.(1998)對美國地區的每天河流量模式，利用相同的方法構建預測模式，皆具有預測效果良好之相同結論。

Kocak, Saylan and Sen(2000)利用相空間局域預測法預測伊斯坦堡當地的臭氧層濃度，利用時間序列重建多維度空間中的吸子，採用多項式近似方式預測動態模式吸子軌道的變化，結果發現模式之預測值與觀測值間的相關係數達0.92，相對誤差僅0.3，預測效果比Chen, Islam and Biswas(1998)更佳，且相對誤差在可接受的範圍內，因此可以一個確定性混沌系統建立臭氧層之預測模式。

Jayawardena and Lai(1994)的研究中預測香港的每日降雨及河流量，除了使用相空間局部近似法外，同時並使用Autoregressive Moving

Average(ARMA)構建模式與之對照。研究結果顯示，ARMA預測之結果會低估了實際的序列資料，以相空間局域預測法會比傳統線性ARMA模式預測效果佳。

另外，在Jayawardena and Lai(1994)、Chen, Islam and Biswas(1998)與Kocak, Saylan and Sen(2000)的研究中皆有個共同的結論，那就是線性模式對混沌資料之預測效果並不佳，且不能成功的展現混沌系統之特性，這些結果顯示，以相空間為基礎所構建的模式確實會比傳統方法有較佳之預測結果。

傅俊中(1995)針對混沌時間序列預測的研究提出一個新的預測法，其是利用相空間鄰點搜尋觀念與方法，並配合類神經網路法(neural network)所作出的自我調適(self-tuning)網路法。但自我調適網路法的預測過程較為複雜，且於實際時間序列的適用性仍有待考量。

此外，相對於相空間局域預測法，另外有整體預測法(global prediction method)可供預測，包括純多項式、半徑式函數、類神經網路等皆屬此範疇。在Kocak, Saylan and Sen(2000)的研究中指出，於預測短期之行為時，相空間局域預測法會比整體法有較佳的效果，因為此法有較大的適應力去適應吸子的局部行為。

近年來，基於最大Lyapunov指數預測法(LLEF)也被提出，來對混沌時間序列進行預測，而為了克服此方法的局限性，加權最大Lyapunov指數預測法被提出(WLLEF)，以提高預測的準確性，Jianzhou Wang et al.(2011)提出以粒子群優化算法(PSO)來決定WLLEF最佳的權重參數，同時也輔以趨勢調整技術來提高WLLEF的預測精度。此方法(TWLLEF)的步驟程序是假設一時間序列 x_1, x_2, \dots, x_T 皆存在趨勢和季節因素在同一時段，並滿足乘法分解模型： $Y_t = TR_t * S_{Nt}$ ，首先用WLLEF去預測出 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_T$ 的趨勢，就可以利用乘法分解模型 $x_t = \bar{x}_t * I_j$ 來找出季節指數 I_j ，也就是第j期的資料和其趨勢值之間的比值，然後用 $\hat{x}_{T+k} = \bar{x}_{T+k} * I_k$ 來進行預測。本研究方法會於第四章跟其比較預測誤差。

2.6 迴歸分析

迴歸分析是一種統計分析方法，它利用一組預測變數(或稱獨立變數)的數值，對某一準則變數(或稱應變數)做預測，它也可以做為評估預測變數對準則變數的效用。迴歸的主要目的是做預測，目標是發展一種能以一個或多個預測變數的數值來做為應變數預測的方法。

2.6.1 簡單線性迴歸分析(Simple regression analysis)

簡單線性迴歸Anderson et al.(2006).關係式如下所示：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

上面的方程式中包括了兩個變數， x 是獨立變數，用來詮釋相依變數 y ，而 β_0 和 β_1 為未知的參數， ε 為誤差項(error item)。誤差項通常被假設服從常態分布如下所示：

$$\varepsilon \in N(0, \sigma^2)$$

因此相依變數 y 在任意的 x 值下服從平均數為 $\beta_0 + \beta_1 x$ 而變異數為 σ^2 的常態分配。

迴歸模型的參數稱為迴歸係數或迴歸參數(regression coefficients)。最小平方方法(Least squares method)是一個普遍常用且簡單估計迴歸參數的方法，其目的在於使殘差平方和達到最小，而所謂的殘差是指實際值與迴歸線之間的差距，殘差平方和利用式子可表示如下：

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

其中 (x_i, y_i) 代表第 i 個觀察值， $i=1, 2, \dots, n$ ，將上述式子針對 β_0 與 β_1 進行一階偏微分後並令微分式皆為零，解聯立方程式後得到 β_0 與 β_1 的估計值分別為 $\hat{\beta}_0$ 與 $\hat{\beta}_1$ ，因此所估算的線性迴歸式 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ 。當得出估計的迴歸方程式之後，即可求出預測值、擬合值和殘差等，並可評估模式擬合的好壞。

2.6.2 線性複迴歸分析(Multiple regression analysis)

多元線性迴歸式Anderson et al.(2006)，採用的模式如下：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

其中 ε 的假設與在簡單線性迴歸中相同，當獨立變數不只一個，相依變數與多個獨立變數之間的線性關係式稱為多元線性迴歸式。

如果有 n 組觀察值 $(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{kj}, y_j)$ ，其中 $j=1, 2, \dots, n$ ，可以利用矩陣方式表達如下：

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}$$

根據上面的矩陣能夠將矩陣式改寫成如下簡式：

$$Y = XB + E$$

然後運用最小平方法找出 B 的估計值，也就是要使 $(Y - XB)^T(Y - XB)$ 為最小值，對 B 微分後並令其等於0，得到 B 的解為：

$$\hat{B} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

其中 X^T 和 X^{-1} 為矩陣 X 的轉置矩陣和反矩陣

複迴歸分析用多個自變數去解釋另一個依變數之迴歸分析，在實務上和依變數 Y 有關的自變數可能很多，因此只用一個自變數的迴歸方程式來解釋依變數 Y 的變異可能是不足夠的，所以在實務上通常會使用多個自變數來預測或解釋依變數 Y 。在意義上使用多變數具有以下二個優點(黃文隆、黃龍，2003)：

- 增加模型可解釋部份，降低隨機誤差。
- 避免對依變數 Y 具有較大影響自變數的遺漏。

在瞭解線性迴歸模型的基本涵意與參數估計方式後，再進行線性迴歸分析前必須滿足以下的假設，如下所式：

- 依變數延著迴歸線上的變異需服從常態分配。
- 依變數延著迴歸線上的變異需為固定常數。
- 依變數延著時間軸上的變異是序列獨立。

- 依變數與自變數的關係為線性關係，若是發現依變數與自變數呈現非線性關係時，可以透過轉換(transform)成線性關係，再進行迴歸分析。
- 多元迴歸式自變數間必需相互獨立。

2.6.3 多項式迴歸分析

而迴歸模型無法呈現線性關係時，將反應變數y的變動以預測變數x的多項式來解析的模式即稱為多項式迴歸模型，如下所示：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}^2 + \cdots + \beta_p X_{ip}^p + \varepsilon_i$$

其中 $i=1, 2, \dots, n$ ，多項式迴歸模型可視為一般線性迴歸模型的特例，在實務上此模型易於處理，對於原始資料的可以得到較佳的預測值，故成為最常用的曲線反應模型。

多項式迴歸模型可包括自變項為二次項、三次項等等，以及自變項具有交互作用項的存在，下列為各種多項式迴歸模型範例：

- 二項式多元迴歸模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$$

- 交互作用迴歸模型

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}^2 + \beta_{11} X_{i1}^2 + \beta_{22} X_{i2}^2 + \beta_{12} X_{i1} X_{i2} + \varepsilon_i$$

其中， $\beta_{12} X_{i1} X_{i2}$ 稱為交互作用項式，表示 X_{i1} 和 X_{i2} 對 Y_i 的反應效應是交互影響的，迴歸係數 β_{12} 稱為交互作用係數(interaction effect coefficient)，故此迴歸模式又稱為交互作用迴歸模型(interaction regression model)。

多項式迴歸模型對於原始資料可反應較佳的預測值，但在使用上的仍有許多限制需注意：

高階次數(三階以上)的多項式迴歸模型，當在資料範圍外作插補時，可能轉到偏離預期的迴歸模型。因此在構造迴歸模型時，通常限制模式僅涵蓋預測變數的某一範圍。此範圍可能是研究之初就設定好的，或者是手中資料的範圍，若超出此範圍太遠，則迴歸函數的適用性將產生很大的疑問。

項次階數較低(如二階項次)的迴歸模型，提供關於反應函數預測之較基本訊息，與原始資料殘差較大，而項次階數較高的迴歸模型，在指定反應函數預測時可提供較精細的訊息，殘差較小且預測值近似原始資料。

第三章 研究方法

本研究是將具有季節性的時間序列，根據其最大 Lyapunov 指數為正值來判斷該時間序列具有混沌現象，然後先將時間序列做季節指數的調整，再進行相空間重構，建立混沌預測模式，比較其預測結果。若原混沌時間序列在經過季節指數調整後並無混沌現象，則在相空間重構完才做季節指數的調整。最後在第四章與時間序列未做季節指數調整的混沌預測進行比較。本研究方法流程圖如圖 3.1。

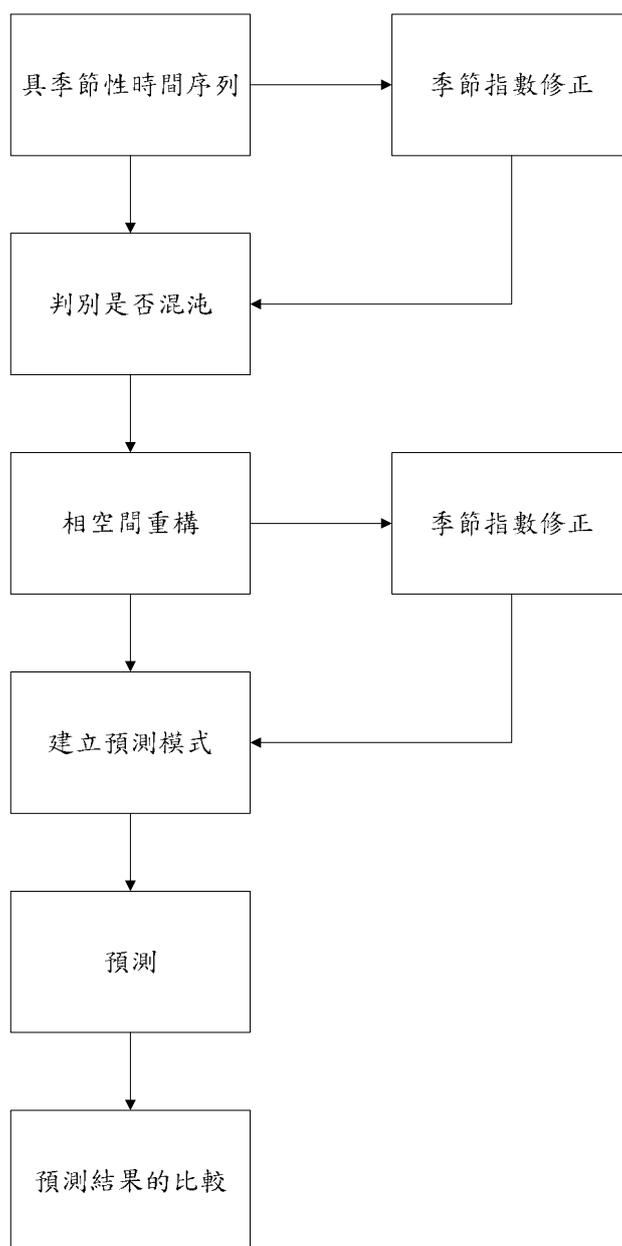


圖 3.1 本研究方法流程圖

3.1 混沌序列相空間重構

一般透過時間序列圖，可以取得一些系統方程式的初步訊息，但在分析複雜的動態系統時，因受限於時間軸上所觀察到的系統變量之表徵，使得我們無法確切知道系統內部的真正情形。所以必須把時間序列所帶來的訊息轉移到另一個空間上，稱為相空間(phase space)。系統雖然在時間軸上是非週期的，但在相空間中存在某些幾何上的秩序，並表現出具有混沌的特性。

相空間的混沌吸引子具有總體穩定性、吸引性和內部分形性。混沌吸引子以外的一切方向的運動狀態將向吸引子靠近，反映出極強的穩定作用，而混沌吸引子外的任一狀態點，都有與其鄰近狀態點共同的運動趨勢；吸引子內任一狀態點，與其鄰近狀態點也都有保持在該吸引子域內，並形成分形結構的運動軌跡。因此透過找出預測點鄰近區域內同向變化的狀態點和其後續時間序列的函數關係，進而實現對未來的預測。

3.1.1 相空間重構

假設時間序列資料 X_i 是由一個混沌動態系統所產生，即：

$$x_t \in R, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3-1)$$

但單一變量時間序列而言，可使用延遲時間法(delay-time method)，其是由探討複雜動態系統內變數間的相互影響為基礎所提出。而在相空間重構的過程中， m 維相空間中 R^m 的中的一點 X_t ，可由下式表示：

(Itoh, 1995 ; Kocak, Saylan, and Sen, 2000)

$$X(t) = [x(t), x(t - \tau), \dots, x(t - (m - 1)\tau)] \in R^m \quad (3-2)$$

其中， τ ：延遲時間 (delay time)

m ：嵌入維度 (embedding dimension)

其中一個獨立座標軸是時間序列本身，其餘是由 $(m-1)$ 個延遲時間序列座標軸所構成。所以在重構相空間時有兩個重要的參數必須決定，也就是最適合的延遲時間 τ 和嵌入維度 m ，這兩個參數皆會對混沌預測結果有重大

影響，故對此兩參數的決定方法作一說明。

3.1.2 延遲時間的決定

在混沌時間序列中，兩相鄰的時間序列值會有些微的正相關性，但隨著延遲時間 τ 的增加，兩時間序列值的相關會逐漸減低變為負相關，而後會在無相關間循環震盪(Porporato and Ridolfi, 1997)。而延遲時間 τ 的選擇，是為了去除兩時間序列值的相關性，目前有兩種方式：

1. 運用訊息理論(Information Theory)中的 Mutual Information Method，公式如下(Fraser & Swinney, 1986)：

$$I(i, j) = \sum_{i, j}^s P_{ij}(\tau) \log \frac{P_{ij}(\tau)}{P(i)P(j)} \quad (3-3)$$

其中，S：訊息量

P_i ：目前觀測值處於 i 區間的機率

$P_{ij}(\tau)$ ：目前觀測值處於 i 區間且滯延 τ 期的觀測值處於 j 區的聯合機率
選取第一個訊息量(Bits)最小值所對應的置後數即為所求；其意表給定一個 $X(T)$ ，其透露出多少訊息能用來預測 $X(T+\tau)$ ，這訊息量是越小越好以達兩時間序列值無相關的要求。

