

東 海 大 學

工業工程與經營資訊研究所

碩士論文

在考量委外倉儲成本與運輸數量折扣下
生產存貨系統的最佳聯合補貨策略



研 究 生：何 陽

指 導 老 師：姚銘忠 博士

曾宗瑤 博士

中 華 民 國 九 十 六 年 六 月

**On the Optimal Joint Replenishment Strategy in a
Production-Inventory System Considering Transportation
Discounts and Subcontract Warehouse Space Costs**

By
Yang Ho

Advisor: Prof. Ming-Jong Yao
Prof. Tzung-Yao Tseng

A Thesis
Submitted to the Institute of Industrial Engineering and Enterprise
Information at Tunghai University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
in
Industrial Engineering and Enterprise Information

June 2007
Taichung , Taiwan , Republic of China

在考量委外倉儲成本與運輸數量折扣下生產存貨系統的最佳聯合補貨策略

學生：何 陽

指導教授：姚銘忠

曾宗瑤

東海大學工業工程與經營資訊研究所

摘要

本研究乃是探討在一個生產/存貨系統中，製造商向單一供應商提出協調多種原物料聯合補貨的策略，以利運用多種原物料產製一種完成品以符合客戶的需求。此原物料供應商與製造商在一次聯合補貨的週期中，除須斟酌雙方原物料的持有與訂購成本外，還須考量第三方物流業者提供運輸數量折扣的優惠。另外，因為製造商的倉儲空間有限，可能因超出限額部分的存貨，需租用成本較高的委外倉儲，而增加委外倉儲成本。在上述的情境下，製造商採用聯合補貨的策略，決定最佳的完成品製造週期、各種原物料之聯合補貨週期及週期內的運送次數，以期求得生產存貨系統中最低的平均總存貨成本。本研究先針對上述情境建構數理模式，進行理論分析，並提出遺傳演算法與啟發式演算法兩種方法求算最佳解。本研究依據隨機產生的問題作為數據實驗的基礎，顯示兩方法均有良好的求解效率及解答品質。

關鍵字：聯合補貨，運輸折扣，遺傳演算法，啟發式演算法

On the Optimal Joint Replenishment Strategy in a Production-Inventory System Considering Transportation Discounts and Subcontract Warehouse Space Costs

Student: Yang Ho

Advisor: Prof. Ming-Jong Yao

Prof. Tzung-Yao Tseng

Department of Industrial Engineering and Enterprise Information
Tunghai University

ABSTRACT

This study concerns with a production-inventory system in which the single manufacturer adopts the Joint Replenishment Policy (JRP) to order several kinds of raw materials from the single supplier to produce a finished product to meet consumers' demand. In a joint replenishment cycle, the decision maker needs to take into accounts the following cost terms. First, one should consider the inventory holding and ordering costs of both parties. Also, one should care about the transportation discounts offered by the third party logistic service provider. Furthermore, the additional warehousing costs from leasing extra warehouse space outside will be incurred when the total warehouse space requirement exceeds the limit. The focus of this study is to determine the optimal manufacturing cycle time for the finished product, the optimal joint replenishment cycle time and the optimal number of shipments from the supplier to the manufacturer for each type of raw material so as to minimize the average total costs in this production-inventory system. To solve this problem, we formulate a mathematical model and propose two solution approaches, namely, a genetic algorithm and a search heuristic. Our numerical experiments demonstrate that the proposed solution approaches are effective in both run time and solution quality using randomly generated instances.

Keyword : Joint replenishment, transportation discount, genetic algorithm, heuristic

誌謝

兩年的時間過去，我已順利拿到碩士學位，我想首先我最要感謝我的父母與家人。父母給我最大的支持與無限的包容，沒有父母的支持，我想我無法這麼順利的完成我的求學生涯。這篇論文絕對是獻給我摯愛的雙親。

當然我也要感謝我的指導教授：姚銘忠老師與褚文明老師。除了研究上的指導之外，各種眼界與視野的開拓、做人做事的方法與道理，兩位老師都給我很大的啟發，使我在這兩年間獲益匪淺。感謝兩位老師不辭辛勞的指導與照顧。

兩年的時間裡，研究室同學們的陪伴當然是苦悶研究生涯的快樂良藥。感謝哲鋒與昕煒學長與我在研一時度過的歡樂時光。當然還有欣怡學姊高八度的嗓門我想我永遠也不會忘記。還有綉菱、美翎與嘉合，我們一起完成許多老師老師託付的任務，當然也包括這本論文，感謝你們一路走來的扶持與陪伴。豪哲、亦群、曉嬋、珮甄、正偉，在燃燒生命點亮論文的這幾箇月中，感謝你們在我論文遇到瓶頸時的陪伴與扶持，要是沒有你們，我想完成論文的這條路將只能用「寂寞難耐」來形容。還有很多來不及感謝同學、學弟妹，你們的陪伴與歡笑我想是研究所生涯中永難忘懷的回憶，希望未來的人生路上，我們不時還能聚聚。

最後，也要感謝與我分隔兩地兩年，卻一直非常支持我的女友家華，感謝你的體諒與包容，讓我無憂無慮的唸完兩年研究所，希望妳明年考試加油，一起成為東海人！

目錄

摘要.....	I
ABSTRACT.....	II
誌謝.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	VI
表目錄.....	VII
符號定義.....	VIII
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機	1
1.2 研究問題描述	1
1.3 研究方法與步驟.....	2
1.4 論文架構	3
第二章 文獻探討.....	5
2.1 聯合補貨問題	5
2.1.1 傳統聯合補貨問題與啟發式演算法	6
2.2 與運輸折扣相關之研究	8
2.3 考慮倉儲成本的批量問題	10
2.4 SIAJADI ET AL.(2005)所提出的原物料聯合補貨問題	11
2.5 小結	12
第三章 數學模式推導.....	14
3.1 決策情境	14
3.2 各種設置成本與存貨持有成本的推導	15
3.2.1 完成品的平均總成本	16
3.2.2 原物料 i 的平均總成本	17
3.3 倉儲空間需求與運輸費用計算	19
3.3.1 倉儲空間需求	19
3.3.2 補貨與生產時之倉儲空間需求與額外倉儲成本	20

3.3.3 考慮運輸折扣下的運輸費用計算	22
3.4 數學模式	24
第四章 求解考慮運輸折扣及委外倉儲成本下之聯合補貨問題之啟發式演 算法.....	25
4.1 不考量委外倉儲及運輸成本下聯合補貨模式之解法	25
4.1.1 成本函數圖形與性質分析	26
4.1.2 最佳目標函數上之接合點	28
4.1.3 建立搜尋上界與下界	30
4.2 考慮運輸折扣與委外倉儲的聯合補貨問題之啟發式演算法	39
4.2.1 倉儲空間限制下考慮運輸折扣的聯合補貨問題之啟發式演算法	40
第五章 求解空間限制下聯合補貨問題之遺傳演算法	42
5.1 遺傳演算法求解架構	42
5.1.1 染色體編碼	44
5.1.2 適應性函數與輪盤選擇機制	45
5.1.3 交配與突變	47
5.1.4 參數設定	49
5.1.5 倉儲空間限制下考慮運輸折扣的聯合補貨問題之遺傳演算法	49
第六章 演算法範例與隨機數據實驗	52
6.1 啟發式演算法範例說明	52
6.2 遺傳演算法範例說明	57
6.3 隨機實驗	61
第七章 研究結論.....	66
7.1 結論	66
7.2 未來研究建議	66
參考文獻.....	67
中文部分	67
英文部分	67
附錄 A 考量運輸折扣與委外倉儲成本下的基本週期詳細推導過程	71

圖目錄

圖 1.2 本研究之論文架構.....	4
圖 2.1 Siajedi et al.(2005) 論文的模式描述.....	13
圖 3.1 倉儲空間需求變化示意圖.....	21
圖 4.1 原物料 3 在不同 m_i 值下的 $TC_3^0(m_3, T)$ 函數圖形	27
圖 4.2 $\underline{TC}_i^R(T)$ 函數圖形.....	32
圖 4.3 兩種原物料聯合補貨問題放寬為 $m_i \geq 1$ 後的各項成本函數.....	35
圖 4.4 利用放寬後的可行解 $v(FP)$ 求出搜尋演算法的上界與下界	38
圖 5.1 遺傳演算法流程圖.....	43
圖 5.2 染色體編碼.....	45
圖 5.3 輪盤選擇機制.....	48
圖 5.4 交配.....	48
圖 5.5 突變.....	49
圖 6.1 求解過程中存貨成本最好的解(best on hand)	60

表目錄

表 3.1 運費計算表(修改前).....	23
表 3.2 運費計算表(修改後).....	23
表 5.1 適應值的線性排序正規化.....	47
表 6.1 範例 6.1 的各項資料.....	52
表 6.2 $TC(T)$ 曲線上之接合點.....	52
表 6.3 運輸費用與額外倉儲成本.....	54
表 6.4 不考慮運輸折扣及委外倉儲成本下的區域最佳解	55
表 6.5 考慮倉儲限制與運輸折扣之區域最佳解	56
表 6.6 求解過程中平均總成本的變化	60
表 6.7 各項參數隨機區間.....	62
表 6.8 隨機實驗數據結果.....	62
表 6.9 將存貨持有成本放大後的隨機實驗數據結果	64

符 號 定 義

A :	基本週期中為訂購原物料而產生的主要整備成本
a :	訂購 i 種不同原物料而產生的次要整備成本
A_H :	物料搬運成本
A_p :	完成品整備成本
A_s :	供應商訂購/整備成本
A_T :	透過 indifference breakpoint rate 計算的運輸費用
D :	年需求率(完成品)
G :	完成品配送間隔時間
H :	製造商每年每件的原物料持有成本
HC_{pm} :	製造商每年的原物料持有成本
HC_{pp} :	完成品每年的持有成本
HC_{vm} :	供應商或第三方物流每年的原物料持有成本
H_p :	完成品每年每件的持有成本
H_v :	供應商或第三方物流每年每件的原物料持有成本
H_e :	製造商的委外倉儲成本
k :	進行聯合補貨時的物料種類數
m_i :	訂貨乘數，代表第 i 種物料每隔 m_i 個基本週期訂購一次
n :	在一個基本週期 T 中原物料配送至製造商的次數
P :	年生產率(完成品)
R :	每單位重量的運費計算費率
r_i :	製造一個完成品所需要的物料 i 的數量
s :	完成品運送給顧客的次數
t :	配送循環週期。代表原物料兩次配送的間隔時間
T :	基本循環週期， $T=nt$
TC :	總存貨成本
TC_{pm} :	原物料總存貨成本

TC_{pp} :	完成品總存貨成本
w :	每種物料的重量
x :	配送給顧客的批量大小(固定)
ρ :	完成品所需倉儲空間的乘數

第一章 緒論

1.1 研究背景與動機

本研究主題為在倉儲具空間限制下，生產/存貨系統中考慮運輸折扣影響的聯合補貨問題(Joint Replenishment Problem, JRP)。存貨是工商企業的重要資產之一，且佔企業流動資產中很大的比例。存貨控制得當與否，往往會影響企業資金的調度，甚至關係到公司的營運作業。因此，存貨控制與管理已成為製造業重要的決策問題，採購部門主管必須決定批量大小、補貨次數及補貨週期，同時考量運輸折扣可以產生的經濟規模效益，使得平均總成本達到最小，並且調整產品的補貨排程，使得該排程下的存貨空間需求不超過倉儲空間限制，避免租用外部倉儲而產生額外的委外倉儲成本。換言之，考慮運輸折扣及委外倉儲成本之聯合補貨問題，除了考慮原物料與完成品的平均存貨成本之外，還必須確認運輸折扣與委外倉儲成本對平均總成本的影響。

一般說來，企業對於庫存品(包含原物料、外購品及在製品等)的投資，約佔了企業流動資金的百分之 30 及營運資金的百分之 90 左右(Stevenson, 1996)。某些種類的企業對補貨所耗費的時間與成本甚至會比其他企業來的更加明顯，例如：藥品、化工、紡織業等等。如果企業中的採購主管希望改善他們的生產/存貨系統以滿足顧客需求，並同時降低運輸成本與委外倉儲的成本，他們可以應用本研究的研究成果，進行聯合補貨排程，與長期的採購規劃。

1.2 研究問題描述

在文獻中傳統的 JRP 問題已被研究多年，其假定生產/存貨系統中有一個基本循環週期。而根據基本循環週期，每種原物料的補貨週期都是基本循環週期的整數倍。因此在求解該問題時會有兩類決策變數，分別是：(1) 基本循環週期與(2)每種原物料的訂貨乘數。

但這樣的生產/存貨系統有一個主要的考量並未得到文獻中其他研究的關注。該考量是在傳統 JRP 中，每個基本循環週期中所收到的補貨品項與數量均不相同。而在本論文考慮運輸費用的前提下，由於運費的計算必須以該基本週期中實際運送的量作為基本基準，因此運費在每一個基本週

期所運用的貨運費率也不盡相同。由前述原因造成的運貨費率與委外倉儲成本會動態地改變，也將讓採購主管在決定最佳訂貨數量的決策時更加困難。此時採購主管面對的難題是：一般在訂貨時，貨運公司會提供顧客運輸量上的折扣以鼓勵顧客增加貨運量(即增加訂購量);但在採購主管的角度看來，補貨批量越大意味著存貨成本越高，甚至會因為需要租用外部倉儲而產生額外的委外倉儲成本；但提高貨運量則可以得到較節省的運費折扣，因此增加了採購主管決定訂貨數量同時最小化運輸成本及委外倉儲成本的難度。

本研究的決策情境中，假設產品的需求率、整備成本、存貨持有成本都是已知且不隨時間變化。由單一供應商供給製造商生產完成品所需的各種原物料，決策者必須考量系統整體的各項成本及倉儲空間限制條件，降低平均總成本，且求得其生產/存貨系統的補貨排程。

1.3 研究方法與步驟

為了求解本研究決策情境關心的問題，本研究分別利用啟發式演算法(Heuristic)與遺傳演算法(Genetic Algorithms; GA)兩種方式求解。GA可多點平行搜尋，且可找尋最佳訂貨週期，有效降低平均總成本。但是因為GA搜尋最佳解較為耗時，本研究另外提出一個啟發式演算法，可以有效的縮短求解運算時間。

針對考量委外倉儲成本與運輸折扣影響的生產/存貨系統之聯合補貨問題下，本研究欲將下列四階段做為本研究的研究方法：

第一階段：針對本研究所關心的生產/存貨系統中的聯合補貨問題、運輸折扣及倉儲限制等議題進行文獻探討，以詳細了解本研究的決策情境中各種會影響目標函數的重要考量及設定決策變數。

第二階段：在了解問題之決策變數後，再同時考慮運輸折扣與因租用外部倉儲產生委外倉儲成本下，建立本研究中聯合補貨問題之數學模式。再對於不考慮委外倉儲成本的數學模式進行理論分析，設計啟發式演算法與GA求解本問題之搜尋演算法。

第三階段：進行啟發式演算法與GA之程式撰寫，並分別以啟發式演算法與GA進行最佳解求解。在求解過程中，再計算其補貨排程之倉儲空間需求，並確認此時的候選解(candidate solution)是否需要額外之倉儲空間(如果

需要，則產生委外倉儲成本)，最後再確認最佳解。

第四階段：在此階段本研究針對第三階段所提出的兩種演算法進行數據實驗，利用文獻範例來測試本研究所建構的方法，並將測試結果與不考慮運輸折扣與委外倉儲成本的最佳解進行比較分析。再利用隨機實驗，更進一步測試本研究所建構的求解方式，並統計求解每組實驗所花費的時間及所得解的品質；最後根據各項實驗數據提出結論與建議。

1.4 論文架構

本研究論文的內容共分為七章，研究架構如圖 1.2 所示，後續的章節簡述如下：第二章整理及探討與本研究相關的文獻，包括求解 JRP、運輸費用及倉儲成本之影響的相關論文。第三章介紹考量運輸折扣與委外倉儲成本下的補貨問題之數學模式，並推導求解給定補貨排程策略下的最大的倉儲空間需求。第四章介紹針對第三章所推導的數學模式進行理論分析，本研究並提出一個啟發式演算法。第五章介紹另一個解法即遺傳演算法 (GA)。第六章提出範例說明，並運用隨機數據實驗，來驗證與比較本研究所提出的兩種方法，相較於文獻中其他的解法，可以更有效率獲得品質更佳的解。第七章歸納本研究的結論及提出未來研究方向。

