東　　海　　大　　學

工業工程與經營資訊學系

碩士論文

在四階供應鏈中資訊分享對長鞭效應影響之研究

研 究 生：賴婉巧

指導教授：黃欽印 博士

陳武林 博士

中 華 民 國 一 〇 四 年 六 月

Information Sharing on the Bullwhip Effect in a Four-Level Supply Chain

By

Wan-Qiao Lai

Advisors：Prof. Chin-Yin Huang

Prof. Wu-Lin Chen

A Thesis

Submitted to the Institute of Industrial Engineering and Enterprise Information at Tunghai University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

in

Industrial Engineering and Enterprise Information

June 2015

Taichung , Taiwan

在四階供應鏈中資訊分享對長鞭效應影響之研究

學生：賴婉巧　　　　　　　　　　　　　　　　指導教授：黃欽印 博士

陳武林 博士

東海大學工業工程與經營資訊學系

摘　　要

為了迎合全球化的時代，各企業間除了彼此相互競爭之外，更應該以相互合作的形式共創價值，資訊分享能在瞬息萬變的市場需求中，降低存貨成本，提升企業的競爭力。過去研究為了簡化分析經常考量二階供應鏈，但現實社會中是存在著三階或以上的供應鏈。本研究藉由數學模式推導，提出四階層供應鏈分析模式，並驗證各階層資訊分享的價值。

本研究假設市場需求為 AR(1)模式(如同許多文獻的假設)並考量前置時間，首先推導出各階層之長鞭效應；接下來，藉由分析各階層之存貨，本研究驗證各階層在資訊分享之效益。

本研究之結果顯示：對供應商和原料商來說，長鞭效應依然存在，存貨變異的程度隨著相關係數ρ之增加和需求標準差 (波動) σ 之升高而快速增加。各廠商間之前置時間有著交互作用影響著存貨。資訊分享對供應商和原料商帶來更明顯的幫助。在市場不穩定及下游廠商過於信賴市場需求的情況下，資訊分享甚至能幫助原料商達到減少 35%存貨。

關鍵字詞：四階層供應鏈、資訊分享、長鞭效應

Information Sharing on the Bullwhip Effect in a Four-Level Supply Chain

Student：Wan-Qiao Lai　　　　　　　Advisors：Prof. Chin-Yin Huang
Prof. Wu-Lin Chen

Department of Industrial Engineering and Enterprise Information
Tunghai University

ABSTRACT

In order to fit globalization, many enterprises should be changed from competition to collaboration. Because market demand changes quickly and dynamically, information sharing can help enterprises to reduce inventory costs and enhance their competitiveness and value. In the literature, many scholars mainly considered a two-level supply chain to simplify the analysis, but there are usually three levels or more in a real-world supply chain. By mathematical derivation, this study proposes the analytic model to analyze the four-level supply chain and verifies the value of information sharing for each tier enterprise of the supply chain.

This study assumes that the market demand follows AR (1) model which was also used in many studies of the literature and consider the lead time of each tier. At first, the bullwhip effect of each tier is verified in a four-level supply chain; next, by analyzing total inventory of each tier, the benefit of information sharing for each tier is also quantified.

The results of this study show that the bullwhip effect still exists in the supplier and the raw material supplier. Inventory variation raises rapidly as self-correlation coefficients ρ increases and standard deviation (volatility) σ increases. The effects of lead time on inventory among enterprise interact with one another. Information sharing brings much more significant help for the supplier and for the raw material supplier. Under the condition of the volatile market and the condition that the downstream manufacturer heavily relys on market demand, the raw material supplier can reduce 35% of inventory by information sharing.

Keywords：Four-Level Supply Chain, Information Sharing, and Bullwhip Effect

誌謝

短短的研究所兩年讓我進步了許多，無論是學業和思考都有了巨大的成長。藉由這次的機會，我想好好的感謝黃欽印老師和陳武林老師每次的會議對我耐心的指導，使我的理解能力和專業能力都有很大的進步，讓我從一無所知的領域裡，能盡情地摸索和理解，我知道這一切像是個需要花費很多時間的大工程，感謝老師們給予時間讓能我自由的前行，使我明白任何事只要我有心都能夠達成，只要我能堅定自己的心，我就能進步和成長，即使我對未來一無所知，我也相信自己，能夠順利克服所有挑戰，而這一切都要感謝黃欽印老師和陳武林老師。

此外，研究能如期完成，我要感謝柏棟、振鈺、銘哲和乃菱等學長姐們，對於我的照顧，使我能在研討會時能有好的表現，並且給予我論文方向的建議、提供給我的資料。也特別感謝中偉和台彥，在我的研究遇到瓶頸時願意和我一同研究討論，每每都能給予我很大的啟發，使我能順利地完成這篇論文。

在研究所兩年的時間中，感謝 AUTO 研究室的夥伴們佳慧、忠軒、政憲、家稜、思逸、群亞、俊雄、騏瑋，不管是在課堂中還是平日的陪伴或一同的扶持，就像一個大家庭一樣，給予我溫暖。也感謝學弟妹昊騰、紹璿、以澤、雯晴等學弟妹們陪我一同歡笑一同度過美好的研究生涯。

最後，我想感謝我的父母和妹妹，給予我無限的支持，使我無憂無慮的完成學業。

僅將這份成果獻給所有幫助過我的貴人們，感謝你們對於我的幫助，謝謝你們。

目錄

表目錄

圖目錄

第一章 緒論

1.1 研究背景與動機

在過去，供應鏈中的上游廠商只能經由下游所給的歷史訂單決定他們的存貨，但下游廠商往往會誤解市場的需求，導致上游供應商無法正確對市場需求進行了解，導致所謂的「長鞭效應」 (Forrester, 1961)。而長鞭效應主要的影響為企業的存貨，存貨過多使存貨成本升高，資金週轉不易。或是缺貨影響廠商商譽。

現今科技進步下，資訊傳遞比以往快速很多，但廠商間的對於自身的資料還是保密的居多，使供應鏈成員都以自己的預測模型進行預測，而常常出現預測失準，其實這些情況都可以使用資訊分享來避免。Yu (2001) 認為資訊分享實現於供應鏈之中，可以幫助整體供應鏈提升效能和減少長鞭效應。

以往學者對資訊分享有許多的研究，以 Lee et al. (1997) 為起源，為了消除長鞭效應，Lee et al. (2000) 建立二階供應鏈，以 AR(1) 數學模型推導無資訊分享及需求資訊分享之模式。Babai et al. (2013) 也建立二階供應鏈，以 ARIMA (0,1,1) 探討資訊分享模式。

雖然資訊分享可以幫助整體供應鏈廠商降低存貨變異，但目前的研究少有考慮上游供應商的情況，只著重在製造商和零售商的互動，無法考量整體供應鏈。因此探討在資訊分享中四階供應鏈的情況，為本研究所要探討的議題。

1.2 研究方法與目的

以往研究，少有探討在資訊分享下多階供應鏈的情形，多以二階層供應鏈為主，本研究以討論長鞭效應中被廣泛引用的 Lee et al. (2000)為起點，重現二階層供應鏈，以數學模型推導的方式，延伸至四階層供應鏈，觀察各階長鞭效應的變異情形，並探討資訊分享是否對高階供應鏈有著實質的價值。

為此，本研究主要目的為：

1. 整理長鞭效應和資訊分享在供應鏈中的相關研究，了解過去研究的不足之處。
2. 以數學模型 AR(1)的模式，推導長鞭效應在供應鏈中各階層的影響情形，確立長鞭效應對四階層供應鏈的影響。
3. 在資訊分享的模式下，四階層供應鏈中廠商在資訊分享前後存貨上限是否有減少。

1.3 研究架構

本研究將分成五大章進行討論，圖 1.1 為研究架構。第一章緒論，在說明此篇論文的研究背景、動機、研究方法及目的與本論文的研究架構。第二章文獻探討，以本研究所運用的時間序列法為開端，並介紹供應鏈的存貨和需求相關研究，接著，對過去長鞭效應的文獻做討論，了解並統整相關之議題，再探討供應鏈之資訊分享。第三章模式建構，說明本研究會使用到的數學模型，以 Lee et al. (2000) 為基礎向上延伸至四階層供應鏈，顯示出的結果為無資訊分享的供應鏈情況。並對於第三章數學模型推導出來之無資訊分享各階廠商的需求模式進行驗證，第四章針對長鞭效應的影響與資訊分享後各階的存貨變化，做進一步的探討。第五章為結論與未來的研究方向。

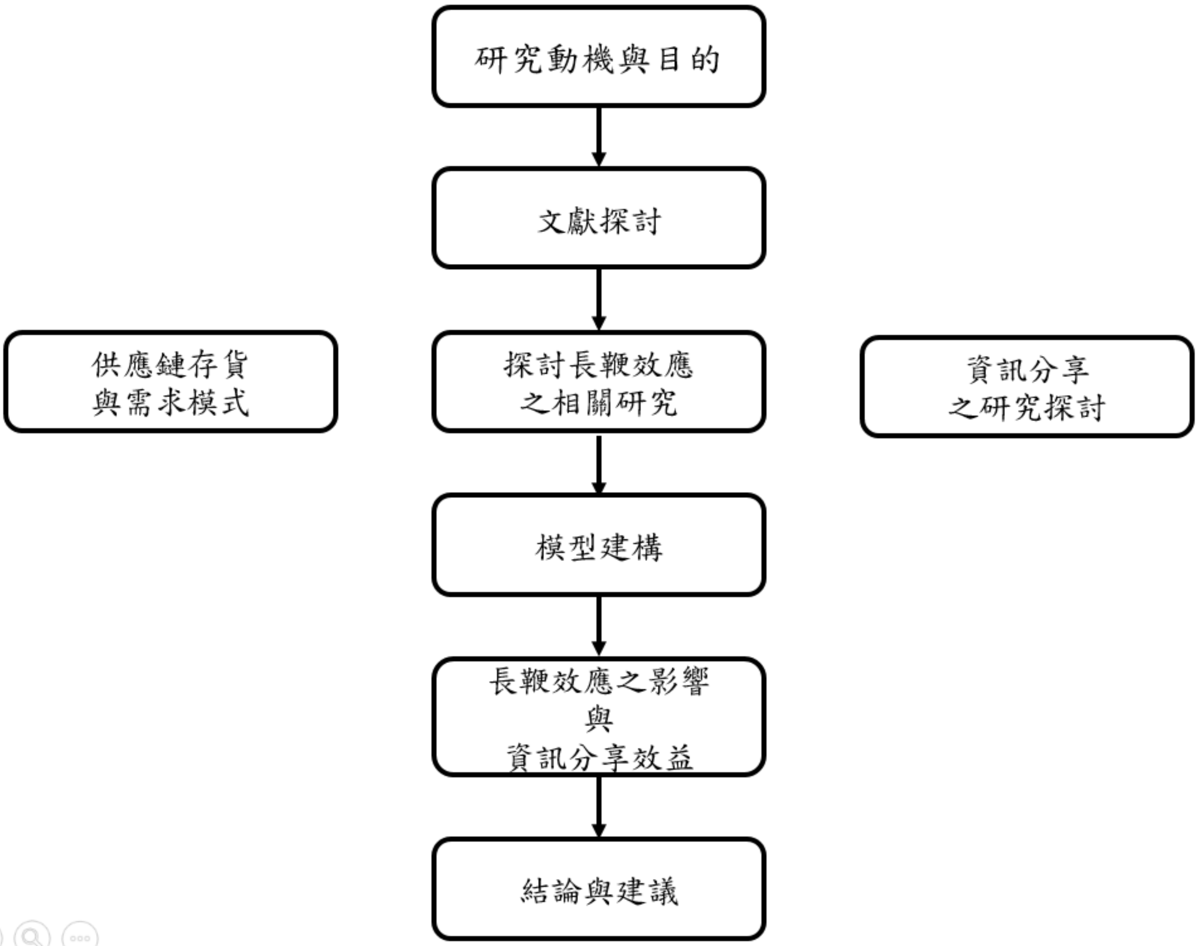

圖 1.1 本論文之研究架構

資料來源: 本研究

第二章 文獻探討

2.1 供應鏈存貨與需求模式

2.1.1 需求模式

每一家廠商都會有自身預測市場需求或下游廠商需求的方式，期望能達成與供需平衡，避免造成不必要的浪費。而時間序列預測方法為 Box 和 Jenkins 在 1970 年提出的著名的預測方法，ARIMA 模型稱為自我迴歸整合移動平均模型 (Autoregressive Integrated-Moving Average Model，簡稱 ARIMA)。其源頭於 1920 年英國學者 Undy Yule 的時間序列分析法。以下我們將針對 ARIMA 模型進行了解。

ARIMA 可分成自我回歸模型 AR(p)、滑動平均模型 MA(q) 與自我迴歸整合移動平均模型 ARIMA(p , d , q)，其中 p 為自回歸的項次，d 為時間序列成為平穩時所做的差分次數，q 為滑動平均的項次。

使用 ARIMA 建模的基本條件是將預測的數列視須為穩態 (stationarity)，這表示著每一個體數值必須在序列的平均值或是其上下波動，不能有明顯的趨勢存在，如果出現明顯上升或下降的趨勢，則需對原始序列進行差分平穩化處理。幾種基本的 ARIMA 模型介紹如下

1. 隨機干擾模型 ARIMA(0,0,0)

   當供應鏈廠商使用此模型時，表示其預測方式是以廠商平均需求與服從常態分配隨機樣本來予以計算，此模型的特點為對於近期需求的變化並沒有任何紀錄，因此也不會產生任何趨勢。

   $D_t = \mu + \varepsilon_t$，$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

   D_t為第 t 期之需求，μ 為時間序列之平均值，ε_t為隨機干擾誤差項

2. 自我迴歸模型 ARIMA(1,0,0)

   由平均需求、前一期觀察值加上服從常態分配隨機樣本組合而成，其特性以供應鏈來說，廠商會參考過去的資料，並運用此資料決定未來的需求，此圖形的趨勢會呈現上下波動的情形，但大致來說會圍繞著平均需求呈現一個循環的現象。因此又稱為 AR(1) 或馬可夫過程。

$$D_t = d + \rho D_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,\sigma)$$

d 為平均需求，ρ為自我相關係數

3. 整合或隨機漫步模型 ARIMA(0,1,0)

以供應鏈的角度來說，每一期預測的方式是由前一期的需求量為起點，隨機移動決定下期預測量，其特色為不穩定的序列，不會回到平均值的趨勢。

$$D_t = d - D_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,\sigma)$$

4. 滑動平均模型 ARIMA(0,0,1)

其下一期的預測需求值是由平均需求、當期隨機的干擾值與前一期的干擾值組成，其特性為會記得前一期的干擾值，藉由過去的干擾值進行修正，又稱 MA(1)。

$$D_t = d + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t \sim N(0,\sigma)$$

θ為移動平均係數

5. 自我迴歸移動平均模型 ARIMA(1,0,1)

其又稱 ARMA(1,1) 同時具有 AR 和 MA 的特色，除了記錄了前一期的需求做為參考，並參照過去的前一期的隨機干擾誤差項，而對下一期需求進行預測。

$$D_t = d + \rho D_{t-1} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t \sim N(0,\sigma)$$

2.1.2 存貨政策

在供應鏈中的每一位成員都有著存貨的問題，而存貨是用於支援生產等相關活動和為了滿足市場亦或下游廠商需求所會使用的物料。

Fogarty (1991)認為其存貨的目的是在於彌補在時間和數量上「需求」與「供給」不確定性的措施。廠商擁有存貨的主要優點有：1. 預測的需求得以滿足。2. 降低訂購成本。 3. 減少缺貨成本。4. 作業獨立性得以維持。5. 生產系統得以更平穩具有彈性。6. 原物料價格上漲時，可以得到保護。

而相對的主要缺點有：1. 持有成本上升。2. 難以彈性的對顧客需求做出及時的回應。3. 導致產能的浪費。(Davis et al., 1998)

存貨的型態分為相依需求與獨立需求，相依需求通常是由獨立需求所產生的，可以透過 MRP 進行規劃，像是半成品。而本研究討論的是獨立需求之需求量是由外部決定，像是顧客訂購的產品和維修所需的備料等 (Hillier & Lieberman, 1995)。

Silver et al. (1998) 將存貨政策分成永續盤點制 (Continuous Review System) 與定期盤點制 (periodic review)，以下將針對常用的存貨政策做基本的介紹。

林芸甄 (2012) 整理存貨政策如下

1. 永續盤點制 (Continuous Review System)：需時常監控存貨的情況，當存貨到達再訂購點時，並將存貨數量補充至固定的數量或是存貨上限。

   (1) 訂購點－訂購量系統 (Order-Point, Order-Quantity System)：(s,Q)

   Q 為經濟訂購量，s 為訂購點。當廠商其存貨量消耗到達或低於訂購點時，則會向上游發出訂單而每次的訂購量都為 Q。此存貨政策簡單並且便於上游廠商預測，但當市場需求量變化大時，訂購量 Q 將不能有效得控制存貨。

   (2) 訂購點－滿足最大存貨量系統 (Order-Point, Order-Up-To-Level System)：(s,S)

   S 為最大存貨上限。當存貨小於等於訂購點 s 時，則下訂單給上游廠商，其訂購量為不定值須達到最大存貨上限 S，由於每一期的訂單數都不同，因此容易導致上游廠商對下游的需求量有預測上的誤差。

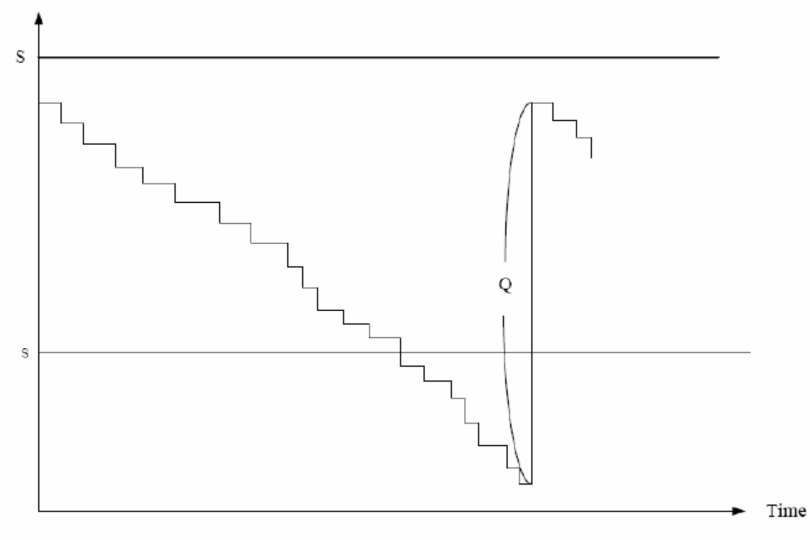

圖 2.1 永續盤點制- (s,Q)系統

資料來源：林芸甄 (2012)

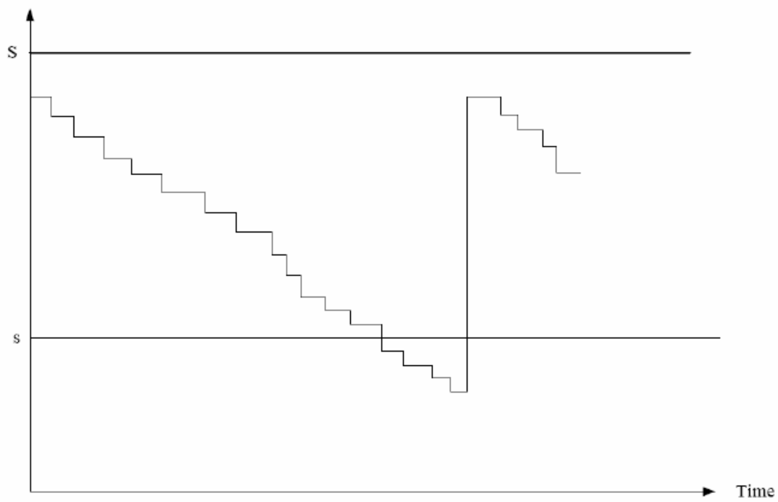

圖 2.2 永續盤點制- (s,S)系統

資料來源：林芸甄 (2012)

2. 定期盤點制 (periodic review)：每間隔一段時間會進行存貨盤點，並將存貨補充至其存貨上限或是固定數量，採用安全存貨 (Safety Stock)。
   (1) 定期盤點－滿足最大存貨量系統 (Periodic-Review, Order-Up-To-Level System)：(R,S)