2. 使用原時間序列的自相關函數(autocorrelation function, ACF)公式如下：

$$A(\tau) = \frac{COV(x_i, x_{i-\tau})}{V(x_i)} = \frac{E[(x_i - \bar{x}) - (x_{i-\tau} - \bar{x})]}{E[(x_i - \bar{x})^2]} \quad (3-4)$$

延遲時間 τ 的選擇在自我相關第一次過零點的時間或是最先減低到 $1/e$ 以下，就是最適之延遲時間 τ ，本研究使用自相關函數 ACF 來作判別。

3.1.3 嵌入維度的決定

參數嵌入維度 m 值的判別，目前有三個方法可決定之：

1. 利用預測值與實際值之相關係數對應於嵌入維度的關係，找出嵌入維度 m 值於多少時，相關係數會達最高值。但隨著 m 值的增加，

相關係數卻會逐漸降低，此表示若嵌入維度過高，預測準確度不但不會增加，反而會降低(Sugihara and May, 1990)，此法即為試誤之作法。

2. 因預測所需變數個數可由吸子的碎形維度所決定，故另有一公式可決定之，一般來說最小嵌入維度為 $m_{\min} \geq 2D + 1$ ， D 即為吸子的碎形維度，可由相關維度估計而得。(Grassberger and Procaccia, 1983; Elsner and Tsonis, 1992; Chen, Islam, and Biswas, 1998; Porporato and Ridolfi, 1997)
3. 虛替最近鄰點法 (false nearest neighbor method, FNN)，其主要概念為對時間序列中每一點 X_i 尋找其 m 維空間中的最近鄰點 X_j ，計算兩點之距離 $\|X_i - X_j\|$ ，反覆運算兩點並計算 $R_i = \left\| \frac{X_{i+1} - X_{j+1}}{X_i - X_j} \right\|$ ，若 R_i 超過一門檻值 R_t ，此點即被標記為虛替最近鄰點，判別嵌入維度是否夠高的準則是確認 $R_i > R_t$ 點的個數為零或足夠小(Kennel, Brown, and Abarbanel, 1992; Perez-Munuzuri and Gelpi, 2000)，本研究使用 FNN 來決定最適嵌入維度 m 。

3.2 混沌時間序列預測方法

本研究假設有一混沌時間序列 x_1, x_2, \dots, x_T (有 L 期，一期有 J 個時段， $T=L*J$)，存在著季節性影響於同一時段 J ，首先先對時間序列做季節指數調整，先求出不同期同時段的平均值 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_J$ ，再將其除以時間序列總平均值 \bar{x} ，分別可得該時段之季節指數 s_1, s_2, \dots, s_J ，而將原時間序列依時段除以該季節指數的過程，稱為季節指數調整，而在調整過後的時間序列，經由其最大 Lyapunov 指數是否為正值來判斷是否依舊存在著混沌，若仍混沌，在相空間重構後，進行以下混沌預測方法，預測出來的值在依該時段乘回其季節指數。若季節指數調整過後的時間序列不再混沌，則選擇在原時間序列進行完相空間重構後，再進行季節指數調整。

而在混沌預測方法中，常用的有全局預測法、局域預測法、最大 Lyapunov 指數預測法，所以選用這些方法來建立預測模式。

3.2.1 全局預測法

首先定義時間序列為 $x(t_i), i=0,1,2,\dots$ ，並且定義相空間為：

$$X(t_i)|X(t_i) = [x(t_i), x(t_i - \tau), \dots, x(t_i - (m-1)\tau)], i = 0,1,2, \dots (3-5)$$

根據 Takens 理論，只要適當地選擇嵌入維度 m 和延遲時間，嵌入空間的相空間重構的軌線 (orbit) 將等於原系統差分下是動力學等價 (kinetic equivalent) 的。因此存在一個平滑映射 $f: R^m \rightarrow R^m$ ，給出相空間軌跡的運算式：

$$X(t_i + 1) = f(X(t_i)), i = 0,1,2, \dots (3-6)$$

函數 f 在理論上應該是唯一，但我們所能知道的實際數據總是有限的，所以不太可能獲得確切的函數 f ，但根據有限的數據，我們可以得到

$\tilde{f}: R^m \rightarrow R^m$ ，然後使 \tilde{f} 充分近似於 f 。

有許多方法可以得到函數 \tilde{f} 的結構，本文研究使用複線性迴歸去配適此函數 \tilde{f} 。

為了得到

$$\sum_{t=0}^N [x(t_i + 1) - \tilde{f}(x(t_i), x(t_i - \tau), \dots, x(t_i - (m-1)\tau))]^2$$

最小的結果，全域預測理論應該藉由使用重構相空間中的所有狀態點，來配適一個 m 維超曲面 $\tilde{f}: R^m \rightarrow R^m$ ， N 取決於有限的資料。

首先定義 $X(t_i + 1) = \tilde{f}(X(t_i))$ ，並且可以定義：

$$A = \begin{bmatrix} X(t_1 + 1) \\ X(t_2 + 1) \\ \vdots \\ X(t_k + 1) \end{bmatrix} (3-7)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & X(t_1) \\ 1 & X(t_2) \\ 1 & \vdots \\ 1 & X(t_k) \end{bmatrix} (3-8)$$

$$c = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

然後我們可以得到下列公式：

$$X(t_i + 1) = a + bX(t_i) \quad (3-10)$$

3.2.2 局域預測法

局域預測法把相空間(3-5)軌線中的最後一點當作是中心點，並從中心點鄰近軌道線中找一些相關點，擬合中心點和相關點然後去預測下一點的軌跡，最後預測值可以從預測軌跡點的座標中分離出來。

局域法概念如圖 3.2 所示，白點表示中心點 $X(t)$ ，和未知的預測值 $X(t+T)$ ，虛線範圍內的黑點代表 $X(t)$ 的鄰近點，除了 $X(t+T)$ 以外，圖中各點的資料都是以知的，並假設 $X(t)$ 和鄰近點會隨時間變化且保持穩定的關係，因此即可根據此關係，來對這些鄰近點在相空間中移動的路徑配適一個適合的函數，就可以依近似鄰近點的移動軌跡來預測出 $X(t+T)$ 。

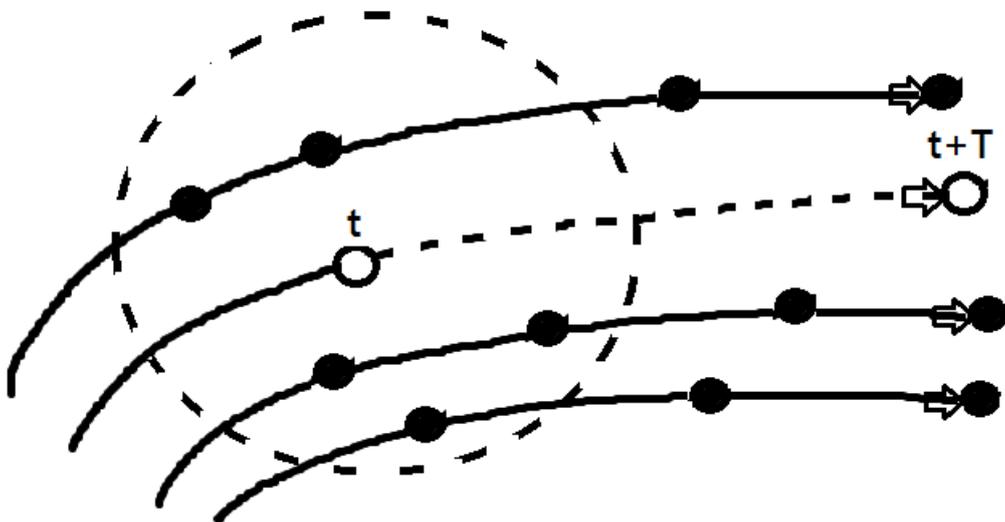


圖 3.2 相空間中相點軌跡移動圖

這裡用一階近似的局域法當範例： $X(t_i + 1) = a + bX(t_i)$

用來擬合 $Y(n)$ 的鄰近點，設 $Y(n)$ 的 k 個鄰近點為 t_1, t_2, \dots, t_k ，則公式可以表示為：

$$\begin{bmatrix} X(t_1 + 1) \\ X(t_2 + 1) \\ \vdots \\ X(t_k + 1) \end{bmatrix} = a + b \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

而相空間軌線可以從 $X(n+1) = a + bX(n)$ 得到， a 、 b 本研究使用複線性迴歸去配適取得，而預測值可以從 $X(n+1)$ 分離出來。

3.2.3 基於最大 Lyapunov 指數預測法

根據定義，最大 Lyapunov 指數(Largest Lyapunov Exponents Method, LLE)是一動態系統中相鄰兩點或兩軌線分離速率的表徵。而在相空間其初始分離為 δX_0 的兩個鄰近點會隨著距離分離為：

$$|\delta X| = |\delta X_0| \cdot e^\lambda \quad (3-12)$$

其中， λ ：是動態系統最大 Lyapunov 指數。

根據這個屬性，我們可以建立一個基於最大 Lyapunov 指數的預測模式。在相空間(3-5)中，我們設 $X(t_i)$ 是預測中心點，找出相空間中距離 $X(t_i)$ 最近的點為 $X(t_j)$ ，並算出最大 Lyapunov 指數為 λ ，而 $X(t_i)$ 和 $X(t_j)$ 各自下一點的距離分離為：

$$\|X(t_{i+1}) - X(t_{j+1})\| = \|X(t_i) - X(t_j)\| \cdot e^\lambda \quad (3-13)$$

其中只有 $X(t_i + 1)$ 中的分量 $x(t_i + 1)$ 是未知的，所以可以由此式計算出 $x(t_i + 1)$ ，也就能獲得所要預測的相空間點 $X(t_{i+1})$ 。

最大 Lyapunov 指數是整個混沌系統的特徵指數，反映了整個混沌系統運動軌跡的變化特徵，然而只描述了整個軌跡的平均發散，加上僅使用了一個最鄰近的點來預測，由於噪聲的影響會使基於 LLE 的預測的準度下降。為了減少此方法的預測誤差，加權最大 Lyapunov 指數預測法(WLLE)被提出，增加一個權重 w 於(3-13)中：

$$\|X(t_{i+1}) - X(t_{j+1})\| = \|X(t_i) - X(t_j)\| \cdot e^\lambda \cdot w \quad (3-14)$$

第四章 實證結果與分析

4.1 電力負載資料

資料來自於是New South Wales, Australia，2007年五月的電力負載資料(參考來源: Jianzhou Wang et al., 2011)，從五月十四日00:00到五月十八日的23:30，觀測間隔為30分鐘，所以五天共有240筆資料，把資料分為兩部份，前四天共192筆資料做為歷史資料用，第五天的資料留做為用來驗證的預測值。電力負載資料的時間序列如圖4.1所示。

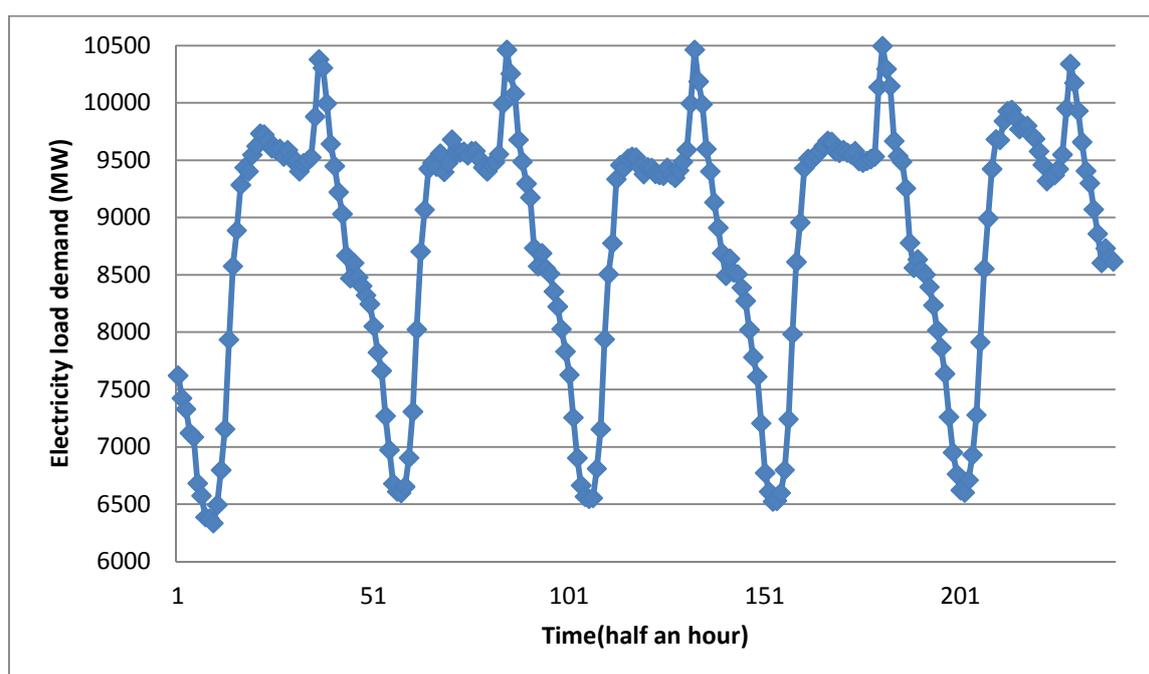


圖 4.1 電力負載資料時間序列圖

4.1.1 時間序列分析與預測

為了重構相空間，首先我們必須估計相空間的參數，選擇最適之延遲時間 τ 和嵌入維度 m 。

自我相關函數對延遲時間 τ 的圖形如圖4.2所示，自我相關函數會隨著 τ 值增加而逐漸降低，最終在無相關之間震盪，而當自我相關函數最先通過零時，就是我們所選擇之最適延遲時間 $\tau=12$ 。