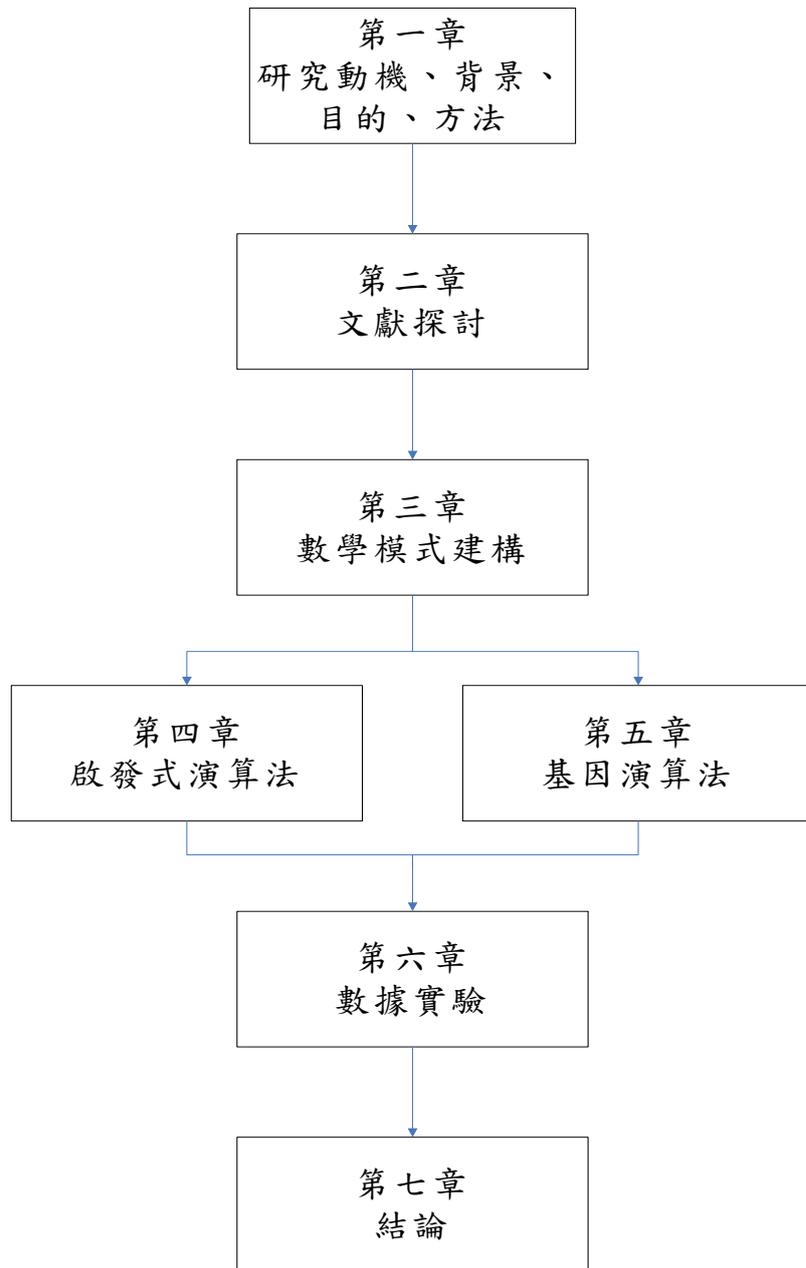


圖 1.2 本研究之論文架構

第二章 文獻探討

因為本研究主題為在倉儲具空間限制下考慮運輸折扣之聯合補貨問題，故在本章第2.1節討論傳統聯合補貨問題與文獻中被提出的啟發式演算法。第2.2節介紹與運輸折扣相關之研究，特別是在生產/存貨系統中考慮運輸折扣後的批量控制問題。第2.3節探討考慮倉儲成本的批量問題。第2.4節介紹Siajadi et al.(2005)所提出的原物料聯合補貨問題。第2.5節為本章提出小結。

2.1 聯合補貨問題

聯合補貨問題(Joint Replenishment Problem, JRP)探討在單一補貨系統下多項產品的批量補貨法則，其主要的目的是在滿足顧客需求的前提下，減少換模／換線所需要的整備時間及成本，使平均總成本最小。

在 JRP 模式中常被考慮的成本項目包括：

1. 整備成本(setup costs)：補貨時，轉換不同產品進行包裝／配銷的相關成本。本研究假設其與產品的數量無關。包括：
 - (1) 主要整備成本：當配銷倉儲系統進行多樣產品的批量補貨時，產生的相關成本。
 - (2) 次要整備成本：單項產品執行批量補貨所產生的相關成本。
2. 存貨持有成本(inventory holding costs)：購置存貨的資金成本。

對配銷倉儲的管理者來說，其關心的是如何將某些產品合併補貨，以共同分擔主要整備成本，降低平均總成本。文獻中的 JRP 模式通常有以下幾個假設：

1. 補貨系統中共有 N 種產品。
2. 產品 i 的需求率，主要整備成本、次要整備成本與存貨持有成本皆為已知常數。
3. 整備成本與補貨順序及批量大小無關。
4. 第 i 種產品的補貨週期，可表示成基本週期(basic period)的整數倍。
5. 即時補貨，不允許缺貨情形產生。
6. 產品的需求是連續，而且需求率為一已知常數。

一般來說，企業將流動資金的 30% 與營運資金的 90% 投資在原物料、

再製品與採購存貨上 (Stevenson, 1996)，主要整備成本會受整備次數的影響，例如：紡織產業和化工產業在更換生產產品的類別時，需要在生產線上進行染料或化學成份的沖洗。因此管理者若能針對此問題，合併不同產品的補貨排程，將使整備成本明顯下降。JRP 模式提出可以支援決策者做出適當決策的數學模式，應用在許多需要換模／換線的產業類別。

本章所介紹傳統之 JRP 模式中所用之符號定義及說明如下。

T = 一個補貨週期循環時間。

N = 所有產品的總個數。

i = 產品指標，其中 $i=1,2,\dots,N$ 。

d_i = 產品 i 的需求率。

B = 基本週期，例如：一天、一周、或一個月。

k_i = 補貨乘數，表示產品 i 每 k_i 倍的基本週期補貨一次。

T_i = 產品 i 的補貨週期，為基本週期整數倍，即 $T_i = k_i B$ 。

A = 主要整備成本，每次批量的整備成本。

a_i = 次要整備成本，原物料 i 每次批量的整備成本。

h_i = 產品 i 單位時間的存貨持有成本。

2.1.1 傳統聯合補貨問題與啟發式演算法

JRP 方面的研究已持續有三十多年之久。Arkin et al. (1989) 證明 JRP 為一個 NP-hard 問題；換言之，JRP 無法運用多項式時間的演算法求解其最佳解。

在一般整數策略下，JRP 的數學模式如式 (2.1) 及式 (2.2) 所示 (其中， $k_0=1$ ，表示補貨頻率最小是 1 個單位週期， k_i 為正整數)；故 JRP 的數學模式為一非線性整數規劃模式。

$$\text{Minimize } TC_{GI}(\{k_i\}, B) = \frac{1}{B} \left(\frac{A}{k_0} + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{k_i} \right) + \frac{B}{2} \sum_{i=1}^N k_i d_i h_i \quad (2.1)$$

$$\text{Subject to } k_i \in \{1, 2, 3, \dots\}, k_0 = 1 \quad (2.2)$$

Shu (1971), Nocturn (1973) 和 Goyal (1973) 等論文為該領域的研究先驅，這些學者們將許多產品分成二群，並決定各產品補貨於所屬群體的策

略。Shu (1971)和Nocturn (1973)為根據圖形化的方式的提出一個啟發式解法。接著Goyal (1973)發展出一個簡單的啟發式解法：將目標函數 $TC_{GI}(\{k_i\}, B)$ 進行一階導數以獲得最佳的補貨基期 B^* ，最後再透過簡單的規則而決定補貨於二種產品群的最佳頻率 k_1^* 和 k_2^* 。同年，Goyal延續上一個研究，將產品群擴展至大於二的數目，Goyal (1974)發表了一個窮舉法，其方法的主要精神為窮舉每個產品 i 的補貨基期 B 及頻率 k_i ，並滿足(2.5)中的兩個數學式：

$$\begin{aligned} TC_{GI}(k_i(B), B) &\leq TC_{GI}(k_i(B)+1, B) \\ TC_{GI}(k_i(B), B) &< TC_{GI}(k_i(B)-1, B) \end{aligned} \quad (2.3)$$

他宣稱能夠獲致全域最佳解 (global optimal solution)，但卻缺乏證明。之後Goyal (1988)和Van Eijs (1993)便分別提出僅依據式(2.1)卻無法獲得全域最佳解的範例；而Van Eijs (1993)修改了Goyal (1974)所提出的方法，使得該窮舉法更有效率。此類解法的缺點在於必須花費相當多的努力，才能在 B 的上界 (upper bound) 和下界 (lower bound) 之間搜尋出解答，且整個問題的執行時間也隨著產品數的增加而呈指數上昇。Viswanathan(1996) 檢視上述之缺點，而發展出一些理論性的結果，目的為縮短 B 的搜尋空間；接著他發表了一個有效率的演算法，僅使用極短的時間內即可獲得合理的解答。

另一個關於求解JRP 的研究議題為採用非演進 (non-iterative) 方式進行求解。Silver (1976)首先推導出一些分析JRP 後的特性，並提供了獲得最佳乘數 k_i 's的嚴格格式 (closed-form)，其假設所有的決策變數 k_i 's為連續的。以下三個步驟為Silver (1976)的求解過程：(1) 設置產品1擁有所有 $a_i/h_i d_i$

的最小值；(2) 計算 $k_i = \sqrt{\frac{a_i}{h_i d_i}} \sqrt{\frac{h_i d_i}{A + a_i}}$ ，並四捨五入 k_i 而獲得 k_i^* ；(3) 運用第

(2)步驟所得的 $\{k_i\}$ 而獲得最佳的 B 。之後，Goyal and Belton (1979)修改了

Silver (1976)的基準：將 $\frac{a_i}{h_i d_i}$ 更換成 $\frac{A + a_i}{h_i d_i}$ ，並提供一組範例以顯示該修改方法

的結果優於Silver (1976)的方法。之後，Kaspi and Rosenblatt (1983)提供另一組範例並指出Goyal and Belton (1979)的方法相較於Silver (1976)的方法所求得的解答還要更差，他們建議若採用Goyal and Belton (1979)的方法

之後，必須重新計算 $\{k_i\}$ 和 B 。Jackson (1985)根據相同的原理，使用 $\frac{a_i}{h_i d_i}$ 為

基準而發展出最佳的產品分群機制，並推導出一些有趣的理論性質。其提

出二冪策略下的聯合補貨問題，將 k_i 表示成 $1, 2, 4, \dots, 2^p$ 等2的冪次。目標函數可改寫成式(2.4)，滿足限制條件，如式(2.5)所示。

$$\text{Minimize } TC_{PoT}(\{k_i\}, B) = \frac{1}{B} \left(\frac{A}{k_0} + \sum_{i=1}^N \frac{a_i}{k_i} \right) + \frac{B}{2} \sum_{i=1}^N k_i d_i h_i \quad (2.4)$$

$$\text{Subject to } k_i = 2^p, \quad p \geq 0, p: \text{整數}, \forall i, \quad k_0 = 1 \quad (2.5)$$

二冪策略下的最佳的補貨乘數、基本週期與最佳目標函數解表示為 (K_{PoT}^*, B_{PoT}^*) 、 $TC_{PoT}(K_{PoT}^*, B_{PoT}^*)$ 。一般整數策略下的JRP模式，視同忽略二冪策略下的限制式，因此Jackson(1985)提出「6%誤差理論」， TC_{GI} 為一般整數策略下的最佳目標函數解，可當作下界，如式(2.6)所示。

$$\frac{TC_{PoT}(K_{PoT}^*, B_{PoT}^*) - TC_{GI}}{TC_{GI}} \times 100\% \leq 6\% \quad (2.6)$$

運用此定理，即可找到一個合理且不錯的 $TC_{PoT}(K_{PoT}^*, B_{PoT}^*)$ 解。

Lee and Yao (2003) 試圖對二冪策略下的JRP模式進行最佳解結構分析，證明最佳成本曲線對 B 為一個片段凸性函數，他們所提出的啟發式演算法可以求解二冪策略下的全面最佳解。

由傳統聯合補貨問題的文獻探討中可以發現，在過去的相關研究中乃關心多種完成品聯合補貨以滿足客戶需求與其他主要關注的決策，而非針對多種原物料的聯合補貨。這些研究未考慮到原物料運輸折扣及因為需要租用外部倉儲而產生的額外倉儲成本。

2.2 與運輸折扣相關之研究

為了解決上述的問題，Hahm and Yano (1992)提出一個求解方法以決定製造商的生產週期與配送完成品給顧客的週期。該決策模式希望能同時降低製造商的生產整備成本、運輸成本以及雙方的存貨持有成本。在Hahm and Yano (1992)的研究中提出，在最佳解的求解過程中，生產週期與配送週期的乘數必為整數。Khan and Sarker (1999)提出一決策情境，該情境中製造商向原物料供應商訂購原物料以製造產品，並將製造完成的產品依固定間隔時間送出。該研究提出一演算法，以求解原物料訂購與完成品製造的批量大小。

Banerjee and Keem (1995)再將前述整合製造商與其供應商的概念延

伸，提出同時在JIT生產系統中利用少量多批次運送策略下，對原物料及完成品的庫存成本進行最佳化的相關研究。在Banerjee and Keem (1995)之後，陸續也有Woo et al. (2001), Huang (2003)等研究提出對補貨時買賣雙方產生的成本同時進行最佳化的研究。

Siajadi et al.(2006)的研究中提出一決策情境，該研究考慮在單一賣方，多位買方的聯合經濟批量問題(Joint Economic Lot Sizing Problem)中，滿足多位買方的需求，並同時最小化所有相關成本，包括存貨持有成本、生產設置成本與運輸成本等。但在上述文獻中，除了Hahm and Yano (1992) 與 Siajadi et al.(2006)有在其研究中提到最小化運輸成本之外，其他的研究均將運輸成本當成訂購成本中的一個常數。這項假設在真實情境中並不能完全適用，一般運輸成本是由路徑決策(routing decisions)與計算得出的貨運量大小而決定的。Boumol and Vinod(1970)最早將貨運成本加入該研究的存貨成本中，但在他們的研究中是假設單位運輸成本固定並且與運輸批量大小無關。隨著90年代早期美國對運輸業的限制解除後，將以運輸批量為基礎的貨運折扣併入考慮的研究開始出現。Lee(1986)是最早將貨運折扣的影響合併EOQ模式進行求解的研究之一，他假設運輸成本固定但隨著訂購量增加而增加。Russell and Krajewski (1991)認為過去求解補貨批量的文獻中，並未同等重視對運輸費用折扣的求解與其對最佳解的影響，Russell and Krajewski (1991)認為透過手動調整運費計算斷點(breakpoint)所節省的運輸費用，是托運者在最小化存貨成本時應該注意的。因此Russell and Krajewski (1991)在運輸費率表中加入indifference point的計算，並以調整後的運輸費率表作為決定訂購與運輸批量決策時的參考。

Abad and Aggarwal(2005)指出，近年許多企業在進行採購決策時更加注重運輸成本對總成本的影響，該研究並列出原因如下：(1)企業注意到可以經由對運輸作業進行安排進而達到降低運輸費用的結果；(2)供應商的接單方式只允許以FOB方式交貨；(3)當企業由於運輸作業產生費用時，則運輸成本就與其批量訂購與產品訂價之決策息息相關。Abad and Aggarwal(2005)的研究中對於運輸費率相關的方面延續Russell and Krajewski (1991)研究中對考量運輸數量折扣影響下運輸費率的計算方式，並提出一數學模式以求解最佳訂購批量與產品訂價。

本研究在運輸費用與運輸折扣方面的計算以 Russell and Krajewski

(1991)的研究為基礎，透過將傳統運輸費率加入 indifference point 以計算運輸折扣影響下的運輸費用。有關 indifference point 的計算與運輸折扣及運輸費用的關係將在第三章說明。

2.3 考慮倉儲成本的批量問題

企業在設置之初，通常都會有建置自有倉庫的規劃，但是在建置的當時，通常會權衡種種經濟因素，使得自有倉庫所建置的容量，並非具有無窮大之容量。因此企業會將所有與存貨相關之成本，諸如：訂購成本，及存貨持有成本等，以及建置自有倉庫之資本支出，作經濟效益的考量，以期使企業發生的成本總數為最小，並使營運更有效率。