R 為固定的週期。其存貨政策與 (s,S) 系統相似，其主要差異為廠商在週期時間未到達前，無論存貨多寡，皆不會有任何訂購動作，只在每隔一段週期時間 R 時，將存貨補充至最大存貨水準 S。

(2) 定期盤點－訂購點－滿足最大存貨量系統 (Periodic-Review,Order-Point, Order-Up-To-Level System)：(R,s,S)

其涵蓋了 (s,S) 和 (R,S) 系統，每間隔週期時間 R，廠商對自身存貨進行盤點，當存貨到達再訂購點 s 時，即將存貨補充至最大上限 S。

(3) 定期盤點－訂購量－滿足最大存貨量系統 (Periodic-Review,Order-Quantity, Order-Up-To-Level system)：(R,s,Q)

每隔一段週期時間 R 則盤點存貨，存貨若未到達再訂購點 s，則不向上游廠商下訂單，若到達則向上游廠商，訂購固定數量 Q，為 (s,Q)系統之修正形式。

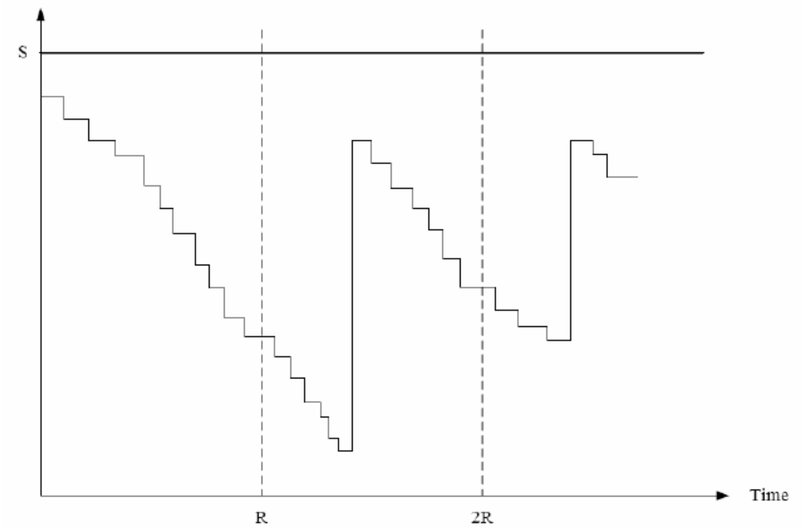

圖 2.3 定期盤點制- (R,S)系統

資料來源：林芸甄 (2012)

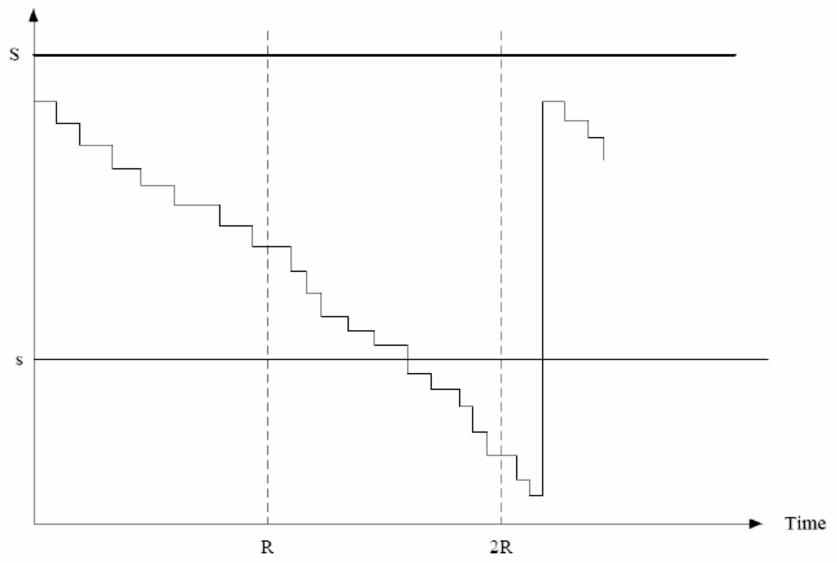

圖 2.4 定期盤點制- (R,s,S)系統

資料來源 ： 林芸甄 (2012)

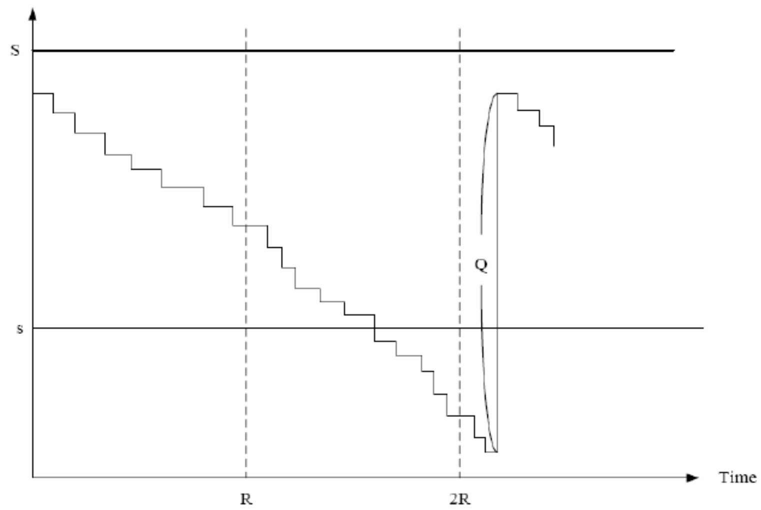

圖 2.5 定期盤點制- (R,s,Q)系統

資料來源 ： 林芸甄 (2012)

2.2 長鞭效應之相關研究

在過去的研究中，不乏討論長鞭效應的問題，本小節將針對長鞭效應會有何負面影響，並且了解發生長鞭效應的原因為何。

Bayraktar et al. (2008) 提出評估供應鏈性能可以觀察廠商的 1. 總成本 2. 服務水準 3. 平均持有庫存 4. 長鞭效應。本研究專注於長鞭效應對供應鏈的影響，其為供應鏈管理的關鍵之一。長鞭效應是一個需求變異被放大的現象，零售商針對過去的歷史銷售量與現象考量進行訂購量的預測，為了確保訂購量能滿足顧客的需求，因此會將訂購量放大向製造商訂貨，而製造商依此需求量為基準，一層一層的傳遞給上游。而長鞭效應經常會在發展中的市場出現，市場需求突然激增的情況。影響的產業類別有: 電信製造、電腦零件製造、食品、零售、汽車和服裝等等 (Hugos, 2011) 。

長鞭效應會以多種方式影響著供應鏈，它導致供應鏈的問題有: 1. 整體供應鏈存貨過多 2. 生產力不足或過多 3. 產品的不可得性(product unavailability) 4. 提高整體供應鏈成本 5. 收入損失 6. 不正確的生產規劃 (Sun & Ren, 2005)。上述可得知，長鞭效應對企業有許多的不良影響。而其引發的原因如下圖 2.6 所示。

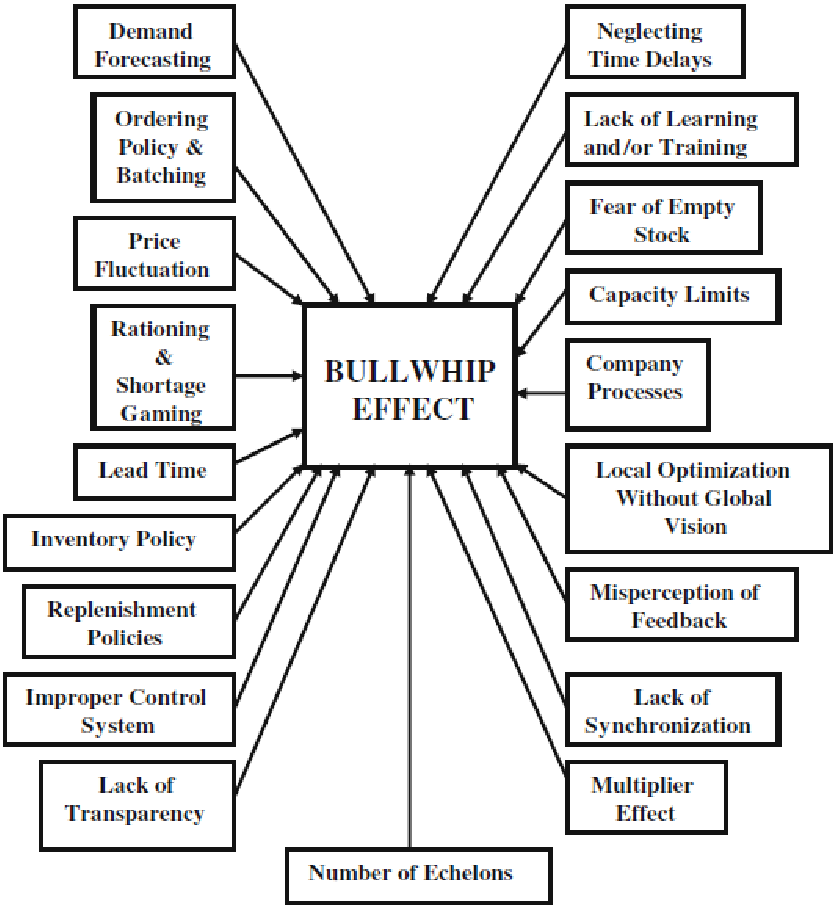

圖 2.6 在供應鏈中引發長鞭效應的原因

資料來源: Bhattacharya & Bandyopadhyay (2011)

圖 2.6 為供應鏈中引發長鞭效應的原因，大致可分為運作之因素和行為之因素。

1. 運作因素

(1) 需求預測 (Demand forecasting)

(2) 批量訂貨 (Order batching)

(3) 價格波動 (Price fluctuation)

(4) 配給和短缺博弈(Rationing and shortage gaming)

(5) 前置時間 (Lead time)

(6) 存貨政策 (Inventory policy)

(7) 補貨政策 (Replenishment policy)

(8) 不適當的控制系統 (Improper control system)

(9) 缺乏透明性 (Lack of transparency)

(10) 供應鏈的階層數 (Number of echelons)

(11) 乘數效應 (Multiplier effect)

(12) 缺乏同步 (Lack of synchronization)

(13) 回饋誤解 (Misperception of feedback)

(14) 缺乏全局視角 (Local optimization without global vision)

(15) 公司的流程 (Company processes)

(16) 能力限制 (Capacity limits)

2. 行為因素

(1) 忽略時間使訂購決策延遲

(Neglecting time delays in making ordering decisions)

(2) 缺乏訓練 (Lack of learning and/or training)

(3) 擔心斷貨(Fear of empty stock)

整理相關文獻，引發長鞭效應的因素如下表 2.1 所示

表 2.1 長鞭效應之因素

資料來源: 本研究

	作者	引發長鞭效應之因素
運作之因素	Lee et al. (2004)	需求預測
		批量訂貨
		價格波動
		配給和短缺博弈
	Heydari et al. (2009) Wang et al. (2008) Huang & Liu (2008)	前置時間
	Chandra & Grabis (2005) Aharon et al. (2009)	存貨政策

	作者	引發長鞭效應之因素
	Jakšič & Rusjan (2008) Su & Wong (2008) LiBo & Qin (2007)	補貨政策
	Geary et al. (2006)	不適當的控制系統
	Lee et al. (1997) Lee et al. (2000) (Sohn & Lim, 2008) (Zhao & Wang, 2008) (Agrawal et al., 2009)	缺乏透明性
	Alony & Munoz Aneiros (2007)	供應鏈的階層數
	Geary et al. (2006)	乘數效應
	Bayraktar et al. (2008)	缺乏同步
	Moyaux et al. (2007)	回饋誤解
		缺乏全局視角
		公司的流程
	Alony & Munoz Aneiros (2007)	能力限制
行為之因素	Croson & Donohue (2003) Steckel et al. (2004)	忽略時間使訂購決策延遲
		擔心斷貨
	Wu & Katok (2006)	缺乏訓練

2.3 資訊分享之研究探討

由 2.2 小節可知長鞭效應的影響性和其發生的原因,在正確認知長鞭效應後有許多學者提出減輕長鞭效應的方法。而 Wu & Katok (2006) 提到目前供應鏈的高階主管和學者都將注意力集中在第一類運作因素上，大部分的研究往如何使用資訊分享的問題方向前進。

Lee et al. (2000) 利用 AR (1) 數學模式推導的方法建立無資訊分享及需求資訊分享之模式，其考量一個製造商以及一個零售商的兩階層供應鏈之架構，其分享之資訊為需求資訊。研究結果發現資訊分享下之製造商的存貨與成本都會減少。

Yu et al. (2002) 使用 AR (1) 數學模型將資訊分享，分成分散式控制、協同式控制和集中式控制，三種不同程度的資訊分享，其結果發現資訊分享有助於降低製造商預期的存貨。

Zhang (2004) 雖然沒有特別提到資訊分享，只說明 ARMA 模型可在供應鏈中傳遞,但在製造商預測零售商的訂購量時,還是需要分享前置時間、存貨政策、市場模型和歷史訂單才能知道進行預測。

Gaur et al. (2005) 製造商可以跳過零售商推測 ARMA 數學模型之市場需求，但需要零售商分享市場模型和存貨政策才能進行推測，而推測有許多限制，使用前必須先進行相關判斷。

Babai et al. (2013) 建立二階供應鏈，以 ARIMA (0,1,1) 探討資訊分享模式，並以歐洲超市的銷售數據為實驗，其實驗結果證明資訊分享有助於存貨的預測。

Liu et al. (2013) 提出三階供應鏈結構運用 AR (1) 數學模型針對一二階廠商進行資訊分享，得出在自我相關係數 ρ 為-1 到 1 之間，對二階資訊分享廠商是有利的。

Ganesh et al. (2014) 提出多階供應鏈的 AR (1) 數學模型，未考慮前置時間，本研究認為前置時間必須存在，才能算是完整的供應鏈結構，在 3.4 小節時，會採用此研究以前置時間為零的情況下，對本研究的數學模型進行驗證。

表 2.2 資訊分享文獻整理

資料來源: 本研究

作者	供應鏈成員	市場需求模型	方法	Lead time
Lee et al. (2000)	一個零售商 一個製造商	AR(1)	數學模式推導	v
Raghunathan (2001)	一個零售商 一個製造商	AR(1)	數學模式推導	v
Yu et al. (2002)	一個零售商 一個製造商	AR(1)	數學模式推導	v
Zhao et al. (2002)	一個零售商 四個製造商	含趨勢季節性市場需求公式	模擬	
Zhang (2004)	一個零售商 一個製造商	ARMA(1,1)	數學模型推導	v
Gaur et al. (2005)	一個零售商 一個製造商	ARMA(1,1)	數學模型推導	v
Ryu et al. (2009)	一個零售商 一個製造商 一個供應商	含趨勢季節性市場需求模式	模擬	v
林芸甄 (2012)	一個零售商 一個製造商	AR(1)	數學模式推導與模擬	v
Babai et al. (2013)	一個零售商 一個製造商	ARIMA (0,1,1)	模擬	v

作者	供應鏈成員	市場需求模型	方法	Lead time
Liu et al. (2013)	一個零售商 一個分銷商 一個製造商	AR(1)	數學模式推導	v
Ganeshet al. (2014)	多階供應鏈	AR(1)	數學模式推導	
吳銘哲(2014)	一個零售商 一個製造商	AR(1)	模擬	v
本研究	一個零售商 一個製造商 一個供應商 一個原料商	AR(1)	數學模式推導	v

長鞭效應是缺乏資訊透明度與協調所產生的結果，供應鏈中的合作夥伴缺乏對彼此了解，而產生了對現今市場需求產生誤會(Bhattacharya & Bandyopadhyay, 2011)，因此本研究認為解決長鞭效應的關鍵為資訊分享，透過資訊分享可以有效的降低過多的存貨。過去學者少有二階以上供應鏈的考量，而在產業中供應鏈通常都是以多階為主。部分文獻在探討供應鏈時並沒有加入前置時間沒考量因素。

因此本研究將以 AR(1)數學推導的方式，具體顯現出長鞭效應對四階供應鏈的影響，並加入前置時間為考量推導出四階供應鏈在資訊分享後存貨的減少量，證明資訊分享有助於減輕長鞭效應。

第三章 模式建構

本章的模式建構，主要以 Lee et al. (2000) 為開端進行延伸，以數學推導的方式，將無資訊分享下四階層供應鏈之需求與存貨之數學模型，將其推導出來，以利第四章探討其長鞭效應和資訊分享。

3.1 研究基本假設

1. 本研究僅考量一個四階層的供應鏈，由一零售商、一製造商、一供應商、一原料商，所組合而成，如圖 3.1 所示。
2. 考慮單一產品項，零售商收到市場需求後，每一期會向製造商訂購，而製造商因應零售商之需求，會與供應商進行訂購，而原料商收到下游供應商的需求，也會有自身的補貨動作。
3. 零售商、製造商、供應商、原料商皆採用定期盤存制。
4. 四階層供應鏈中，各廠商皆允許缺貨後補，對於無法供應的市場需求或者是訂單，皆可以借調或是其他方式獲得，以滿足下游的廠商的需求。下游廠商已下訂單卻尚未收到，視為上游廠商之在途存貨，像是供應商對原料商已對下單卻未收到的在途存貨，視為原料商存貨。

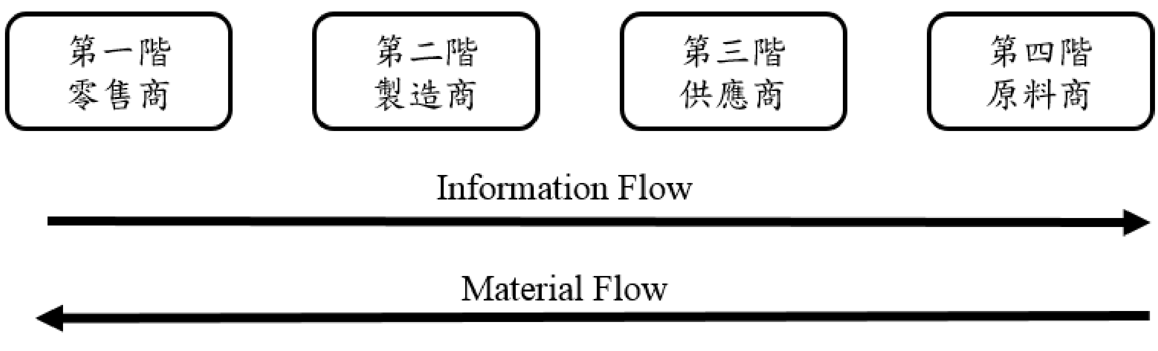

圖 3.1 四階層供應鏈

資料來源: 本研究

3.2 符號假設說明

基本符號說明:

d：平均需求

ρ：自我相關係數

ε_t：第 t 期誤差項

β：折現因子

H：單位持有成本，

Π：單位缺貨成本

D_t：下游廠商第 t 期的需求量

Y_t：廠商第 t 期的訂購量

各階廠商符號說明:

1. 零售商之符號

(1) $D^{(1)}{}_t$:第 t 期之市場需求

(2) l ：零售商補貨前置時間

(3) $m^{(1)}{}_t$：零售商前置時間內之總需求期望值

(4) $v^{(1)}{}_t$:零售商前置時間內之總需求變異數

(5) $T^{(1)}{}_t$：零售商在第 t 期之目標存貨水準

(6) $Y^{(1)}{}_t$：零售商在第 t 期的訂購量

2. 製造商之符號

(1) $D^{(2)}{}_t$ ：第 t 期之零售商需求

(2) L ：製造商補貨前置時間

(3) $m^{(2)}{}_t$：製造商前置時間內之總需求期望值

(4) $v^{(2)}{}_t$：製造商前置時間內之總需求變異數

(5) $T^{(2)}{}_t$：製造商在第 t 期之目標存貨水準

(6) $Y^{(2)}{}_t$：製造商在第 t 期的訂購量

3. 供應商之符號

(1)$D^{(3)}{}_t$ ： 第 t 期之製造商需求

(2) L^s ：供應商補貨前置時間

(3) $m^{(3)}{}_t$：供應商前置時間內之總需求期望值

(4) $v^{(3)}{}_t$：供應商前置時間內之總需求變異數

(5) $T^{(3)}{}_t$：供應商在第 t 期之目標存貨水準

(6) $Y^{(3)}{}_t$：供應商在第 t 期的訂購量

4. 原料商之符號

(1) $D^{(4)}{}_t$ ： 第 t 期之供應商需求

(2) L^z ：原料商補貨前置時間

(3) $m^{(4)}{}_t$：原料商估計前置時間內的總需求期望值

(4) $v^{(4)}{}_t$：供應商前置時間內的總需求變異數

(5) $T^{(4)}{}_t$：供應商在第 t 期所決定的目標存貨水準

(6) $Y^{(4)}{}_t$：供應商在第 t 期的訂購量

3.3 模式建構

本節將由第一階零售商為起始點，建構各階層廠商所需的需求模式、存貨與訂購決策。

3.3.1 市場需求模式

過去文獻透過時間序列法，來表達真實的市場需求。而 Kahn (1987) 提出 AR(1)的需求模式，即是利用前一期需求量，透過時間序列的方式，來預測當期可能的需求量。

$$D^{(1)}{}_t = d + \rho D^{(1)}{}_{t-1} + \varepsilon_t \tag{3-1}$$

式 (3-1) 中 d 為顧客需求的期望值，為一大於 0 之常數。$-1 \le \rho \le 1$ 為自我相關係數，此限制是為了避免動態方程式形成趨勢，稱為穩定性界限(bound of stationary)。當$\rho > 0$時，表示當期需求量與前一期需求量存在著正相關。當$\rho = 0$時，當期需求量與前一期獨立，不受前一期影響。而當$\rho < 0$時，表示當期需求量與前一期需求量存在著負相關。ε_t表示第 t 期誤差項，獨立並服從常態隨機變數$N(0, \sigma^2)$。σ 為需求波動程度。並假設 σ<<d，產生負需求的機率趨近於零。

3.3.2 零售商之存貨與訂購政策

本研究為假設零售商、製造商、供應商與原料商皆使用目標存貨政策(order-up-to level inventory policy)，各階層廠商皆在收到當期需求量後，再決定當期之目標存貨水準。

$$\mathrm{T}_t = m_t + k\sqrt{v_t} \tag{3-2}$$

式 (3-2) 根據 Heyman & Sobel (1984) 以總成本最小模式為評估標準下，呈現如下所示：

$$\min \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \left[cY_t + \beta^l g(T_t, \sum_{i=t}^{t+l} D_i) \right]$$

其中β為折現因子，g 為存貨總成本，H 為單位持有成本，Π為單位缺貨成本，其中$g\left(T_{t-L}, \sum_{i=t-L}^{t} D_i\right)$如下所示：

$$\mathrm{g}\left(T_{t-L}, \sum_{i=t-L}^{t} D_i\right) = \mathrm{H} \cdot \left(T_{t-L} - \sum_{i=t-L}^{t} D_i\right)^+ + \Pi \cdot \left(\sum_{i=t-L}^{t} D_i - T_{t-L}\right)^-$$

其中推導T_t如下所示：

$$T_t = {Q_{L+1}}^{-1}\left[\frac{\Pi - c(1-\beta)/\beta^l}{H+\Pi}\right]$$

假設$\beta = 1$，將式 (3-3) 經過常態標準化後為式 (3-4) (Φ 為標準常態分配函數)，如下所示：

$$\frac{T_t - m}{\sqrt{v}} = \Phi^{-1}\left[\frac{\Pi}{H+\Pi}\right]$$

可得 $$T_t = m + k\sqrt{v}$$

$$\mathrm{k} = \Phi^{-1}\left[\frac{\Pi}{H+\Pi}\right]$$

Kahn (1987) 所提出的 AR(1) 需求模式，假設$\rho>0$，各期的需求量可以由前一期需求量，以遞迴的方式推估而得，因此，由式 (3-1)，可推導出第 t 期的需求量，如下所示：

$$\begin{aligned}
&D^{(1)}{}_{t+i} = d + \rho D^{(1)}{}_{t+i-1} + \varepsilon_{t+i} \\
&= d + \rho(d + \rho D^{(1)}{}_{t+i-2} + \varepsilon_{t+i-1}) + \varepsilon_{t+i} \\
&= d(1+\rho+\dots+\rho^{i-1}) + \rho^i D^{(1)}{}_t + (\varepsilon_{t+i} + \rho\varepsilon_{t+i-1} + \dots + \rho^{i-1}\varepsilon_{t+1}) \\
&= d\,\frac{1-\rho^i}{1-\rho} + \rho^i D^{(1)}{}_t + \sum_{j=1}^{i} \rho^{j-1}\varepsilon_{t+i-j+1}
\end{aligned}$$

for $i \geq 1$

由於零售商在前置時間l內，仍然會接收到市場的需求，因此需計算零售商在前置時間內的總需求量，如下所示：

$$\sum_{i=1}^{l+1} D^{(1)}{}_{t+i}$$

$$= (d(\frac{1-\rho^1}{1-\rho}) + \rho^1 D^{(1)}{}_t + \sum_{j=1}^{1} \rho^{1-1}\varepsilon_{t+i+1-j}) + (d(\frac{1-\rho^2}{1-\rho}) + \rho^2 D^{(1)}{}_t + \sum_{j=1}^{2} \rho^{2-1}\varepsilon_{t+i+1-j}) + \ldots$$

$$+ (d(\frac{1-\rho^{l+1}}{1-\rho}) + \rho^{l+1} D^{(1)}{}_t + \sum_{j=1}^{l+1} \rho^{j-1}\varepsilon_{t+i+1-j})$$

$$= d\sum_{j=1}^{l+1}\frac{1-\rho^i}{1-\rho} + \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho} D^{(1)}{}_t + \varepsilon_{t+l+1} + (1+\rho)\varepsilon_{t+l} + \ldots + (1+\rho+\rho^l)\varepsilon_{t+1}$$

$$= d\sum_{j=1}^{l+1}\frac{1-\rho^i}{1-\rho} + \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho} D^{(1)}{}_t + \frac{1}{1-\rho}\sum_{j=1}^{l+1}(1-\rho^j)\varepsilon_{t+l-j+2}$$

$$= \frac{d}{1-\rho}\left\{(l+1) - \sum_{j=1}^{l+1}\rho^j\right\} + \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho} D^{(1)}{}_t + \frac{1}{1-\rho}\sum_{j=1}^{l+1}(1-\rho^j)\varepsilon_{t+l-j+2}$$

在得知零售商在前置時間內的總需求量後，即可在存貨成本最低的情況下，計算零售商前置時間內之總需求期望值$m^{(1)}{}_t$與變異數$v^{(1)}{}_t$，將式 (3-3) 代入到式 (3-2) 中。

$$m^{(1)}{}_t = E(\sum_{i=1}^{l+1} D^{(1)}{}_{t+i}) = \frac{d}{1-\rho}\left\{(l+1) - \sum_{j=1}^{l+1}\rho^j\right\} + \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho} D^{(1)}{}_t$$

$$v^{(1)}{}_t = E(\sum_{i=1}^{l+1} D^{(1)}{}_{t+i}) = \frac{1}{1-\rho}\sum_{j=1}^{l+1}(1-\rho^j)\varepsilon_{t+l-j+2} \tag{3-3}$$

即可得知當期存貨水準$T^{(1)}{}_t$，如下所示：

$$\mathrm{T}^{(1)}{}_t = \frac{d}{1-\rho}\left\{(l+1) - \sum_{j=1}^{l+1}\rho^j\right\} + \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho} D^{(1)}{}_t + k\sqrt{\frac{\sigma^2}{(1-\rho)^2}\sum_{j=1}^{l+1}(1-\rho^j)^2} \tag{3-4}$$

對零售商來說，每一期都會根據收到市場的需求，決定當期向第二階製造商之訂購量$Y^{(1)}{}_t$。

$$Y^{(1)}{}_t = \mathrm{T}^{(1)}{}_t - \mathrm{T}^{(1)}{}_{t-1} + D^{(1)}{}_t \tag{3-5}$$

將式 (3-4) 代入式 (3-5) 中可改寫為式 (3-6)，如下所示：

$$
\begin{aligned}
Y^{(1)}{}_t &= \mathrm{T}^{(1)}{}_t - \mathrm{T}^{(1)}{}_{t-1} + D^{(1)}{}_t \\
&= m^{(1)}{}_t + k\sqrt{v^{(1)}{}_t} - (m^{(1)}{}_{t-1} + k\sqrt{v^{(1)}{}_{t-1}}) + D^{(1)}{}_t \\
&= (\frac{d}{1-\rho}\left\{(l+1) - \sum_{j=1}^{l+1}\rho^j\right\} + \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\cdot D^{(1)}{}_t) - (\frac{d}{1-\rho}\left\{(l+1) - \sum_{j=1}^{l+1}\rho^j\right\} + \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\cdot D^{(1)}{}_{t-1}) + D^{(1)}{}_t \\
&= \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\cdot(D^{(1)}{}_t - D^{(1)}{}_{t-1}) + D^{(1)}{}_t
\end{aligned}
$$

(3-6)

而零售商將在 t + l 期時，將收到第 t 期時向第二階製造商訂購的數量 $Y^{(1)}{}_t$。

3.3.3 製造商之存貨與訂購政策

從實際上的供應鏈來說，在零售商沒有資訊分享下，前一期市場需求的誤差項ε_{t-1}對製造商來說是未知的。而從數學模式的角度來看，零售商第 t 期時向製造商訂購量為$Y^{(1)}{}_t$，經由訂單的傳遞可改寫為製造商接收到零售商的需求量$D^2{}_t$。

$$
\begin{aligned}
D^{(2)}{}_t &= Y^{(1)}{}_t = \mathrm{T}^{(1)}{}_t - \mathrm{T}^{(1)}{}_{t-1} + D^{(1)}{}_t \\
&= \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\cdot(D^{(1)}{}_t - D^{(1)}{}_{t-1}) + D^{(1)}{}_t \\
&= \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\left[(d + \rho D^{(1)}{}_{t-1} + \varepsilon_t) - (d + \rho D^{(1)}{}_{t-2} + \varepsilon_{t-1})\right] + (d + \rho^{(1)} D_{t-1} + \varepsilon_t) \\
&= d + \rho\{D^{(1)}{}_{t-1} + \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}(D^{(1)}{}_{t-1} - D^{(1)}{}_{t-2})\} + \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_t - \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= d + \rho D^{(2)}{}_{t-1} + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_t - \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t\text{-}1}
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}7)
$$

由上式 (3-7) 可得知製造商的需求模式，與零售商相同假設ρ>0，各期的需求量可以由前一期需求量，以遞迴的方式推估而得，可推導出製造商第 t 期的需求量，如下所示：

$$
\begin{aligned}
&D^{(2)}{}_{t+i} \\
&= d + \rho D^{(2)}{}_{t+i-1} + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_{t+i} - \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t+i-1} \\
&= d + \rho(d + \rho D^{(2)}{}_{t+i-2} + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_{t+i-1} - \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t+i-2}) + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_{t+i} - \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t+i-1} \\
&= d(1+\rho) + \rho^2 D^{(2)}{}_{t+i-2} + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_{t+i} + (\rho\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho} - \frac{\rho(1\text{-}\rho^{l+1})}{1-\rho})\varepsilon_{t+i-1} - \rho\frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t+i-2} \\
&= d(1+\rho) + \rho^2 D^{(2)}{}_{t+i-2} + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_{t+i} + \left\{\rho(1+\rho+...+\rho^{l+1}) - \rho(1+\rho+...+\rho^{l})\right\}\varepsilon_{t+i-1} - \rho\frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t+i-2} \\
&= d(1+\rho+...+\rho^{i-1}) + \rho^i D^{(2)}{}_t + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_{t+i} + \left\{\rho\rho^{l+1}\right\}\varepsilon_{t+i-1} + \left\{\rho^2\rho^{l+1}\right\}\varepsilon_{t+i-2} + ... - \frac{\rho^i(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_t \\
&= d\frac{1-\rho^i}{1-\rho} + \rho^i D^{(2)}{}_t + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_{t+i} + \sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^{l+1+k}\varepsilon_{t+i-k} - \frac{\rho^i(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

for $i \geq 1$ (3-8)

製造商在前置時間L內，仍然會接收到零售商的需求，因此需計算製造商在前置時間內的總需求量，如下所示：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{L+1} D^{(2)}{}_{t+i} \\
&= \sum_{i=1}^{L+1} (d\frac{1-\rho^i}{1-\rho} + \rho^i D^{(2)}{}_t + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_{t+i} + \sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^{l+1+k}\varepsilon_{t+i-k} - \frac{\rho^i(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_t) \\
&= \frac{d}{1-\rho}\left\{(L+1) - \sum_{j=1}^{L+1}\rho^j\right\} + \sum_{i=1}^{L+1}\rho^i D^{(2)}{}_t + \sum_{i=1}^{L+1}\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_{t+i} + \sum_{i=1}^{L+1}\sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^{l+1+k}\varepsilon_{t+i-k} - \sum_{i=1}^{L+1}\frac{\rho^i(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_t \\
&= \frac{d}{1-\rho}\left\{(L+1) - \rho(1+\rho+...+\rho^L)\right\} + \rho(1+\rho+...+\rho^L)D^{(2)}{}_t + \frac{(1-\rho^{l+2})}{1-\rho}\varepsilon_{t+L+1} \\
&+ \sum_{i=1}^{L+1}\sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^{l+1+k}\varepsilon_{t+i-k} - \sum_{i=1}^{L+1}\rho^i * \frac{(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_t \\
&= \frac{d}{1-\rho}\left\{(L+1) - \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho})\right\} + \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho}D^{(2)}{}_t + \frac{(1-\rho^{l+2})}{1-\rho}\varepsilon_{t+L+1} \\
&+ \sum_{i=1}^{L+1}\sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^{l+1+k}\varepsilon_{t+i-k} - \left\{\frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho} * \frac{(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\right\}\varepsilon_t \\
&= \frac{d}{1-\rho}\left\{(L+1) - \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho})\right\} + \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho}D^{(2)}{}_t + \frac{(1-\rho^{l+2})}{1-\rho}\varepsilon_{t+L+1} \\
&+ \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L}(1-\rho^{L+l+3-i})\varepsilon_{t+i} - \left\{\frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\right\}\varepsilon_t
\end{aligned}
$$

(3-9)

在得知製造商在前置時間內的總需求量後，即可在存貨成本最低的情況下，計算製造商前置時間內之總需求期望值$m^{(2)}{}_t$與變異數$v^{(2)}{}_t$，將式 (3-10) 代入到式 (3-2) 中。

$$m^{(2)}{}_t = E(\sum_{i=1}^{L+1} D^{(2)}{}_{t+i}) = \frac{d}{1-\rho}\left\{(L+1) - \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho})\right\} + \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho} D^{(2)}{}_t$$

$$v^{(2)}{}_t = E(\sum_{i=1}^{L+1} D^{(2)}{}_{t+i}) = \frac{(1-\rho^{l+2})^2}{(1-\rho)^2} + \frac{1}{(1-\rho)^2}\sum_{i=1}^{L}\ (1-\rho^{L+l+3-i})^2 + \left\{\frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\right\}^2 \tag{3-10}$$

即可得知當期存貨水準$\mathrm{T}^{(2)}{}_t$，如下所示：

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^{(2)}{}_t &= \frac{d}{1-\rho}\left\{(L+1) - \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho})\right\} + \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho} D^{(2)}{}_t \\ &+ k\sigma\sqrt{\frac{(1-\rho^{l+2})^2}{(1-\rho)^2} + \frac{1}{(1-\rho)^2}\sum_{i=1}^{L}\ (1-\rho^{L+l+3-i})^2 + \left\{\frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\right\}^2}\end{aligned} \tag{3-11}$$

對製造商來說，每一期都會根據收到零售商的需求，決定當期向第三階供應商之訂購量$Y^{(2)}{}_t$，如下所示：

$$Y^{(2)}{}_t = \mathrm{T}^{(2)}{}_t - \mathrm{T}^{(2)}{}_{t-1} + D^{(2)}{}_t \tag{3-12}$$

將式 (3-11) 代入 (3-12) 中可改寫為式 (3-13)，如下所示：

$$\begin{aligned}Y^{(2)}{}_t &= \mathrm{T}^{(2)}{}_t - \mathrm{T}^{(2)}{}_{t-1} + D^{(2)}{}_t \\ &= m^{(2)}{}_t + k\sqrt{v^{(2)}{}_t} - (m^{(2)}{}_{t-1} + k\sqrt{v^{(2)}{}_{t-1}}) + D^{(2)}{}_t \\ &= \frac{d}{1-\rho}\left\{(L+1) - \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho})\right\} + \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho} D^{(2)}{}_t \\ &- (\frac{d}{1-\rho}\left\{(L+1) - \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho})\right\} + \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho} D^{(2)}{}_{t-1}) + D^{(2)}{}_t \\ &= \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho}(D^{(2)}{}_t - D^{(2)}{}_{t-1}) + D^{(2)}{}_t\end{aligned} \tag{3-13}$$

製造商將在 t + L 期時，收到第 t 期時向第三階供應商訂購的數量$Y^{(2)}{}_t$。

3.3.4 供應商之存貨與訂購政策

承襲零售商與製造商，在沒有資訊分享下，前二期市場需求的誤差項ε_{t-1}、ε_{t-2}對第三階供應商來說是未知的。而從數學模式的角度來看，製造商第 t 期時向供應商訂購量為$Y^{(2)}{}_{t}$，經由訂單的傳遞可改寫為供應商接收到製造商的需求量$D^{(3)}{}_{t}$。

$$\begin{aligned}
&D^{(3)}{}_t = Y^{(2)}{}_t = \mathrm{T}^{(2)}{}_t - \mathrm{T}^{(2)}{}_{t-1} + D^{(2)}{}_t \\
&= \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho}(D^{(2)}{}_t - D^{(2)}{}_{t-1}) + D^{(2)}{}_t \\
&= \frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho}[d + \rho D^{(2)}{}_{t-1} + \frac{(1-\rho^{l+2})}{1-\rho}\varepsilon_t - \frac{(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t-1} \\
&-(d + \rho D^{(2)}{}_{t-2} + \frac{(1-\rho^{l+2})}{1-\rho}\varepsilon_{t-1} - \frac{(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t-2})] + d + \rho D^{(2)}{}_{t-1} + \frac{(1-\rho^{l+2})}{1-\rho}\varepsilon_t - \frac{(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t-1} \\
&= d + \rho\{\frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho}(D^{(2)}{}_{t-1} - D^{(2)}{}_{t-2}) + D^{(2)}{}_{t-1}\} + \ldots \\
&= d + \rho D^{(3)}{}_{t-1} + \frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2}\ \varepsilon_t \\
&+ \frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2} - \rho - 1] - \rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t-1} + \frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t-2}
\end{aligned}$$

(3-14)

由上式 (3-14) 可得知供應商的需求模式，而需求模式中未知的誤差項隨著供應鏈的階層數越來越多，為了方便推導第 t 期之需求量，因此給予誤差項係數代號為：

$$a = \frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2}$$

$$b = \frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2} - \rho - 1] - \rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}$$

$$c = \frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}$$

得出

$$D^{(3)}{}_t = d + \rho D^{(3)}{}_{t-1} + \frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2} \ \varepsilon_t$$

$$+ \frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2} - \rho - 1] - \rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t-1} + \frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t-2}$$

$$= d + \rho D^{(3)}{}_{t-1} + a\varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2}$$

推導第 t 期之需求量，如下所示：

$$\mathrm{D}^{(3)}{}_{t+i}$$

$$= d + \rho D^{(3)}{}_{t+i-1} + a\ \ \varepsilon_{t+i} + b\varepsilon_{t+i-1} + c\varepsilon_{t+i-2}$$

$$= d + \rho[d + \rho D^{(3)}{}_{t+i-2} + a\varepsilon_{t+i-1} + b\varepsilon_{t+i-2} + c\varepsilon_{t+i-3}] + a\ \ \varepsilon_{t+i} + b\varepsilon_{t+i-1} + c\varepsilon_{t+i-2}$$

$$= d(1+\rho) + \rho^2 D^{(3)}{}_{t+i-2} + a\varepsilon_{t+i} + \{\rho a + b\}\varepsilon_{t+i-1} \ + \{\rho b + c\}\varepsilon_{t+i-2} + \rho c\varepsilon_{t+i-3}$$

$$= d(1+\rho+\rho^2) + \rho^3 D^{(3)}{}_{t+i-3} + a\ \ \varepsilon_{t+i} + \{\rho a + b\}\varepsilon_{t+i-1}$$
$$+ \{\rho^2 a + \rho b + c\}\varepsilon_{t+i-2} + \{\rho^2 b + \rho c\}\varepsilon_{t+i-3} + \rho^2 c\varepsilon_{t+i-4}$$

$$= d\frac{1-\rho^i}{1-\rho} + \rho^i D^{(3)}{}_t + a\varepsilon_{t+i} + \sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^k\{a\}\varepsilon_{t+i-k} + \sum_{k=1}^{k=i}\rho^{k-1}b\varepsilon_{t+i-k} + \sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^{k-1}\{c\}\varepsilon_{t+i-k-1} + \rho^{i-1}\{c\}\varepsilon_{t-1} \tag{3-15}$$