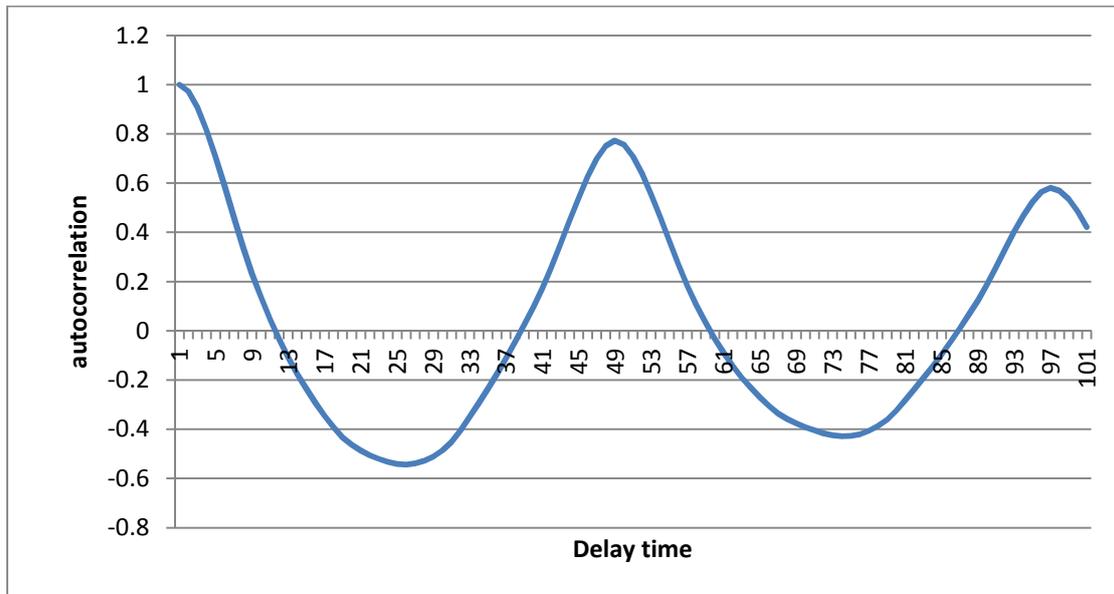


圖 4.2 電力負載資料的自我相關函數圖

嵌入維度 m 的選擇，本研究以虛替最近鄰點法來決定，如圖4.3所示，虛替最近鄰點個數在 $m=4$ 的時候降低到0，故本研究估計最適嵌入維度 $m=4$ 。

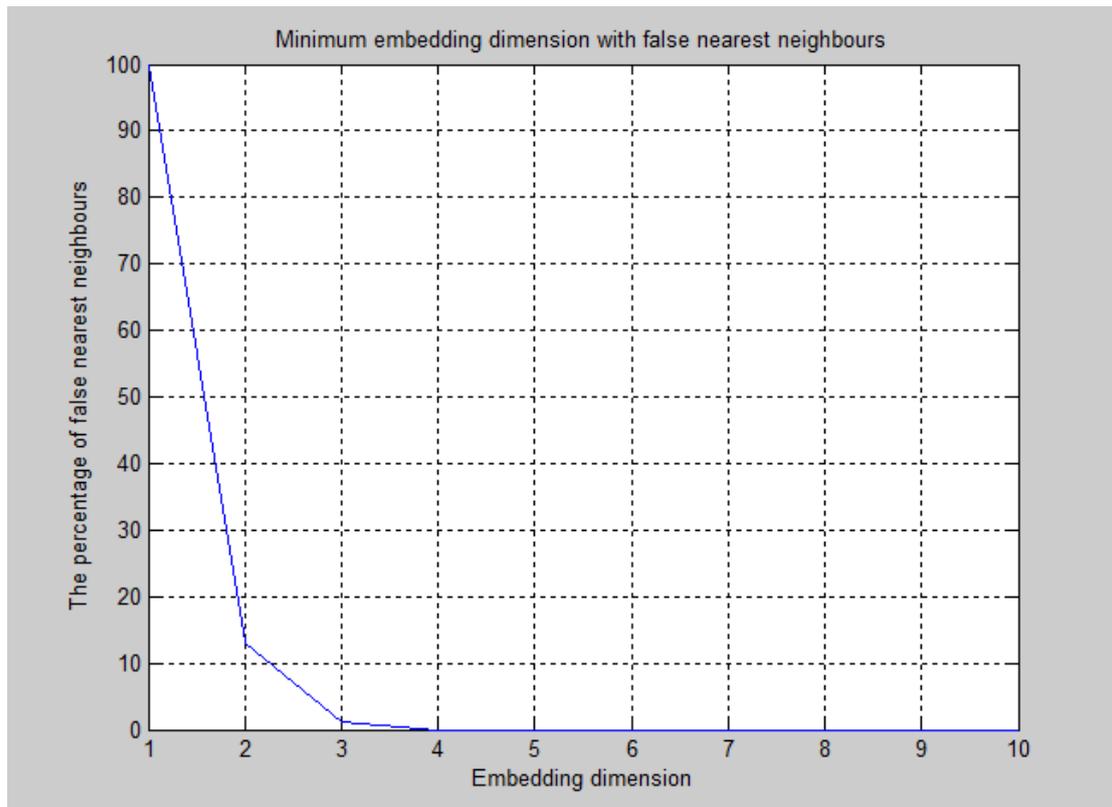


圖 4.3 電力負載資料估計嵌入維度圖

本研究以延遲時間 $\tau=12$ ，嵌入維度 $m=4$ ，來做電力負載資料的相空間重構，然後進行混沌方法預測。

選用全局預測法的過程中，本研究以複線性迴歸去配適 $X(t_i + 1) = \tilde{f}(X(t_i))$ 當中的函數 \tilde{f} ，電力負載資料的觀察值與預測出來的值的關係圖如圖4.4所示。

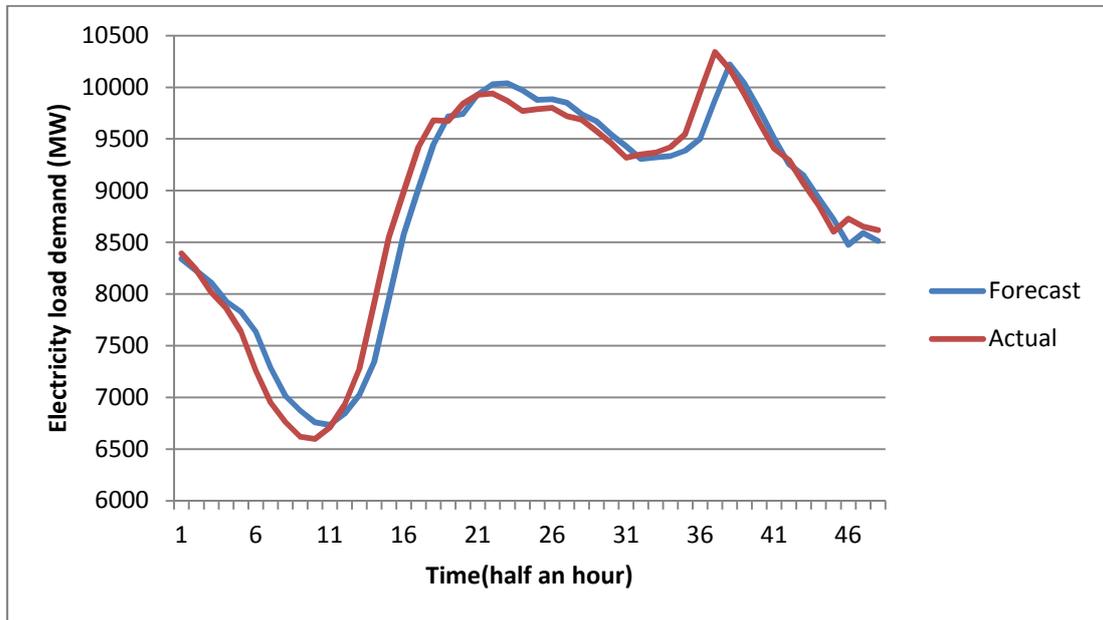


圖 4.4 電力負載資料的觀察值與預測值關係圖(全局預測法)

選用局域預測法的過程中，本研究以複線性迴歸去配適 $X(t_i + 1) = \tilde{f}(X(t_i))$ 當中的函數 \tilde{f} ，而局域預測法還須決定要找尋多少 k 個鄰近點，這裡用平均絕對誤差(Mean Absolute Error, MAE)去找出 k 值在多少下，會使預測準度最高，如圖4.5所示，在 k 值=35時MAE最低，故找尋35個鄰近點去配適函數 \tilde{f} 。電力負載資料的觀察值與預測出來的值的關係圖如圖4.6所示。

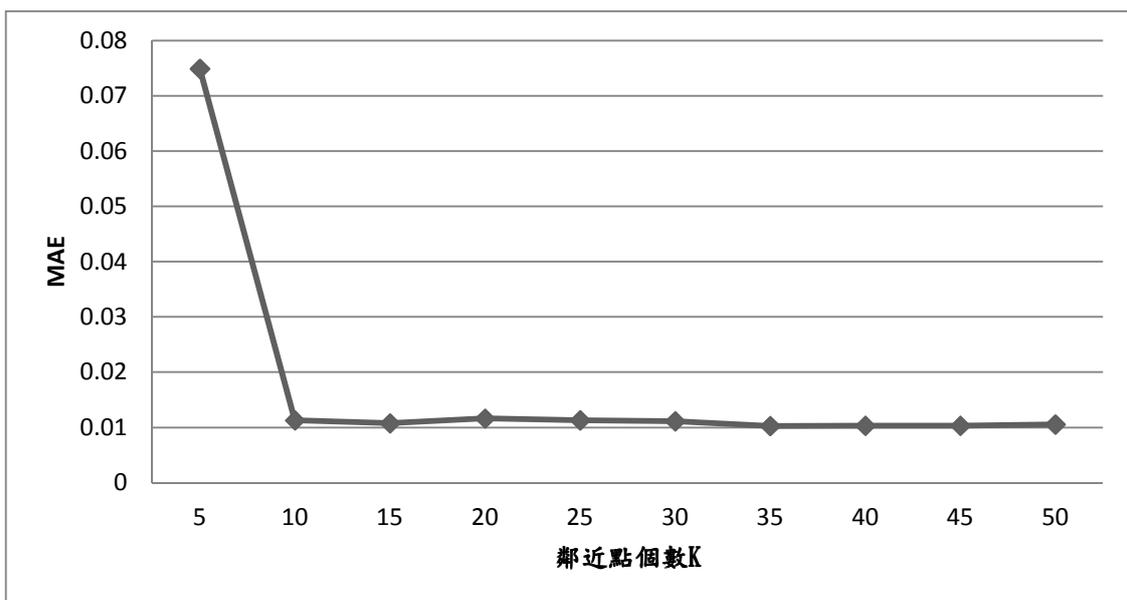


圖 4.5 電力負載資料(局域預測法 K 值的選擇)

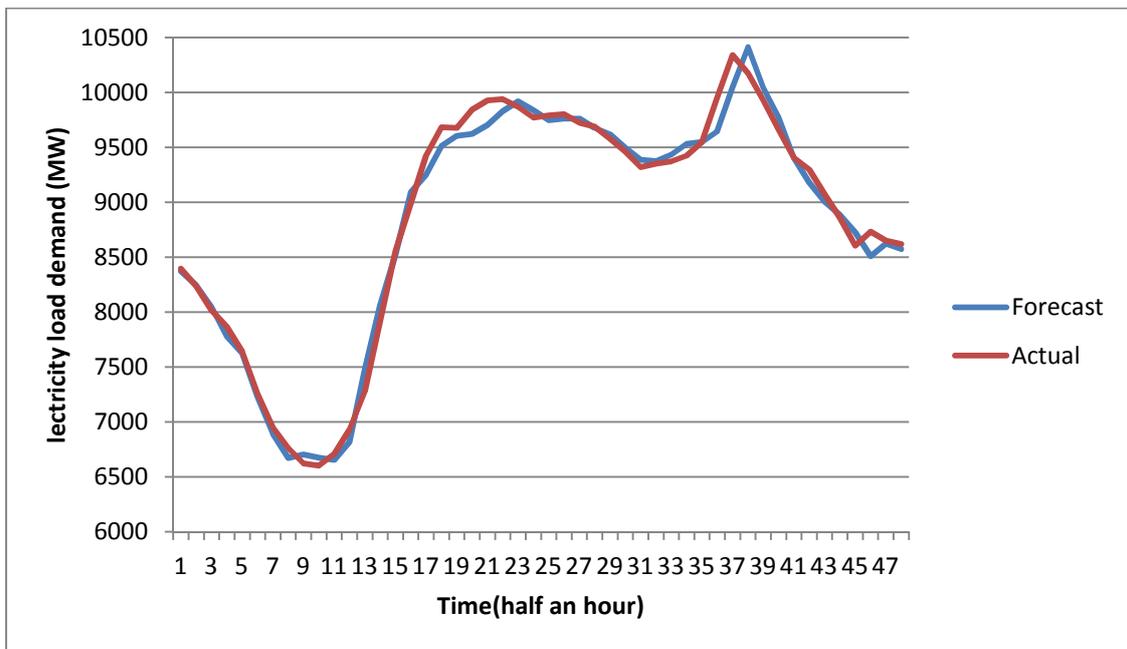


圖 4.6 電力負載資料的觀察值與預測值關係圖(局域預測法 $k=35$)

選用基於最大 Lyapunov 指數預測法，先算出最大 Lyapunov 指數 $\lambda=0.7145>0$ ，在權重 w 在試誤估計後，選用 $w=0.5$ ，電力負載資料的觀察值與預測出來的值的關係圖如圖 4.7 和圖 4.8 所示。而 J. Wang et al.(2011) 提出以趨勢調整 WLLE，如圖 4.9 所示。

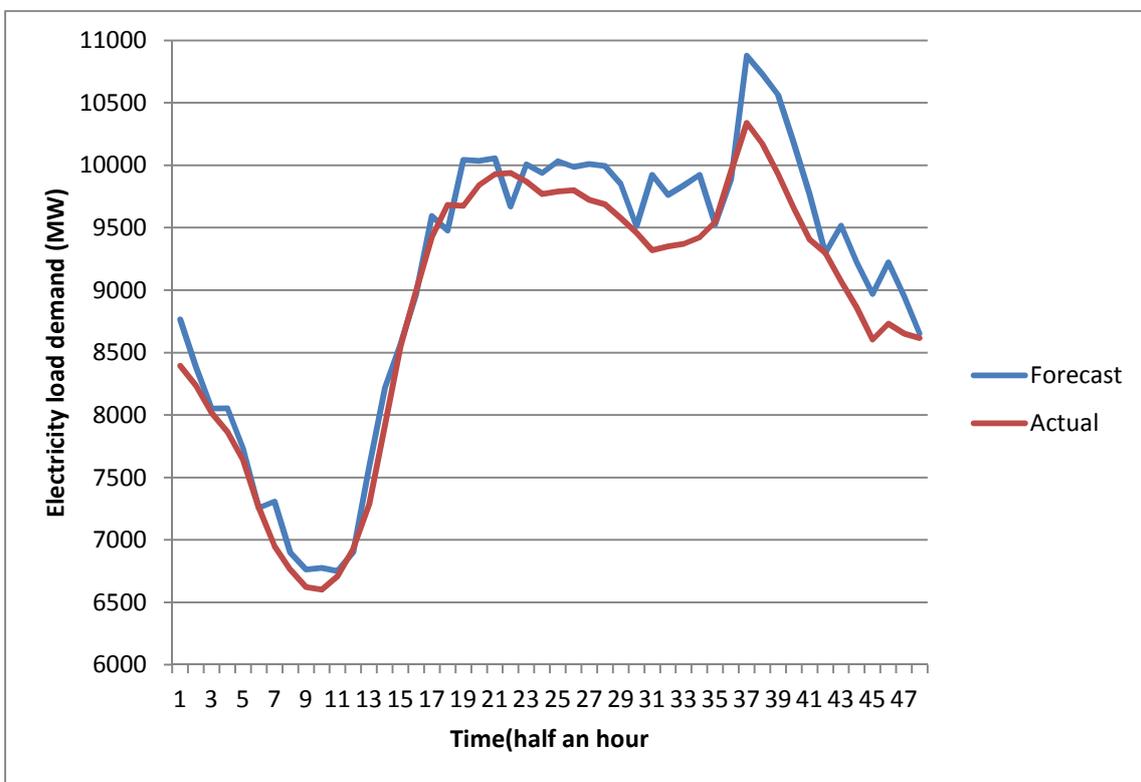


圖 4.7 電力負載資料的觀察值與預測值關係圖(LLE)