Hartely (1976) 是首位探討有關固定自有倉庫容量下之存貨管理決策的學者。Hartely (1976) 認為，企業在實際環境中，常面臨自有倉庫容量不足，而必須外租倉庫的情況。此時，由於外租倉庫所發生的持有成本，係為總持有成本的一部份，所以企業在考量經濟訂購量的同時，必須將外租持有成本納入考量，才符合經濟訂購量之意義。

Hartely (1976) 將總成本劃分為訂購成本、自有倉庫持有成本，及外租倉庫持有成本，總成本為訂購批量之函數。Hartely (1976) 認為由外租倉庫運送存貨至自有倉庫的運輸成本並非相當重大，因此在他的模式中，運輸成本及外租倉庫運往自有倉庫存貨量，並非其攸關的考量因素。因此，以經濟訂購模式為基礎，Hartely (1976) 在其推導的模式中假設，各個存貨批量先存放於自有倉庫，再將超出自有倉庫容量的存貨存放於外租倉庫。並假設外租倉庫的持有成本，大於自有倉庫之持有成本，而存貨模式的決策目標，就在找出總攸關成本最小時之經濟訂購批量。故以總成本最小為前提，求算企業之最佳訂購批量，此即所謂的固定自有倉庫容量下(The Case with Two Levels of Storage) 之經濟訂購批量模式。其後研究此決策情境的學者，多是以此模式為基礎，再加以延伸的。

Hung and Fisk (1984) 認為自有倉庫容量是固定的，屬於靜態的存貨管理決策；而外租倉庫容量是可變動的，則屬於動態的存貨管理決策。同時並認為某些存貨具有季節性的特質，以及有些外租倉庫租金的發生是以月為基準等多項前提，加上Hung and Fisk (1984) 認為存貨持有成本之計算方式應該以倉庫的面積，即平方單位做為計算的標準，並非一般的模式是以存貨單位為計算的標準，進而推導出最佳外租倉庫容量的線性模式。

不同於前述Hartely (1976) 研究的做法，Hung and Fisk (1984) 採用線性規劃來作經濟訂購批量之推導。Hung and Fisk (1984) 指出，該模式關於持有成本的計算方式，雖然是以存貨所存放的空間，即採平方單位來計算，但仍然能以存貨單位加以替代。Hung and Fisk (1984) 並保守的指出，該模式並非考量了所有影響存貨問題的假設，未來還有更多因素值得加以考量，諸如：存貨的安全因素、存貨的儲存及運輸狀況，以及特殊存貨的處理問題。

Goh, Jihong and Teo(2001)的研究中，提出一計算最佳倉儲空間大小以同時最小化訂購成本、持有成本與倉儲成本的演算法。Goh, Jihong and Teo(2001)認為在以往文獻中對倉儲成本的考量太過簡化，無法凸顯出倉儲成本在批量訂購問題中相對於總成本的重要性。Goh, Jihong and Teo(2001)指出這樣的缺陷並將兩種可行的倉儲成本計算架構併入EOQ存貨模式的考量之中。該研究的倉儲成本計算以儲存的物料種類數為建立計算模式的基準，並以不同的方程式(片段與階梯式)來代表不同的總成本計算方式，但基本的計算方式仍為以所佔的存貨單位空間為成本計算的基準。

本研究的決策情境中，委外倉儲成本的計算以Hung and Fisk(1984)與Goh, Jihong and Teo(2001)的計算方式為基礎，依租用的存貨單位來計算委外倉儲成本。

2.4 Siajadi et al.(2005)所提出的原物料聯合補貨問題

Siajadi et al.(2005) 之決策情境可用下圖 2.1 表示。該研究之符號定義如下：

A : 每個基本循環週期中訂購原物料的主要設定成本

A_H : 物料處理成本

A_p : 最終產品的設定成本

H_p : 完成品持有成本

E : 完成品重工或退回的百分比數

T : 基本循環週期

a_i : 每個基本循環週期中訂購原物料的次要設定成本

m : 每種原物料的基本周期乘數

r : 製造一個完成品所需的各種原物料數

x :運送給顧客的完成品批量

Siajadi et al.(2005)的決策情境中分為兩個部分：在第一部分，製造商只製造單一種完成品，製造該完成品所需的所有原物料完全由單一的供應商負責供應。當完成品的年需求率是已知的前提之下，製造商決定訂貨乘數與基本週期之後，便可以計算在基本週期中原物料的存貨與處理成本。在第二部分，當製造商進行原物料補貨且開始進行生產後，每隔時間 L 就將完成品以固定批量 x 運送給顧客，此時製造商也會產生對應的完成品生產整備成本與持有成本。Siajadi et al.(2005)將決策情境中兩個部份成本(分別為完成品的總成本(TC_{pp})與原物料的總成本(TC_{pm}))加總起來，成為衡量平均總成本的目標函數，並對訂貨乘數與基本週期進行求解，以求得最小的平均總成本。Siajadi et al.(2005)的總成本數學模式如式(2.7)所示

$$\begin{aligned} TC &= TC_{pp} + TC_{pm} \\ &= \frac{I}{T} \left(A_p + A + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{m_i} \right) + \frac{T}{2} D' \left[\sum_{i=1}^k H_i r_i \left(\frac{D'}{P} + m_i - 1 \right) + H_p \left(\frac{D}{P} + E \right) \right] \\ &\quad - \frac{x}{2} H_p \end{aligned} \quad (2.7)$$

但在Siajadi et al.(2005)的研究中並未考慮運輸折扣與委外倉儲成本對總成本的影響。但由第2.2與第2.3節的文獻探討中可以知道，不論在真實企業運作情境中或是學術研究上，運輸折扣與委外倉儲費用均被認為對於批量訂購補貨作業的總成本有重大影響，在後續的研究如Siajadi et al.(2006)中，雖有考量運輸成本最小化，但同樣並未考量運輸折扣的影響，且該研究的決策情境為考量單一賣方多位買方之聯合經濟批量問題(Joint Economic Lot Sizing Problem)。因此在本研究中以Siajadi et al.(2005)的聯合補貨模式為基礎，加入運輸折扣與委外倉儲成本的考量，並提出演算法求解最小總成本。

2.5 小結

綜合以上探討，傳統的 JRP 模式並未同時加入考量委外倉儲成本與運輸折扣。因此，無法將傳統的 JRP 求解方法，套用在本研究情境下的聯合補貨問題。本研究將延伸 Siajadi et al.(2005)的聯合補貨模式，並結合考慮運輸折扣之聯合補貨問題、配銷倉儲具有空間限制等主題，希望能提出求

解平均總成本最小化的演算法。本研究將修訂 Sijadi et al.(2005)的決策情境，重新建立考慮委外倉儲成本與運輸費用之數學模式，並提出遺傳演算法與啟發式演算法兩種求解法。



圖 2.1 Sijadi et al.(2005) 論文的模式描述

第三章 數學模式推導

本章介紹倉儲具空間限制下存貨--製造系統中考慮運輸折扣影響的聯合補貨問題。將在第 3.1 節說明研究假設與限制，第 3.2 節說明二冪策略，第 3.3 節推導原物料與完成品的年存貨成本，第 3.4 節介紹倉儲空間限制式與運費計算，第 3.5 節小結。

3.1 決策情境

本研究的決策情境為在一生產存貨系統中，分別有供應商、製造商與顧客。製造商只製造單一完成品，且所有原物料由供應商供應，製造商每隔一段時間會將製造完成的完成品以固定批量送交給顧客。本研究主要求解製造商的最小化平均總成本，決策變數為基本週期(T)，訂貨乘數(m_1, m_2, \dots, m_k)與基本週期中的原物料與完成品的運送次數(n)。

以下介紹本研究中在建構數學模式時必要的一些假設與限制，詳述如下：

1. 本研究只考慮單一產品、單一顧客、單一供應商。該製造商與顧客有協議，完成品的需求率是固定的，由於完成品消耗率固定，所以固定需求率是可行的。
2. 製造商配送完成品給顧客並非以 lot for lot 的方式，而是以多次的固定小批量 x 並每隔 G 時間配送一次。
3. 本研究假設製造商配送完成品給顧客的次數與原物料補貨的次數相同，亦即 $n = s$ 。
4. 製造商在生產完成品時需要的多種物料統一由單一供應商供應，在進行原物料補貨時以聯合補貨的方式進行。
5. 如果供應商的存貨成本小於製造商的原物料存貨成本，供應商在補貨時可能有時會比供應商所訂購的數量稍多一點，這是為了讓製造商可以早點啟動下一個週期的生產而不會有等待的情形發生。由於供應商的存貨成本較低，所以供應商可以將製造商所要的物料暫時儲存，再配送稍高於製造商訂購量的物料給製造商。
6. 運費的計算以離岸價格(Freight On Board, F.O.B)為基礎，按重量計價。也就是說，在一次貨運中的總重量達到一個運費計算斷點(associated

rate breakpoint)後就都是相同的費率。但在 Russell and Krajewski (1991) 的研究中每個運費計算斷點之間又加入了 indifference point，當貨物重量落在 indifference range 中則運費都是固定的。

7. 在製造商的倉儲空間中，同時會存放製造完成的完成品與供應商送來的原物料。一個完成品所佔的倉儲空間需求為所有物料所佔倉儲空間總和的 ρ 倍。
8. 在一個基本週期 T 中，供應商送來的原物料必須要在這個週期中即消耗完畢。同樣地，在一個基本週期 T 中所生產的完成品也必須全部送交給顧客。

3.2 各種設置成本與存貨持有成本的推導

本節針對整個生產存貨系統中之聯合補貨問題所有設置成本與存貨持有成本項進行討論。本研究中對原物料與完成品兩方面的存貨成本加入另一個決策變數 n ，由於供應商的原物料持有成本較低，因此將基本週期 T 中所需的物料分成 n 次進行補貨以降低整體存貨成本。

範例 3.1：

以圖 3.1 為例，圖 3.1 表示本研究所要求解的存貨模式之一基本範例，我們將該範例稱為範例 3.1。該模式中只有一種完成品，製造商要製造該完成品需要兩種原物料 A 與 B，兩者均隔 2 個基本週期訂購一次。完成品的年需求率為 10530，製造商年生產率為 12000，基本週期為 0.0342 年。製造商在基本週期中每隔時間 G 將完成品分成三批送交給顧客 ($n=3$)，其中每次配送的批量大小為 x 。

由於完成品的存貨成本較高，製造商在配送成品前的 x/p (製造數量 x 的完成品所需的時間) 的時間才開始製造完成品，以降低完成品的存貨持有成本。為了配合製造商的生產作業型態並降低原物料的存貨持有成本，供應商在製造商要開始生產時進行原物料補貨，其中原物料 i 補貨量為 $r_i TD/n$ 。

供應商在接受製造商訂購原物料的同時，會將製造商的訂購量 $m_i r_i TD$ 備齊在供應商的倉庫中，每隔時間 G 配送 $r_i TD/n$ 給製造商。圖 3.1 中上方的圖代表完成品的存貨水準隨時間變化的狀況，中間和下方的圖則分別代表原物料在製造商端與供應商端的存貨水準隨時間變化的情形。

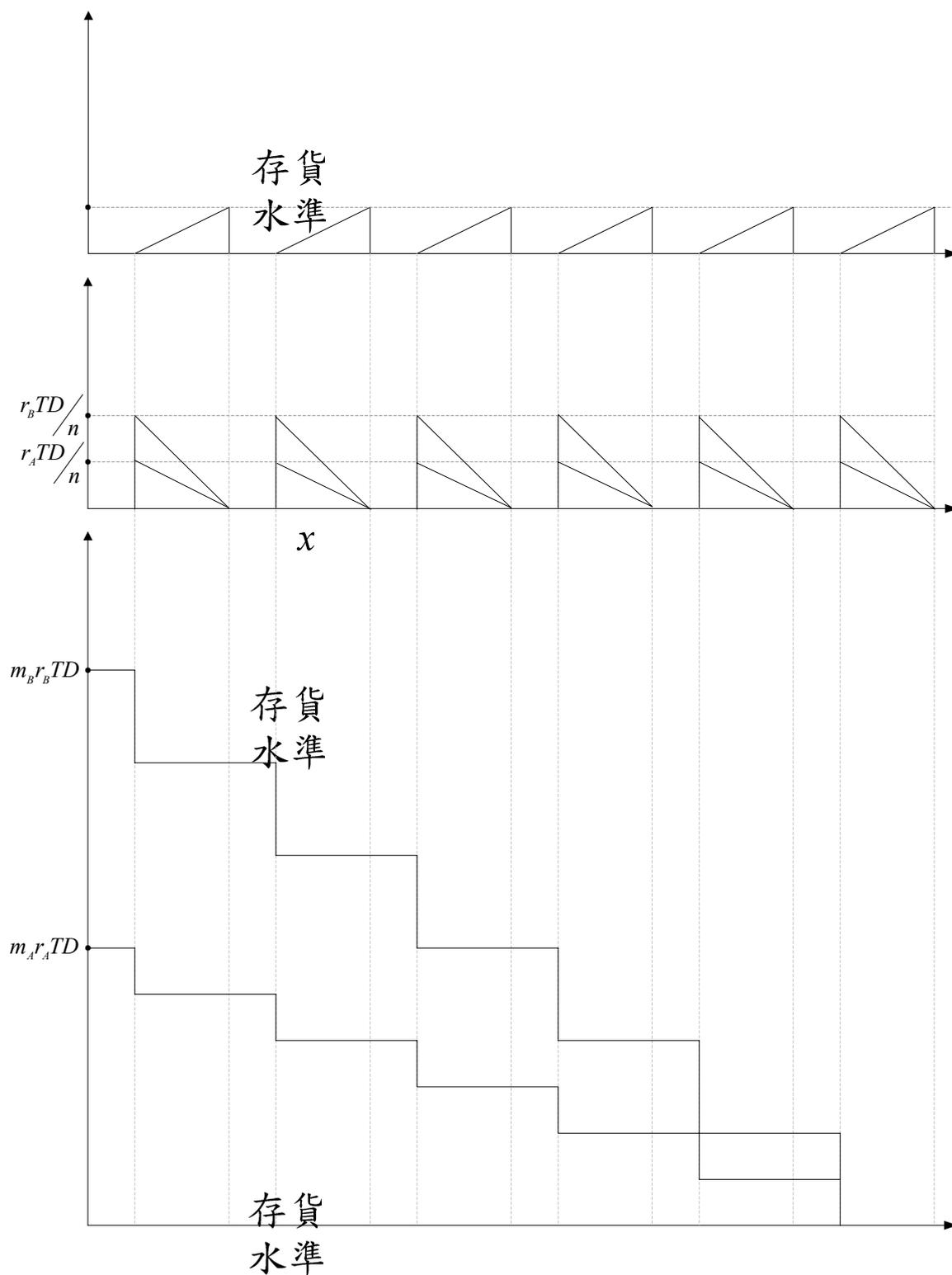


圖 3.1 範例 3.1 中各項存貨水準隨時間的變化

3.2.1 完成品的平均總成本

由製造商生產完成品其年持有成本可以用下列數學式表示：

$$HC_{PP} = H_p \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{P} \cdot n \right] / T$$

$$= H_p \left(\frac{TD^2}{2nP} \right) \quad (3.1)$$

完成品的年存貨成本則為其設置成本與持有成本的總和。基本週期中完成品的平均設置成本可用下式(3.2)表示

$$SC_{pp} = A_p / T \quad (3.2)$$

因此，完成品的平均總成本

$$\begin{aligned} TC_{pp} &= SC_{pp} + HC_{pp} \\ &= A_p / T + H_p \left(\frac{TD^2}{2nP} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2.2 原物料 i 的平均總成本

物料 i 的年存貨成本可以分為兩個面向：(1)製造商端與(2)供應商端的持有成本。製造商端的每種物料的年持有成本如下式(3.4)所示

$$\begin{aligned} HC_{pmi} &= H_i n \left(\frac{l}{2} \cdot \frac{x}{P} \cdot \frac{r_i TD}{n} \right) / T \\ &= \frac{H_i r_i TD^2}{2nP} \end{aligned} \quad (3.4)$$

供應商端的每種物料的年持有成本如下式(3.5)所示

$$\begin{aligned} HC_{vmi} &= H v_i \left[m_i r_i TD \cdot \left(m_i T - \frac{x}{P} \right) - \frac{nm_i (nm_i - 1)}{2} \cdot \frac{r_i TD}{n} \cdot G \right] / m_i T \\ &= H v_i \left(m_i r_i TD - \frac{r_i Dx}{P} - \frac{r_i TD (nm_i - 1)}{2n} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $G = \frac{T}{n}$