供應商的前置時間為L^s，在前置時間內製造商仍然會繼續下訂單，因此供應商需計算前置時間內的總需求量，以確保可滿足下游廠商之訂單，如下所示：

$$\sum_{i=1}^{L^s+1} \mathrm{D}^{(3)}{}_{t+i}$$

$$= \sum_{i=1}^{L^s+1} \left\{ d\frac{1-\rho^i}{1-\rho} + \rho^i D^{(3)}{}_t + \mathrm{a}\varepsilon_{t+i} + \sum_{k=1}^{k=i-1} \rho^k \mathrm{a}\ \ \varepsilon_{t+i-k} + \sum_{k=1}^{k=i} \rho^{k-1}\ \mathrm{b}\varepsilon_{t+i-k} + \sum_{k=1}^{k=i-1} \rho^{k-1} c\varepsilon_{t+i-k-1} + \rho^{i-1}\{\ \mathrm{c}\ \}\varepsilon_{t-1} \right\}$$

$$= \frac{d}{1-\rho}\left\{ (L^s+1) - \sum_{j=1}^{L^s+1} \rho^j \right\} + \sum_{i=1}^{L^s+1} \rho^i D^{(3)}{}_t + \sum_{i=1}^{L^s+1}\ \ \mathrm{a}\ \ \varepsilon_{t+i} + \sum_{i=1}^{L^s+1} \sum_{k=1}^{k=i-1} \rho^k \{\ \mathrm{a}\ \ \}\varepsilon_{t+i-k}$$

$$+ \sum_{i=1}^{L^s+1} \sum_{k=1}^{k=i} \rho^{k-1}\ \ \mathrm{b}\ \varepsilon_{t+i-k} + \sum_{i=1}^{L^s+1} \sum_{k=1}^{k=i-1} \rho^{k-1} \{\ \mathrm{c}\ \}\varepsilon_{t+i-k-1} + \sum_{i=1}^{L^s+1} \rho^{i-1}\{\ \mathrm{c}\ \}\varepsilon_{t-1}$$

$$= \frac{d}{1-\rho}\left\{ (L^s+1) - \frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}) \right\} + \frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho} D^{(3)}{}_t + a\varepsilon_{t+L^s+1}$$

$$+ \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^s}(1-\rho^{L^s+2\text{-}i})a\varepsilon_{t+i} + \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^s+1}(1-\rho^{L^s+2\text{-}i})b\varepsilon_{t+i\text{-}1} + \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^s}(1-\rho^{L^s+1\text{-}i})\{c\}\varepsilon_{t+i\text{-}1} + \frac{(1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}\{c\}\varepsilon_{t-1}$$

$$= \frac{d}{1-\rho}\left\{ (L^s+1) - \frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}) \right\} + \frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho} D^{(3)}{}_t$$

$$+ \frac{(1-\rho^{l+2})[\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t+L^s+1} + \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^s}(1-\rho^{L^s+2\text{-}i})\frac{(1-\rho^{l+2})[\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t+i}$$

$$+ \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^s+1}(1-\rho^{L^s+2\text{-}i})\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t+i\text{-}1}$$

$$+ \frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^s}(1-\rho^{L^s+1\text{-}i})\left\{ \frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2} \right\}\varepsilon_{t+i\text{-}1}$$

$$+ \frac{(1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}\left\{ \frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2} \right\}\varepsilon_{t-1} \qquad (3\text{-}16)$$

藉由得知供應商前置時間內的總需求量，即可計算供應商前置時間內之總需求期望值$m^{(3)}{}_t$與變異數$v^{(3)}{}_t$，將式 (3-17) 代入到式 (3-2) 中。

$$m^{(3)}{}_t = E(\sum_{i=1}^{L^s+1} D^{(3)}{}_{t+i}) = \frac{d}{1-\rho}\left\{ (L^s+1) - \frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}) \right\} + \frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho} D^{(3)}{}_t$$

$$v^{(3)}{}_t = E(\sum_{i=1}^{L^s+1} D^{(3)}{}_{t+i})$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & \frac{\{(1-\rho^{l+2})\ [\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]\}^2}{(1-\rho)^4} + \frac{1}{(1-\rho)^2}\sum_{i=1}^{L^s}(1-\rho^{L^s+2-i})^2 \frac{\{(1-\rho^{l+2})[\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]\}^2}{(1-\rho)^4} \\ & + \frac{1}{(1-\rho)^2}\sum_{i=1}^{L^s+1}(1-\rho^{L^s+2-i})^2 \frac{\{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]\}^2 - \{\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)\}^2}{(1-\rho)^4} \\ & + \frac{1}{(1-\rho)^2}\sum_{i=1}^{L^s}(1-\rho^{L^s+1-i})^2 \left\{\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\right\}^2 \\ & + \frac{(1-\rho^{L^s+1})^2}{(1-\rho)^2}\left\{\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\right\}^2 \end{aligned} \right\}$$

(3-17)

即可得知當期存貨水準$T^{(3)}{}_t$，如下所示：

$$\mathrm{T}^{(3)}{}_t = \frac{d}{1-\rho}\left\{(L^s+1) - \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho})\right\} + \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho} D^{(3)}{}_t$$

$$+ k\sigma \sqrt{\left\{ \begin{aligned} & \frac{\{(1-\rho^{l+2})\ [\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]\}^2}{(1-\rho)^4} + \frac{1}{(1-\rho)^2}\sum_{i=1}^{L^s}(1-\rho^{L^s+2-i})^2 \frac{\{(1-\rho^{l+2})[\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]\}^2}{(1-\rho)^4} \\ & + \frac{1}{(1-\rho)^2}\sum_{i=1}^{L^s+1}(1-\rho^{L^s+2-i})^2 \frac{\{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]\}^2 - \{\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)\}^2}{(1-\rho)^4} \\ & + \frac{1}{(1-\rho)^2}\sum_{i=1}^{L^s}(1-\rho^{L^s+1-i})^2 \left\{\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\right\}^2 \\ & + \frac{(1-\rho^{L^s+1})^2}{(1-\rho)^2}\left\{\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\right\}^2 \end{aligned} \right\}}$$

(3-18)

對供應商來說，每一期都會根據收到製造商的需求，決定當期向第四階原料商之訂購量$Y^{(3)}{}_t$。

$$Y^{(3)}{}_t = \mathrm{T}^{(3)}{}_t - \mathrm{T}^{(3)}{}_{t-1} + D^{(1)}{}_t \tag{3-19}$$

將式 (3-18) 代入 (3-19) 中可改寫為式 (3-20)，如下所示：

$$
\begin{aligned}
Y^{(3)}{}_t &= \mathrm{T}^{(3)}{}_t - \mathrm{T}^{(3)}{}_{t-1} + D^{(3)}{}_t \\
&= m^{(3)}{}_t + k\sqrt{v^{(3)}{}_t} - (m^{(3)}{}_{t-1} + k\sqrt{v^{(3)}{}_{t-1}}) + D^{(3)}{}_t \\
&= \frac{d}{1-\rho}\left\{(L^s+1) - \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho})\right\} + \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho} D^{(3)}{}_t \\
&\quad - (\frac{d}{1-\rho}\left\{(L^s+1) - \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho})\right\} + \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho} D^{(3)}{}_{t\text{-}1}) + D^{(3)}{}_t \\
&= \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}(D^{(3)}{}_t - D^{(3)}{}_{t\text{-}1}) + D^{(3)}{}_t
\end{aligned}
\tag{3-20}
$$

而供應商將在 t+L^s期時，收到第 t 期時向第四階原料商訂購的數量$Y^{(3)}{}_t$。

3.3.5 原料商之存貨與訂購政策

從零售商、製造商和供應商，向上游傳遞訂單的過程中，並沒有分享任何市場資訊，前三期市場需求的誤差項ε_{t-1}、ε_{t-2}、ε_{t-3}對第四階原料商來說是未知的。而從數學模式的角度來看，供應商第 t 期時向原料商訂購量為$Y^{(3)}{}_t$，經由訂單的傳遞可改寫為原料商接收到供應商的需求量$D^{(4)}{}_t$。

$$
\begin{aligned}
D^{(4)}{}_t &= Y^{(3)}{}_t = \mathrm{T}^{(3)}{}_t - \mathrm{T}^{(3)}{}_{t-1} + D^{(3)}{}_t \\
&= m^{(3)}{}_t + k\sqrt{v^{(3)}{}_t} - (m^{(3)}{}_{t-1} + k\sqrt{v^{(3)}{}_{t-1}}) + D^{(3)}{}_t \\
&= \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[(d+\rho D^{(3)}{}_{t-1} + a\ \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2}) - (d+\rho D^{(3)}{}_{t-2} + a\ \varepsilon_{t-1} + b\varepsilon_{t-2} + c\varepsilon_{t-3})] \\
&\quad + (d+\rho D^{(3)}{}_{t-1} + a\ \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1} + c\varepsilon_{t-2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[\rho(D^{(3)}{}_{t-1} - D^{(3)}{}_{t-2})] + [\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho} * a]\varepsilon_t + \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[b-a]\varepsilon_{t-1} \\
&\quad + \frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[c-b]\varepsilon_{t-2} - [\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho} * c]\varepsilon_{t-3} + (d+\rho D^{(3)}{}_{t-1} + a\ \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1} + c_{t-2})
\end{aligned}
$$

$$=d+\rho[\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}(D^{(3)}{}_{t-1}-D^{(3)}{}_{t-2})+D^{(3)}{}_{t-1}]$$

$$+[\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}*a+a]\varepsilon_t+(\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[b-a]+b)\varepsilon_{t-1}+(\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[c-b]+c)\varepsilon_{t-2}+[-\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}*c]\varepsilon_{t-3}$$

$$=d+\rho[D^{(4)}{}_{t-1}]+[\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}*\frac{(1-\rho^{l+2})[\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]}{(1-\rho)^2}+\frac{(1-\rho^{l+2})[\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]}{(1-\rho)^2}]\varepsilon_t$$

$$+[\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})(1-\rho^{l+2})[\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]}{(1-\rho)^3}+\frac{(1-\rho^{l+2})[\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]}{(1-\rho)^2}]\varepsilon_t$$

$$+(\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[b-a]+b)\varepsilon_{t-1}+(\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[c-b]+c)\varepsilon_{t-2}$$

$$+[-\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}*\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}]\varepsilon_{t-3}$$

$$=d+\rho[D^{(4)}{}_{t-1}]+[\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})(1-\rho^{L^s+2})}{(1-\rho)^3}]\varepsilon_t$$

$$+\{\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}-\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2}]$$

$$+\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\}\varepsilon_{t-1}$$

$$+\{\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}-\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}]+\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\}\varepsilon_{t-2}$$

$$+[-\frac{\rho^3(1-\rho^{L^s+1})(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^3}]\varepsilon_{t-3}$$

(3-21)

由上式 (3-21) 可得知原料商的需求模式，為了方便推導第 t 期之需求量，給予誤差項係數代號為：

$$\mathrm{D}^{(4)}{}_t=d+\rho D^{(4)}{}_{t-1}+h\varepsilon_t+e\varepsilon_{t-1}+f\varepsilon_{t-2}+g\varepsilon_{t-3}$$

其中

$$h=\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})(1-\rho^{L^s+2})}{(1-\rho)^3}$$

$$e=\{\frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\text{-}\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2}]$$

$$+\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\}$$

$$f=\{\frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}-\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}]+\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\}$$

$$\mathrm{g}=\text{-}\frac{\rho^3(1-\rho^{L^s+1})(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^3}$$

與零售商、製造商、供應商相同假設ρ>0，各期的需求量可以由前一期需求量，以遞迴的方式推估而得，可推導出原料商第 t 期的需求量，如下所示：

$$D^{(4)}{}_{t+i}$$

$$=d+\rho[D^{(4)}{}_{t+i-1}]+[\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})(1-\rho^{L^s+2})}{(1-\rho)^3}]\varepsilon_{t+i}+(\frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[b-a]+b)\varepsilon_{t+i-1}$$

$$+(\frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[c-b]+c)\varepsilon_{t+i-2}+[\text{-}\frac{\rho^3(1-\rho^{L^s+1})(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^3}]\varepsilon_{t+i-3}$$

$$=d(1+\rho)+\rho^2D^{(4)}{}_{t+i-2}+[\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})(1-\rho^{L^s+2})}{(1-\rho)^3}]\varepsilon_{t+i}+$$

$$\{\rho[\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})(1-\rho^{L^s+2})}{(1-\rho)^3}]+(\frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[b-a]+b)\}\varepsilon_{t+i-1}$$

$$+\{\rho(\frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[b-a]+b)+(\frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[c-b]+c)\}\varepsilon_{t+i-2}+\{\rho(\frac{\rho\ \ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[c-b]+c)$$

$$+[\text{-}\frac{\rho^3(1-\rho^{L^s+1})(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^3}]\varepsilon_{t+i-3}+\rho[\text{-}\frac{\rho^3(1-\rho^{L^s+1})(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^3}]\varepsilon_{t+i-4}$$

$$=d(1+\rho)+\rho^2D^{(4)}{}_{t+i-2}+h\varepsilon_{t+i}+\{\rho h+e\}\varepsilon_{t+i-1}+\{\rho e+f\}\varepsilon_{t+i-2}+\{\rho f+g\}\varepsilon_{t+i-3}+\rho g\varepsilon_{t+i-4}$$

$$=d\frac{1-\rho^i}{1-\rho}+\rho^iD^{(4)}{}_t+h\varepsilon_{t+i}+\sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^k\{h\}\varepsilon_{t+i-k}+\sum_{k=1}^{k=i}\rho^{k-1}e\varepsilon_{t+i-k}+\sum_{k=1}^{k=i}\rho^{k-1}f\varepsilon_{t+i-k-1}+\sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^{k-1}\{g\}\varepsilon_{t+i-k-2}+\rho^{\mathrm{i}\text{-}1}g\varepsilon_{t\text{-}2}$$

(3-22)

原料商在前置時間L^z內，仍然會接收到下游供應商的需求，因此需計算原料商在前置時間內的總需求量，如下所示：

$$\sum_{i=1}^{L^z+1} D^{(4)}{}_{t+i} =$$

$$\sum_{i=1}^{L^z}\{d\frac{1-\rho^i}{1-\rho}+\rho^i D^{(4)}{}_t+h\varepsilon_{t+i}+\sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^k\{h\}\varepsilon_{t+i-k}+\sum_{k=1}^{k=i}\rho^{k-1}e\varepsilon_{t+i-k}+\sum_{k=1}^{k=i}\rho^{k-1}f\varepsilon_{t+i-k-1}+\sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^{k-1}\{g\}\varepsilon_{t+i-k-2}+\rho^{i-1}g\varepsilon_{t-2}\}$$

$$=\frac{d}{1-\rho}\left\{(L^z+1)-\sum_{j=1}^{L^z+1}\rho^j\right\}+\sum_{i=1}^{L^z+1}\rho^i D^{(4)}{}_t+\sum_{i=1}^{L^z+1}\ \mathrm{h}\ \ \varepsilon_{t+i}+\sum_{i=1}^{L^z+1}\sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^k\{\ \mathrm{h}\ \}\varepsilon_{t+i-k}$$
$$+\sum_{i=1}^{L^z+1}\sum_{k=1}^{k=i}\rho^{k-1}\ \mathrm{e}\,\varepsilon_{t+i-k}+\sum_{i=1}^{L^z+1}\sum_{k=1}^{k=i}\rho^{k-1}\{\ \mathrm{f}\ \}\varepsilon_{t+i-k-1}+\sum_{i=1}^{L^z+1}\sum_{k=1}^{k=i-1}\rho^{k-1}\{\ \mathrm{g}\ \}\varepsilon_{t+i-k-2}+\sum_{i=1}^{L^z+1}\rho^{i-1}\{\ \mathrm{g}\ \}\varepsilon_{t-2}$$

$$=\frac{d}{1-\rho}\left\{(L^z+1)-\frac{\rho\ (1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho})\right\}+\frac{\rho\ (1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho}D^{(4)}{}_t$$
$$+h\varepsilon_{t+\mathrm{L}^z+1}+\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z}(1-\rho^{L^z+2-i})h\varepsilon_{t+i}+\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z+1}(1-\rho^{L^z+2-i})e\varepsilon_{t+i-1}$$
$$+\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z+1}(1-\rho^{L^z+2-i})f\varepsilon_{t+i-2}+\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z}(1-\rho^{L^z+1-i})\{g\}\varepsilon_{t+i-2}+\frac{(1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho}\{g\}\varepsilon_{t-2} \tag{3-23}$$

在得知原料商在前置時間內的總需求量後，即可在存貨成本最低的情況下，計算原料商前置時間內之總需求期望值$m^{(4)}{}_t$與變異數$v^{(4)}{}_t$，將式 (3-24) 代入到式 (3-2) 中。

$$m^{(4)}{}_t=E(\sum_{i=1}^{\mathrm{L}^z+1}D^{(4)}{}_{t+i})=\frac{d}{1-\rho}\left\{(L^z+1)-\frac{\rho\ (1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho})\right\}+\frac{\rho\ (1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho}D^{(4)}{}_t$$

$$v^{(4)}{}_t=E(\sum_{i=1}^{\mathrm{L}^z+1}D^{(4)}{}_{t+i})$$
$$=h^2+[\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z}(1-\rho^{L^z+2-i})h]^2+[\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z+1}(1-\rho^{L^z+2-i})e]^2+[\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z+1}(1-\rho^{L^z+2-i})f]^2 \tag{3-24}$$
$$+[\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z}(1-\rho^{L^z+1-i})\{g\}]^2+[\frac{(1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho}\{g\}]^2$$

即可得知當期存貨水準$T^{(4)}{}_t$，如下所示：

$$\mathrm{T}^{(4)}{}_t = \frac{d}{1-\rho}\left\{(L^z+1) - \frac{\rho\ (1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho})\right\} + \frac{\rho\ (1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho}D^{(4)}{}_t$$

$$+k\sigma\sqrt{\left\{\begin{array}{l} h^2 + [\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z}(1-\rho^{L^z+2-i})h]^2 + [\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z+1}(1-\rho^{L^z+2-i})e]^2 + [\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z+1}(1-\rho^{L^z+2-i})f]^2 \\ +[\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^z}(1-\rho^{L^z+1-i})\{g\}]^2 + [\frac{(1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho}\{g\}]^2 \end{array}\right\}}$$

(3-25)

對原料商來說，每一期都會根據收到市場的需求，決定當期向第五階廠商之訂購量$Y^{(4)}{}_t$。

$$Y^{(4)}{}_t = \mathrm{T}^{(4)}{}_t - \mathrm{T}^{(4)}{}_{t-1} + D^{(4)}{}_t \tag{3-26}$$

將式 (3-25) 代入 (3-26) 中可改寫為式 (3-27)，如下所示：

$$\begin{aligned} Y^{(4)}{}_t &= \mathrm{T}^{(4)}{}_t - \mathrm{T}^{(4)}{}_{t-1} + D^{(4)}{}_t \\ &= m^{(4)}{}_t + k\sqrt{v^{(4)}{}_t} - (m^{(4)}{}_{t-1} + k\sqrt{v^{(4)}{}_{t-1}}) + D^{(4)}{}_t \\ &= \frac{\rho\ (1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho}(D^{(4)}{}_t - D^{(4)}{}_{t\text{-}1}) + D^{(4)}{}_t \end{aligned} \tag{3-27}$$