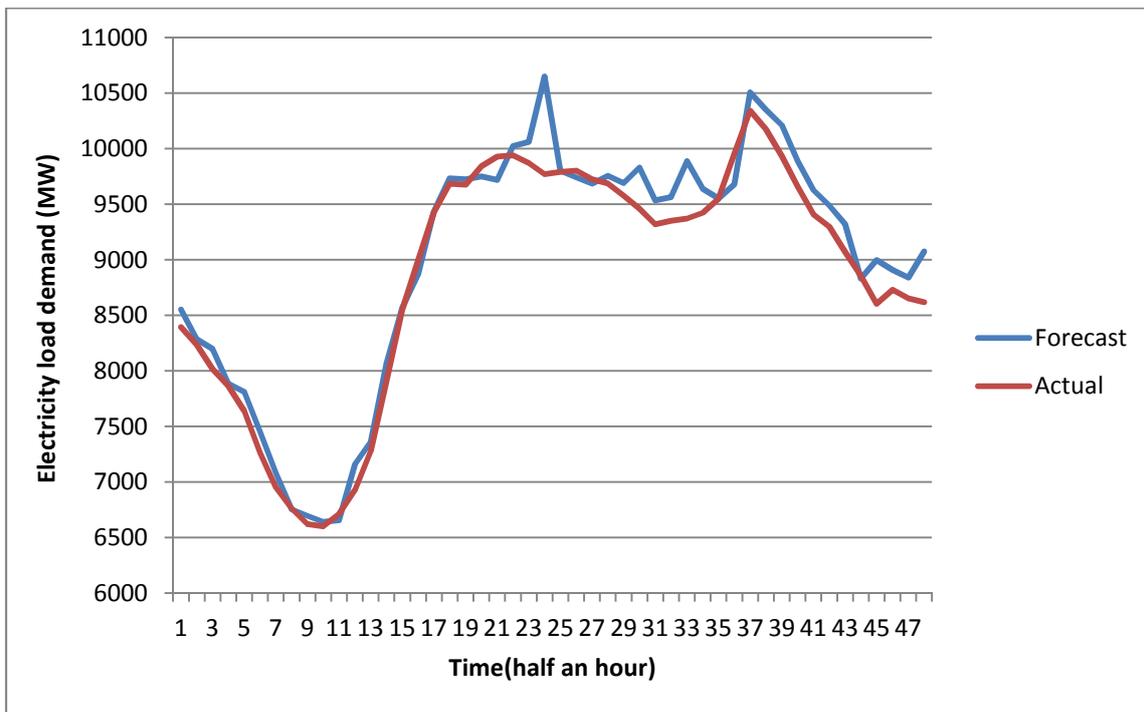


圖 4.8 電力負載資料的觀察值與預測值關係圖(WLLS, $w=0.5$)

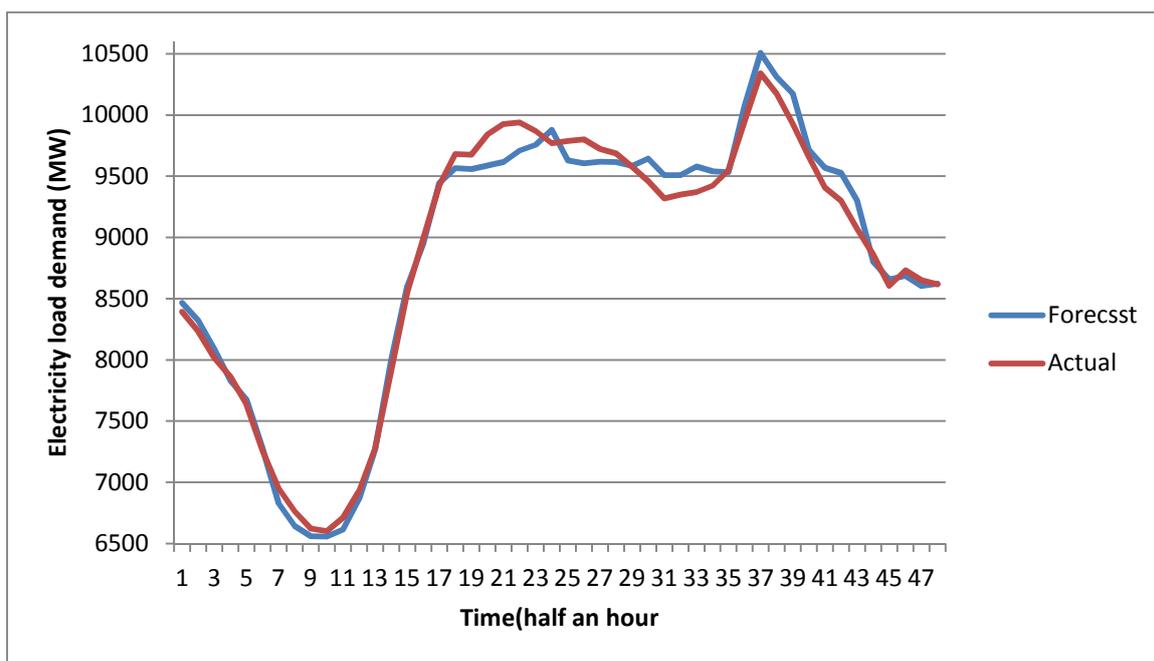


圖 4.9 電力負載資料的觀察值與預測值關係圖(TWLLS, $w=0.5$)

4.1.2 季節指數調整(相空間重構前)

電力負載資料一天有48個時段的觀測值，用前四天同一時段的平均值除以全部時段的平均值，可得一季節指數 S_i ， $i=1,2,\dots,48$ ，原時間序列依時段除以該季節指數 S_i ，而最後預測出來的值乘以該時段的季節指數 S_i ，再去

比較預測結果誤差。

把電力負載資料先做季節指數調整後，計算其最大Lyapunov指數 $\lambda=0.35>0$ ，表示說此時間序列資料在季節指數調整後仍有混沌現象存在。

相空間重構所需決定的延遲時間 τ 和嵌入維度 m ，如圖4.10和圖4.11所示，延遲時間 $\tau=20$ 時最先通過零點，而虛替最近鄰點個數在 $m=6$ 的時候降低到0，故以延遲時間 $\tau=20$ 和嵌入維度 $m=6$ 去做相空間重構。

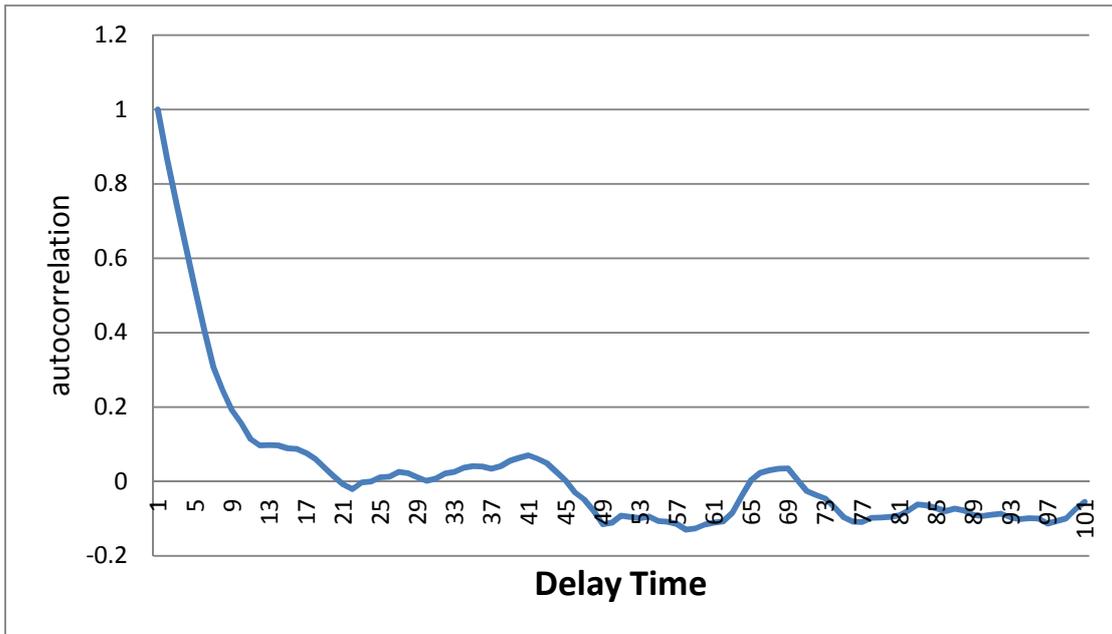


圖 4.10 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)自相關函數圖

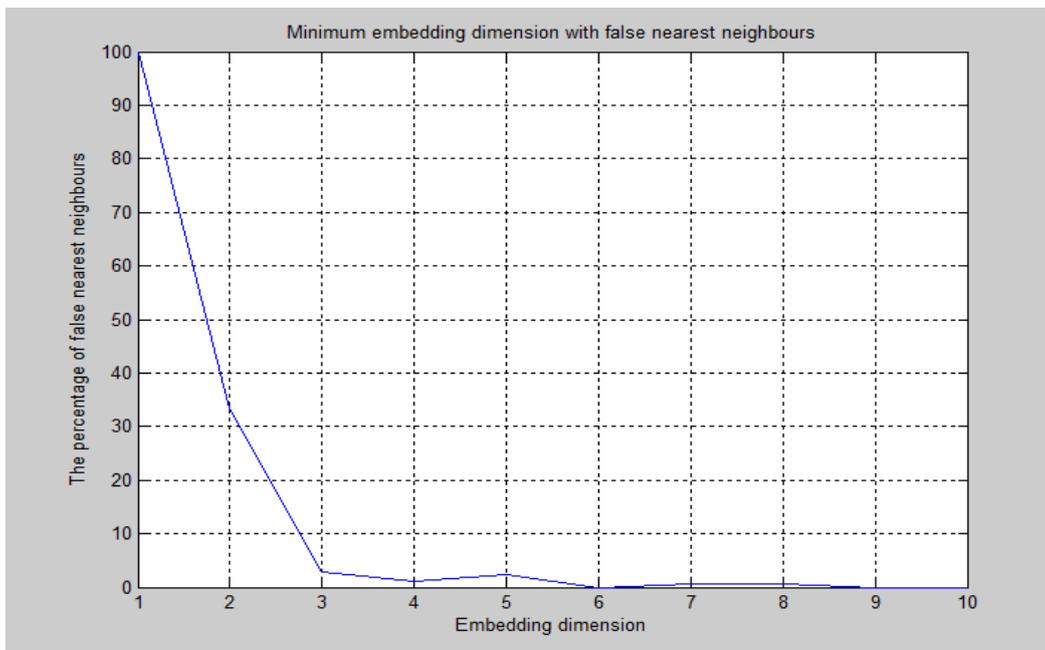


圖 4.11 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)估計嵌入維度圖

電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)在選用全局預測法、局域預測法、基於最大Lyapunov指數預測法所預測出來的值，在乘上該時段季節指數 S_i 後，其觀測值和預測值的關係圖如圖4.12、圖4.14、圖4.15和圖4.16所示。局域法的K值選擇如圖4.13所示。

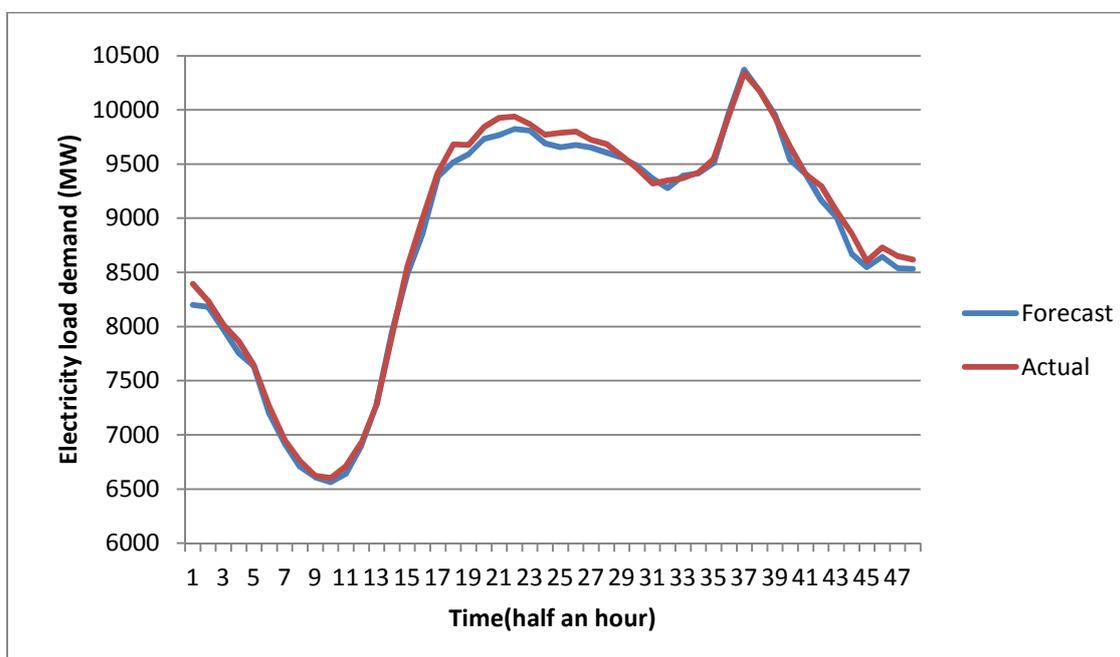


圖 4.12 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)
觀測值和預測值關係圖(全局法)