原物料 i 的年平均總成本為其設置成本與持有成本的總和。基本週期中原物料 i 的平均設置成本可用下式(3.6)表示

$$SC_{pm} = \left(A + A_s + nA_H + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{m_i} \right) / T \quad (3.6)$$

因此，原物料 i 的尚未考慮運輸成本時的年平均總成本，可用式(3.7)表示

$$TC_{pm} = SC_{pm} + \sum_{i=1}^k (HC_{pmi} + HC_{vmi})$$

$$\begin{aligned}
&= I/T \left(A + A_S + nA_H + \sum_{i=1}^k a_i / m_i \right) \\
&+ TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - Hv_i \right) + \sum_{i=1}^k Hv_i m_i r_i - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k Hv_i r_i (nm_i - 1) \right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

由於本研究在計算運輸成本時考慮運輸折扣的影響，因此在成本計算的方式上會有兩種不同的重量區間(weight range)需要考慮。運輸折扣對運輸成本的影響與計算方式我們將在 3.4 節進行討論。由於運輸成本計算上的考量，原物料 i 的年平均總成本函數將會以兩種不同的形式來表現。

Case 1: 假如補貨時所有物料的重量總和落在 marginal range 中，則運輸費用隨運輸費率呈線性增加，如式(3.8)所示

$$t(n, m_1, m_2, \dots, m_k, T) = RD \sum_{i=1}^k r_i w_i \tag{3.8}$$

而在此狀況下平均總存貨成本如式(3.9)

$$\begin{aligned}
TC &= TC_{pp} + TC_{pm} \\
&= I/T \left(A + A_S + A_P + nA_H + \sum_{i=1}^k a_i / m_i \right) \\
&+ TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - Hv_i \right) + \sum_{i=1}^k Hv_i m_i r_i - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k Hv_i r_i (nm_i - 1) + H_P \frac{D}{2nP} \right] \\
&+ RD \sum_{i=1}^k r_i w_i
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Case 2: 假如補貨時所有物料的重量總和落在 indifference range 中，則每次運輸的費用為一定值 $t(n, m_1, m_2, \dots, m_k, T) = A_T$ ，因此原物料 i 的平均總成本如式(3.10)所示

$$\begin{aligned}
TC &= TC_{pp} + TC_{pm} \\
&= I/T \left(A + A_S + A_P + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k a_i / m_i \right) \\
&+ TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - Hv_i \right) + \sum_{i=1}^k Hv_i m_i r_i - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k Hv_i r_i (nm_i - 1) + H_P \frac{D}{2nP} \right]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

分析式(3.9)與(3.10)後，我們可以發現式(3.10)中的運輸成本會影響決策變數 T 。另一方面，式(3.9)中的運輸成本是一個因為運輸重量總和而改變的常數。因此之後的最佳解求解過程均是以式(3.10)為基礎進行推導。

3.3 倉儲空間需求與運輸費用計算

在本研究中，不論利用啟發式演算法或遺傳演算法，求解出一區域最佳解後，必須再求出對應的運輸折扣與額外的倉儲費用，以確定最後的目標函數是否為真正的最佳解。本節將討論倉儲空間限制式的推導、額外倉儲空間成本與運輸費用的計算方式。

3.3.1 倉儲空間需求

假設 k 項產品的主要整備成本、次要整備成本、存貨持有成本、需求率與倉儲空間限制皆為已知參數，目標函數要求解一組 $(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 參數，能同時降低平均總成本 $TC(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 且滿足倉儲空間限制。給定一組訂貨乘數 (m_1, m_2, \dots, m_k) 與運送次數 n ，在基本週期為 T 的前提之下， $I_{it}(n, m_i, T)$ 代表物料 i 在時間點 t 時的存貨水準，其數學式如式(3.9)

$$I_{it}(n, m_i, T) = \frac{r_i TD}{n} - tPr_i \quad (3.11)$$

其中 $\frac{T}{n} - \frac{x}{P} \leq t \leq \frac{T}{n}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

$I_t^f(n, m_i, T)$ 代表完成品在時間 t 時的存貨水準，其數學式如式(3.10)

$$\begin{aligned} I_t^f(n, m_i, T) &= tP - \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor x - \left(\frac{nt}{T} \right) \left(\frac{T}{n} - \frac{x}{P} \right) \cdot P \\ &= \frac{TD}{n} \left(\frac{nt}{T} - \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中 $0 \leq t \leq T$

設定 s_i 為物料 i 所需的倉儲空間，如此我們可定義

$S_t(n, m_1, m_2, \dots, m_k, T) = \sum_{i=1}^k s_i I_{it}(n, m_i, T)$ 為時間 t 時的總倉儲需求。

$S_{\max}(n, m_1, m_2, \dots, m_k, T) = \max_{0 \leq t < \infty} \{S_t(n, m_1, m_2, \dots, m_k, T)\}$ 代表這組補貨排程的最大總倉儲需求，我們以 \bar{W} 代表最大總倉儲需求，上述關係可用以下式(3.13)來表示。

$$\left(\sum_{i=1}^k s_i I_{it}(n, m_i, T) \right) + \left(\sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho \right) \cdot I_t^f(n, m_i, T) \leq \bar{W} \quad (3.13)$$

其中 $0 \leq t \leq T$, $i = 1, 2, \dots, k$

本研究在計算完成品所需的倉儲空間時，是將所有原物料的單位倉儲

空間需求乘以一個參數 ρ ，在第六章的演算法範例說明中，我們將 ρ 定為 $2/3$ ，亦即每個完成品所需要的倉儲空間為 $\left(\sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho\right)$ 。

如果 $S_{\max}(n, m_1, m_2, \dots, m_k, T) \leq \bar{W}$ ，則我們知道此時求出的 $(n, m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 可以提供一組可行的補貨排程。但如果 $S_{\max}(n, m_1, m_2, \dots, m_k, T) > \bar{W}$ ，則此時最佳目標函數解 TC 要再加上一筆額外的租借倉庫的成本，以容納原有倉庫無法容納的物料。我們可以透過推導不同情境下(例如：不同的 n)之倉儲空間需求的最高點以確認是否有超過倉儲空間限制，詳細的討論在 3.3.2 中說明。

3.3.2 補貨與生產時之倉儲空間需求與額外倉儲成本

本小節針對補貨時產生的倉儲空間需求高點進行推導。當供應商將製造商需要的各項物料送至製造商的倉庫時，製造商的倉儲空間需求會在物料送達時向上攀升至一高點。已知供應商會在製造商要開始進行生產前將物料送至製造商的倉庫，製造商每隔時間 G 送批量大小為 x 的完成品給顧客。給定基本週期為 T 且每個基本週期中供應商共配送 n 次原物料給製造商，供應商每次運送物料所需的倉儲空間總和為 $\sum_{i=1}^k \frac{r_i s_i T D}{n}$ 。在生產作業中，完成品所佔倉儲空間的增加速率可由式(3.12)表示

$$\begin{aligned} \theta^f &= \frac{x \cdot \sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho}{x/P} \\ &= P \cdot \sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho \end{aligned} \quad (3.14)$$

同樣地，原物料 i 在生產作業中所佔的倉儲空間因為投入生產而減少的速率如式(3.13)

$$\begin{aligned} \theta_i^{raw} &= \frac{x r_i s_i}{x/P} \\ &= P r_i s_i \end{aligned} \quad (3.15)$$

由式(3.12)與(3.13)可知，給定基本週期為 T 下，倉儲空間的消耗速率可由式(3.14)表示

$$\begin{aligned}\theta &= \theta^f - \sum_{i=1}^k \theta_i^{raw} \\ &= TP \left(\sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho - \sum_{i=1}^k r_i s_i \right)\end{aligned}\tag{3.16}$$

在一個分成 n 個的基本週期 T/n 中，當到達製造商應要開始進行生產的時間點 $(\frac{T}{n} - \frac{x}{P})$ ，供應商會將製造商所需的物料送至製造商的倉庫中，此時製造商的倉儲空間需求為 $\sum_{i=1}^k \frac{r_i s_i TD}{n}$ 。接下來製造商進行生產作業，由於製造商的倉儲空間中同時存放完成品與原物料，因此倉儲空間按 St 的速率不斷變動。倉儲空間的需求變化可用下圖 3.1 來表示。

在本研究中，不論利用啟發式演算法或遺傳演算法進行求解，求出一組決策變數 $(n, m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 後，我們即可得知在此區域最佳解各項決策變數下，計算在基本週期中的各補貨時點的倉儲需求是否有超出倉儲空間限制，並計算其衍生之委外倉儲空間成本。

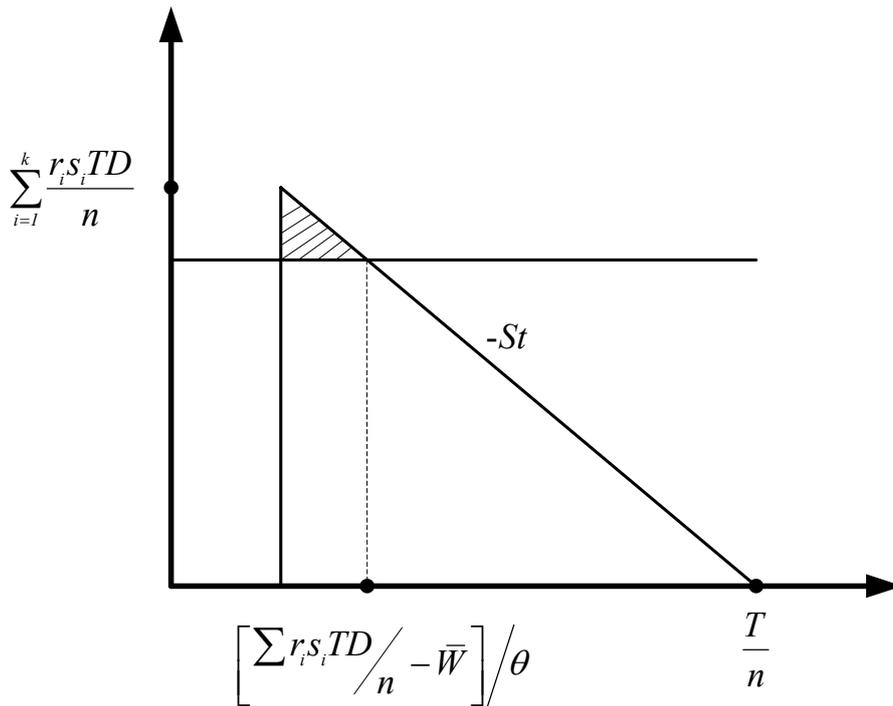


圖 3.1 倉儲空間需求變化示意圖

由圖 3.1 可知，製造商在切為 n 等份的基本週期 T/n 中，在時間點 $\frac{T}{n} - \frac{x}{P}$ 進行原物料補貨，此時原物料所需要的倉儲空間可能會超過製造商的倉儲

空間上限。如果超出倉儲需求超出倉儲上限，則經過 $\left[\frac{\sum r_i s_i TD}{n} - \bar{W} \right] / \theta$ 時間後，製造商的倉儲需求才不會高於倉儲上限。接下來開始生產作業，同時消耗原物料所佔的倉儲空間與產生完成品佔用倉儲空間，到達時間點 T/n 進行完成品配送。由於在 T/n 中只生產 x 個完成品，供應商進行補貨時也只補充生產 x 個完成品所需的物料量，因此到達時間點 T/n 時，所有原物料與完成品皆消耗或是送交給顧客，倉儲空間需求降為 0。我們可以檢視補貨時的倉儲空間需求是否超過倉儲空間上限，此時我們可以透過計算超過倉儲上限的面積(如圖中斜線部分)以求出製造商需要額外租借的倉儲面積，進而得出額外租借倉儲的成本 H_e 。

3.3.3 考慮運輸折扣下的運輸費用計算

一般運輸費用計算可依表 3.1 提供的範例資訊進行計算。由表中的第二與第三個重量區間中可以看到，計算費率分別是每公斤 0.0352 元與每公斤 0.0296 元。假如運送物料總重量為 460 公斤，代表運送費用為 $460 \cdot 0.0352 = 16.19$ 元。但是，如果將運送物料總重量改為 500 公斤，則運送費用變為 $500 \cdot 0.0296 = 14.8$ 元。很明顯的，相對重量較少的運費卻比重量較多的運費貴，這是十分不合理的。因此，Russel and Krajewski(1991)的研究中提出了在運費計算表格中加入 indifference point 的概念。按照其研究成果修改後的運輸費用計算表範例如表 3.2 所示，Russel and Krajewski(1991)認為應在表 3.1 中每個運輸計算費率中加入一個 indifference point。以上述運費計算過程為例，如果運送總重量落在第二個重量區間中，假如運送總重量大於或等於其 indifference point，則都應該以 500 公斤的運費來計算，因此該運費計算區間會透過加入一個 indifference point $(500 \cdot (0.0296/0.0352) = 421)$ 來進行修正。因此假如運送總重量落在這個重量區間(228~499)中，假如大於 421 公斤，則不論其運送總重量為何，運送費用均為 14.8 元。

在本研究中，介於 indifference point 到下一個重量區間之間的區間稱為 indifference weight range，在這個區間中的運送費用均是固定的。另一方面，在 indifference point 之前的重量區間稱為 marginal weight range，該區間之運輸費用是隨著運送總重量增加而呈線性增加的。以運送總重量為 650

公斤為例，運費計算區間落在 marginal weight range，運輸費用為 $650 \cdot 0.0296 = 19.24$ 元。

表 3.1 運費計算表(修改前)

L	重量區間 (Weight Break)	運輸費率 (Freight Rate)	
		[kg]	[\$]
1	1	227	8
2	228	499	0.0352
3	500	999	0.0296
4	1000	1999	0.0276
5	2000	9999	0.0192
6	10000	19999	0.0122
	滿載 (Truck Load)		222

表 3.2 運費計算表(修改後)

L	γ	δ	運輸費率 (Freight Rate)	
			Indifference	Marginal
	[kg]	[kg]	[\$]	[\$]
1	0		8	
2		228		0.0352
2	421		14.8	
3		500		0.0296
3	933		27.6	
4		1000		0.0276
4	1856		38.4	
5		2000		0.0192
5	4750		121.6	
6		10000		0.0122
6	18257		222	

3.4 數學模式

綜合以上敘述，我們可以把本研究之數學模式總結如下。

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \frac{1}{T} \left(A + A_S + A_P + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{m_i} \right) \\ & + TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k H v_i m_i r_i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_P \frac{D}{2nP} \right] + H_e \\ \text{Subject to} \end{aligned}$$

$$I_{it}(n, m_i, T) = \frac{r_i TD}{n} - t P r_i$$

$$\text{其中 } \frac{T}{n} - \frac{x}{P} \leq t \leq \frac{T}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

$$I_t^f(n, m_i, T) = \frac{TD}{n} \left(\frac{nt}{T} - \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor \right)$$

$$\text{其中 } 0 \leq t \leq T$$

$$\left(\sum_{i=1}^k s_i I_{it}(n, m_i, T) \right) + \left(\sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho \right) \cdot I_t^f(n, m_i, T) \leq \bar{W}_{max}$$

$$\text{其中 } 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$\{m_i \in \mathbb{N}^+, \forall i\}$$

本章介紹配銷倉儲具空間限制下，考慮運輸折扣之聯合補貨問題的數學模式。既定參數 $(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 下，進行最大倉儲空間需求與運輸費用的計算。額外倉儲成本與運輸成本將在以搜尋式演算法與遺傳演算法求解結束後，決定最佳目標函數的關鍵。

第四章 求解考慮運輸折扣及委外倉儲成本下之聯合補貨 問題之啟發式演算法

本章利用啟發式演算法求解配銷倉儲具空間限制下並考慮運輸折扣的聯合補貨問題。在本研究的決策環境下(參考第 3.1 節)，決策者面對的是協調生產批量，在沒有超過可利用倉儲空間的前提，降低平均總成本 $TC(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ ，例如：整備成本或存貨持有成本。本研究提出一套啟發式演算法進行補貨排程，以最小化包括倉儲成本、運輸成本與存貨成本在內的總成本。將在第 4.1 節介紹配銷倉儲不具空間限制下聯合補貨模式之解法，第 4.2 節介紹配銷倉儲具有空間限制下聯合補貨模式之啟發式演算法，第 4.3 節以一個範例說明本章所提出的啟發式演算法執行方式，第 4.4 節小結。