而原料商將在 t+L^{z}期時，收到第 t 期時向第五階廠商訂購的數量$Y^{(4)}{}_t$。

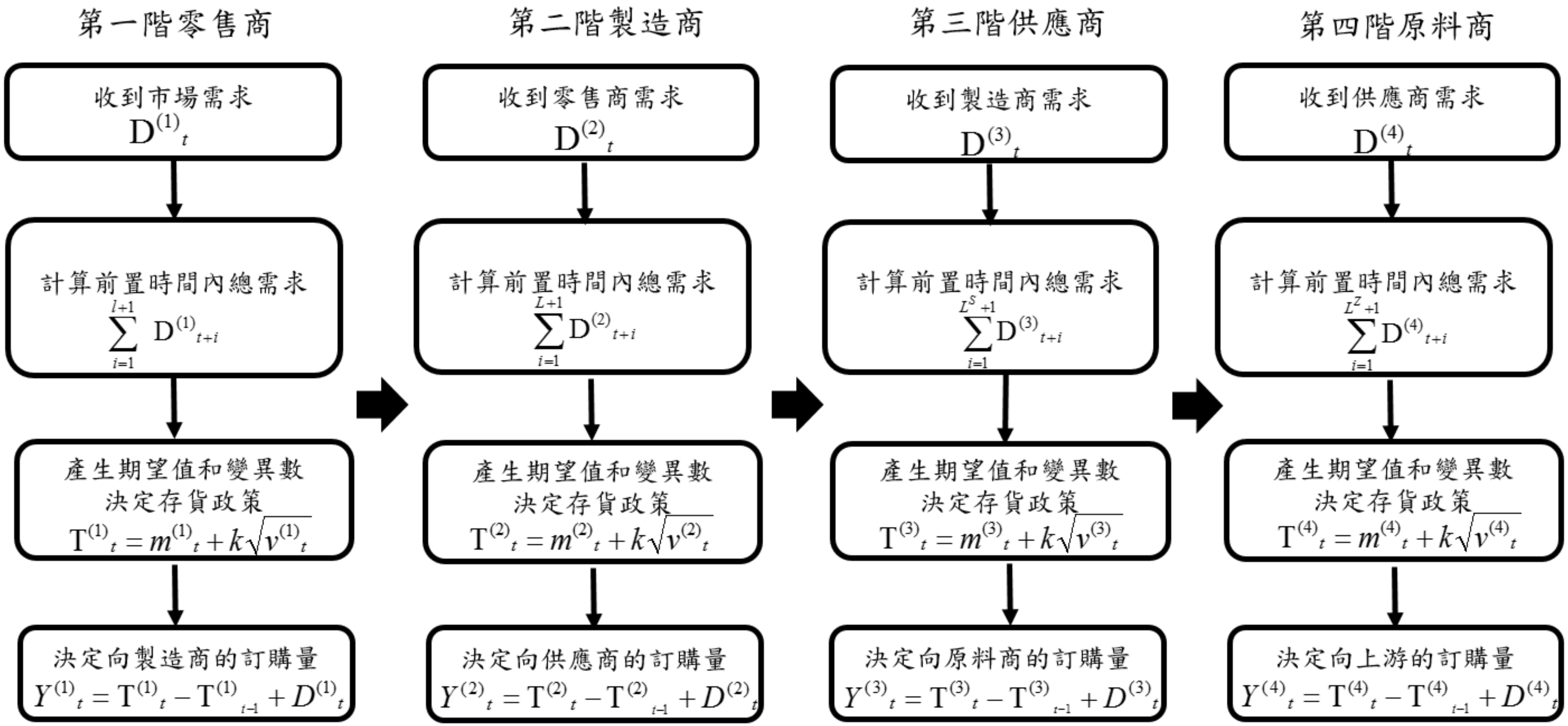

圖 3.2 四階供應鏈訂購流程圖

資料來源: 本研究

由 3.3 小節的敘述可得知，各階廠商的數學模型，包含了需求模式、存貨政策和訂購量，而且皆源於市場需求和所有下游廠商的存貨與訂購政策，其環環相扣，影響著整個供應鏈。

3.4 模型驗證

本研究為了確保 3.3 節模式建構，四階層供應鏈需求模式的正確性。以 Ganesh et al. (2014) 提出的無資訊分享下，不考慮前置時間的需求模式進行數學模型驗證。每一階層廠商的需求模式皆是以下游廠商提供的數學模型進行推導，因此只要驗證製造商、供應商與原料商的需求模式，即可得知模型是否正確。

3.3 節中式 (3-1) 為零售商接收到市場的需求量$D^{(1)}{}_t$，其為 AR(1) 數學模型，與 Ganesh et al. (2014) 相同，以此為基礎推導出上游各階廠商需求量。

下式 (3-7) 製造商接收到零售商的需求量$D^{(2)}{}_t$。

$$D^{(2)}{}_t = d + \rho D^{(2)}{}_{t-1} + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_t - \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t\text{-}1}$$

在不考慮零售商的前置時間 *l*，也就是 *l=0* 會改寫成

$$D_{no}{}^{(2)}{}_t = d + \rho D^{(2)}{}_{t-1} + (1+\rho)\varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t\text{-}1} \tag{3-28}$$

下式 (3-14) 供應商接收到製造商的需求量$D^{(3)}{}_t$。

$$D^{(3)}{}_t = d + \rho D^{(3)}{}_{t-1} + \frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2}\ \varepsilon_t$$
$$+\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t-1} + \frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t-2}$$

在不考慮零售商與製造商的前置時間 *l* 和 *L*，也就是 *l=0*，*L=0* 改寫成

$$D_{no}{}^{(3)}{}_t = d + \rho D^{(3)}{}_{t-1} + (1+\rho)^2\varepsilon_t \text{ - } 2\rho(1+\rho)\varepsilon_{t-1} + \rho^2\varepsilon_{t-2} \tag{3-29}$$

式 (3-21) 原料商接收到供應商的需求量$D^{(4)}{}_t$。

$$D^{(4)}{}_t = d + \rho[D^{(4)}{}_{t-1}] + [\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})(1-\rho^{L^s+2})}{(1-\rho)^3}]\varepsilon_t$$
$$+\{\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2} - \frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2}]$$
$$+\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\}\varepsilon_{t-1}$$
$$+\{\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2} - \frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}] + \frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\}\varepsilon_{t-2}$$
$$+[-\frac{\rho^3(1-\rho^{L^s+1})(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^3}]\varepsilon_{t-3}$$

在不考慮零售商、製造商與供應商的前置時間 l、L 和L^s，也就是 $l=0$，L=*0*，$L^s=0$ 改寫成

$$D_{no}{}^{(4)}{}_t = d + \rho D^{(4)}{}_{t-1} + (1+\rho)^3\varepsilon_t - 3\rho(1+\rho)\varepsilon_{t-1} + 3\rho^2(1+\rho)\varepsilon_{t-2} - \rho^3\varepsilon_{t-3} \qquad (3\text{-}30)$$

式 (3-28)、(3-29)、(3-30) 與 Ganesh et al. (2014) 的需求模式完全符合，因此可驗證 3.3 小節的公式推導。

第四章 長鞭效應之影響與資訊分享的效益

由第三章提出的數學模型，我們可得知供應鏈中各階廠商都需要對未來的需求量進行預測，且存貨政策受預測需求量的影響，過多使存貨成本升高，導致資源的浪費，過少無法滿足訂單需求，而長鞭效應將需求變異加速放大。

因此本研究使用資訊分享的方式緩解長鞭效應。為了比較分享前後的差異，先了解長鞭效應在四階廠商中的情況，再觀察資訊分享後的緩解現象。

4.1 長鞭效應之影響

為了明白長鞭效應如何將需求的變異加大，本研究將針對各階廠商從收到下游的需求後至下訂單的過程之中，觀察其變異數變化，並做一個小結。

$$Var({Y^{(1)}}_t) = Var({D^{(1)}}_t) + \mathrm{P} > Var({D^{(1)}}_t)$$
$$Var({Y^{(2)}}_t) = Var({D^{(2)}}_t) + \mathrm{Q} > Var({D^{(2)}}_t)$$
$$Var({Y^{(3)}}_t) = Var({D^{(3)}}_t) + \mathrm{R} > Var({D^{(3)}}_t)$$
$$Var({Y^{(4)}}_t) = Var({D^{(4)}}_t) + \mathrm{S} > Var({D^{(3)}}_t)$$

其中 P 為零售商收到的需求與對上游訂購的差異變異數。Q 為製造商收到的需求與對上游訂購的差異變異數。R 為供應商收到的需求與對上游訂購的差異變異數。S 為原料商收到的需求與對上游訂購的差異變異數。而 PQRS 大於零，及證明了各廠商接到的需求之變異數，在經由廠商的決策後訂購量變異數增加。

下文會分別求出 P、Q、R、S，以證明長鞭效應的存在。

4.1.1 零售商之長鞭效應

為了了解零售商在收到市場需求$D^{(1)}{}_t$，至傳出訂購量$Y^{(1)}{}_t$之間的變化，由式 (3-6) 可得知零售商之訂購量模式，將其取變異數$Var(Y^{(1)}{}_t)$。

$$Var(Y^{(1)}{}_t)=Var(D^{(1)}{}_t)+(\frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho})^2\cdot Var(D^{(1)}{}_t-D^{(1)}{}_{t-1})+2\frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\cdot\mathrm{cov}(D^{(1)}{}_t-D^{(1)}{}_{t-1},D^{(1)}{}_t)$$

其中

ε_t和$D^{(1)}{}_{t-1}$為獨立，代表著未來的誤差與前一期需求量相互獨立。

分別計算出，如下所示：

$$\begin{aligned}&Var(D^{(1)}{}_t)\\&=Var(D^{(1)}{}_{t-1})=Var(\rho^{i-1}\varepsilon_t+\rho^{i-2}\varepsilon_{t-1}+\ldots+\varepsilon_{t-i+1})\\&=Var(\varepsilon)+\rho^2 Var(\varepsilon)+\ldots+\rho^{2(i-1)}Var(\varepsilon)=\frac{1}{1-(\rho^2)}\cdot Var(\varepsilon)=\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&Var(D^{(1)}{}_t-D^{(1)}{}_{t-1})\\&=Var(d+(\rho-1)\cdot D^{(1)}{}_{t-1}+\varepsilon_t)=Var(d)+(\rho-1)^2\cdot Var(D^{(1)}{}_{t-1})+Var(\varepsilon_t)\\&=0+(\rho-1)^2\cdot\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}+\sigma^2=\frac{2\sigma^2}{(1+\rho)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{cov}(D^{(1)}{}_t-D^{(1)}{}_{t-1},D^{(1)}{}_t)\\&=E[(D^{(1)}{}_t-D^{(1)}{}_{t-1})\cdot D^{(1)}{}_t]-E(D^{(1)}{}_t-D^{(1)}{}_{t-1})\cdot E(D^{(1)}{}_t)\\&=E(d\cdot D^{(1)}{}_t+(\rho-1)\cdot D^{(1)}{}_{t-1}\cdot D^{(1)}{}_t+\varepsilon_t D^{(1)}{}_t)-0\\&=\frac{d^2}{1-\rho}+(\rho-1)\cdot\mathrm{E}(D^{(1)}{}_{t-1}\cdot D^{(1)}{}_t)+\mathrm{E}(\varepsilon_t D^{(1)}{}_t)\\&=\frac{d^2}{1-\rho}+(\rho-1)\cdot\{\frac{d^2}{1-\rho}+\rho[(\frac{\sigma^2}{1-\rho^2})+(\frac{d}{1-\rho})^2]\}+\sigma^2\\&=\frac{-(\rho\sigma^2)}{1+\rho}+\sigma^2=\frac{\sigma^2}{1+\rho}\end{aligned}$$

得出

$$
\begin{aligned}
&Var(Y^{(1)}{}_t)\\
&=Var(D^{(1)}{}_t)+(\frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho})^2\cdot Var(D^{(1)}{}_t-D^{(1)}{}_{t-1})+2\frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\cdot\operatorname{cov}(D^{(1)}{}_t-D^{(1)}{}_{t-1},D^{(1)}{}_t)\\
&=Var(D^{(1)}{}_t)+\frac{2\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho^{l+2})}{(1+\rho)(1-\rho)^2}\sigma^2>Var(D^{(1)}{}_t)
\end{aligned}
\tag{4-1}
$$

$\mathrm{P}=\dfrac{2\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho^{l+2})}{(1+\rho)(1-\rho)^2}$，P 為零售商收到的需求與對上游訂購的差異變異數。

4.1.2 製造商之長鞭效應

與零售商相同，製造商在收到下游需求$D^{(2)}{}_t$，至傳出訂購量$Y^{(2)}{}_t$之間的變化，由式 (3-13) 可得知製造商之訂購量模式，將其取變異數$Var(Y^{(2)}{}_t)$。

$$Var(Y^{(2)}{}_t)=Var(D^{(2)}{}_t)+(\frac{\rho(1-\rho^{\mathrm{L}+1})}{1-\rho})^2\cdot Var(D^{(2)}{}_t-D^{(2)}{}_{t-1})+2\frac{\rho(1-\rho^{\mathrm{L}+1})}{1-\rho}\cdot\operatorname{cov}(D^{(2)}{}_t-D^{(2)}{}_{t-1},D^{(2)}{}_t)$$

其中

$$Var(D^{(2)}{}_t)=Var(Y^{(1)}{}_t)$$

$$
\begin{aligned}
&Var(D^{(2)}{}_t - D^{(2)}{}_{t-1}) \\
&= Var(d + (\rho - 1)D^{(2)}{}_{t-1} + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_t - \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t\text{-}1}) \\
&= Var(d) + (\rho - 1)^2 \cdot Var(D^{(2)}{}_{t-1}) + (\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho})^2 Var(\varepsilon_t) - (\frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho})^2 Var(\varepsilon_{t\text{-}1}) \\
&= 0 + (1\text{-}\rho)^2 \cdot [\frac{\rho^{2l+4}}{1-\rho^2}\sigma^2 + \frac{(1-\rho^{l+2})^2}{(1-\rho)^2}\sigma^2] + (\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho})^2\sigma^2 - (\frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho})^2\sigma^2 \\
&= [(\frac{\rho^{2l+4}(1\text{-}\rho)}{1+\rho}) + (1-\rho^{l+2})^2 + \frac{(1+\rho-2\rho^{l+2})}{(1-\rho)}]\sigma^2 \\
&= [\frac{\rho^{2l+4}(1\text{-}\rho)^2 + (1+\rho)(1+\rho-2\,\rho^{l+2})}{(1+\rho)(1-\rho)} + (1-\rho^{l+2})^2]\sigma^2 \\
&= [\frac{\rho^{2l+4}\text{ - }2\rho^{2l+5} + \rho^{2l+6} + 1 + \rho - 2\,\rho^{l+2} + \rho + \rho^2 - 2\,\rho^{l+3}}{(1+\rho)(1-\rho)} + \frac{(1-\rho^2)(1-2\rho^{l+2}+\rho^{2l+4})}{(1+\rho)(1-\rho)}]\sigma^2 \\
&= [\frac{\rho^{2l+4}\text{ - }2\rho^{2l+5} + \rho^{2l+6} + 1 + \rho - 2\,\rho^{l+2} + \rho + \rho^2 - 2\,\rho^{l+3}}{(1+\rho)(1-\rho)} + \frac{(1-2\rho^{l+2}+\rho^{2l+4}) - \rho^2 + 2\rho^{l+4} - \rho^{2l+6}}{(1+\rho)(1-\rho)}]\sigma^2 \\
&= (\frac{2+2\rho-4\,\rho^{l+2} - 2\,\rho^{l+3} + 2\rho^{l+4} + 2\rho^{2l+4}\text{ - }2\rho^{2l+5}}{(1+\rho)(1-\rho)})\sigma^2 \\
&= (\frac{2(1+\rho\text{ - }2\rho^{l+2}\text{ - }\rho^{l+3} + \rho^{l+4} + \rho^{2l+4}\text{ - }\rho^{2l+5})}{(1+\rho)(1-\rho)})\sigma^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(D^{(2)}{}_t - D^{(2)}{}_{t-1}, D^{(2)}{}_t) \\
&= E[(D^{(2)}{}_t - D^{(2)}{}_{t-1}) \cdot D^{(2)}{}_t] - E(D^{(2)}{}_t - D^{(2)}{}_{t-1}) \cdot E(D^{(2)}{}_t) \\
&= E(d \cdot D^{(2)}{}_t + (\rho\text{ - }1) \cdot D^{(2)}{}_{t-1} \cdot D^{(2)}{}_t + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\varepsilon_t \cdot D^{(2)}{}_t - \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}\varepsilon_{t-1} \cdot D^{(2)}{}_t) + 0 \\
&= \frac{d^2}{1-\rho} + (\rho\text{ - }1)E(D^{(2)}{}_{t-1} \cdot D^{(2)}{}_t) + \frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}E(\varepsilon_t \cdot D^{(2)}{}_t) - \frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho}E(\varepsilon_{t-1} \cdot D^{(2)}{}_t) \\
&= \frac{d^2}{1-\rho} + (\rho\text{ - }1)E(D^{(2)}{}_{t-1} \cdot D^{(2)}{}_t) + (\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho})^2\sigma^2 - (\frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho})^2\sigma^2 \\
&= \frac{d^2}{1-\rho} + (\rho\text{ - }1)[\frac{d^2}{1-\rho} + \rho \cdot [(\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho})^2\sigma^2 + \frac{\rho^{2l+4}}{1-\rho^2}\sigma^2 \\
&+ (\frac{d}{1-\rho})^2 - \frac{\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho^{l+2})}{(1-\rho)^2}] + (\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho})^2\sigma^2 - (\frac{\rho(1-\rho^{l+1})}{1-\rho})^2\sigma^2 \\
&= (\frac{\text{- }\rho(1-\rho^{l+2})^2 + \rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho^{l+2}) + (1+\rho-2\rho^{l+2})}{1-\rho} - \frac{\rho^{2l+5}}{1+\rho})\sigma^2 \\
&= \frac{1+2\rho+\rho^2\text{ - }\rho^l(\text{-}3\rho^2\text{ - }2\rho^3+\rho^4)\text{ - }\rho^{2l}(\rho^4\text{ - }\rho^5)}{1-\rho^2}\sigma^2
\end{aligned}
$$

即可得知

$$Var(Y^{(2)}{}_t)$$

$$=Var(D^{(2)}{}_t)+(\frac{\rho(1-\rho^{\mathrm{L}+1})}{1-\rho})^2\cdot Var(D^{(2)}{}_t-D^{(2)}{}_{t-1})+2\frac{\rho(1-\rho^{\mathrm{L}+1})}{1-\rho}\cdot\mathrm{cov}(D^{(2)}{}_t-D^{(2)}{}_{t-1},D^{(2)}{}_t)$$

$$=Var(D^{(2)}{}_t)+(\frac{\rho(1-\rho^{\mathrm{L}+1})}{1-\rho})^2\cdot(\frac{2(1+\rho-2\rho^{l+2}-\rho^{l+3}+\rho^{l+4}+\rho^{2l+4}-\rho^{2l+5})}{(1+\rho)(1-\rho)})\sigma^2$$

$$+2\frac{\rho(1-\rho^{\mathrm{L}+1})}{1-\rho}\cdot\frac{1+2\rho+\rho^2-\rho^l(-3\rho^2-2\rho^3+\rho^4)-\rho^{2l}(\rho^4-\rho^5)}{1-\rho^2}\sigma^2$$

$$=Var(D^{(2)}{}_t)$$

$$+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(\rho^{L+2l+7}-\rho^{L+2l+6}-\rho^{L+l+6}+\rho^{L+l+5}+2\rho^{L+l+4})}{(\rho-1)^3(\rho+1)}\sigma^2$$

$$+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(-\rho^{L+3}-\rho^{L+2}-\rho^{2l+5}+\rho^{2l+4}+2\rho^{l+4}-\rho^{l+3}-3\rho^{l+2}-\rho^3+2\rho+1)}{(\rho-1)^3(\rho+1)}\sigma^2$$

(4-2)

得

$$\mathrm{Q}=\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(\rho^{L+2l+7}-\rho^{L+2l+6}-\rho^{L+l+6}+\rho^{L+l+5}+2\rho^{L+l+4}-\rho^{L+3}-\rho^{L+2}-\rho^{2l+5}+\rho^{2l+4}+2\rho^{l+4}-\rho^{l+3}-3\rho^{l+2}-\rho^3+2\rho+1)}{(\rho-1)^3(\rho+1)}\sigma^2$$