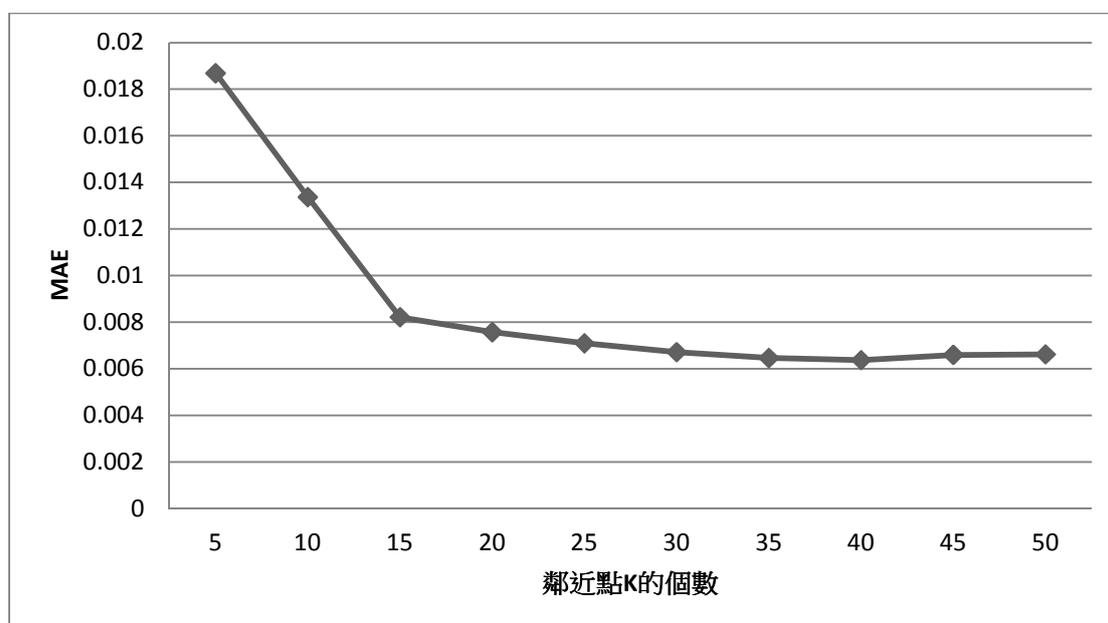


圖 4.13 電力負載資料季節指數調整於相空間重構前
(局域預測法 K 值的選擇)

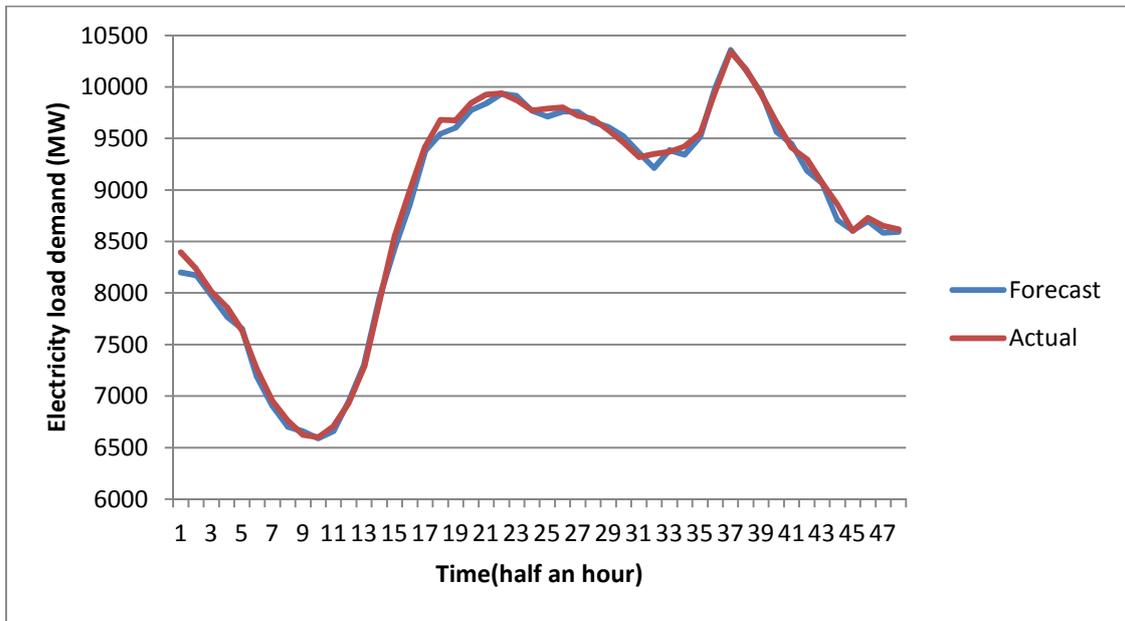


圖 4.14 電力負載資料季節指數調整於相空間重構前 (局域預測, $k=40$)

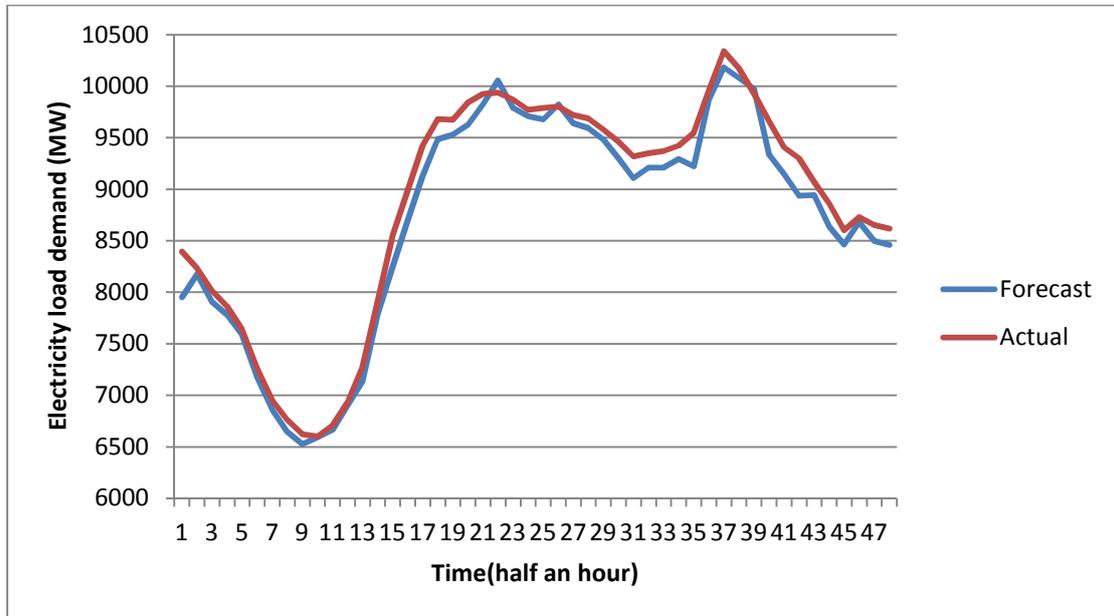


圖 4.15 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)

觀測值和預測值關係圖(LLE)

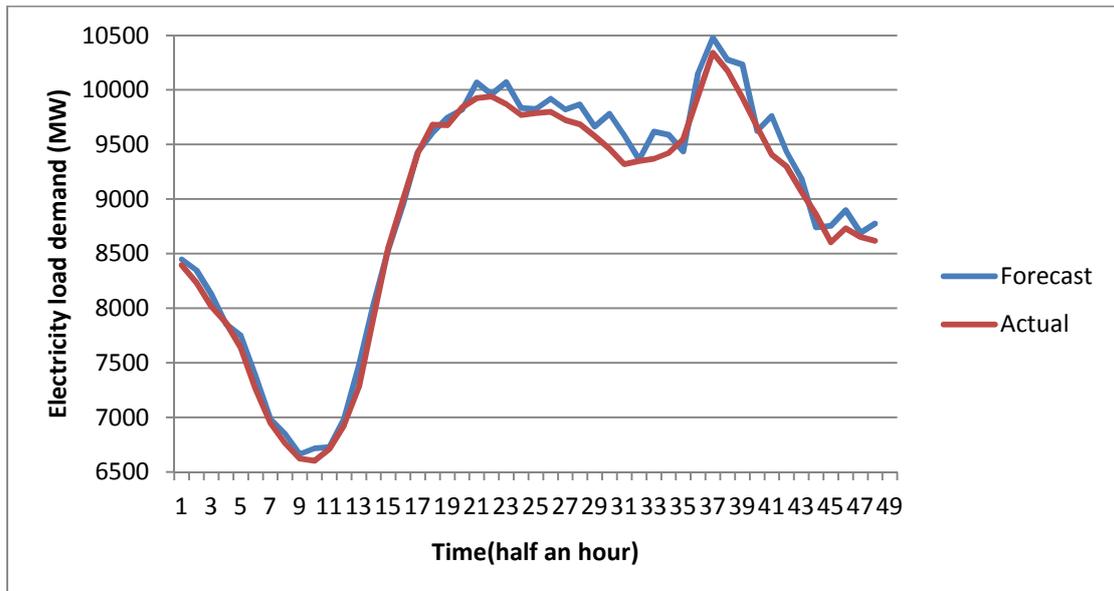


圖 4.16 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構前)
觀測值和預測值關係圖(WLLE, $w=0.7$)

4.1.3 季節指數調整(相空間重構後)

若假設電力負載資料在季節指數調整後並無混沌現象，也就是 $\lambda < 0$ ，所以基於最大Lyapunov指數預測法並不適用，這裡只分析全局預測法和局域預測法的預測結果。選擇在相空間重構完才做季節指數調整，故相空間的延遲時間 τ 和嵌入維度 m 仍使用4.1.1所估計出來的，即 $\tau=12$ 、 $m=4$ 。

電力負載資料(季節指數調整於相空間重構後)在選用全局預測法、局域預測法所預測出來的值，在乘上該時段季節指數 S_i 後，其觀測值和預測值的關係圖如圖4.17和圖4.19所示，局域法的K值選擇如圖4.18所示。

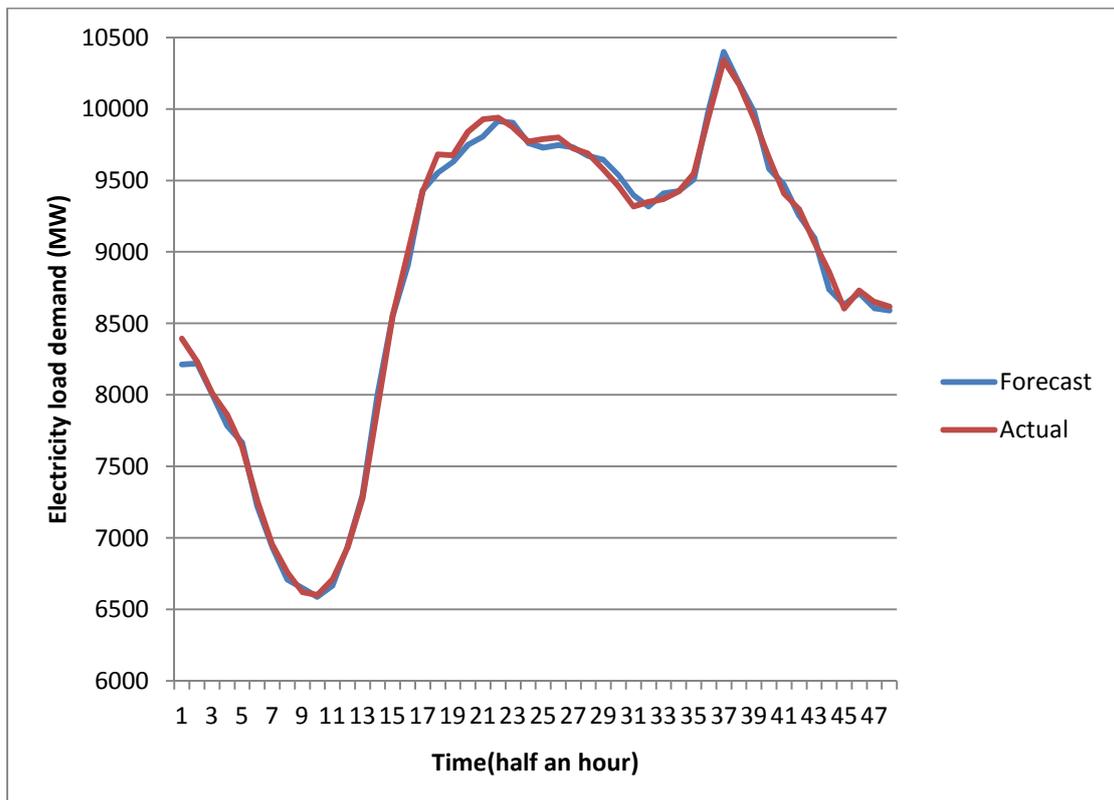


圖 4.17 電力負載資料(季節指數調整於相空間重構後)
觀測值和預測值關係圖(全局法)

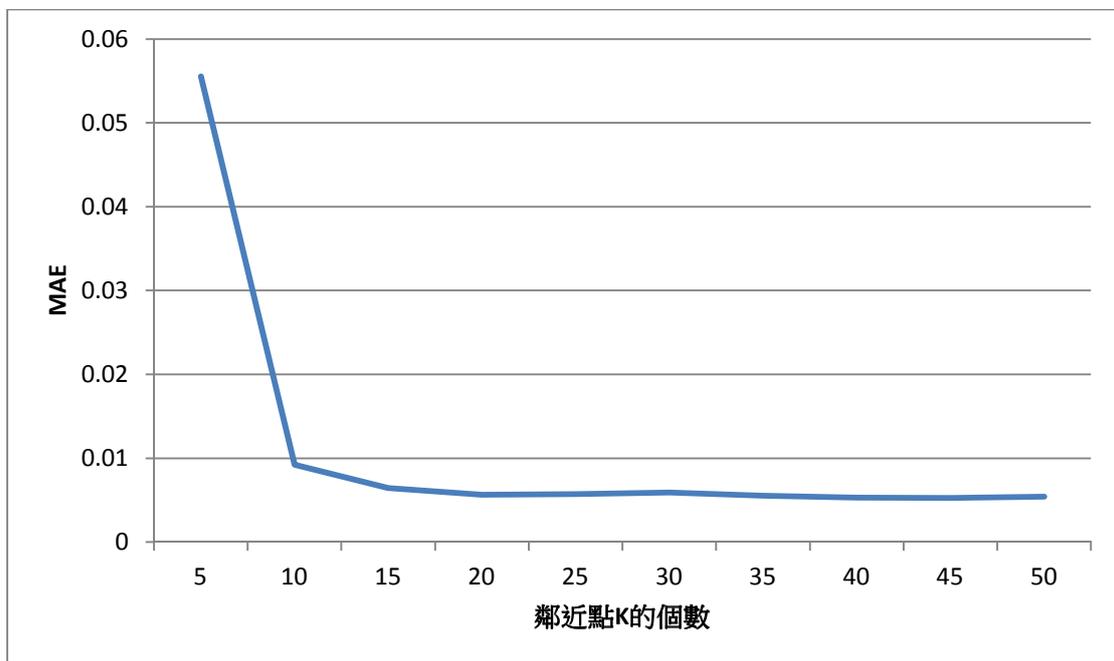


圖 4.18 電力負載資料季節指數調整於相空間重構後
(局域預測法 K 值的選擇)