4.1 不考量委外倉儲及運輸成本下聯合補貨模式之解法

本節先探討不考慮委外倉儲成本下，最佳成本函數曲線 $TC(T)$ 的理論性質，包括最佳成本曲線上接合點 (junction point) 發生的位置、如何取得鄰近接合點之間的最佳補貨乘數 (m_1, m_2, \dots, m_k) 、及在不考慮委外倉儲成本下的最佳解搜尋演算法，此最佳解搜尋演算法提供考慮運輸折扣與委外倉儲成本之聯合補貨問題的啟發式演算法基本架構。

在本研究中， k 項原物料的成本函數 $TC^0(T)$ ，即各項整備成本、 k 項原物料的最小成本函數與供應商端及顧客端之存貨持有成本之加總，如式(4.1)所示

$$\begin{aligned}
 &TC(m_1, m_2, \dots, m_k, T) \\
 &= I/T \left(A + A_s + A_p + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k a_i / m_i \right) \\
 &+ TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - Hv_i \right) + \sum_{i=1}^k Hv_i m_i r_i - \frac{I}{2n} \sum_{i=1}^k Hv_i r_i (nm_i - 1) + H_p \frac{D}{2nP} \right] \\
 &+ H_e(m_1, m_2, \dots, m_k, T)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $H_e(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 為委外倉儲成本。

而不考慮委外倉儲成本之成本函數即 $TC^0(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 如式(4.2)

$$\begin{aligned}
& TC^0(m_1, m_2, \dots, m_k, T) \\
&= I/T \left(A + A_s + A_p + n(A_r + A_H) + \sum_{i=1}^k a_i / m_i \right) \\
&+ TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \sum_{i=1}^k H v_i m_i r_i - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i (n m_i - 1) + H_p \frac{D}{2nP} \right]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

本研究將先針對成本函數中有決策變數 m_i 的部份進行整理，以便進行成本函數的理論性質分析。

4.1.1 成本函數圖形與性質分析

在對總成本函數進行理論分析之前，本研究先將總成本函數有決策變數 m_i 的部份進行整理，如式(4.3)所示。

$$\begin{aligned}
& TC^0(m_1, m_2, \dots, m_k, T) = \\
&= I/T \left(A + A_s + A_p + n(A_r + A_H) + \sum_{i=1}^k a_i / m_i \right) \\
&+ TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \sum_{i=1}^k H v_i m_i r_i - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i (n m_i - 1) + H_p \frac{D}{2nP} \right] \\
&= I/T (A + A_s + A_p + n(A_H + A_r)) \\
&+ TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_p \frac{D}{2nP} \right] \\
&+ \sum_{i=1}^k \left(\frac{a_i}{m_i T} + \frac{TD}{2} H v_i r_i m_i \right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

在式(4.3)中，含有 m_i 的成本項所組成的函數式 (4.4) 所示。

$$TC_i^0(m_i, T) = \frac{a_i}{m_i T} + \frac{TD}{2} H v_i r_i m_i \tag{4.4}$$

根據式(4.4)，運用第六章範例6.1的資料以Matlab 7.0軟體繪出在不同 m_i 值下的原物料3的成本函數圖形如圖4.1所示。

在給定 T 值下，欲搜尋最佳的補貨乘數 m_i ，使原物料 i 的平均成本最小，以 $\underline{TC}_i^0(T)$ 表示，如式(4.5)所示。

$$\underline{TC}_i^0(T) = \min_{m_i \in \mathbb{N}^+} \{ TC_i^0(m_i, T) \} \tag{4.5}$$

Remark 1. 由圖4.1中可以發現：

1. $\underline{TC}_i^0(T)$ 為 T 的片段凸性函數(piece-wise convex)。而且在同一個凸性曲線(convex curve)中的 T 值的最佳訂貨乘數(m_i)均相同。
2. 兩個相鄰的凸性曲線之間，只會有一個訂貨乘數(m_i)不同。

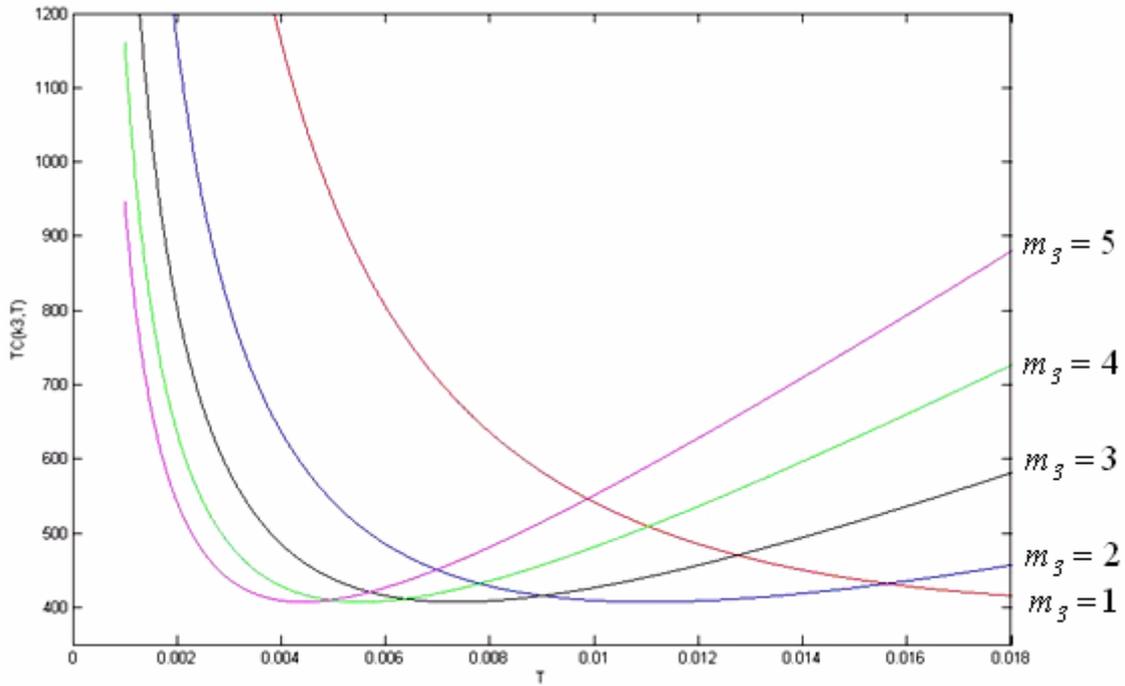


圖 4.1 原物料 3 在不同 m_i 值下的 $TC_3^0(m_3, T)$ 函數圖形

在Remark 1中，第一點發現驅使我們建立 $TC^0(T)$ 函數的封閉型式，以在給定一個 T 下求得成本函數的最佳解。第二點讓我們知道在求解過程中，在遇到兩相鄰的凸性曲線間的「接合點」時，需要改變其中一個訂貨乘數(m_i)。

以下本研究將提出Remark 1的驗證與其他求解 $TC^0(T)$ 相關的特性。

Lemma 1.

1. $\underline{TC}_i^0(T)$ 為 T 的片段凸性函數(piece-wise convex)。
2. 對每個 m_i 而言，可以在 $T = \lambda_j(m_i)$ 求得 $\underline{TC}_i^0(T)$ 的區域最佳解，其中 $\lambda_j(m_i)$ 如式(4.6)， $\underline{TC}_i^0(T)$ 的區域最佳解如式(4.7)。

$$T = \lambda(m_i) = \frac{1}{m_i} \sqrt{\frac{2a_i}{Hv_i r_i D}} \quad (4.6)$$

$$\underline{TC}_i^0 = \min_{T>0} \{ \underline{TC}_i^0(T) \} = \sqrt{\frac{a_i H v_i r_i}{2}} + \sqrt{\frac{a_i H v_i r_i}{2D}} \quad (4.7)$$

[Proof] 上述結果可以由簡單的代數求得。■

我們令

$$TC_a^0(T) = \frac{1}{T}(A + A_S + A_P + n(A_H + A_T)) + TD \left[\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - Hv_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k Hv_i r_i + H_P \frac{D}{2nP} \right] \quad (4.8)$$

則 $\underline{TC}^0(T)$ 如式(4.9)所示

$$\begin{aligned} \underline{TC}^0(T) &= \frac{1}{T}(A + A_S + A_P + n(A_H + A_T)) \\ &+ TD \left[\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - Hv_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k Hv_i r_i + H_P \frac{D}{2nP} \right] \\ &+ \sum_{i=1}^k \underline{TC}_i^0(T) \end{aligned} \quad (4.9)$$

則 $\underline{TC}^0(T)$ 可以有如下列有趣的觀察。

Theorem 1. $\underline{TC}^0(T)$ 為 T 的片段凸性函數(piece-wise convex)。

[Proof] 由於 $\underline{TC}^0(T) = \sum_{i=1}^k \underline{TC}_i^0(T)$ ， $\underline{TC}^0(T)$ 為 k 個片段凸性函數的和，因此由 Lemma 1 可知 $\underline{TC}^0(T)$ 同樣也是片段凸性函數。■

Proposition 1. $\underline{TC}^0(T)$ 的最佳解為 $TC(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 函數中目標函數值的下界。

[Proof] $\underline{TC}^0(T)$ 是由一般聯合補貨問題鬆弛限制式(如委外倉儲成本)後求得。Proposition 1 中提出 $\underline{TC}^0(T)$ 的最佳解為不考慮委外倉儲成本的聯合補貨問題之全域最佳解。因此 $\underline{TC}^0(T)$ 在本研究求解的過程中，扮演對考慮委外倉儲成本下，生產/存貨系統中的聯合補貨問題進行最佳化求解的基本架構。■

4.1.2 最佳目標函數上之接合點

本小節將介紹在 $\underline{TC}^0(T)$ 中，片段凸性函數曲線上的接合點(以下定義之)。由圖4.1及 Theorem 1 可知， $\underline{TC}^0(T)$ 函數由在 T 軸上連續的凸性函數圖形相連所組成；我們定義兩相鄰凸性曲線在圖形上相接的點為接合點(junction points)。

首先，本研究對原物料*i*的接合點在 $TC^0(T)$ 函數曲線上的位置進行推導，如式(4.10)所示

$$\begin{aligned}\Delta_i(m_i, T) &\equiv TC_i(m_i + 1, T) - TC_i(m_i, T) \\ &= \frac{a_i}{m_i(m_i + 1)T} - \frac{TDHv_i r_i}{2}\end{aligned}\quad (4.10)$$

$\Delta_i(m_i, T)$ 為原物料*i*的訂貨乘數為 m_i 或是 $m_i + 1$ 時的成本差異。而當兩相鄰的 m_i 值的成本函數相等時，就會產生接合點。重要的是，接合點不只在求解過程中告訴我們哪一種原物料*i*的 m_i 必須更動，同時也提供在*T*軸上的位置資訊；接合點位置的封閉解如式(4.11)所示。

$$\delta_i(m_i) = \sqrt{\frac{1}{m_i(m_i + 1)}} \sqrt{\frac{2a_i}{DHv_i r_i}} \quad (4.11)$$

以下本研究將提出其他在 $TC^0(T)$ 函數中與接合點相關的特性。

Lemma 2. 假設 $m_i^{(L)}$ 與 $m_i^{(R)}$ 分別為 $\underline{TC}_i^0(T)$ 函數接合點的左邊與右邊的乘數，則 $m_i^{(L)} = m_i^{(R)} + 1$ 。

[Proof] 由式(4.12)可知，接合點有以下的關係式

$$\delta_i(\bar{v}_i) < \dots < \delta_i(k) < \dots < \delta_i(2) < \delta_i(1) \quad (4.12)$$

其中 \bar{v}_i 為 m_i 的上界(求出上界的過程參見第5.1.1節)。■

給定一*T*值下，定義 $m_i^*(T)$ 為 $\underline{TC}_i^0(T)$ 函數的最佳訂貨乘數。由 $TC_i^0(m_i, T)$ 的凸函數性質與式(4.12)，我們可以得到 $m_i^*(T)$ 如式(4.13)

$$m_i^*(T) = \begin{cases} 1, & \text{if } T \in [\delta_i(1), \infty) \\ k+1, & \text{if } T \in [\delta_i(k+1), \delta_i(k)), \text{ for } k=1, \dots, \bar{v}_i \end{cases} \quad (4.13)$$

由式(4.11)可以清楚的知道 $m_i^{(L)} = m_i^{(R)} + 1$ 。

Proposition 2. $\underline{TC}^0(T)$ 會繼承所有 $\underline{TC}_i^0(T)$ 函數圖形上的所有接合點。

[Proof] 由 $\underline{TC}^0(T) = \sum_{i=1}^k \underline{TC}_i^0(T) + TC_a^0(T)$ 可以證明Proposition 2提出的論點。

換句話說，當任一接合點*w*出現在 $\underline{TC}_i^0(T)$ 凸性曲線上，則*w*也會在 $\underline{TC}^0(T)$ 的凸性曲線上，並為 $\underline{TC}^0(T)$ 的接合點之一。■

Theorem 2: 假設 $M^{(L)} = (m_1^{(L)}, m_2^{(L)}, \dots, m_k^{(L)})$ 與 $M^{(R)} = (m_1^{(R)}, m_2^{(R)}, \dots, m_k^{(R)})$ 分別是一組 $TC^0(T)$ 函數接合點的左邊與右邊的訂貨乘數組合，則 $M^{(L)}$ 可以由 $M^{(R)}$ 以 $m_i^{(L)} = m_i^{(R)} + 1$ 的方式代換至少一個最佳乘數而求得。

通常，除了少數情況出現 2 個或 2 個以上的原物料共用同一個接合點這樣的例子之外，在接合點上只會有一個 m_i 被改變。Theorem 2 同時驗證了 Remark 1 中第二點的論述。

假設 $M(T) = (m_1^*(T), m_2^*(T), \dots, m_k^*(T))$ 為給定一 T 值下， $TC^0(T)$ 的最佳訂貨乘數。由 Proposition 2 推演出的 Corollary 1 提供十分簡易的方式求得 $m_i^*(T)$ 。

Corollary 1: 給定一任意 T 值，可以由式(4.14)求得 $m_i^*(T) \in M(T)$

$$m_i^*(T) = \begin{cases} 1, & T > \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2a_i}{DHv_i r_i}}, \\ k, & \sqrt{\frac{1}{k(k+1)}} \sqrt{\frac{2a_i}{DHv_i r_i}} < T \leq \sqrt{\frac{1}{k(k-1)}} \sqrt{\frac{2a_i}{DHv_i r_i}} \end{cases} \quad (4.14)$$

4.1.3 建立搜尋上界與下界

本小節將推導搜尋演算法搜尋 T 值的上界 (T_{ub}) 與下界 (T_{lb})，這個步驟可以讓我們了解全域最佳解可能出現的區間。以下本研究將提出兩種方法，求得搜尋的上界 T_{ub} 。

先介紹第一種推導上界 T_{ub} 的方法；即以共同週期法(Common Cycle Approach)得出的 T_{ub} 值，作為搜尋演算法的上界。其中，共同週期法令 $(1, 1, \dots, 1)$ ，表示所有產品擁有共同的補貨乘數。可將 T_{cc}^* 定義如式 (4.13) 所示。

$$T_{cc}^* = \left[\frac{2 \left[A_p + A_s + A + n(A_H) + \sum_{i=1}^k a_i \right]}{D \left[\frac{D}{(nP)} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H_{vi} \right) + \sum_{i=1}^k r_i H_{vi} + H_p \left(\frac{D}{2nP} \right) \right]} \right]^{1/2} \quad (4.15)$$

Proposition 3: 在 T 值大於 T_{cc}^* 時， $TC^0(T)$ 成本函數沒有局部最佳解。

[Proof] 在 Proposition 2， $TC^0(T)$ 為 T 的片段凸性函數，所以全域最佳解(global optimal solution)一定是其中一個局部最佳解(local minimum)

solution)，而且是所有局部最佳解中最小的。對於任一組 (m_1, m_2, \dots, m_k) ，在

$$\tilde{T}(m_1, \dots, m_k) = \left[\frac{\left[A_p + A_s + A + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k a_i / m_i \right]}{D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H_{v_i} \right) + \sum_{i=1}^k r_i m_i H_{v_i} - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H_{v_i} r_i (n m_i - 1) + H_p \left(\frac{D}{2nP} \right) \right]} \right]^{1/2} \quad (4.14)$$