Q 為製造商收到的需求與對上游訂購的差異變異數。

4.1.3 供應商之長鞭效應

供應商在收到製造商的需求$D^{(3)}{}_t$，經由供應商的存貨政策，決定其訂購量$Y^{(3)}{}_t$，其由式 (3-20) 可得供應商之訂購量模式，將其取變異數$Var(Y^{(3)}{}_t)$。

$$Var(\mathrm{Y}^{(3)}{}_t)=Var(D^{(3)}{}_t)+(\frac{\rho(1-\rho^{\mathrm{L}^s+1})}{1-\rho})^2\cdot Var(D^{(3)}{}_t-D^{(3)}{}_{t-1})+2\frac{\rho(1-\rho^{\mathrm{L}^s+1})}{1-\rho}\cdot\mathrm{cov}(D^{(3)}{}_t-D^{(3)}{}_{t-1},D^{(3)}{}_t)$$

其中

$$Var(\mathrm{Y}^{(2)}{}_t)=Var(D^{(3)}{}_t)$$

$$Var(D^{(3)}{}_{t}-D^{(3)}{}_{t-1})$$

$$=Var(d+(\rho-1)D^{(3)}{}_{t-1}+\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2}\varepsilon_t$$

$$+\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t-1}+\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\varepsilon_{t-2})$$

$$=Var(d)+(\rho-1)^2Var(D^{(3)}{}_{t-1})+\frac{(1-\rho^{l+2})^2(1-\rho^{L+2})^2}{(1-\rho)^4}Var(\varepsilon)$$

$$+\frac{(\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho))^2}{(1-\rho)^4}Var(\varepsilon)+\frac{\rho^4(1-\rho^{L+1})^2(1-\rho^{l+1})^2}{(1-\rho)^4}Var(\varepsilon)$$

$$=0+(1-\rho)^2\cdot[(\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho})^2+\frac{\rho^{2l+4}}{1-\rho^2}$$

$$+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(\rho^{L+2l+7}-\rho^{L+2l+6}-\rho^{L+l+6}+\rho^{L+l+5}+2\rho^{L+l+4})}{(\rho-1)^3(\rho+1)}$$

$$+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(-\rho^{L+3}-\rho^{L+2}-\rho^{2l+5}+\rho^{2l+4}+2\rho^{l+4}-\rho^{l+3}-3\rho^{l+2}-\rho^3+2\rho+1)}{(\rho-1)^3(\rho+1)}]\sigma^2$$

$$+\frac{(1-\rho^{l+2})^2(1-\rho^{L+2})^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2+\frac{(\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho))^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2+\frac{\rho^4(1-\rho^{L+1})^2(1-\rho^{l+1})^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2$$

$$=(1-\rho^{l+2})^2\sigma^2+\frac{\rho^{2l+4}(1-\rho)}{1+\rho}\sigma^2$$

$$+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(\rho^{L+2l+7}-\rho^{L+2l+6}-\rho^{L+l+6}+\rho^{L+l+5}+2\rho^{L+l+4})}{(\rho-1)^3(\rho+1)}]\sigma^2$$

$$+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(-\rho^{L+3}-\rho^{L+2}-\rho^{2l+5}+\rho^{2l+4}+2\rho^{l+4}-\rho^{l+3}-3\rho^{l+2}-\rho^3+2\rho+1)}{(\rho-1)^3(\rho+1)}$$

$$+\frac{(1-\rho^{l+2})^2(1-\rho^{L+2})^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2+\frac{(\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho))^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2+\frac{\rho^4(1-\rho^{L+1})^2(1-\rho^{l+1})^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(D^{(3)}{}_{t}-D^{(3)}{}_{t-1},D^{(3)}{}_{t})\\
&=E[(D^{(3)}{}_{t}-D^{(3)}{}_{t-1})\cdot D^{(3)}{}_{t}]-E(D^{(3)}{}_{t}-D^{(3)}{}_{t-1})\cdot E(D^{(3)}{}_{t})\\
&=E(d\cdot D^{(3)}{}_{t}+(\rho-1)D^{(3)}{}_{t-1}\cdot D^{(3)}{}_{t}+\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^{2}}\,\varepsilon_{t}\cdot D^{(3)}{}_{t}\\
&+\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^{2}}\,\varepsilon_{t-1}\cdot D^{(3)}{}_{t}+\frac{\rho^{2}(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^{2}}\,\varepsilon_{t-2}\cdot D^{(3)}{}_{t})\\
&=\frac{d^{2}}{1-\rho}+(\rho-1)E(D^{(3)}{}_{t-1}\cdot D^{(3)}{}_{t})+\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^{2}}\,E(\varepsilon_{t}\cdot D^{(3)}{}_{t})\\
&+\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^{2}}\,E(\varepsilon_{t-1}\cdot D^{(3)}{}_{t})+\frac{\rho^{2}(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^{2}}\,E(\varepsilon_{t-2}\cdot D^{(3)}{}_{t})\\
&=(\rho-1)\{\rho\cdot[(\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho})^{2}\sigma^{2}+\frac{\rho^{2l+4}}{1-\rho^{2}}\sigma^{2}\\
&+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(\rho^{L+2l+7}-\rho^{L+2l+6}-\rho^{L+l+6}+\rho^{L+l+5}+2\rho^{L+l+4})}{(\rho-1)^{3}(\rho+1)}\sigma^{2}\\
&+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(-\rho^{L+3}-\rho^{L+2}-\rho^{2l+5}+\rho^{2l+4}+2\rho^{l+4}-\rho^{l+3}-3\rho^{l+2}-\rho^{3}+2\rho+1)}{(\rho-1)^{3}(\rho+1)}\sigma^{2}]\\
&+\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^{2}}\cdot\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^{2}}\sigma^{2}\\
&+\frac{\rho^{2}(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^{2}}\cdot\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^{2}}\sigma^{2}\}\\
&+\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^{2}}\cdot\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^{2}}\sigma^{2}\\
&+\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^{2}}\cdot\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^{2}}\sigma^{2}\\
&+\frac{\rho^{2}(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^{2}}\cdot\frac{\rho^{2}(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^{2}}\sigma^{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Var(Y^{(3)}{}_t) = Var(D^{(3)}{}_t) + \\
&+ \left(\frac{\rho(1-\rho^{\mathrm{L^s}+1})}{1-\rho}\right)^2 \cdot [(1-\rho^{l+2})^2\sigma^2 + \frac{\rho^{2l+4}(1-\rho)}{1+\rho}\sigma^2 \\
&+ \frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(\rho^{L+2l+7}-\rho^{L+2l+6}-\rho^{L+l+6}+\rho^{L+l+5}+2\rho^{L+l+4})}{(\rho-1)^2(\rho+1)}\sigma^2 \\
&+ \frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(-\rho^{L+3}-\rho^{L+2}-\rho^{2l+5}+\rho^{2l+4}+2\rho^{l+4}-\rho^{l+3}-3\rho^{l+2}-\rho^3+2\rho+1)}{(\rho-1)^2(\rho+1)}\sigma^2 \\
&+ \frac{(1-\rho^{l+2})^2(1-\rho^{L+2})^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2 + \frac{(\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho))^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2 + \frac{\rho^4(1-\rho^{L+1})^2(1-\rho^{l+1})^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2] \\
&+ 2\frac{\rho(1-\rho^{\mathrm{L^s}+1})}{1-\rho} \cdot [(\rho-1)\{\rho \cdot [(\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho})^2\sigma^2 + \frac{\rho^{2l+4}}{1-\rho^2}\sigma^2 \\
&+ \frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(\rho^{L+2l+7}-\rho^{L+2l+6}-\rho^{L+l+6}+\rho^{L+l+5}+2\rho^{L+l+4})}{(\rho-1)^2(\rho+1)}\sigma^2 \\
&+ \frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(-\rho^{L+3}-\rho^{L+2}-\rho^{2l+5}+\rho^{2l+4}+2\rho^{l+4}-\rho^{l+3}-3\rho^{l+2}-\rho^3+2\rho+1)}{(\rho-1)^2(\rho+1)}\sigma^2 \\
&+ \frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2} \cdot \frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2}\sigma^2 \\
&+ \frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2} \cdot \frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\sigma^2\} \\
&+ (\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2})^2\sigma^2 + (\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2})^2\sigma^2 + (\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2})^2\sigma^2]
\end{aligned}
\tag{4-3}
$$

即可得出

R

$$
\begin{aligned}
&=\left(\frac{\rho(1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}\right)^2\cdot\Big[(1-\rho^{l+2})^2\sigma^2+\frac{\rho^{2l+4}(1-\rho)}{1+\rho}\sigma^2\\
&+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(\rho^{L+2l+7}-\rho^{L+2l+6}-\rho^{L+l+6}+\rho^{L+l+5}+2\rho^{L+l+4})}{(\rho-1)^2(\rho+1)}\sigma^2\\
&+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(-\rho^{L+3}-\rho^{L+2}-\rho^{2l+5}+\rho^{2l+4}+2\rho^{l+4}-\rho^{l+3}-3\rho^{l+2}-\rho^3+2\rho+1)}{(\rho-1)^2(\rho+1)}\sigma^2\\
&+\frac{(1-\rho^{l+2})^2(1-\rho^{L+2})^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2+\frac{(\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho))^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2+\frac{\rho^4(1-\rho^{L+1})^2(1-\rho^{l+1})^2}{(1-\rho)^4}\sigma^2\Big]\\
&+2\frac{\rho(1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}\cdot\Big[(\rho-1)\Big\{\rho\cdot\Big[\Big(\frac{1-\rho^{l+2}}{1-\rho}\Big)^2\sigma^2+\frac{\rho^{2l+4}}{1-\rho^2}\sigma^2\\
&+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(\rho^{L+2l+7}-\rho^{L+2l+6}-\rho^{L+l+6}+\rho^{L+l+5}+2\rho^{L+l+4})}{(\rho-1)^2(\rho+1)}\sigma^2\\
&+\frac{2\rho(\rho^{L+1}-1)(-\rho^{L+3}-\rho^{L+2}-\rho^{2l+5}+\rho^{2l+4}+2\rho^{l+4}-\rho^{l+3}-3\rho^{l+2}-\rho^3+2\rho+1)}{(\rho-1)^2(\rho+1)}\sigma^2\\
&+\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\cdot\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2}\sigma^2\\
&+\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\cdot\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\sigma^2\Big\}\\
&+\Big(\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})}{(1-\rho)^2}\Big)^2\sigma^2+\Big(\frac{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]-\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\Big)^2\sigma^2+\Big(\frac{\rho^2(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\Big)^2\sigma^2\Big]
\end{aligned}
$$

R 為供應商收到的需求與對上游訂購的差異變異數。

4.1.4 原料商之長鞭效應

第四階原料商在收到供應商的需求$D^{(4)}{}_t$，經由存貨政策，決定其訂購量$Y^{(4)}{}_t$，其由式(3-27)可得供應商之訂購量模式，將其取變異數$Var(Y^{(4)}{}_t)$。使用在 3.3.5 小節，原料商的相關係數 h、e、f 和 g ，可幫助簡化算式。

$$h=\frac{(1-\rho^{l+2})(1-\rho^{L+2})(1-\rho^{L^s+2})}{(1-\rho)^3}$$

$$e=\Big(\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[b-a]+b\Big)$$

$$f=\Big(\frac{\rho\ (1-\rho^{L^s+1})}{1-\rho}[c-b]+c\Big)$$

$$g=-\frac{\rho^3(1-\rho^{L^s+1})(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^3}$$

$$Var(Y^{(4)}{}_t)=Var(D^{(4)}{}_t)+(\frac{\rho(1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho})^2\cdot Var(D^{(4)}{}_t-D^{(4)}{}_{t-1})+2\frac{\rho(1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho}\cdot \mathrm{cov}(D^{(4)}{}_t-D^{(4)}{}_{t-1},D^{(4)}{}_t)$$

其中

$$Var(Y^{(3)}{}_t)=Var(D^{(4)}{}_t)=Var(D^{(4)}{}_{t\text{-}1})$$

$$\begin{aligned}
&Var(D^{(4)}{}_t-D^{(4)}{}_{t-1})\\
&=Var(d+(\rho\text{-}1)D^{(4)}{}_{t-1}+h\varepsilon_t+e\varepsilon_{t-1}+f\varepsilon_{t-2}+g\varepsilon_{t-3})\\
&=Var(d)+(\rho\text{-}1)^2Var(D^{(4)}{}_{t-1})+h^2\cdot Var(\varepsilon)+e^2\cdot Var(\varepsilon)+f^2\cdot Var(\varepsilon)+g^2\cdot Var(\varepsilon)\\
&=(1-\rho)^2\cdot[Var(D^{(3)}{}_t)+\mathrm{R}]+h^2\sigma^2+e^2\sigma^2+f^2\sigma^2+g^2\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(D^{(4)}{}_t-D^{(4)}{}_{t-1},D^{(4)}{}_t)\\
&=E[(D^{(4)}{}_t-D^{(4)}{}_{t-1})\cdot D^{(4)}{}_t]-E(D^{(4)}{}_t-D^{(4)}{}_{t-1})\cdot E(D^{(4)}{}_t)\\
&=E(d\cdot D^{(4)}{}_t+(\rho-1)D^{(4)}{}_{t-1}\cdot D^{(4)}{}_t+h\varepsilon_t\cdot D^{(4)}{}_t+e\varepsilon_{t-1}\cdot D^{(4)}{}_t+f\varepsilon_{t-2}\cdot D^{(4)}{}_t+g\varepsilon_{t-3}\cdot D^{(4)}{}_t)\\
&=\frac{d^2}{1-\rho}+(\rho-1)E(D^{(4)}{}_{t-1}\cdot D^{(4)}{}_t)+hE(\varepsilon_t\cdot D^{(4)}{}_t)+eE(\varepsilon_{t-1}\cdot D^{(4)}{}_t)+fE(\varepsilon_{t-2}\cdot D^{(4)}{}_t)+gE(\varepsilon_{t-3}\cdot D^{(4)}{}_t)\\
&=\frac{d^2}{1-\rho}+(\rho-1)\cdot(\frac{d^2}{1-\rho}+\rho\cdot[Var(D^{(4)}{}_{t-1})+(\frac{d}{1-\rho})^2]+eh\sigma^2+fe\sigma^2+gf\sigma^2)+h^2\sigma^2+e^2\sigma^2+f^2\sigma^2+g^2\sigma^2\\
&=(\rho-1)\cdot[\rho\cdot Var(D^{(4)}{}_{t-1})+eh\sigma^2+fe\sigma^2+gf\sigma^2)+h^2\sigma^2+e^2\sigma^2+f^2\sigma^2+g^2\sigma^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(Y^{(4)}{}_t)&=Var(D^{(4)}{}_t)+(\frac{\rho(1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho})^2\cdot((1-\rho)^2\cdot[Var(D^{(3)}{}_t)+\mathrm{R}]+h^2\sigma^2+e^2\sigma^2+f^2\sigma^2+g^2\sigma^2)\\
&+2\frac{\rho(1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho}\cdot((\rho-1)\cdot[\rho\cdot Var(D^{(4)}{}_{t-1})+eh\sigma^2+fe\sigma^2+gf\sigma^2)+h^2\sigma^2+e^2\sigma^2+f^2\sigma^2+g^2\sigma^2)
\end{aligned}\tag{4-4}$$

即可得出

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}\\
&=(\frac{\rho(1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho})^2\cdot((1-\rho)^2\cdot[Var(D^{(3)}{}_t)+\mathrm{R}]+h^2\sigma^2+e^2\sigma^2+f^2\sigma^2+g^2\sigma^2)\\
&+2\frac{\rho(1-\rho^{L^z+1})}{1-\rho}\cdot((\rho-1)\cdot(\rho\cdot Var(D^{(4)}{}_{t-1})+eh\sigma^2+fe\sigma^2+gf\sigma^2)+h^2\sigma^2+e^2\sigma^2+f^2\sigma^2+g^2\sigma^2)
\end{aligned}$$

S 為原料商收到的需求與對上游訂購的差異變異數。

4.1.5 長鞭效應現象

由 4.1.1~4.14 小節可以得知，各階變異數推導並且得到需求量變異數:$Var\left(D^{(1)}{}_t\right)$、$Var\left(D^{(2)}{}_t\right)$、$Var\left(D^{(3)}{}_t\right)$、$Var(D^{(4)}{}_t)$ 與訂購量變異數: $Var\left(Y^{(1)}{}_t\right)$、$Var\left(Y^{(2)}{}_t\right)$、$Var\left(Y^{(3)}{}_t\right)$、$Var(Y^{(4)}{}_t)$。而得到需求與對上游訂購的差異變異數 P、Q、R、S，關係式如下：

$$
\begin{aligned}
Var(Y^{(1)}{}_t) &= Var(D^{(1)}{}_t) + \mathrm{P} > Var(D^{(1)}{}_t) \\
Var(Y^{(2)}{}_t) &= Var(D^{(2)}{}_t) + \mathrm{Q} > Var(D^{(2)}{}_t) \\
Var(Y^{(3)}{}_t) &= Var(D^{(3)}{}_t) + \mathrm{R} > Var(D^{(3)}{}_t) \\
Var(Y^{(4)}{}_t) &= Var(D^{(4)}{}_t) + \mathrm{S} > Var(D^{(4)}{}_t)
\end{aligned}
$$

由上式得知當$0 < \rho < 1$時，從零售商收到市場需求，到傳遞給製造商的訂單，訂單變異的幅度$Var(Y^{(1)}{}_t) > Var(D^{(1)}{}_t)$，意味著製造商從零售商收到的訂單以不同於市場需求，訊息已經扭曲，存在著長鞭效應，此部分在 Lee et al. (1997) 已有說明。

而本研究接續推導可觀察出 P、Q、R、S，証明了在各階廠商中，皆有長鞭效應的存在，並且可知會影響長鞭效應的重要參數為各階廠商的前置時間l、L、L^s、L^z，自我相關係數ρ與標準差σ。

因此本研究可以探討

4.1.5.1 ρ對長鞭效應的影響

4.1.5.2 σ對長鞭效應的影響

4.1.5.3 前置時間l、L、L^s、L^z對長鞭效應的影響

4.1.5.1 ρ對長鞭效應的影響

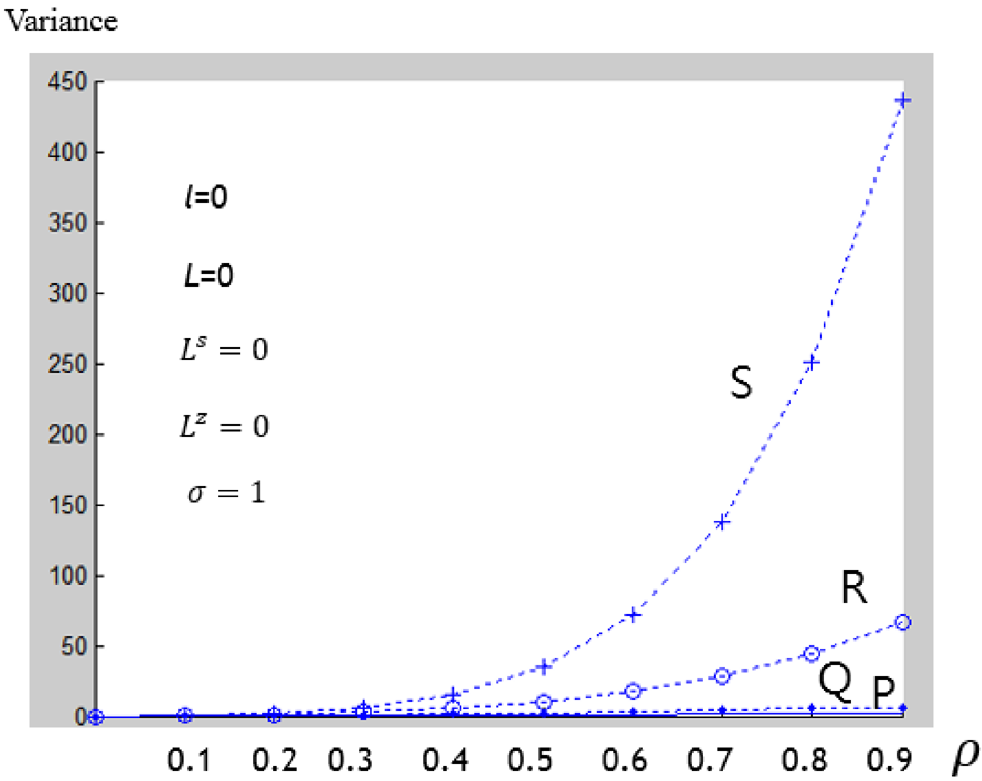

圖 4.1 廠商變異數差異與ρ之曲線圖($\sigma = 1$, Lead time = 0)