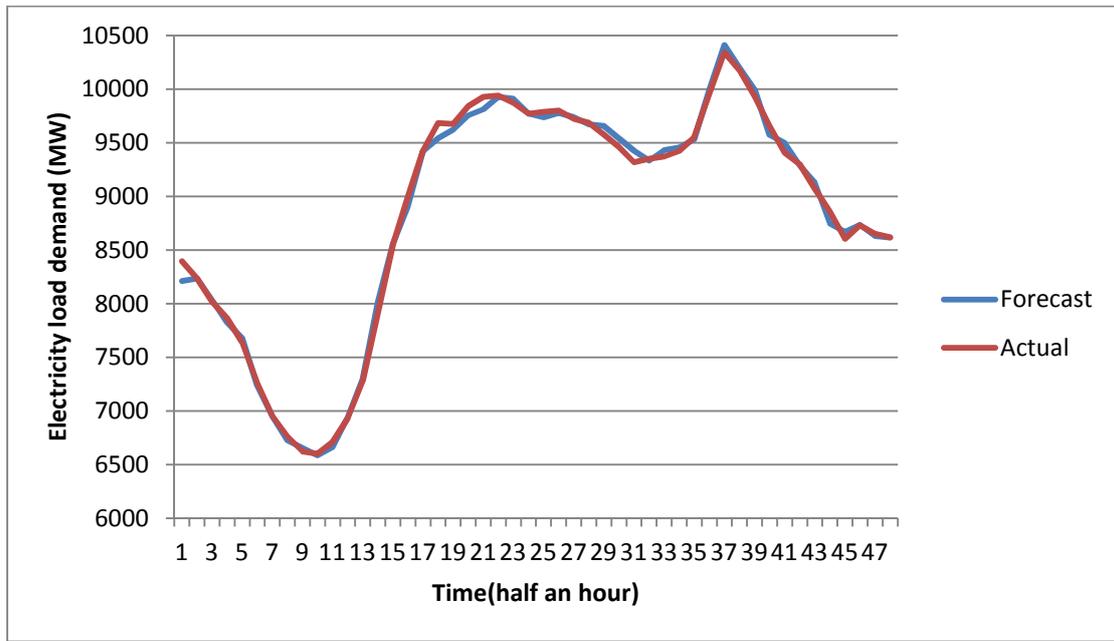


圖 4.19 電力負載資料季節指數調整於相空間重構後(局域預測, $k=40$)

4.1.4 預測準確度之評估

本研究採用均方百分比誤差(Root Mean Square Percent Error, RMSPE)和平均絕對誤差百分比(Mean Absolute Percentage Error, MAPE)，用來做為預測模式好壞之評估指標。

1. 均方百分比誤差(RMSPE)，用以了解觀察值和預測值之偏差百分比，其值越小越好，公式如下所示：

$$RMSPE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i \left(\frac{\hat{x}_i - x_i}{x_i} \right)^2} \quad (4-1)$$

其中 n 為預測期數，($n=1,2,3,\dots,i$)， x_i 為觀察值， \hat{x}_i 為預測值。

2. 平均絕對誤差百分比(MAPE)，因為MAPE為相對數值，不受預測值和觀察值單位和大小之影響，能夠客觀獲得預測值和觀察值之間的差異程度，公式如下所示：

$$MAPE = \frac{1}{n} \left| \frac{\hat{x}_i - x_i}{x_i} \right| \quad (4-2)$$

其中 n 為預測期數，($n=1,2,3,\dots,i$)， x_i 為觀察值， \hat{x}_i 為預測值。

由於電力負載資料每天同時段的差異不夠顯著，故在未經季節指數調

整下，即有不錯的預測效果。由結果可驗證得之全局預測法、局域預測法、基於最大Lyapunov指數預測法、加權最大Lyapunov指數預測法，在季節指數調整過後，都能使最大和整體平均預測誤差降低，使預測更加準確。混沌預測準確度之評估結果整理如表4.1和表4.2所示。

表4.1 電力負載預測準確度評估-MAPE

電力負載資料				
混沌預測方法		原始混沌 預測結果	季節性前 調整結果	季節性後 調整結果
全局 預測 法	Mean	1.94%	0.78%	0.53%
	Max	7.18%	2.30%	2.14%
	Min	0.04%	0.01%	0.01%
局域 預測 法	Mean	1.03%	0.64%	0.53%
	Max	3.06%	2.32%	2.19%
	Min	0.01%	0.03%	0.01%
LLE	Mean	2.78%	1.63%	—
	Max	6.48%	5.28%	—
	Min	0.04%	0.16%	—
WLLE	Mean	1.89%	1.29%	—
	Max	8.99%	3.78%	—
	Min	0.02%	0.07%	—
TWLLE	Mean	1.21%	—	—
	Max	3.13%	—	—
	Min	0.05%	—	—

其中季節性前調整表示對時間序列做季節指數調整於相空間重構前，季節性後調整則是在相空間重構完才做季節指數調整。TWLLE是J. Wang et

al. (2011)提出以趨勢調整來提高WLLE的預測精度。

表4.2 電力負載預測準確度評估-RMSPE

電力負載資料			
混沌預測方法	原始混沌 預測結果	季節性前 調整結果	季節性後 調整結果
全局預測法	2.63%	0.95%	0.68%
局域預測法	1.30%	0.80%	0.71%
LLE	3.36%	1.94%	—
WLLE	2.51%	1.57%	—
TWLLE	1.43%	—	—

其中季節性前調整表示對時間序列做季節指數調整於相空間重構前，季節性後調整則是在相空間重構完才做季節指數調整。TWLLE是J. Wang et al.(2011)提出以趨勢調整來提高WLLE的預測精度。

4.2 交通車流資料

資料來源來自於是台北市交通控制中心，採用仁愛路和光復南路路口的小客車交通流量資料做為分析混沌行為，相空間重構和預測車流量使用。採用的資料時間範圍是民國100年9月17日0時0分至民國100年9月21日23時30分，觀測時間觀測間隔為30分鐘，所以五天共有240筆資料，把資料分為兩部份，前四天共192筆資料做為歷史資料用，第五天的資料留做為用來驗證的預測值。交通車流資料的時間序列圖如圖4.20所示：

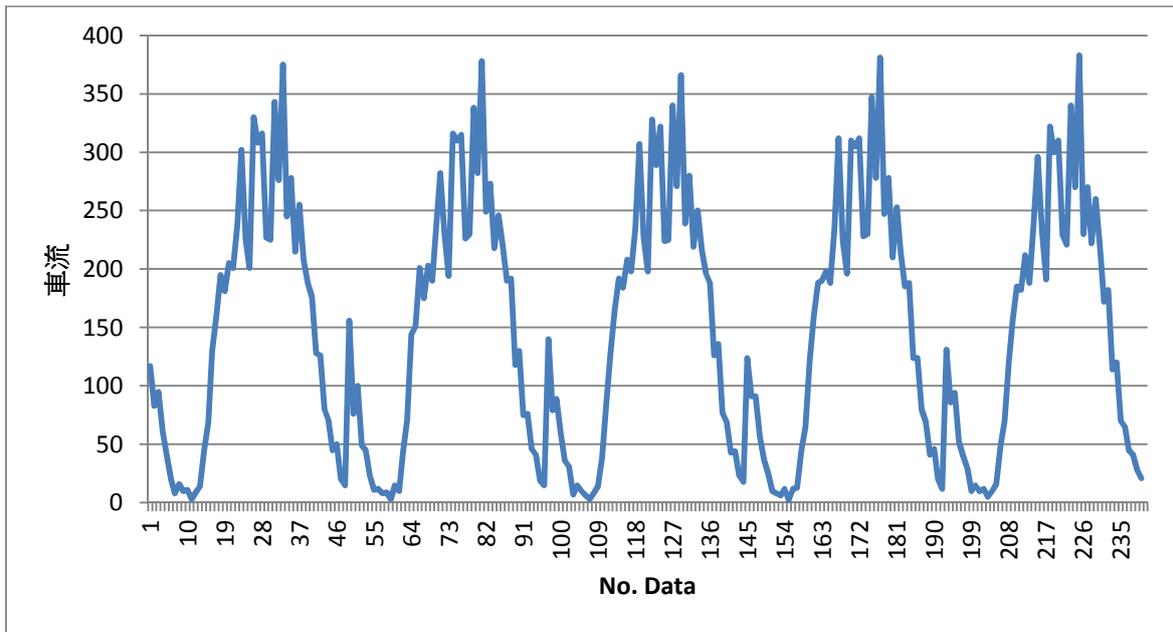


圖 4.20 交通車流資料時間序列圖

4.2.1 時間序列分析與預測

為了重構相空間，首先我們必須估計相空間的參數，選擇最適之延遲時間 τ 和嵌入維度 m 。

自我相關函數對延遲時間 τ 的圖形如圖4.21所示，自我相關函數會隨著 τ 值增加而逐漸降低，最終在無相關之間震盪，而當自我相關函數最先通過零時，就是我們所選擇之最適延遲時間 $\tau=12$ 。

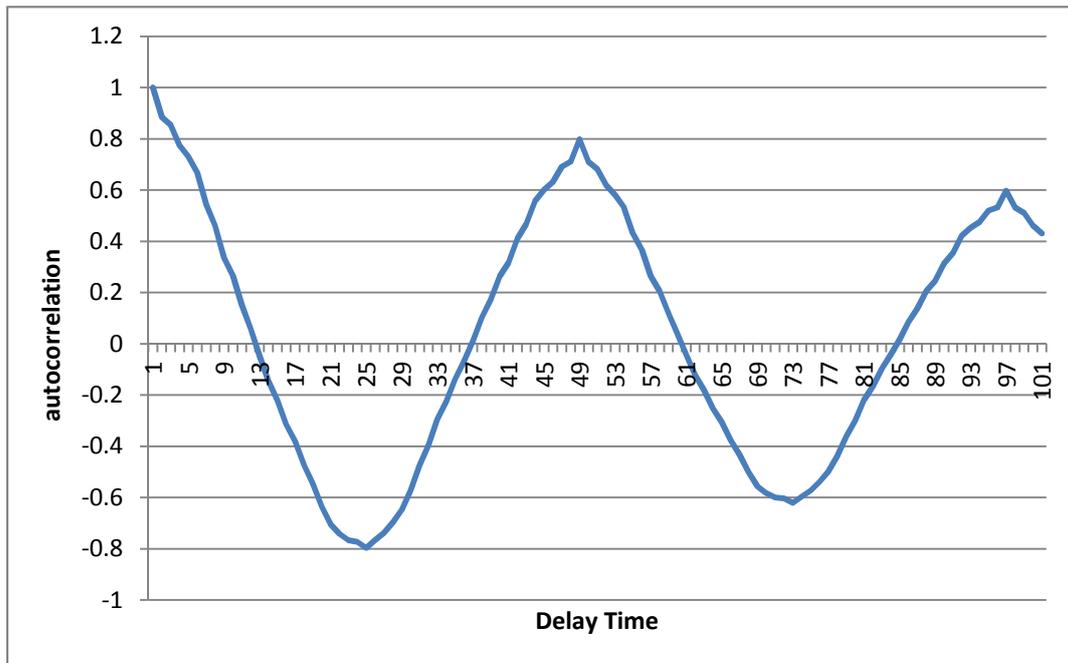


圖 4.21 交通車流資料的自我相關函數圖

嵌入維度 m 的選擇，本研究以虛替最近鄰點法來決定，如圖4.22所示，虛替最近鄰點個數在 $m=3$ 的時候降低到0，故估計最適嵌入維度 $m=3$ 。

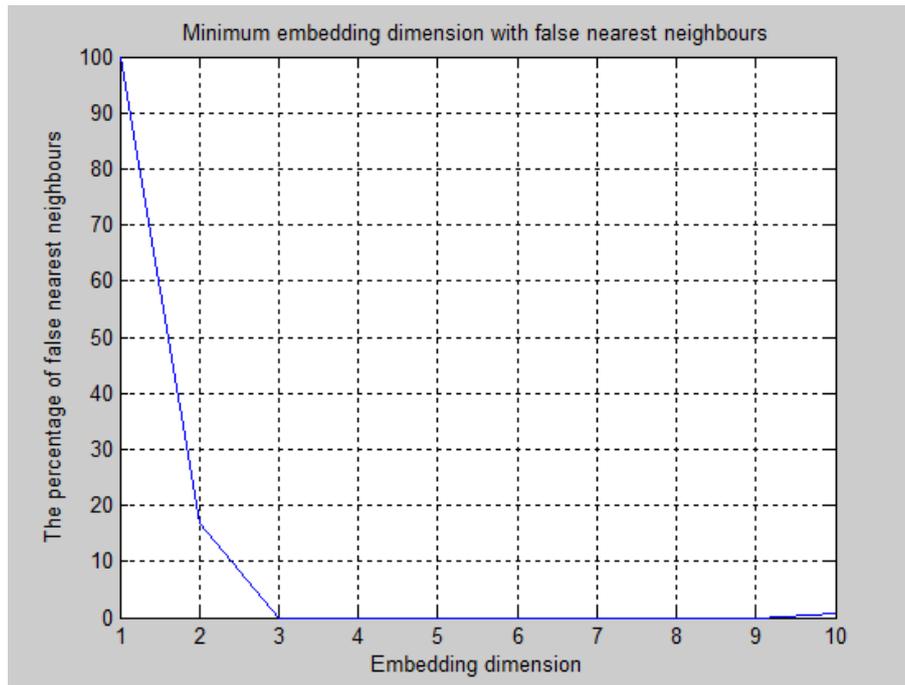


圖 4.22 交通車流資料估計嵌入維度圖

本研究以延遲時間 $\tau=12$ ，嵌入維度 $m=3$ ，來做小客車交通流量資料的相空間重構，然後進行混沌方法預測。

選用全局預測法的過程中，本研究以複線性迴歸去配適 $X(t_i + 1) = \tilde{f}(X(t_i))$ 當中的函數 \tilde{f} ，交通流量的觀察值與預測值的關係圖如圖4.23所示。