時，可得到局部最佳解。

因為 T_{cc}^* 是在 $(1, 1, \dots, 1)$ 時，而 $\tilde{T}(m_1, m_2, \dots, m_k)$ 是在 (m_1, m_2, \dots, m_k) 。因為 $m_i \geq 1$ ，而且 m_i 在 $\tilde{T}(m_1, m_2, \dots, m_k)$ 式中皆在分母。因此 $\tilde{T}(m_1, m_2, \dots, m_k) \leq T_{cc}^*$ 。在 (T_{cc}^*, ∞) 區間內時， $TC^0(T)$ 成本函數沒有局部最佳解。■

根據式(4.13)及 Proposition 1，可得到一個搜尋上界，因此在搜尋時可跳過 (T_{cc}^*, ∞) 區間，所以 T_{cc}^* 是搜尋的起點。

另外，在第三章的數學模式中，已說明所有 m_i 必須為正整數，即 $\{m_i \in \mathbb{N}^+, \forall i\}$ 。在此，我們提出運用放寬限制式 $\{m_i \in \mathbb{N}^+, \forall i\}$ 為 $\{m_i \geq 1, \forall i\}$ 的問題，求得搜尋演算法的上下界；此處所得的上界為本研究所提出之第二種搜尋上界。接下來，本研究將以在 $\{m_i \geq 1, \forall i\}$ 前提下的放寬問題，推導搜尋演算法的上界與下界。

在不考慮倉儲成本的前提下，本研究所探討的原物料聯合補貨問題的目標函數式(4.15)所示：

$$\begin{aligned} & TC^0(m_1, m_2, \dots, m_k, T) \\ &= \frac{I}{T} (A + A_s + A_p + n(A_H + A_T)) \\ & \quad + TD \left[\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H_{v_i} \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H_{v_i} r_i + H_p \frac{D}{2nP} \right] \\ & \quad + \sum_{i=1}^k \left(\frac{a_i}{m_i T} + \frac{TD}{2} H_{v_i} r_i m_i \right) \\ &= \frac{I}{T} (A + A_s + A_p + n(A_H + A_T)) \\ & \quad + TD \left[\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H_{v_i} \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H_{v_i} r_i + H_p \frac{D}{2nP} \right] \\ & \quad + \sum_{i=1}^k TC_i^0(m_i, T) \end{aligned} \quad (4.15)$$

其中 $TC_i^0(m_i, T)$ 為 m_i 之函數且 $m_i \in \mathbb{N}^+$ 。我們將 $TC_i^0(m_i, T)$ 中 m_i 的限制放寬為 $m_i \geq 1$ ，可得放寬後的函數 $TC_i^R(m_i, T)$ 。給定一 T 值下的原物料 i 平均成本以 $\underline{TC}_i^R(T)$ 表示。由 Lemma 1 的第二點可知，我們可以在 $T = \lambda^R(m_i)$ 時求得 $\underline{TC}_i^R(T) = \min_{m_i \geq 1} \{TC_i^R(m_i, T)\}$ 。我們可以將 $\underline{TC}_i^R(T)$ 函數繪出如圖 4.2 所示。此時由於 m_i 已放寬，因此可以發現在圖 4.3 中，小於 $\lambda(m_3 = 1)$ 的 $\underline{TC}_i^R(T)$ 函數均為定值 ($TC_3^R(\lambda(m_3 = 1)) = \sqrt{\frac{a_3 H v_3 r_3}{2}} + \sqrt{\frac{a_3 H v_3 r_3}{2D}}$ ，參見式(4.7))，而大於 $\lambda(m_3 = 1)$ 的成本函數值則呈嚴格遞增。我們將式(4.6)中的 $\sqrt{\frac{2a_i}{H v_i r_i D}}$ 以 χ_i 來簡化後續的數學式，並將前述結果以式(4.16)之數學式表達：

$$\underline{TC}_i^R(T) = \begin{cases} \sqrt{\frac{a_i H v_i r_i}{2}} + \sqrt{\frac{a_i H v_i r_i}{2D}}, & \text{if } T \leq \chi_i \\ \frac{a_i}{T} + \frac{TD H v_i r_i}{2}, & \text{if } T > \chi_i \end{cases} \quad (4.16)$$

將式(4.16)對 T 微分後可得到式(4.17)的結果：

$$\frac{d}{dT} \underline{TC}_i^R(T) = \begin{cases} 0, & \text{if } T \leq \chi_i \\ -\frac{a_i}{T^2} + \frac{H v_i r_i D}{2}, & \text{if } T > \chi_i \end{cases} \quad (4.17)$$

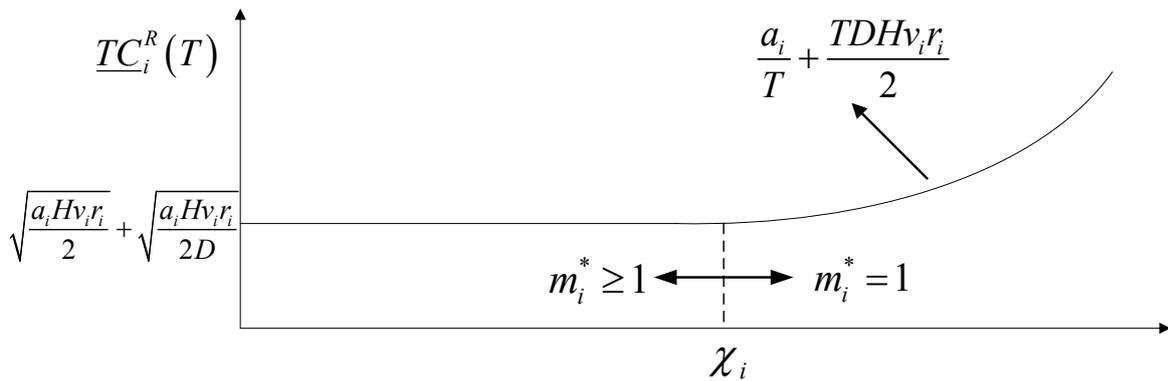


圖 4.2 $\underline{TC}_i^R(T)$ 函數圖形

在圖 4.3 中可以發現在 $T > \chi_i$ 時的函數圖形呈嚴格遞增，由式(4.16)可知當 $T > \chi_i$ 時的函數為 $\frac{a_i}{T} + \frac{TD H v_i r_i}{2}$ 。而當 $T \leq \chi_i$ 時的函數值為定值

$$\sqrt{\frac{a_i H v_i r_i}{2}} + \sqrt{\frac{a_i H v_i r_i}{2D}} ; \text{參見式(4.7)}。$$

由式(4.17)中可以看出， $\underline{TC}_i^R(T)$ 的微分值為非負且連續。因此 $\underline{TC}_i^R(T)$ 為在 $(0, \infty)$ 範圍中呈現凸性、持續增加並連續且可微的函數，參見圖4.3。因此我們可以將放寬後的問題 $TC^R(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 改寫如式(4.18)所示。

$$\begin{aligned} & TC^R(m_1, m_2, \dots, m_k, T) \\ &= \frac{I}{T}(A + A_S + A_P + n(A_H + A_T)) \\ &+ TD \left[\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} + \frac{1-2n}{2n} H v_i \right) + H_P \frac{D}{2nP} \right] + \sum_{i=1}^k \underline{TC}_i^R(T) \end{aligned} \quad (4.18)$$

在給定 T 值下，原物料 i 的平均成本以 $\underline{TC}_i^R(T)$ 表示，如式(4.19)所示。

$$\underline{TC}_i^R(T) = \min_{m_i \geq 1, \forall i} \{ TC_i^R(m_i, T) \} \quad (4.19)$$

為說明 $TC^R(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 為一凸性函數並可找出唯一最佳解。接下來本研究將舉例說明：以兩種原物料的聯合補貨問題為例，我們考慮兩種原物料在不考慮委外倉儲成本下的聯合補貨問題。在給定一個 n 值下，第一種原物料與第二種原物料的平均成本及其他成本，在此分別以 $\underline{TC}_1^R(T)$ 、 $\underline{TC}_2^R(T)$ 與 $TC_a(T)$ 表示，其中 $TC_a(T)$ 如式(4.20)：

$$\begin{aligned} & TC_a(T) \\ &= \frac{I}{T}(A + A_S + A_P + n(A_H + A_T)) \\ &+ TD \left[\sum_{i=1}^2 r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^2 H v_i r_i + H_P \frac{D}{2nP} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

此範例的最小總成本函數 $\underline{TC}^R(T)$ 如式(4.21)

$$\begin{aligned} & \underline{TC}^R(T) = TC_a(T) + \sum_{i=1}^2 \underline{TC}_i^R(T) \\ &= \frac{I}{T}(A + A_S + A_P + n(A_H + A_T)) \\ &+ TD \left[\sum_{i=1}^2 r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^2 H v_i r_i + H_P \frac{D}{2nP} \right] + \sum_{i=1}^2 \underline{TC}_i^R(T) \end{aligned} \quad (4.21)$$

為證明 $\underline{TC}^R(T)$ 為凸性函數，並可找到唯一最佳解，本研究將上述範例的各成本函數繪出如圖4.3所示。在圖4.3中可分為三個區間，分別是 $T > \chi_2$ 、 $\chi_2 \leq T \leq \chi_1$ 與 $T < \chi_1$ 。每個區間的 $\underline{TC}^R(T)$ 函數分別以下列三式表達：

$$(a) : \underline{TC}^R(T) = \sum_{i=1}^2 \frac{a_i}{T} + \frac{Hv_i r_i TD}{2} + TC_a(T) \quad (4.22)$$

$$(b) : \underline{TC}^R(T) = \sqrt{\frac{a_2 H v_2 r_2}{2}} + \sqrt{\frac{a_2 H v_2 r_2}{2D}} + \frac{a_1}{T} + \frac{H v_1 r_1 TD}{2} + TC_a(T) \quad (4.23)$$

$$(c) : \underline{TC}^R(T) = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{a_i H v_i r_i}{2}} + \sqrt{\frac{a_i H v_i r_i}{2D}} + TC_a(T) \quad (4.24)$$

由於 $TC_a(T)$ 為在 $(0, \infty)$ 範圍中呈現凸性、持續增加並連續且可微的函數，且由式(4.17)可知 $\underline{TC}_i^R(T)$ 也是凸函數，因此我們可以知道

$\underline{TC}^R(T) = TC_a(T) + \sum_{i=1}^2 \underline{TC}_i^R(T)$ 也是一個在 $(0, \infty)$ 範圍中呈現凸性、持續增加

並連續且可微的函數。由於 $\lim_{T \rightarrow \infty} \underline{TC}^R(T) = \infty$ 且 $\lim_{T \rightarrow 0} \underline{TC}^R(T) = \infty$ ，我們可以在

$(0, \infty)$ 範圍中找出 $\underline{TC}^R(T)$ 的唯一最佳解，且此唯一最佳解將會出現在

$\underline{TC}^R(T)$ 一階微分為0的點上。

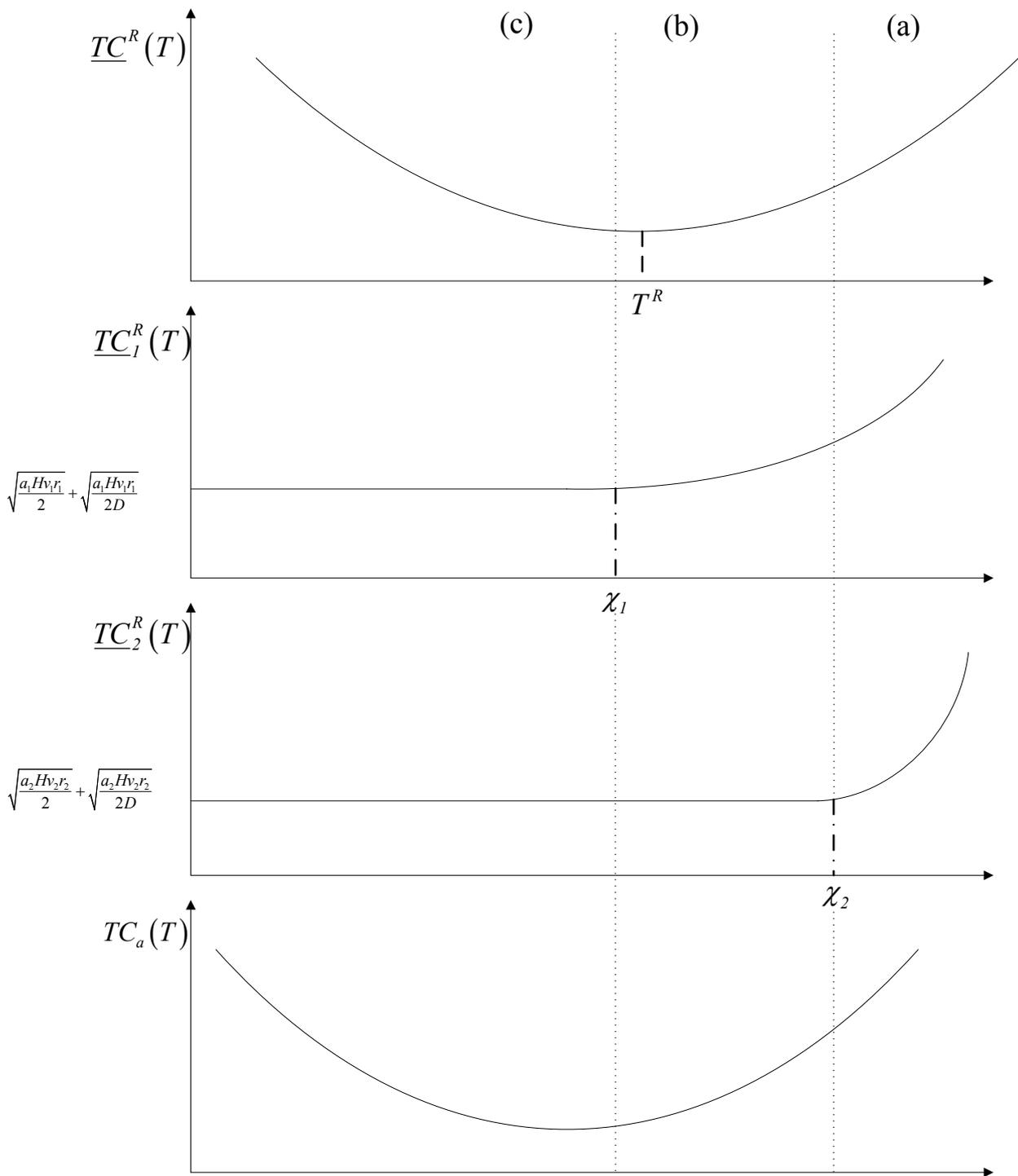


圖 4.3 兩種原物料聯合補貨問題放寬為 $m_i \geq 1$ 後的各項成本函數
 為了進行接下來的 $\underline{TC}^R(T)$ 最佳解搜尋程序，我們必須先假設
 $\chi_1 \leq \chi_2 \leq \dots \leq \chi_k$ 。在此假設之下， $\underline{TC}^R(T)$ 之一階微分式如式(4.25)所示。

$$\frac{d\underline{TC}^R(T)}{dT} = \begin{cases} \frac{-(A + A_s + A_p + n(A_T + A_H))}{(T)^2} \\ + D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_p \frac{D}{2nP} \right], \text{ if } T \leq \chi_l \\ \frac{-(A + A_s + A_p + n(A_T + A_H))}{(T)^2} \\ + D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_p \frac{D}{2nP} \right] + \sum_{i=1}^l \frac{-a_i}{T^2} + \frac{H v_i r_i D}{2}, \text{ if } \chi_l \leq T \leq \chi_{l+1}, l \leq l \leq k-1 \\ \frac{-(A + A_s + A_p + n(A_T + A_H))}{(T)^2} \\ + D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_p \frac{D}{2nP} \right] + \sum_{i=1}^k \frac{-a_i}{T^2} + \frac{H v_i r_i D}{2}, \text{ if } T \geq \chi_k \end{cases} \quad (4.25)$$

由於在 $T \geq \chi_k$ 的情形下 $\underline{TC}^R(T)$ 的函數曲線呈嚴格遞增，因此唯一最佳解不可能會落在 $T \geq \chi_k$ 的區間中，則 T^R 的落點會有如下兩種情形：

Case 1: $T^R < \chi_l$ ，由式(4.17)可知，此時 $\underline{TC}^R(T)$ 的一階微分為0者如式(4.26)所示。

$$\frac{d}{dT} \underline{TC}^R(T) = \frac{-(A + A_s + A_p + n(A_T + A_H))}{(T)^2} + D \left[\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_p \frac{D}{2nP} \right] \quad (4.26)$$