資料來源: 本研究

由圖 4.1 可觀察出隨著供應鏈中廠商之階層數的提高，越上游其變異數越是顯著，在ρ趨近於 1 時，第四階原料商其差異是大於其他廠商的。除了各階原本需求的變異數$Var(D_t)$ 外，P、Q、R 與 S 所顯現的長鞭效應影響，在ρ上升時，其影響性也會增加。

在市場上的意義來說，如果$\rho = 0$， 代入 P、Q、R 和 S 得到相同值 0，也就是$Var({D^1}_t) = Var({Y^1}_t)$、$Var({D^2}_t) = Var({Y^2}_t)$、$Var({D^3}_t) = Var({Y^3}_t)$、$Var({D^4}_t) = Var({Y^4}_t)$，長鞭效應即不存在。自我相關係數ρ代表著廠商對於前一期收到的需求量將採計多少的相關性，而然過於信賴前一期的需求量將正相關性提高，會使得需求被放大，上游廠商收到扭曲後的需求量，而由圖 4.1 觀察出ρ對長鞭效應的影響是指數成長的狀態，意味著過於信賴前一期的需求，扭曲後指數成長的需求，會層層傳遞至最上游原料商，各廠商間即使無前置時間的影響，也可以看出最上游的廠商其變異程度的增高。

4.1.5.2 σ對長鞭效應的影響

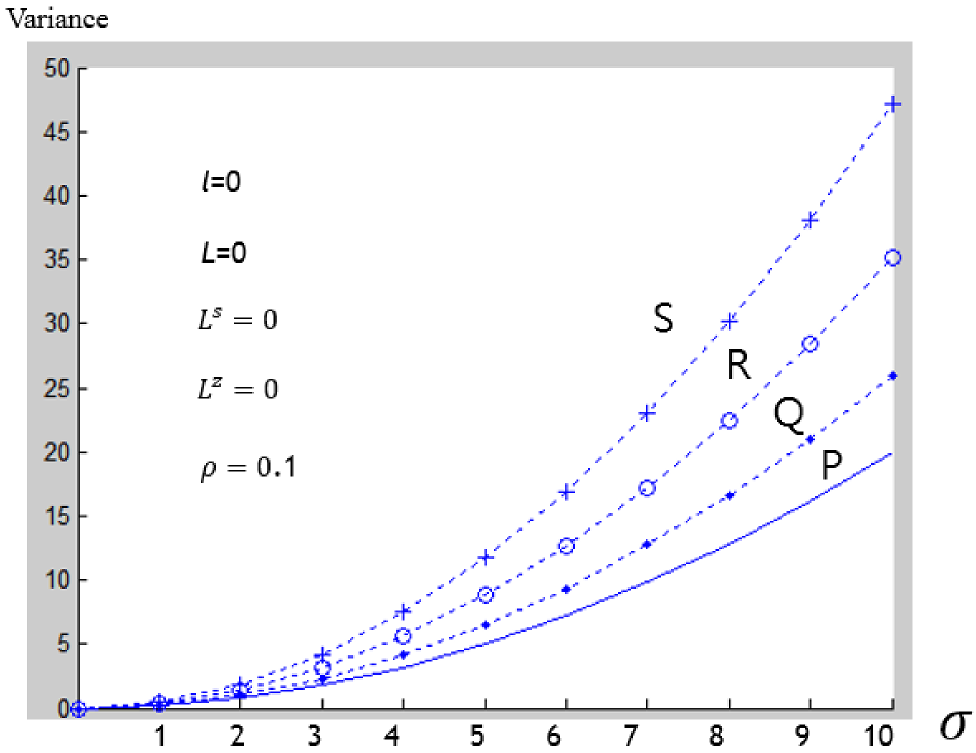

圖 4.2 廠商變異數差異與σ之曲線圖($\rho = 0.1$, Lead time $= 0$)

資料來源: 本研究

標準差σ為影響長鞭效應的重要參數，由公式 P、Q、R 與 S 觀察可知。由圖 4.2 可看出$\rho = 0.1$, Lead time $= 0$的情況下，將前置時間調降至零去除前置時間的變因，而受自我相關係數ρ的影響較小，四階層廠商σ的變異程度趨勢為穩定指數向上成長， 相較於ρ對長鞭效應的影響，各階廠商的級距沒有相差太多。

對於市場的意義來說，標準差σ代表著市場需求的不確定性，標準差σ大表示市場的波動幅度大，越無法藉由下游給予的需求量判斷存貨上限，容易錯判市場情勢，並且層層傳遞給最上游原料商增加長鞭效應。而$\sigma = 0$，P、Q、R 和 S 也為 0，即沒有長鞭效應的影響，由此可知，只要市場需求存在著不確定性，長鞭效應就無法消除。

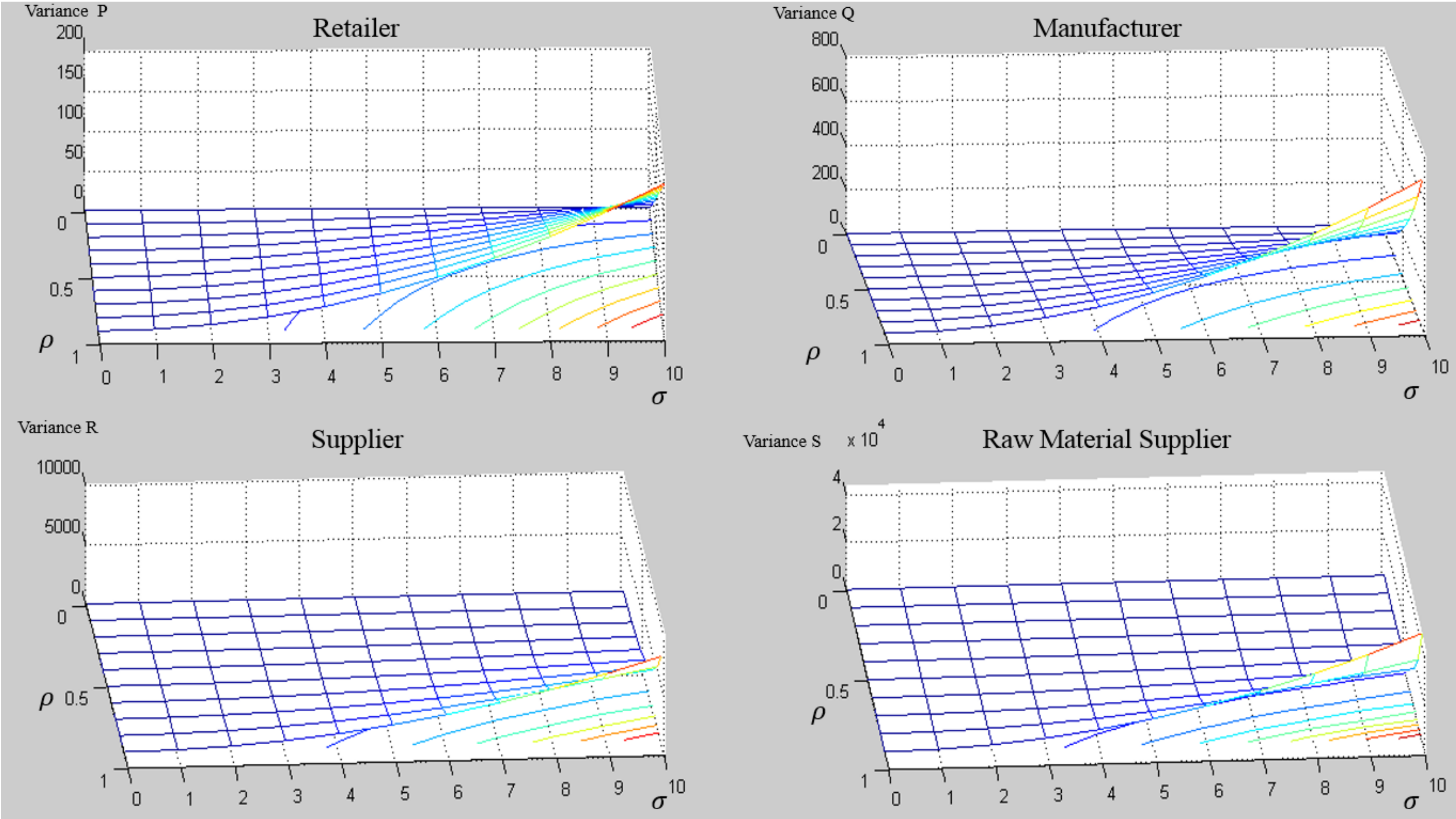

圖 4.3 廠商變異數差異之立體曲面圖(Lead time = 0)

資料來源: 本研究

圖 4.3 立體曲面圖下方畫著等高線，在$\text{Lead time} = 0$的情況下，我們同時觀察ρ、σ，與變異數的變化。由圖中可知在自我相關係數ρ越大，越趨近於 1 與標準差σ上升時，廠商的所承受的變異也就越大，證明標準差σ與自我相關係數ρ相互的影響至深，並且由上圖的等高線可以觀察出越上游廠商級距也越來越小，表示著變異數的成長之快速。

在市場上的意義來說，假設標準差σ表示市場波動幅度，σ升高，市場不穩定的情況下，此時過於相信前一期下游給予之需求量，將會使廠商預測這一期需求的變異程度升高，導致預測不準確性。並且由上圖可知長鞭效應的影響 PQRS，層層傳遞至上游，下游廠商如不能準確預測市場需求，也就是在市場不確定性高時，過於相信過去的市場需求量，最上游廠商將會受到牽連其預測的需求量將會急遽增加變異性。

4.1.5.3 前置時間$\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{L^s}$、$\boldsymbol{L^z}$對長鞭效應的影響

由 4.1.5.1 和 4.1.5.2 小節可以了解，自我相關係數ρ、標準差σ對於市場的重要性，並且由前文可知，即使沒有前置時間 ($l = L = L^s = L^z = 0$)，依然會有長鞭效應的存在，本小節將加入前置時間一起探討，前置時間的多寡使否影響其變異數。

設四階廠商的前置時間均相同$l = L = L^s = L^z$，下圖 4.4 立體曲面圖觀察出前置時間、標準差與變異數的變化。在同為$\rho = 0.1$ 的情況下，可由等高線觀察到前置時間，前置時間在短期時，會影響著變異數並向上成長，但長時間後趨近於穩定的狀態。由此可知，前置時間影響著長鞭效應。圖 4.5 將ρ上升至 0.5 後，除了變異數受ρ影響升高外，需要趨近於穩定的時間也需要更多。

在市場上的意義來說，前置時間可以消除是最好的，可以快速滿足下游顧客訂單，有效的降低庫存水準，其需要預測訂單的區間也能縮短，避免預測的不準確性。

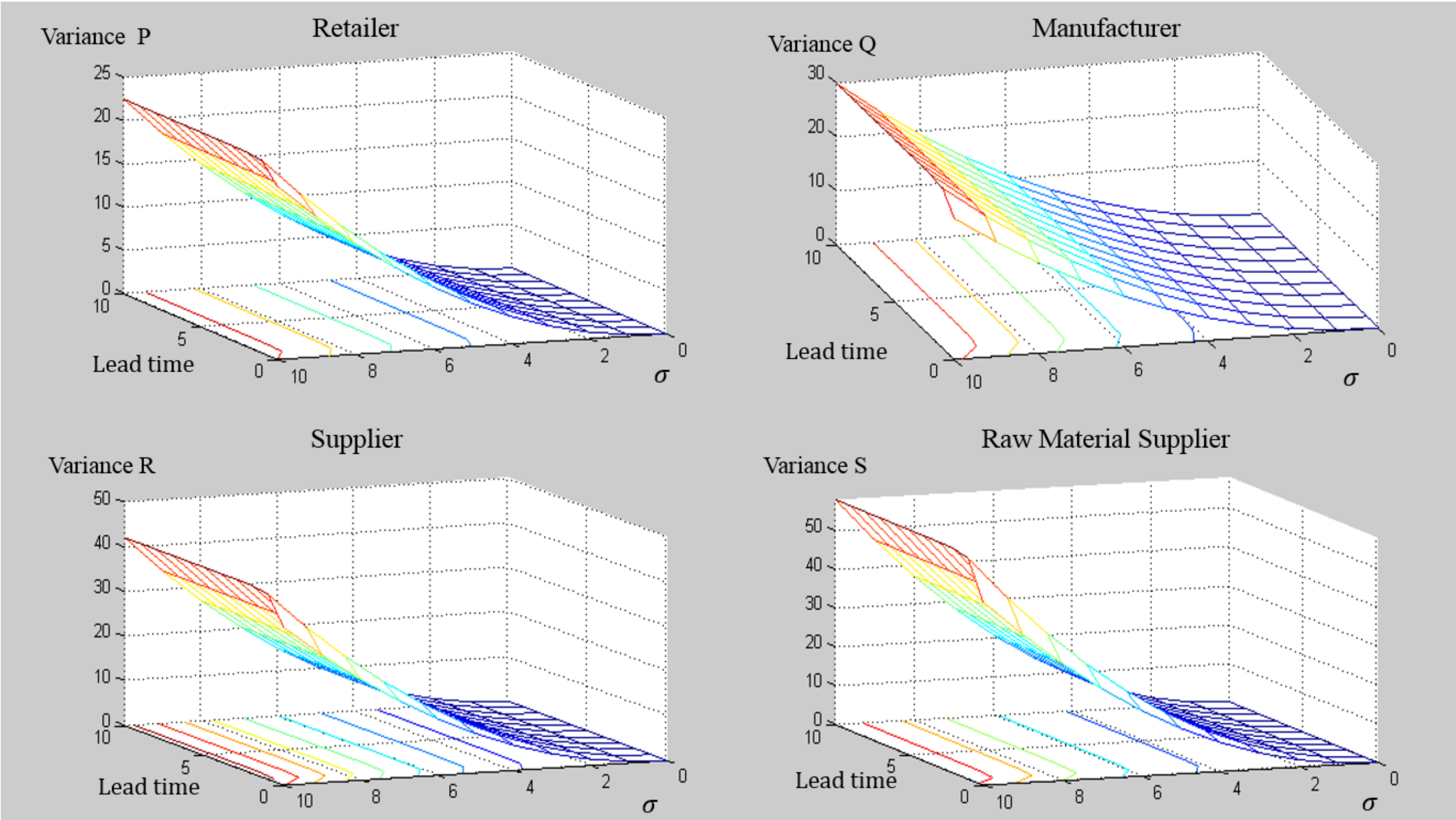

圖 4.4 廠商變異數差異之立體曲面圖($\rho = 0.1$)

資料來源: 本研究

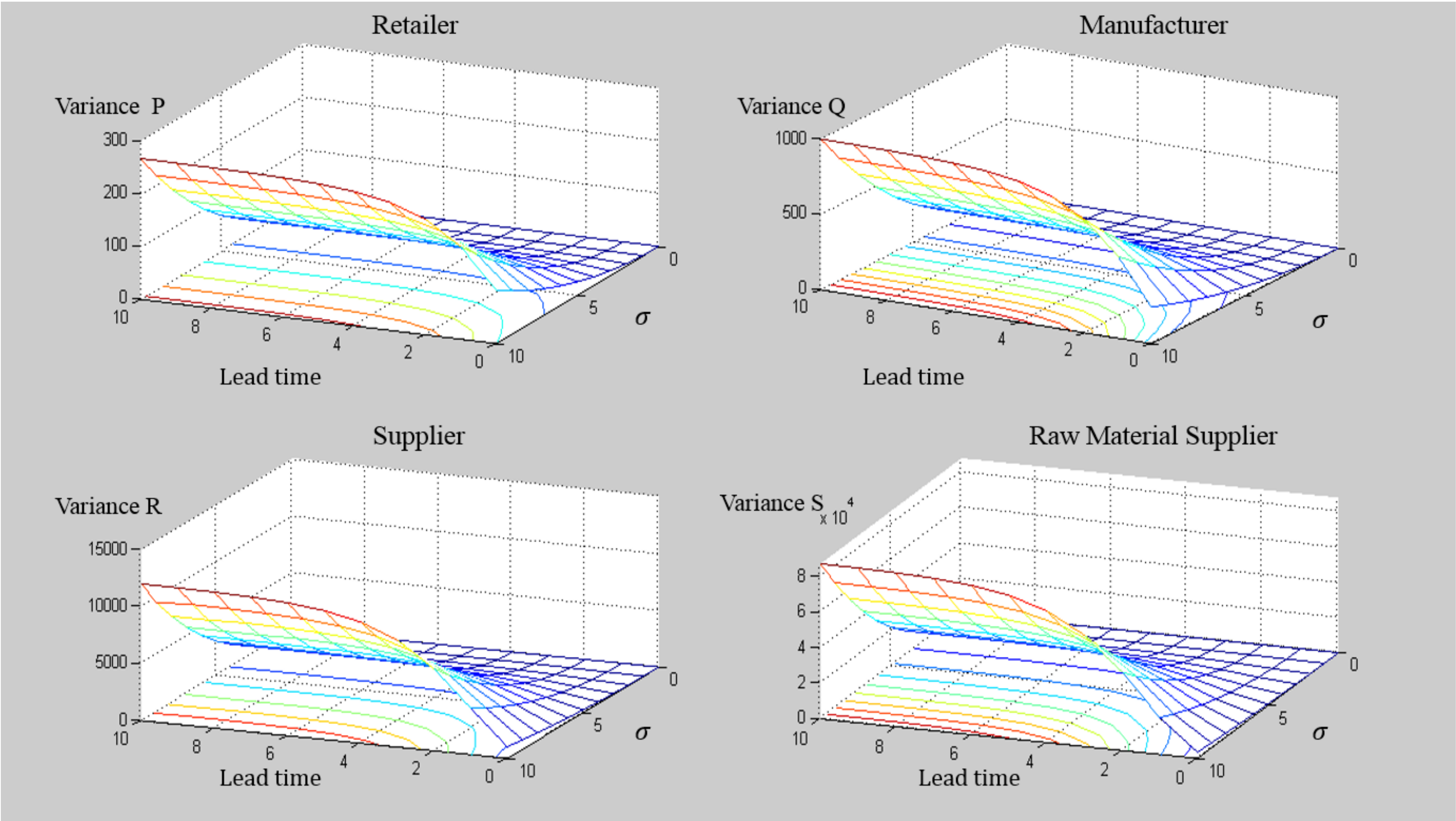

圖 4.5 廠商變異數差異之立體曲面圖($\rho = 0.5$)

資料來源: 本研究

4.2 資訊分享的效益

由 4.1 節可知供應鏈中各階廠商皆有長鞭效應的存在，並且隨著階層數的增加，嚴重影響著廠商預測需求的準確性，長鞭效應確實存在著。因此本研究使用資訊分享的方法，減緩長鞭效應並以觀察各階廠商在資訊分享前後的存貨的變化。

第三章可得知在無資訊分享下的存貨政策，除了原本的訂單資訊外，資訊分享後可以得知市場的需求，也就是原本預測的誤差可以得到修正，示意如圖 4.6 如下。

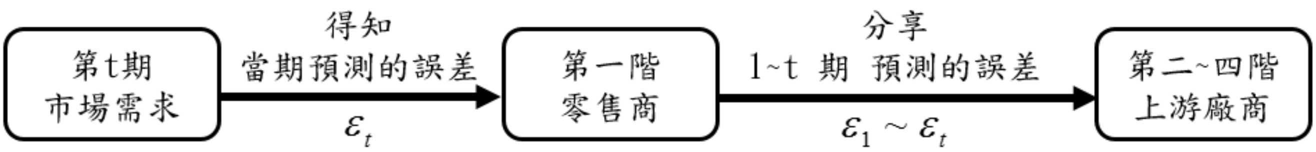

圖 4.6 資訊分享示意圖

資料來源: 本研究

由第三章推導得知，在無資訊分享下一~四階廠商的存貨水準，分別為式 3-4、式 3-11、式 3-18 與式 3-25。在零售商願意分享市場需求，讓上游廠商除了擁有下游的訂購量可以參考之外，也能獲得市場需求進行考量，因此在資訊分享後上游廠商的存貨水準會有所修正。