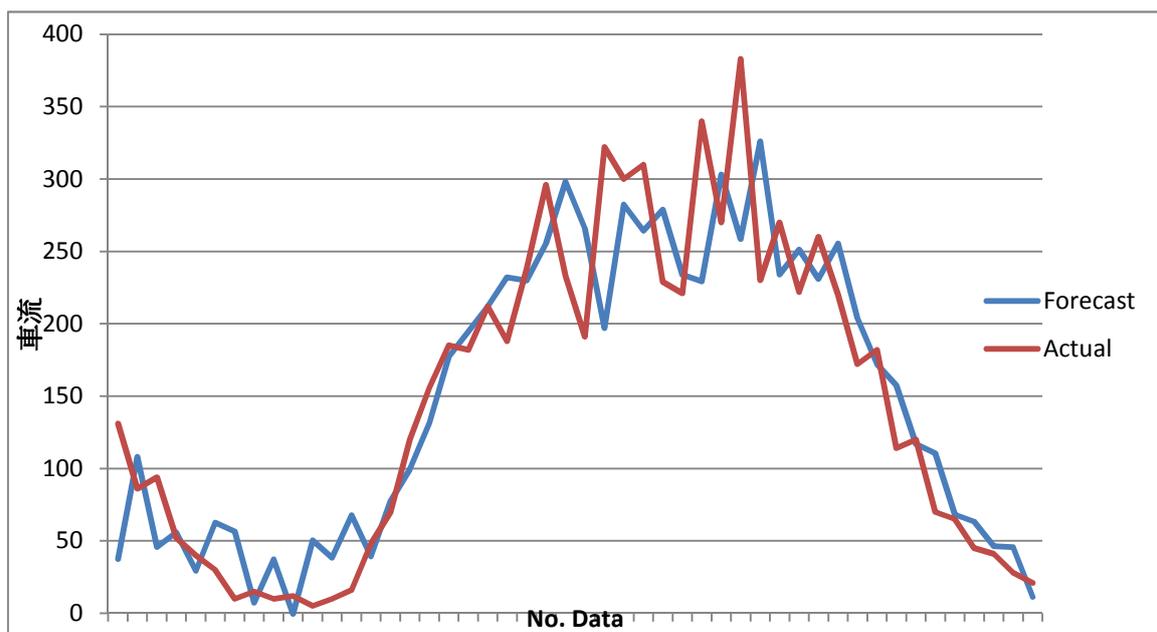


圖 4.23 交通車流資料的觀察值和預測值關係圖(全局預測法)

選用局域預測法的過程中，本研究以複線性迴歸去配適 $X(t_i + 1) = \tilde{f}(X(t_i))$ 當中的函數 \tilde{f} ，而局域預測法須決定要找尋多少 k 個鄰近點來去配適，這裡用平均絕對誤差(Mean Absolute Error, MAE)去找出 k 值在多少下，會使預測誤差減到最低，如圖4.24所示，在 k 值=5時MAE最低，故找尋5個鄰近點去配適函數 \tilde{f} 。交通車流資料的觀察值與預測出來的值的關係圖如圖4.25所示。

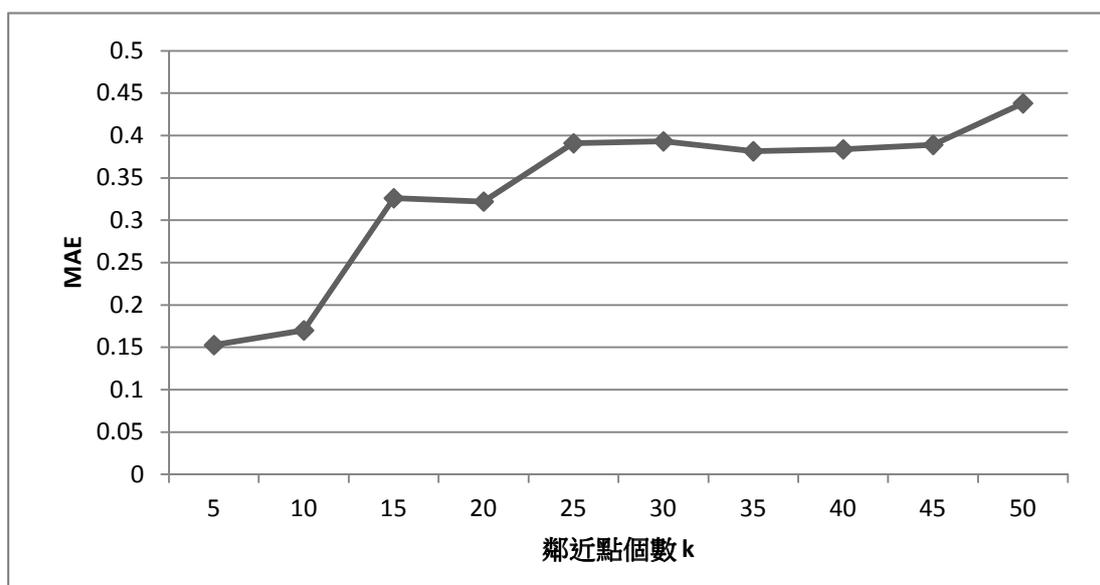


圖 4.24 交通車流資料(局域預測法 K 值的選擇)

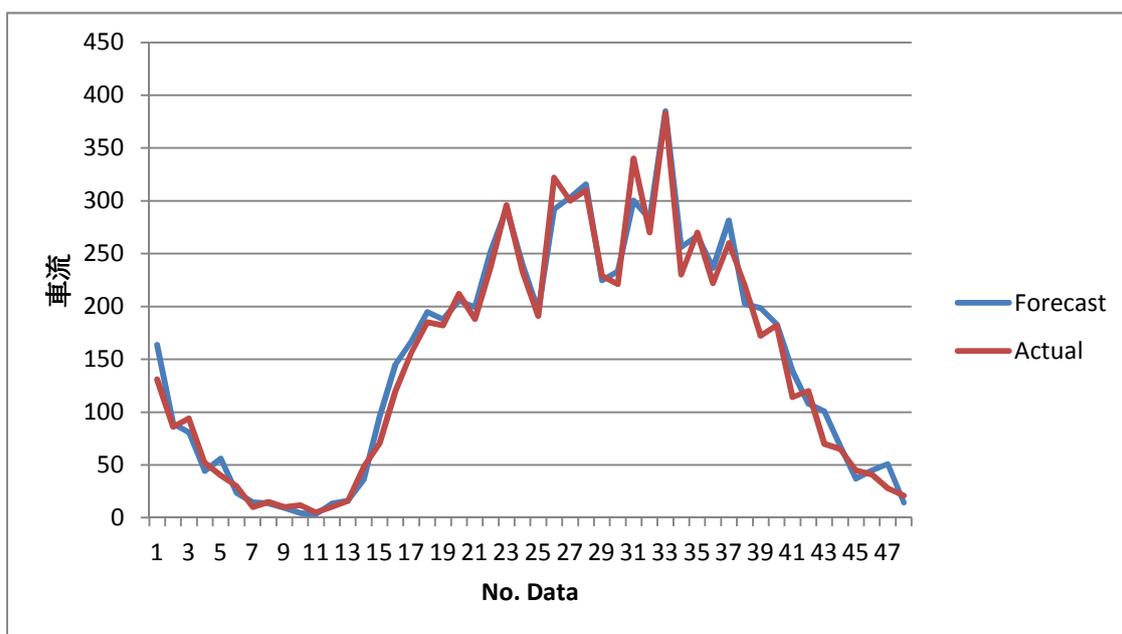


圖 4.25 交通車流資料的觀察值與預測值關係圖(局域預測法 k=5)

選用基於最大Lyapunov指數預測法，先算出最大Lyapunov指數 $\lambda=3.035>0$ ，在權重 w 在試誤估計後，選用 $w=0.05$ ，交通車流資料的觀察值與預測出來的值的關係圖如圖4.26和圖4.27所示。而J. Wang et al.(2011)提出以趨勢調整WLLE，如圖4.28所示。

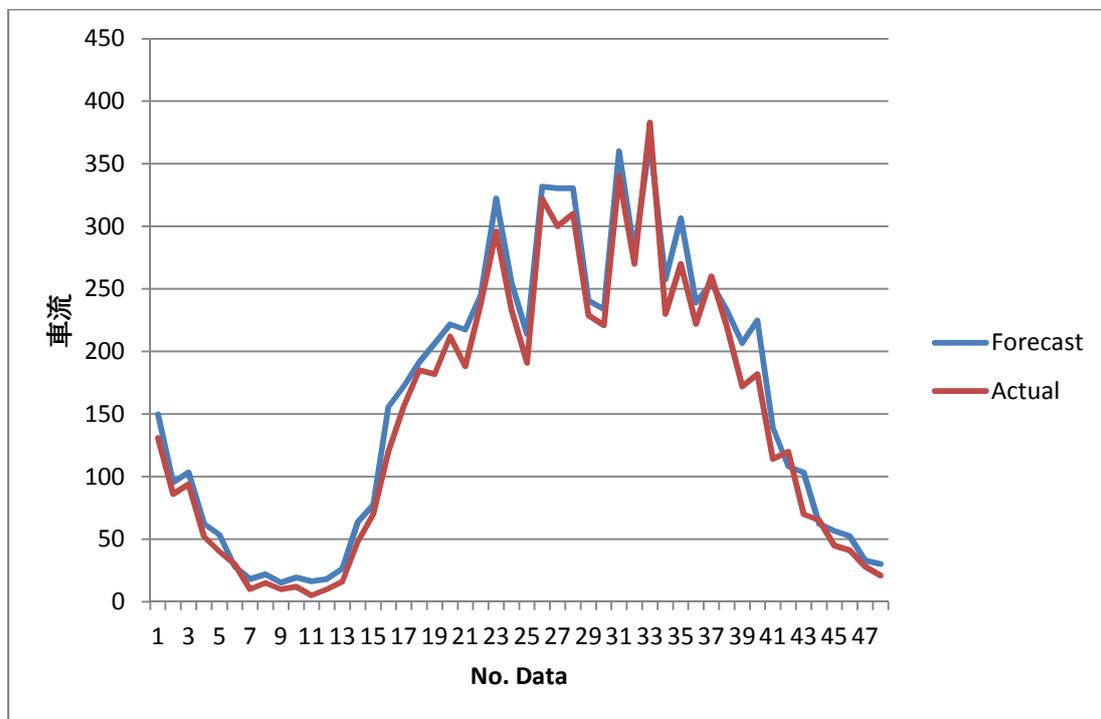


圖 4.26 交通車流資料的觀察值與預測值關係圖(LLE)

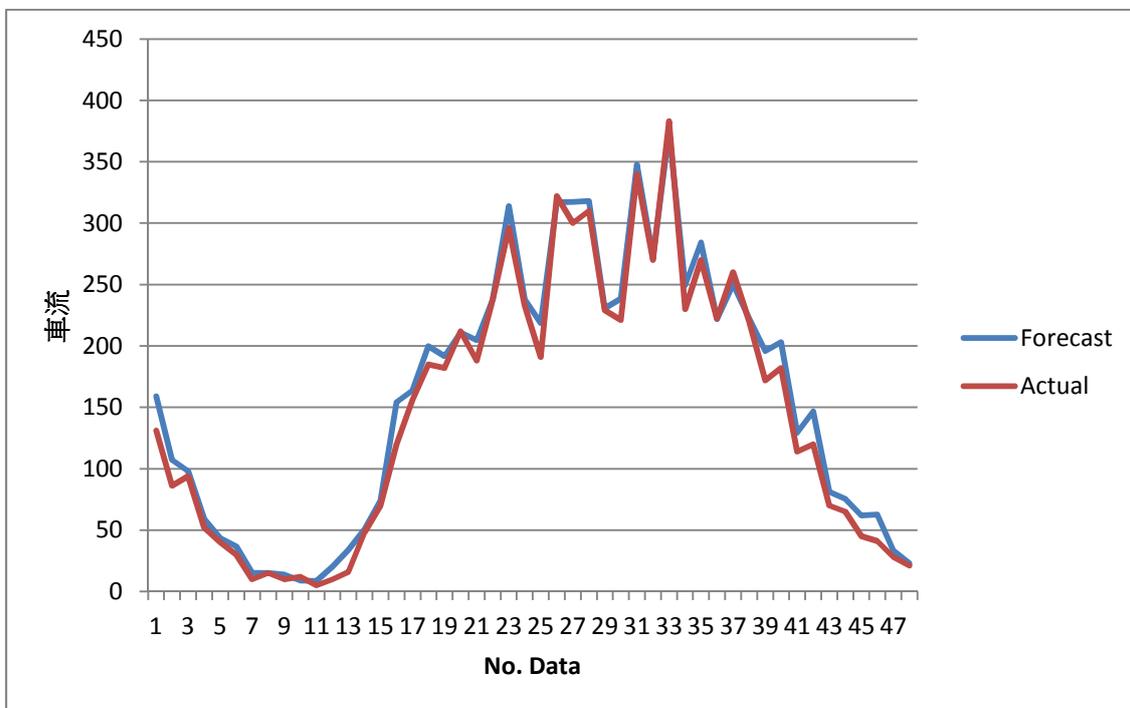


圖 4.27 交通車流資料的觀察值與預測值關係圖(WLLE, $w=0.05$)

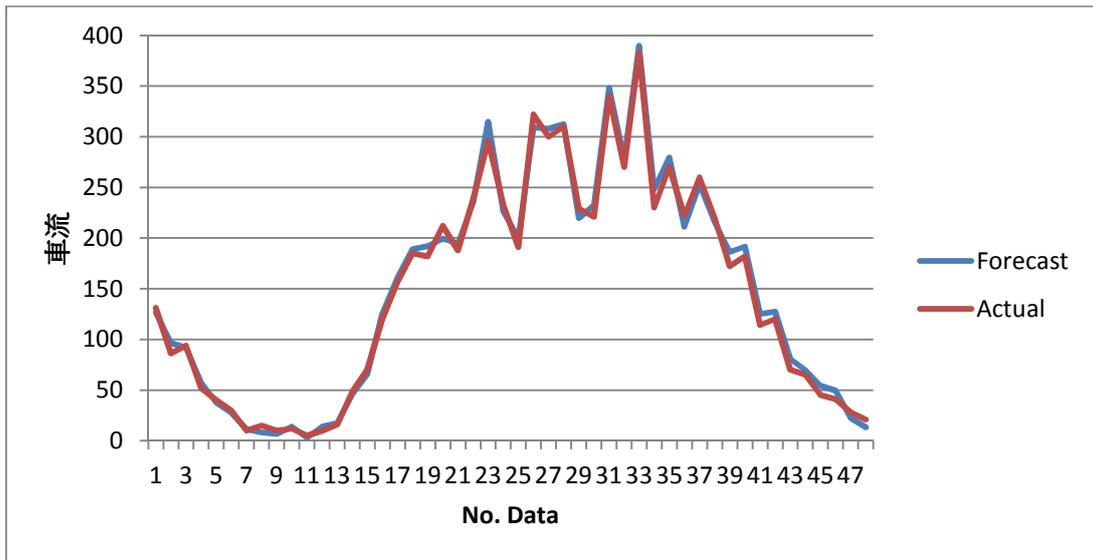


圖 4.28 交通車流資料的觀察值與預測值關係圖(TWLLE, $w=0.05$)

4.2.2 季節指數調整(相空間重構後)

交通車流資料在做完季節調整後，最大Lyapunov指數 $\lambda < 0$ ，故無法在相空間重構前季節調整資料，故選擇在在相空間重構後才做季節指數調整，並選用4.2.1所決定出的相空間，延遲時間 $\tau=12$ 和嵌入維度 $m=3$ 。由於最大Lyapunov指數 $\lambda < 0$ ，故這裡只分析全局預測法和局域預測法的預測結果。