以式(4.26)可得出 T^R 的封閉解如式(4.27)。

$$T^R = \left[\frac{[A_p + A_s + A + n(A_T + A_H)]}{D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_p \left(\frac{D}{2nP} \right) \right]} \right]^{1/2} \quad (4.27)$$

Case 2: $T^R \geq \chi_l$ ，則 T^R 會落在 $[\chi_{i^*}, \chi_{i^*+1}]$ 區間中。由式(4.25)可知，

$(\underline{TC}^R(T))' < 0$ ，因此可知 $i^* := \left\{ l \leq i^* \leq k: (\underline{TC}^R(T))' < 0 \right\}$ 必存在。此時 $\underline{TC}^R(T)$ 的一階微分為0者如式(4.28)所示。

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dT} \underline{TC}^R(T^R) \\
&= \frac{-(A + A_S + A_P + n(A_T + A_H))}{(T^R)^2} + D \left[\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_p \left(\frac{D}{2nP} \right) \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{i^*} \frac{-a_i}{T^2} + \frac{H v_i r_i D}{2} = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

依式(4.28)即可得出 T^R 封閉值如式(4.29)。

$$T^R = \left[\frac{\left[A_p + A_s + A + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^{i^*} a_i \right]}{D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_p \left(\frac{D}{2nP} \right) \right] + \sum_{i=1}^{i^*} \frac{H v_i r_i D}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.29}$$

由於 $\underline{TC}^R(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 是 $\underline{TC}^0(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 放寬後的形式，因此 $\underline{TC}^0(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 的最佳解必定大於等於 $\underline{TC}^R(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 的最佳解。也就是說 $\underline{TC}^R(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 的最佳解為 $\underline{TC}^0(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 的最佳解下界。

但由於放寬後的問題中的訂貨乘數 m_i^R 不需要為整數，因此其最佳解對 $\underline{TC}^0(m_1, m_2, \dots, m_k, T) (m_i \in \mathbb{N}^+)$ 來說是不可行解。在求出 T^R 之後，對應於 T^R 最佳乘數組合 $(m_1^*(T^R), m_2^*(T^R), \dots, m_k^*(T^R))$ 代入原問題 $\underline{TC}^0(m_1^*(T^R), m_2^*(T^R), \dots, m_k^*(T^R), T^R)$ ，其中 $m_i^*(T^R)$ 可由式(4.10)得出，所求得的可行解為 $v(FP)$ ，如式(4.30)所示。

$$\begin{aligned}
& v(FP) \\
&= \frac{1}{T^R} (A + A_S + A_P + n(A_H + A_T)) \\
&+ T^R D \left[\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_p \frac{D}{2nP} \right] + \sum_{i=1}^k \underline{TC}_i^0(m_i^*(T^R), T^R)
\end{aligned} \tag{4.30}$$

接下來，本研究要利用 $v(FP)$ 求出搜尋 $\underline{TC}^0(T)$ 最佳解時的搜尋上界與下界。

Lemma 3. 令 T_{lb} 與 T_{ub} 分別為 $\underline{TC}^R(T)$ 的目標函數值為 $v(FP)$ 時，最小與最大

的基本週期值，則 $T_{lb} \leq T \leq T_{ub}$ 。

[Proof] 由於 $\underline{TC}^R(T)$ 為一凸性函數，因此我們可以很清楚的知道

$T_{lb} \leq T \leq T_{ub}$ 。因此如果 $T < T_{lb}$ ，則得到的 $\underline{TC}^R(T)$ 的目標函數必大於 $v(FP)$ 。

同樣地，在 $T < T_{lb}$ 時求出的 $\underline{TC}^0(T)$ 目標函數值也會大於 $v(FP)$ ，因此， T_{lb} 為 T 的下界。同理可證 T_{ub} 也是 T 的上界。■

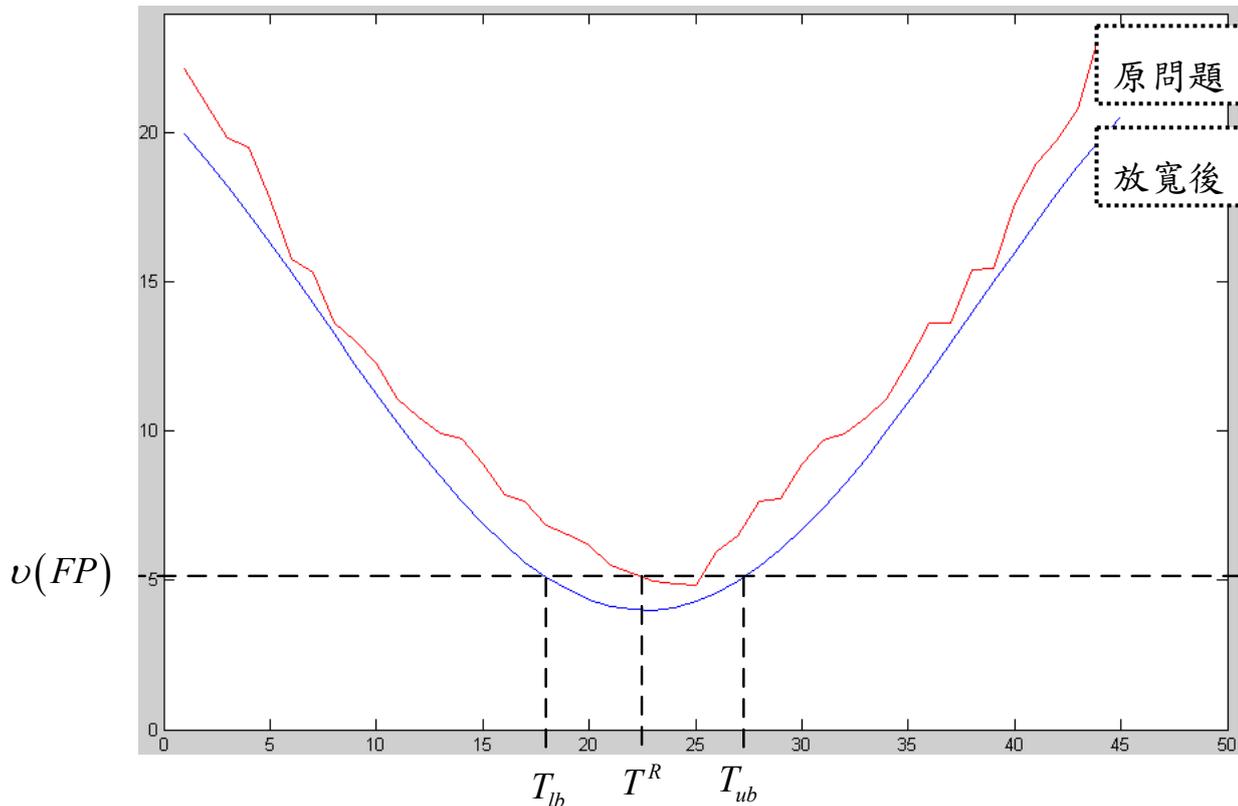


圖 4.4 利用放寬後的可行解 $v(FP)$ 求出搜尋演算法的上界與下界

我們可以利用二分搜尋法在 $[0, T^R]$ 區間中找出 T_{lb} 。至於求出 T_{ub} ，我們先把以共同週期法求出的上界 T_{cc}^* 帶入 $\underline{TC}^R(T)$ 求解並確認其求出來的目標函數是否小於等於 $v(FP)$ 。如果是的話，則 T_{cc}^* 即為 T_{ub} ；但如果不是的話，我們同樣可以利用二分搜尋法在 $[T^R, T_{cc}^*]$ 區間中求出 T_{ub} 的值。此搜尋法原理如圖 4.4 所示，其步驟如下：

步驟一：利用 $T < \chi_l$ 之方程式計算當最佳解為 $v(FP)$ 時的 \tilde{T} 值，並檢驗計算

出來的 \tilde{T} 值是否小於 χ_l 。如果 $\tilde{T} < \chi_l$ ，則令 $\tilde{T} = T_{lb}$ ；如果 $\tilde{T} \geq \chi_l$ ，

則令 $j = l$ ，並進行步驟二。

步驟二：利用 $\chi_j \leq T < \chi_{j+1}$ 之方程式計算當最佳解為 $v(FP)$ 時的 \tilde{T} 值，並檢

驗計算出來的 \tilde{T} 值是否介於 χ_j 與 χ_{j+1} 之間。如果 $\chi_j \leq \tilde{T} < \chi_{j+1}$ ，則

令 $\tilde{T} = T_{lb}$ ；如果不在此區間中，則令 $j = j + 1$ ，並重複步驟二。

搜尋基本週期上界 T_{ub} 時的步驟亦同。

至此，本研究得出了 $TC^0(T)$ 的最佳基本週期的上界與下界，下一節本研究將提出在 $[T_{lb}, T_{ub}]$ 中搜尋 $TC(m_1, m_2, \dots, m_k, T)$ 最佳解的啟發式演算法。

4.2 考慮運輸折扣與委外倉儲的聯合補貨問題之啟發式演算法

本節主要將倉儲限制加入聯合補貨模式，並使用第 3.2 節中推導的各項成本參數進行演算求解。探討在既定的倉儲空間下，搜尋最佳的補貨乘數與基本週期 $(m_1^*, m_2^*, \dots, m_k^*, T^*)$ ，以降低平均總成本。JRP 的相關文獻中，目前尚無文獻同時加入倉儲空間的限制與運輸費用的影響。

首先，輸入已知參數，以第 4.1.3 節所提出的求解搜尋演算法上下界的方式得出搜尋上界 T_{ub} 及 T_{lb} 。計算基本週期中的補貨次數 n 。將平均總成本函數 TC 對 n 微分求 n 的極限值，我們可以求出在如式(4.31)的數學式，將(4.31)中的 T 及 A_T 分別以 T_{ub} 與表 3.2 中最高(\$ 222/kg)與最低(\$ 8/kg)運輸費率代入計算，可得 n 的上界 n_{ub} 與下界 n_{lb} ，再依序從 n_{ub} 開始進行 $(n_{ub} - n_{lb})$ 次啟發式演算求解。

$$n = \sqrt{(TD)^2 \frac{2 \left(\sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H_{vi} \right) - H_p \right) + T^2 PD \sum_{i=1}^k r_i H_{vi}}{2P(A_T + A_H)}} \quad (4.31)$$

針對沒有限制條件下的聯合補貨模式，分別在不同的 n 值下，將 T 值由大至小進行區域最佳解的搜尋，計算 $TC(T)$ 曲線上所有產品的接合點，接合點之計算如式(4.9)。記錄過程中，每組區域最佳解 $(\tilde{M}_l, \tilde{T}_l)$ ，及平均總成本 $TC(\tilde{M}_l, \tilde{T}_l)$ ，直到下界 T_{lb} 為止。其中 \tilde{T}_l 如式(4.32)所示。

$$\tilde{T}_l = \left[\frac{\left[A_p + A_s + A + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k a_i / m_i \right] + \alpha}{D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H_{vi} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k r_i H_{vi} m_i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k r_i H_{vi} + H_p \left(\frac{D}{2nP} \right) \right] + \beta} \right]^{1/2} \quad (4.32)$$

$$\alpha = \frac{A_o W^2}{2P \left(\sum_{i=1}^k s_i \rho - \sum_{i=1}^k s_i r_i \right)} \quad (4.33)$$

$$\beta = \frac{A_o \left(\sum_{i=1}^k s_i r_i \frac{D}{n} \right)^2}{2P \left(\sum_{i=1}^k s_i \rho - \sum_{i=1}^k r_i s_i \right)} \quad (4.34)$$

計算每組 $(\tilde{M}_l, \tilde{T}_l)$ 的運輸費用並測試該區域最佳解是否需要額外的倉儲成本。若滿足倉儲限制，則不須計算額外倉儲成本。若超出倉儲限制，則須計算超出倉儲限制的量，並計算委外倉儲成本。

在一個基本週期 T 中，供應商會進行 n 次原物料補貨，由於原物料補貨時間點即為倉儲空間需求高點，因此我們先求出在原物料補貨時間點超出倉儲空間限制的量，接下來判定在配送完成品前，倉儲空間需求何時會因消耗原物料製造完成品轉而低於倉儲空間限制。如圖 3.1 我們可以知道超出倉儲空間限制的面積是一個直角三角形，求得其面積後再乘上倉儲空間單位租借成本即為額外倉儲成本 H_e 。接下來在 4.2.1 將介紹啟發式演算法完整執行步驟。

4.2.1 倉儲空間限制下考慮運輸折扣的聯合補貨問題之啟發式演算法

本研究參考 Lee and Yao(2003)與林彥妃(2004)之啟發式演算法，將其加入委外倉儲成本與運輸折扣之考量後成為本研究之啟發式演算法，演算法步驟詳述如下。

步驟 1：輸入已知參數與設立初始條件。

(1.1) 令 $l=1$ 且 $j=1$ 。初始假設 $n=2$ 。

(1.2) 計算搜尋上界 T_{ub} 與搜尋下界 T_{lb} 。以及 $TC(T)$ 曲線上，所有產品的接合點。找出 $\omega_0 = \min \{ \delta_i(m_i) : \delta_i(m_i) > T_{cc}^* \}$ 。如果找不到 ω_0 ，表示所有接合點皆小於或等於 T_{cc}^* ，則令 $\omega_0 = T_{cc}^*$ ，補

貨乘數集合 $\check{M}_1 = \{1, 1, \dots, 1\}$ 。計算

$$\bar{W}_{\max} = \max_l \{S_{\max}(\mathbf{M}_l, \check{T}_l)\} \cdot 65\%$$

(1.3) 以式(4.31)找出 n_{ub} 與 n_{lb} ，令 $n = n_{ub}$ 。

步驟 2：搜尋下一個接合點。

(2.1) 依式(4.14)搜尋補貨乘數集合 $\check{M}_l = M(\omega_0)$ ，並計算 $\check{T}_l = \check{T}(M(\omega_0))$ 與 $TC(\check{M}_l, \check{T}_l)$ 。

(2.2) 找出接合點中，小於 ω_0 且最大的接合點之產品編號

$$\pi = \arg \max_i \{\delta_i(m_i) < \omega_0\}, \text{ 令 } \omega_1 = \delta_\pi(m_\pi)。$$

(2.3) 判斷 \check{T}_l 是否介於 $[\omega_1, \omega_0)$ ，如果不是，記錄 l 。

(2.4) 令 $l = l + 1$ 。

(2.5) 當 $T_c = \omega_j$ 時，修正原物料編號 π 的補貨乘數，

$$M(\omega_j) = M(\omega_{j-1}) \setminus \{m_\pi\} \cup \{m_\pi + 1\}。$$

(2.6) 找出接合點中，小於 ω_j 且最大的接合點之產品編號

$$\pi = \arg \max_i \{\delta_i(m_i) < \omega_j\}, \text{ 令 } \omega_{j+1} = \delta_\pi(m_\pi)。$$

(2.7) 令 $\check{M}_l = M(\omega_j)$ ， $\check{T}_l = \check{T}(\check{M}_l)$ ，計算 $TC(\check{M}_l, \check{T}_l)$ 。

(2.8) 判斷 \check{T}_l 是否介於 $[\omega_{j+1}, \omega_j)$ ，如果不是，記錄 l 。

步驟 3：令 $j = j + 1$ ，重複步驟 2，直到 $\omega_j < T_{lb} = \check{T}_l / 2$ 。令 $l = 1$ 。

步驟 4：測試每組 (\check{M}, \check{T}) 是否造成原物料補貨時倉儲空間需求超出倉儲限制。如果超過倉儲限制，則必須計算需要租借的倉儲空間，並依此得出額外倉儲成本 H_e 。計算每組 (\check{M}, \check{T}) 所需要的運輸費用。

步驟 5：令 $n = n_{ub} - l$ ，重複步驟 2 到步驟 5，直到 $n = n_{lb}$ 。

步驟 6：比較所有可行的區域最佳解，並輸出最佳解

$$(\check{M}^*, \check{T}^*) = \arg \min_l \{TC(\check{M}_l^F, \check{T}_l^F)\}$$

第五章 求解空間限制下聯合補貨問題之遺傳演算法

本章討論如何利用遺傳演算法 (genetic algorithm ; GA)，求解倉儲具空間限制下生產存貨系統中考慮運輸折扣影響的聯合補貨問題。決策者面對的是協調補貨批量，在倉儲空間有限且考慮運輸費用的前提下，使平均總成本最小。第 5.1 節介紹遺傳演算法求解架構，第 5.2 以一個範例說明本章所提出的遺傳演算法執行方式，第 5.3 節小結。