第二階製造商在資訊分享後的存貨水準為式 (4-5)，由數學模式中可看出當期存貨誤差項ε_t的變異性已消除。

$$T_{\text{full}}{}^{(2)}{}_t = \frac{d}{1-\rho}\left\{(L+1)-\frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho}\right\}+\frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})}{1-\rho}D^{(2)}{}_t-\frac{\rho\ (1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^2}\varepsilon_t + k\sigma\sqrt{\frac{(1-\rho^{l+2})^2}{(1-\rho)^2}+\frac{1}{(1-\rho)^2}\sum_{i=1}^{L}\ (1-\rho^{L+l+3-i})^2} \tag{4-5}$$

第三階供應商在資訊分享後的存貨水準為式 (4-6)，由數學模式中可看出當期存貨誤差項ε_t、ε_{t-1}的變異性已消除。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T_{full}}^{(3)}{}_{t} &= \frac{d}{1-\rho}\left\{(L^{s}+1)-\frac{\rho\ (1-\rho^{L^{s}+1})}{1-\rho})\right\}+\frac{\rho\ (1-\rho^{L^{s}+1})}{1-\rho}D^{(3)}{}_{t} \\
&+\frac{1}{(1-\rho)}(1-\rho^{L^{s}+1})\ \frac{\{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]\}\ -\{\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)\}}{(1-\rho)^{2}}\varepsilon_{t} \\
&+\frac{1}{(1-\rho)}(1-\rho^{L^{s}})\ \left\{\frac{\rho^{2}(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^{2}}\right\}\ \varepsilon_{t}+\frac{(1-\rho^{L^{s}+1})}{(1-\rho)}\left\{\frac{\rho^{2}(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^{2}}\right\}\varepsilon_{t-1} \\
&+k\sigma\sqrt{\left\{\begin{aligned}&\frac{\{(1-\rho^{l+2})\ [\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]\}^{2}}{(1-\rho)^{4}}+\frac{1}{(1-\rho)^{2}}\sum_{i=1}^{L^{s}}(1-\rho^{L^{s}+2\text{-}i})^{2}\ \frac{\{(1-\rho^{l+2})[\rho(1-\rho^{L+1})+1-\rho]\}^{2}}{(1-\rho)^{4}} \\
&+\frac{1}{(1-\rho)^{2}}\sum_{i=2}^{L^{s}+1}(1-\rho^{L^{s}+2\text{-}i})^{2}\ \frac{\{\rho(1-\rho^{L+1})[2\rho^{l+2}-\rho-1]\}^{2}-\{\rho(1-\rho^{l+1})(1-\rho)\}^{2}}{(1-\rho)^{4}} \\
&+\frac{1}{(1-\rho)^{2}}\sum_{i=2}^{L^{s}}(1-\rho^{L^{s}+1\text{-}i})^{2}\left\{\frac{\rho^{2}(1-\rho^{L+1})(1-\rho^{l+1})}{(1-\rho)^{2}}\right\}^{2}\end{aligned}\right\}}
\end{aligned}
\tag{4-6}
$$

第四階原料商在資訊分享後的存貨水準為式 (4-7)，由數學模式中可看出當期存貨誤差項ε_t、ε_{t-1}、ε_{t-2}的變異性已消除。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T_{full}}^{(4)}{}_{t} &= \frac{d}{1-\rho}\left\{(L^{z}+1)-\frac{\rho\ (1-\rho^{L^{z}+1})}{1-\rho})\right\}+\frac{\rho\ (1-\rho^{L^{z}+1})}{1-\rho}D^{(4)}{}_{t} \\
&+\frac{1}{1-\rho}(1-\rho^{L^{z}+1})e\varepsilon_{t}+\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{2}(1-\rho^{L^{z}+2\text{-}i})f\varepsilon_{t+i\text{-}2} \\
&+\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{2}(1-\rho^{L^{z}+1\text{-}i})\{g\}\varepsilon_{t+i\text{-}2}+\frac{(1-\rho^{L^{z}+1})}{1-\rho}\{g\}\varepsilon_{t-2} \\
&+k\sigma\sqrt{\left\{\begin{aligned}&h^{2}+[\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{L^{z}}(1-\rho^{L^{z}+2\text{-}i})h]^{2}+[\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=2}^{L^{z}+1}(1-\rho^{L^{z}+2\text{-}i})e]^{2} \\
&+[\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=3}^{L^{z}+1}(1-\rho^{L^{z}+2\text{-}i})f]^{2}+[\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=3}^{L^{z}}(1-\rho^{L^{z}+1\text{-}i})\{g\}]^{2}+[\frac{(1-\rho^{L^{z}+1})}{1-\rho}\{g\}]^{2}\end{aligned}\right\}}
\end{aligned}
\tag{4-7}
$$

在得知資訊分享前後的存貨水準後，將針對在 4.1 提到影響長鞭效應的重要參數ρ、σ與前置時間進行觀察，了解在資訊分享後各階廠商的庫存變化。

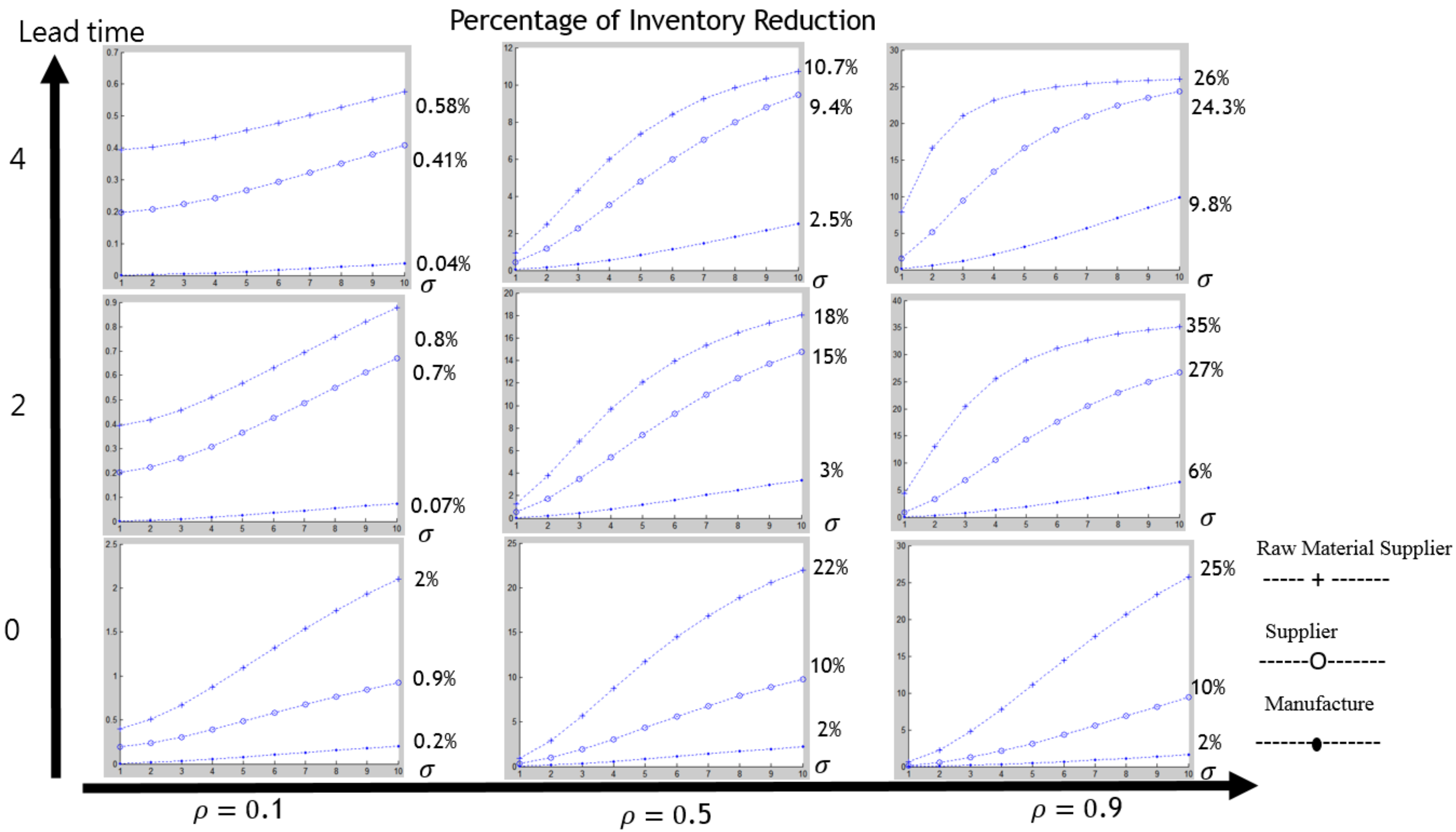

圖 4.7 資訊分享後，上游廠商庫存減少百分比圖

資料來源: 本研究

上圖 4.7 設參數平均需求 d=100，各階廠商持有成本 20、缺貨成本為 100 可繪製出在資訊分享後，庫存減少百分比圖。

圖 4.7 可以得知以下幾點：

1. 資訊分享有助於上游廠商減少持有庫存，越上游的廠商能減少更多因長鞭效應所產生的過多的庫存。
2. 標準差σ越高，越有利於資訊分享，因為市場需求不穩定的情況下，廠商的預測需求量不準確度高，此時供應鏈廠商間的合作，可幫助減緩長鞭效應，增加預測需求量準確度。
3. 自我相關係數ρ越高，越有利於資訊分享，因受長鞭效應的影響越信賴下游廠商給予之需求量，所繼承的長鞭效應越多，但獲得市場需求後的上游廠商來說，能針對市場需求進行更準確的存貨決策。
4. 前置時間一旦存在，其受自我相關係數ρ和標準差σ影響，產生交互作用，影響存貨的波動。

第五章 結論與建議

5.1 結論

本研究探討以推導數學模型的方式，推導出四階層供應鏈的架構，以此為基礎探討四階層供應鏈中長鞭效應對零售商、製造商、供應商與原料商的變化，從推導的結果中觀察到了影響長鞭效應的關鍵因子。並以資訊分享的方式，了解分享市場需求是否能有效的幫助供應鏈中的各個廠商降低存貨，進一步提出其可能原因。

為此本研究的貢獻為：

1. 以市場需求為 AR(1)模式，彌補過去研究的不足，考量前置時間。
2. 提出四階供應鏈分析模式，突破過往資訊分享只專注於零售商與製造商的研究。
3. 推導出各階廠商在收到下游需求後與向上游訂購的變異數差異 P、Q、R 和 S > 0，證明長鞭效應在供應商和原料商也是存在的。
4. 得出影響長鞭效應的關鍵因子為自我相關係數ρ、標準差σ與前置時間 l、L、L^s、L^z。
   (1) 當自我相關係數ρ與標準差σ相同時，各廠商變異數差異 S > R > Q >P，也就是第四階原料商受長鞭效應影響最深，其排序為原料商 ＞ 供應商 ＞ 製造商 ＞ 零售商。
   (2) 當自我相關係數ρ與標準差σ上升時，供應鏈全體廠商受長鞭影響會一同上升。
   (3) 前置時間雖然影響長鞭效應，但長時間後會趨近於穩定。
5. 分享市場需求可幫助第二~四階上游廠商降低存貨，減少長鞭效應。
   (1) 過去文獻執著於製造商應分享利潤給零售商，但研究結果證明供應商與原料商更能受益。
   (2) 資訊分享之效益為原料商 ＞ 供應商 ＞ 製造商。

長鞭效應強烈影響著高階供應商，即本研究的第三階供應商與第四階原料商，由結果可得知影響長鞭效應的關鍵因子為自我相關係數ρ、標準差σ與前置時間l、L、L^s、L^z，越高階的廠商受影響越深。而資訊分享確實可以幫助廠商降低存貨水準，減少預測上的誤差，此點過去的研究有提出過資訊分享的好處,但本研究顯示資訊分享在高階供應商能有更明顯的幫助,在市場不穩定和下游廠商過於信賴市場需求的情況下，甚至能幫助原料商達到 35%存貨。

本研究不同過去二階供應鏈的研究，只著重在零售商與製造商的資訊分享。本研究呼應現實社會中，在製造商為 OEM (Original Equipment Manufacturer)的情況下,即使零售商分享資訊給製造商,其可得的利潤也遠遠不及上游廠商。本研究結果顯示在資訊分享下，既得利益者供應商與原料商，在資訊分享下比製造商少 5~10 倍的存貨。因此製造商應積極地往 ODM (Original Design Manufacturer)發展,減少供應鏈的階層數,降低成本,才能分享更多利潤給零售商。

5.2 未來研究方向

本研究所討論的供應鏈結構,是以一些假設前提下所推導建立而成,因此有以下幾點的建議 :

1. 本研究是以數學模型 AR(1)為市場需求推導而成,未來可採用 ARIMA 為模型，可獲得更多的下游廠商或是市場資訊，以貼近現實的需求型態。
2. 本研究採用的存貨政策為 order-up-to inventory policy，四階層廠商皆以相同的存貨政策，因此未來的研究可以採用不同的存貨政策。
3. 本研究的四階層供應鏈，每一階層只探討單一廠商，而現實的供應鏈，則處於多廠商負責供應或銷售，未來可以模擬或以建置系統的方式探討高階廠商資訊分享的效益。
4. 建議未來能以實際的資料進行討論，則能有更準確的分析。

參考文獻

吳銘哲 (2014)。**各類資訊分享的供應鏈模擬器之設計與分析**(碩士論文)。東海大學，台中市。

林芸甄 (2012)。**供應鏈中資訊分享對企業夥伴利潤效益之研究**(碩士論文)。東海大學，台中市。

Agrawal, S., Sengupta, R. N., & Shanker, K. (2009). Impact of information sharing and lead time on bullwhip effect and on-hand inventory. European Journal of operational research, 192(2), 576-593.

Aharon, B.-T., Boaz, G., & Shimrit, S. (2009). Robust multi-echelon multi-period inventory control. European Journal of operational research, 199(3), 922-935.

Alony, I., & Munoz Aneiros, A. (2007). The Bullwhip effect in complex supply chains.

Babai, M., Ali, M. M., Boylan, J. E., & Syntetos, A. A. (2013). Forecasting and inventory performance in a two-stage supply chain with ARIMA (0, 1, 1) demand: Theory and empirical analysis. *International Journal of Production Economics, 143*(2), 463-471.

Bayraktar, E., Koh, S. L., Gunasekaran, A., Sari, K., & Tatoglu, E. (2008). The role of forecasting on bullwhip effect for E-SCM applications. *International Journal of Production Economics, 113*(1), 193-204.

Bhattacharya, R., & Bandyopadhyay, S. (2011). A review of the causes of bullwhip effect in a supply chain. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 54*(9-12), 1245-1261.

Chandra, C., & Grabis, J. (2005). Application of multi-steps forecasting for restraining the bullwhip effect and improving inventory performance under autoregressive demand. *European Journal of operational research, 166*(2), 337-350.

Croson, R., & Donohue, K. (2003). Impact of POS data sharing on supply chain management: an experimental study. *Production and Operations management, 12*(1), 1-11.

Disney, S. M., & Towill, D. R. (2003). Vendor-managed inventory and bullwhip reduction in a two-level supply chain. *International Journal of Operations & Production Management, 23*(6), 625-651.

Forrester, J. (1961). Industrial Dynamics.

Ganesh, M., Raghunathan, S., & Rajendran, C. (2014). The value of information sharing in a multi-product, multi-level supply chain: Impact of product substitution, demand correlation, and partial information sharing. *Decision Support Systems, 58*, 79-94.

Gaur, V., Giloni, A., & Seshadri, S. (2005). Information sharing in a supply chain under ARMA demand. *Management science, 51*(6), 961-969.

Geary, S., Disney, S. M., & Towill, D. R. (2006). On bullwhip in supply chains—historical review, present practice and expected future impact. *International Journal of Production Economics, 101*(1), 2-18.

Heydari, J., Kazemzadeh, R. B., & Chaharsooghi, S. K. (2009). A study of lead time variation impact on supply chain performance. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 40*(11-12), 1206-1215.

Hillier, F. S. (1995). *Introduction to operations research*: Tata McGraw-Hill Education.

Huang, L., & Liu, Y. (2008). *Supply chain dynamics under the sustainable development.* Paper presented at the Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2008. WiCOM'08. 4th International Conference on.

Hugos, M. H. (2011). *Essentials of supply chain management* (Vol. 62): John Wiley & Sons.

Jakšič, M., & Rusjan, B. (2008). The effect of replenishment policies on the bullwhip effect: A transfer function approach. *European Journal of operational research, 184*(3), 946-961.

Lee, H. L., Padmanabhan, V., & Whang, S. (1997). The bullwhip effect in supply chains1. *Sloan management review, 38*(3), 93-102.

Lee, H. L., Padmanabhan, V., & Whang, S. (2004). Information distortion in a supply chain: the bullwhip effect. *Management science, 50*(12_supplement), 1875-1886.

Lee, H. L., So, K. C., & Tang, C. S. (2000). The value of information sharing in a two-level supply chain. *Management science, 46*(5), 626-643.

LiBo, Z., & Qin, Z. (2007). *A comparison of system dynamics between time-based and quantity-based VMI consolidation replenishment system.* Paper presented at the Grey Systems and Intelligent Services, 2007. GSIS 2007. IEEE International Conference on.

Liu, Z., Zhao, Q., Wang, S., & Shi, J. (2013). Modeling The Impact Of Partial Information Sharing In A Three-Echelon Supply Chain. *Asia-Pacific Journal of Operational Research, 30*(05), 1350020.

Moyaux, T., Chaib-Draa, B., & Amours, S. D. (2007). Information sharing as a coordination mechanism for reducing the bullwhip effect in a supply chain. *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on, 37*(3), 396-409.

Raghunathan, S. (2001). Information sharing in a supply chain: A note on its value when demand is nonstationary. *Management science, 47*(4), 605-610.

Ryu, S.-J., Tsukishima, T., & Onari, H. (2009). A study on evaluation of demand information-sharing methods in supply chain. *International Journal of Production Economics, 120*(1), 162-175.

Silver, E., Pyke, D. F., & Peterson, R. (1998). Inventory management and production planning and scheduling.

Sohn, S. Y., & Lim, M. (2008). The effect of forecasting and information sharing in SCM for multi-generation products. *European Journal of operational research, 186*(1), 276-287.

Steckel, J. H., Gupta, S., & Banerji, A. (2004). Supply chain decision making: Will shorter cycle times and shared point-of-sale information necessarily help? *Management science, 50*(4), 458-464.

Su, C.-T., & Wong, J.-T. (2008). Design of a replenishment system for a stochastic dynamic production/forecast lot-sizing problem under bullwhip effect. *Expert Systems with Applications, 34*(1), 173-180.

Sun, H., & Ren, Y. (2005). *The impact of forecasting methods on bullwhip effect in supply chain management.* Paper presented at the Proceedings of the 2005 Engineering Management Conference.

Wang, X., Liu, Z., Zheng, C., & Quan, C. (2008). *The impact of lead-time on bullwhip effect in supply chain.* Paper presented at the Computing, Communication, Control, and Management, 2008. CCCM'08. ISECS International Colloquium on.

Wu, D. Y., & Katok, E. (2006). Learning, communication, and the bullwhip effect. *Journal of Operations Management, 24*(6), 839-850.

Yu, Z., Yan, H., & Cheng, T. (2002). Modelling the benefits of information sharing-based partnerships in a two-level supply chain. *Journal of the Operational Research Society, 53*(4), 436-446.

Yu, Z. X., Yan, H., & Cheng, T. C. E. (2001). Benefits of information sharing with supply chain partnerships. *Industrial Management & Data Systems, 101*(3-4), 114-119. doi: 10.1108/02635570110386625

Zhang, X. (2004). Evolution of ARMA demand in supply chains. *Manufacturing & Service Operations Management, 6*(2), 195-198.

Zhao, W., & Wang, D. (2008). *Application of information sharing to bullwhip effect restraining.* Paper presented at the 2008 Chinese Control and Decision Conference.

Zhao, X., Xie, J., & Leung, J. (2002). The impact of forecasting model selection on the value of information sharing in a supply chain. *European Journal of operational research, 142*(2), 321-344.