小客車交通車流資料(季節指數調整於相空間重構後)選用全局預測法、局域預測法所預測出來的值，在乘上該時段季節指數 S_i 後，其觀測值和預測值的關係圖如圖4.29和圖4.31所示，局域法的K值選擇如圖4.30所示。

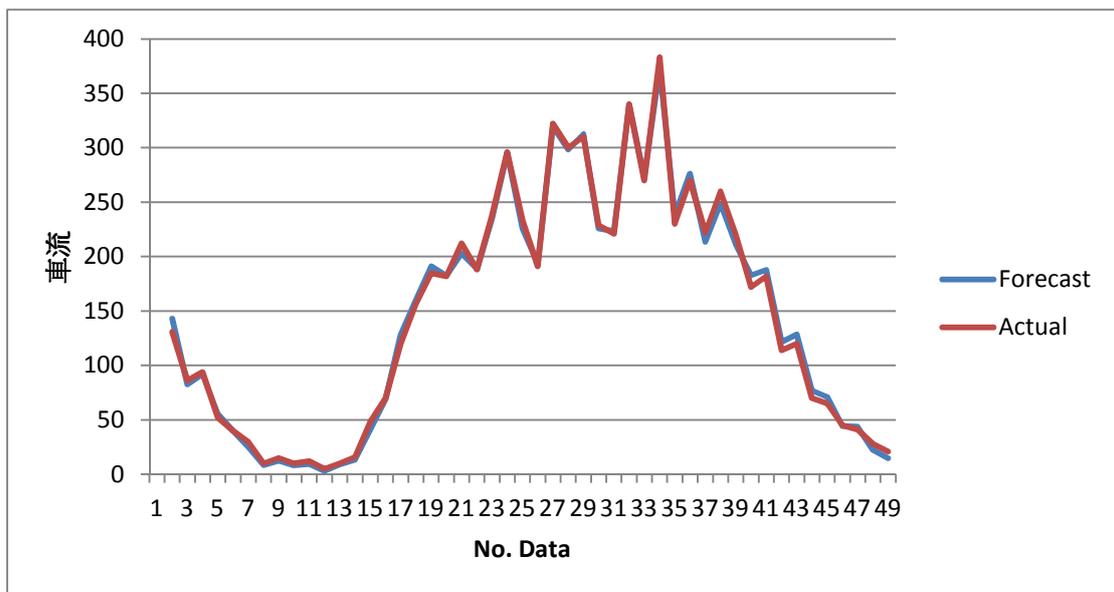


圖 4.29 交通車流資料(季節指數調整於相空間重構後)

觀測值和預測值關係圖(全局法)

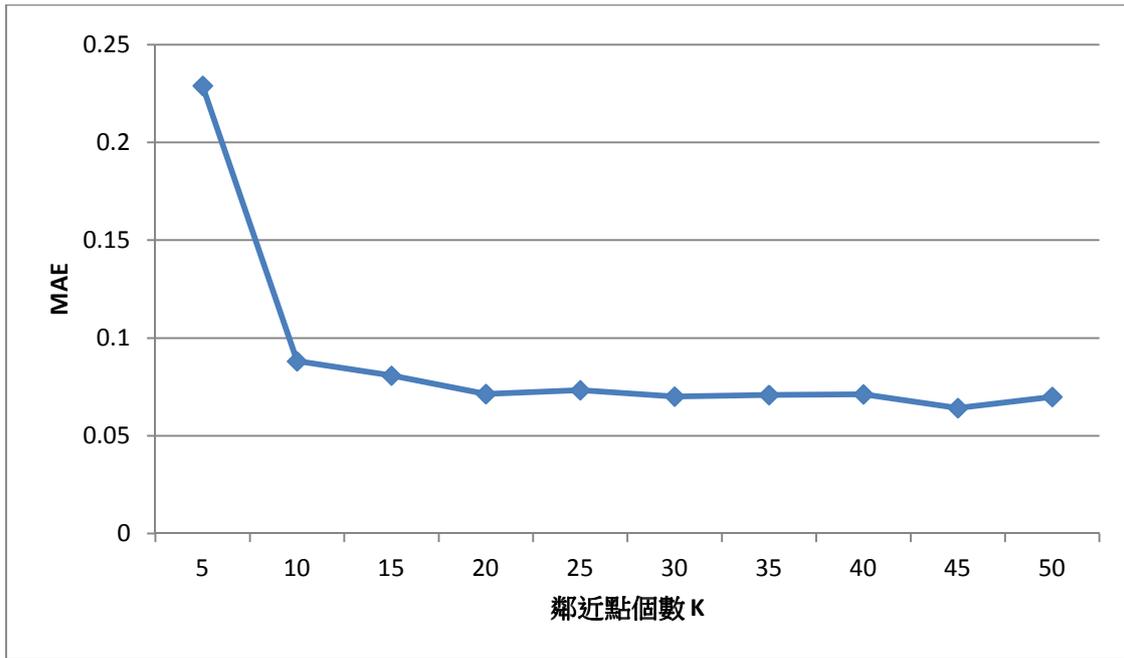


圖 4.30 交通車流資料季節指數調整於相空間重構後(局域預測法 K 值選擇)

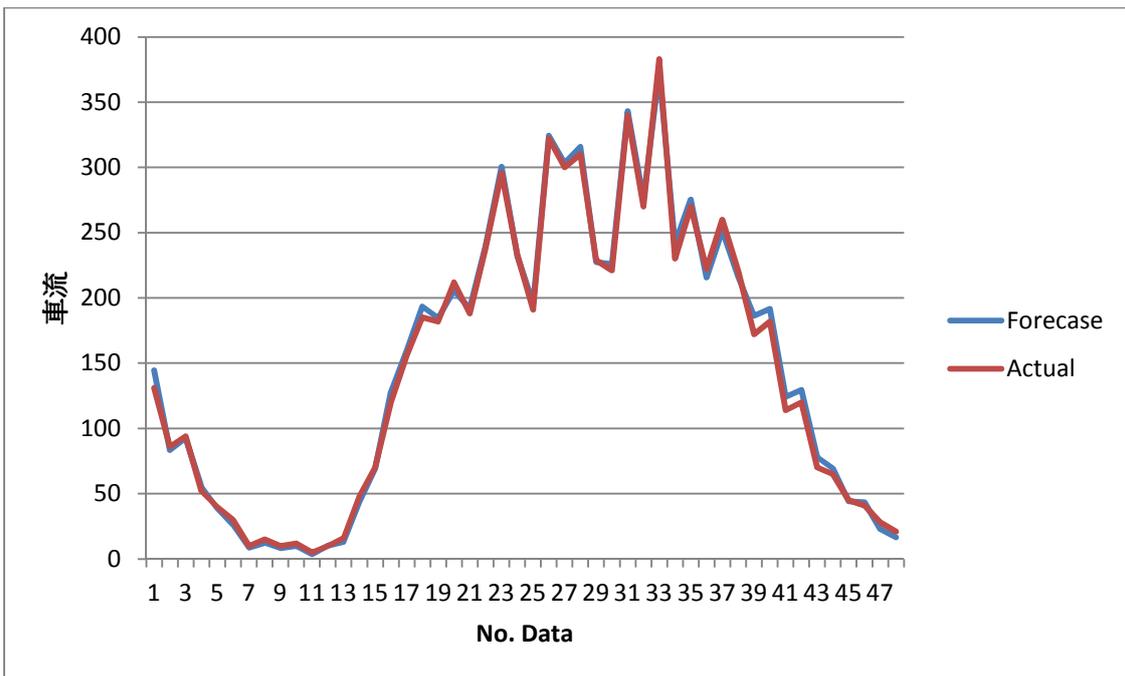


圖 4.31 交通車流資料季節指數調整於相空間重構後(局域預測法, k=45)

4.2.3 預測準確度之評估

使用4.1.4所選用的評估指標-均方百分比誤差(RMSPE)和平均絕對誤差百分比(MAPE)，來評估分析預測結果。

交通車流每天同時段的差異顯著，全局預測法受到噪聲的影響很大，預測誤差很高，局域預測法和基於最大Lyapunov指數預測法相對已經降低許多誤差。而交通車流資料在相空間重構後做季節指數調整，在全局預測法和局域預測法上，更加減少了最大和整體的預測誤差。混沌預測準確度之評估結果整理如表4.3和表4.4：

表4.3 交通車流預測準確度評估-MAPE

交通車流資料			
混沌預測方法		原始混沌 預測結果	季節性後 調整結果
全局 預測 法	Mean	71.42%	7.00%
	Max	322.7%	40.62%
	Min	0.01%	0.01%
局域 預測 法	Mean	15.27%	6.43%
	Max	81.50%	27.22%
	Min	0.51%	0.44%
LLE	Mean	24.87%	—
	Max	228.84%	—
	Min	2.05%	—
WLLE	Mean	17.61%	—
	Max	111.08%	—
	Min	0.05%	—
TWLLE	Mean	10.13%	—
	Max	44.60%	—
	Min	0.77%	—

其中季節性後調整則是在相空間重構完才做季節指數調整。TWLLE是J. Wang et al.(2011)提出以趨勢調整來提高WLLE的預測精度。

表4.4 交通車流預測準確度評估-RMSPE

交通車流資料		
混沌預測方法	原始混沌預測結果	季節性後調整結果
全局預測法	168%	10.81%
局域預測法	22.96%	9.09%
LLE	43.67%	—
WLLE	29.87%	—
TWLLE	15.11%	—

其中季節性後調整則是在相空間重構完才做季節指數調整。TWLLE是J. Wang et al.(2011)提出以趨勢調整來提高WLLE的預測精度。

第五章 結論與未來研究方向

5.1 結論

混沌理論讓我本來對混亂行為的看法，以往認為十分複雜、雜亂無章的現象，其實背後可能存在一種簡單的秩序，可以用混沌來加以描述，甚至進一步地去預測。

本研究以具季節性之時間序列，用混沌方法去預測，經過季節指數調整後，能使預測誤差降低。而由於並不是每個混沌時間序列做了季節指數調整過後都還能保有混沌，故另一選擇便是在相空間重構完才進行季節指數修正，然後加以預測。

而由於電力負載資料每天同一時段的差異不夠顯著，雖仍有降低誤差但不夠明顯，而在變動較難以捉摸的交通車流資料，在經季節指數調整後，預測誤差有顯著改善。

由表 4.1、4.2、4.3 和 4.4 中所呈現的結果可得知，全局預測法、局域預測法、WLLE 這些常見的混沌預測方法，在混沌時間序列經由季節指數調整後，都比未經季節調整的預測誤差低，特別是局域預測法的預測結果。Jianzhou Wang et al.(2011)所提出的 TWLLE，能夠有效改善預測的 Max MAPE，而本研究所提出以季節指數調整的方法，在預測的 Max MAPE 和 Mean MPAE 的改善幅度更好，而在 RMSPE 上的預測準確評估也更佳，代表本研究方法更能降低其預測誤差。

5.2 建議

本研究所使用到的混沌預測方法分別是全局預測法、局部預測法、加權最大 Lyapunov 指數預測法，而當中的全局和局域預測法，本研究是以複線性迴歸去配適方法中的函數 \tilde{f} ，建議以類神經網絡加上季節指數調整去配適函數 \tilde{f} 。

參考文獻

- 陳信維(2000)。混沌與碎形理論在時間序列分析之應用(碩士論文)。台灣科技大學，台北市。
- 傅俊中(1995)。混沌系統之控制與預測(未出版之碩士論文)。中正大學，嘉義縣。
- 黃文隆、黃龍(2003)。迴歸分析。台中市，滄海書局。
- Anderson, D.R., Sweeney, D.J., Williams, T.A., Chen, J.C. (2006). *Statistics for business and economics: A practical approach*, Thomson Learning, Singapore.
- Chen, J. L., S. Islam, and P. Biswas. (1998). Nonlinear Dynamics of Hourly Ozone Concentrations: Nonparametric Short Term Prediction. *Atmospheric Environment*, 32(11), 1839-1848.
- Elsner, J. B. and A. A. Tsonis. (1992). Nonlinear Prediction, Chaos, and Noise. *Bulletin American Meteorological Society*, 73(1), 49-60.
- Farmer, J. D. and J. J. Sidorowich. (1987). Predicting Chaotic Time Series. *Physical Review Letters*, 59(8), 845-848.
- Feigenbaum, M. J. (1983). Universal behavior in nonlinear systems. *Physica*, 7, 16-39.
- Fraser, A. & H. Swinney. (1986). Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information. *Physics Review*, 33, 1134-1140.
- Grassberger, P. and I. Procaccia. (1983). Characterization of Strange Attractors. *Physical Review Letters*, 50(5), 346-349.
- Hayles, N. K. (1990). *Chaos bound: Orderly disorder in contemporary literature and science*. Ithaca, New York: Cornell University Press.
- Itoh, K. (1995). A Method for Predicting Chaotic Time-series with Outliers. *Electronics and Communications in Japan*, 78(5), 44-53.
- J. Wang, D. Chi, J. Wu, H. Lu. (2011). Chaotic time series method combined with particle swarm optimization and trend adjustment for electricity demand forecasting. *Expert Systems with Applications* 38, 8419–8429.
- Jayawardena, A. W. and F. Lai. (1994). Analysis And Prediction of Chaos in Rainfall And Stream Flow Time Series. *Journal of Hydrology*, 153, 23-52.
- Kennel, M. B., R. Brown, and H. D. I. Abarbanel. (1992). Determining Embedding Dimension for Phase-space Reconstruction Using a Geometrical Construction. *Physical Review A*, 45, 3403-3411.
- Kocak K., L. Saylan, and O. Sen. (2000). Nonlinear Time Series Prediction of O3 Concentration in Istanbul. *Atmospheric Environment*, 34(8), 1267-1271.
- Li, T. Y., & Yorke, J. A. (1975). Period Three Implies Chaos. *American Mathematical Monthly*, 82, 985-992.
- Liu, Q., S. Islam, I. Rodriguez-Iturbe, and Y. Le. (1998). Phase-Space Analysis of Daily

- Streamflow: Characterization and Prediction. *Advances in Water Resources*, 21(6), 463-475.
- Lorenz, E. N. (1969). Atmospheric Predictability as Revealed by Naturally Occurring Analogies. *Journal of Atmospheric Sciences*, 26, 636-646.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 130-141.
- Perez-Munuzuri, V. and I. R. Gelpi. (2000). Application of Nonlinear Forecasting Techniques for Meteorological Modeling. *Annales Geophysicae*, 18(10), 1349-1359.
- Porporato, A. and L. Ridolfi. (1997). Nonlinear Analysis of River Flow Time Sequences. *Water Resources Research*, 33(6), 1353-1367.
- Rössler, O. E. (1976). An Equation for Continuous Chaos. *Physics Letter A*, 57(5), 397-398.
- Sugihara, G. and R. M. May. (1990). Nonlinear Forecasting as a Way of Distinguishing Chaos from Measurement Error in Time Series. *Nature*, 344, 734-741.