5.1 遺傳演算法求解架構

本節主要探討加入倉儲空間限制的聯合補貨模式；假設補貨系統中有 k 項產品，年需求、年生產量、主要整備成本、次要整備成本、存貨持有成本等參數皆為已知條件，該如何在既定的倉儲空間下，決定最適的訂貨乘數與基本週期 (M^*, T^*) ，本研究將藉由遺傳演算法，搜尋最佳解 (M^*, T^*) ，並再測試是否低於倉儲空間限制，使平均成本 $TC(M^*, T^*)$ 為最小。

遺傳演算法流程圖如圖 4.1 所示。首先，輸入演算法參數，包括母體大小 $(N_{popsize})$ 、交配率 (p_c) 、突變率 (p_m) 與終止條件 (Γ) 。輸入參數後，計算染色體位元數，進行補貨乘數集合 (m_1, m_2, \dots, m_k) 的編碼，再產生大小為 $N_{popsize}$ 的初始母代。關於參數設定的部份，請參閱第 5.1.4 節。

遺傳演算法在每代演化過程中，針對母體的第 j 條染色體計算其對應的 M_j 與相對於 M_j 最佳的基本週期 T_j 、目標函數 $TC_j(M_j, T_j)$ 與適應值 F_j 。再運用輪盤選擇的機制挑選基因較優的染色體，形成「交配」父代。染色體交配後，進行「突變」，避免搜尋最佳解的過程中，掉入區域最佳解陷阱。每代染色體進行完「選擇」、「交配」及「突變」等機制後，計算每條染色體的最佳的基本週期 T_j 與目標函數 $TC_j(M_j, T_j)$ 。每組參數 (M_j, T_j) 依 $TC_j(M_j, T_j)$ ，由小至大排序，再測試是否需要額外的租借倉儲成本。最後保留第 gen 代，成本最小的可行最佳解 TC_G^{gen} 。

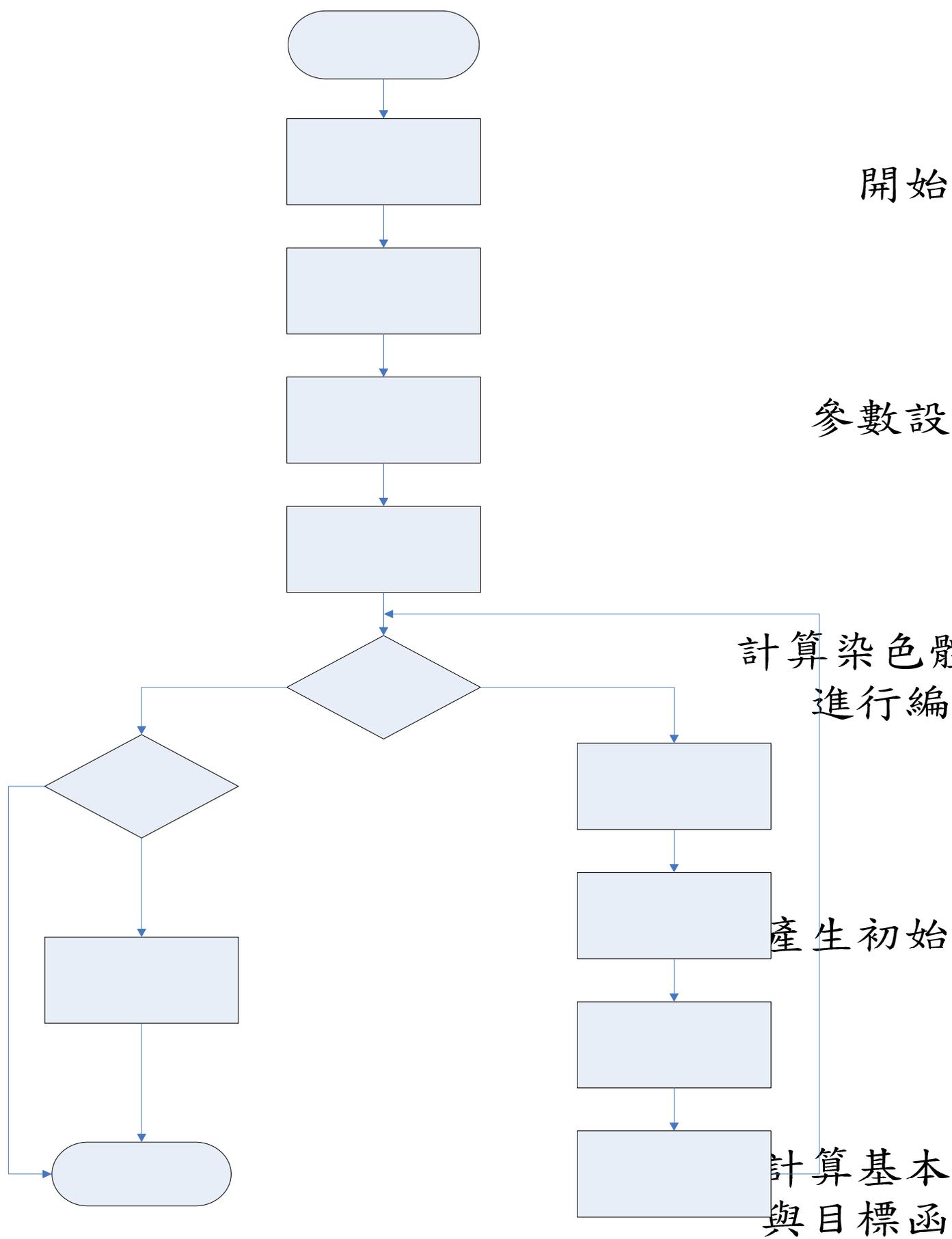


圖 5.1 遺傳演算法流程圖

再重複上述「選擇」、「交配」及「突變」等機制，直到滿足終止條件為止。將在第5.1.1節介紹染色體編碼，第5.1.2節說明適應性函數的計算與輪盤選擇機制的運用，第5.1.3節說明交配與突變機制的執行，第5.1.4節說明參數設定，第5.1.5節介紹倉儲空間限制下聯合補貨問題之遺傳演算法。

5.1.1 染色體編碼

遺傳演算法是要求解物料*i*的最適訂貨乘數，因此要將所有產品的訂貨乘數 $\{m_i\}$ ，表現在染色體的位元上。將 m_i 以二元編碼方式，呈現在染色體中的位元上。舉例來說，假如我們用 $u_i=3$ 來表示 m_i 所有可能的值，則 m_i 有 $2^{u_i} - 1 = 2^3 - 1 = 7$ 種可能，分別是 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ，以二元編碼來表示的話即分別為 $(0,0,1), \dots, (1,1,1)$ 。

為了要產生第*i*項產品的訂貨乘數 m_i ，須先決策 m_i 的上界 M^{UB} 與下界 M^{LB} 。本研究令 $M^{LB} = 1$ ，表示最小的補貨乘數可以是一個基本週期。Khouja, Michalewicz and Satosk(2000)的研究中提到 M^{UB} 的計算，可以利用基本週期的下界與原物料的EOQ來求出 M^{UB} 。基本週期的下界如式(5.1)所示。Khouja, Michalewicz and Satosk(2000)認為原物料*i*的最佳週期時間應為EOQ模式的基本週期時間，其計算方式為在計算EOQ時又加入主要整備成本*A*，因此原物料*i*的EOQ基本週期時間如式(5.2)所示

$$T_{min} = \min_i \left(\frac{2a_i}{r_i D H v_i} \right)^{1/2} \quad (5.1)$$

$$T_i^{EOQ} = \sqrt{\frac{2r_i D (A + a_i)}{H v_i}} \quad (5.2)$$

由於 T_{min} 為基本週期的最小值，且利用主要訂購成本*A*要在 M^{UB} 個週期中進行分攤的原理，我們可以得出 M^{UB} 如式(5.3)所示

$$M^{UB} = \left\lceil \frac{T_i^{EOQ}}{T_{min}} \right\rceil \quad (5.3)$$

由於本研究使用二元編碼將 m_i 寫入染色體中，必須使每個整數都有對應的二元編碼。我們利用 u_i 表示每個整數編碼時需要之最少位元數，亦即 $2^{u_i} \geq m_i^{UB}$ 。如此我們即可以把 m_i 值轉換為二元編碼寫入染色體中，轉換過程可以用下式(5.4)表示

$$\langle b_{u_i} b_{u_i-1} \dots b_1 \rangle = \left(\sum_{j=1}^{u_i} b_j 2^{j-1} \right) + 1 \quad (5.4)$$

假如轉換出來的整數值超過 m_i^{UB} 所代表的 m_i 上界，則我們將該整數值代表的二元編碼翻轉，以確保該整數值不會大於 m_i 的上界 m_i^{UB} 。

經過以上程序， m_i 表現為 $\{1, 2, \dots, m_i^{UB}\}$ 的非負整數。圖5.2顯示一條長度為 $\sum_{i=1}^k u_i$ 位元的染色體，二元編碼與整數值轉換的情形。

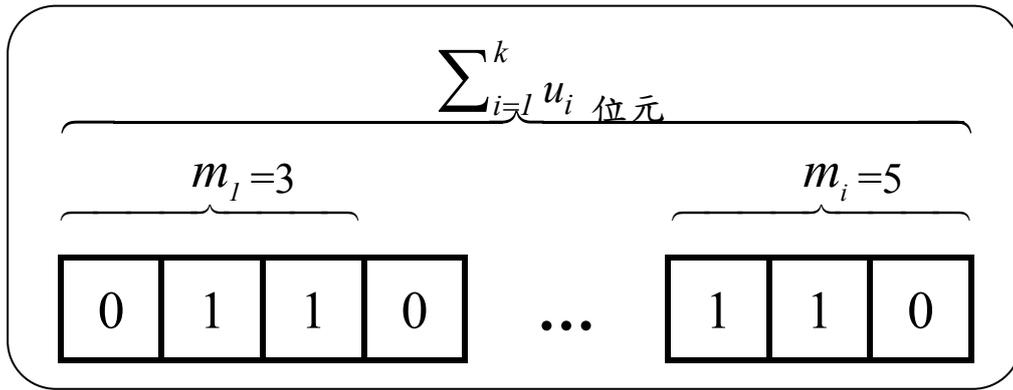


圖 5.2 染色體編碼

5.1.2 適應性函數與輪盤選擇機制

Marzouk 和 Moselhi (2003) 提出適應值的正規化 (fitness normalization)，可以更有效地解決最小化的問題。因此本研究採「線性排序正規化」(liner ranking normalization) 的方式，計算染色體的適應值。公式如式 (5.5) 所示。

$$F_{j_{temp}} = 2 - SP + \frac{2(SP-1)(j_{temp}-1)}{N_{popsize}-1} \quad (5.5)$$

先計算計算第 j 條染色體對應的基本週期 T_j ，如式(5.6)所示。

$$T_j = \left[\frac{\left[A_p + A_s + A + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{m_i} \right] + \alpha}{D \left[\frac{D}{(nP)} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H_{vi} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k r_i H_{vi} m_i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k r_i H_{vi} + H_p \left(\frac{D}{2nP} \right) \right] + \beta} \right]^{1/2} \quad (5.6)$$

$$\alpha = \frac{A_0 W^2}{2P \left(\sum_{i=1}^k s_i \rho - \sum_{i=1}^k s_i r_i \right)} \quad (5.7)$$

$$\beta = \frac{A_0 \left(\sum_{i=1}^k s_i r_i D / n \right)}{2P \left(\sum_{i=1}^k s_i \rho - \sum_{i=1}^k r_i s_i \right)} \quad (5.8)$$

由於本研究考量委外倉儲成本，因此在求出基本週期 T_j 與訂貨乘數集合 M_j 後，必須測試是否會因為超出倉儲限制而產生委外倉儲成本。如果倉儲需求超出倉儲限制，則計算超出倉儲限制的量，以計算委外倉儲成本。

接下來再計算目標函數 $TC_j(M_j, T_j)$ ，如式(5.9)所示。

$$\begin{aligned} TC_j(M_j, T_j) &= \\ &= I/T \left(A + A_s + A_p + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k a_i / m_i \right) \\ &+ TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \sum_{i=1}^k H v_i m_i r_i - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i (n m_i - 1) + H_p \frac{D}{2nP} \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

再依 $TC_j(M_j, T_j)$ 由大至小排列，令平均總成本最大的染色體（即最差的染色體）為 $j_{temp} = 1$ ，平均總成本最小的染色體（即最好的染色體）為 $j_{temp} = N_{popsize}$ ，其中 $N_{popsize}$ 表示染色體的個數。Pohlheim(1996)定義「選擇壓力」（selection pressure；SP）為選擇最好染色體的機率和平均機率之相對比率，且 SP 為介於 $[1.0, 2.0]$ 的數值。

以例 5.1 為例，資料如表 5.1 所示，說明正規排序適應值作為輪盤選擇機制的運用。假設 $N_{popsize} = 6$ ，第 j 條染色體的平均總成本為 TC_j 。經過線性排序正規化，可計算出第 j 條染色體適應值與選擇機率，以此作為輪盤選擇機制的運作法則。

染色體進行完「線性排序正規化」後，進入選擇（selection）階段。輪盤選擇機制（roulette wheel mechanism）是透過機率原理，將染色體適應值，視為輪盤面積，因此在求解的過程中，選擇輪盤面積較大的染色體，即適應能力較高的染色體；淘汰輪盤面積較小的染色體，即適應能力差的染色體。

體。輪盤選擇機制以圖 5.3 為例。先隨機產生一變數 $R \in (0, \sum F_{j_{temp}})$ ，並判斷 R 屬於哪一區間。如果 $R = 1.7243 \in (0.8, 2.0)$ ，則選擇第 2 條染色體。

5.1.3 交配與突變

交配 (crossover) 的機制可以在母體演化中製造差異，並可能產生具有超水準適應力的下一代染色體。先隨機產生機率值 $R \in (0, 1)$ ，若 R 小於交配率 p_c ，則選取該條染色體為交配候選。將任意 2 條交配候選染色體視為一組，形成交配組合，再進行兩點交配機制。以隨機方式找出兩個交配點 (crossover point)，並交換兩條染色體兩交配點中所有的位元，以圖 5.4 說明。將染色體從交配點 $pos = 4$ 與 $pos = 7$ 切開，再將交配組合內的染色體兩邊位元進行互換。

表 5.1 適應值的線性排序正規化

j	TC_j	j_{temp}	$F_{j_{temp}}$	$\sum_{y=1}^j F_{j_{temp}}$
1	17,594	3	0.8	0.8
2	14,697	4	1.2	2.0
3	10,582	6	2.0	4.0
4	12,324	5	1.6	5.6
5	23,789	1	0	5.6
6	19,459	2	0.4	6.0
總合			6	

令 $SP = 2$ 。

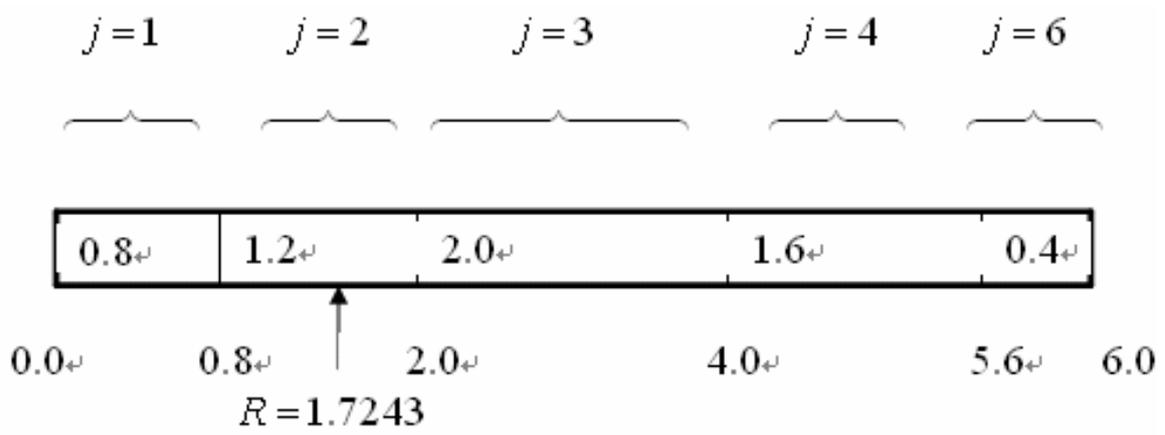


圖 5.3 輪盤選擇機制

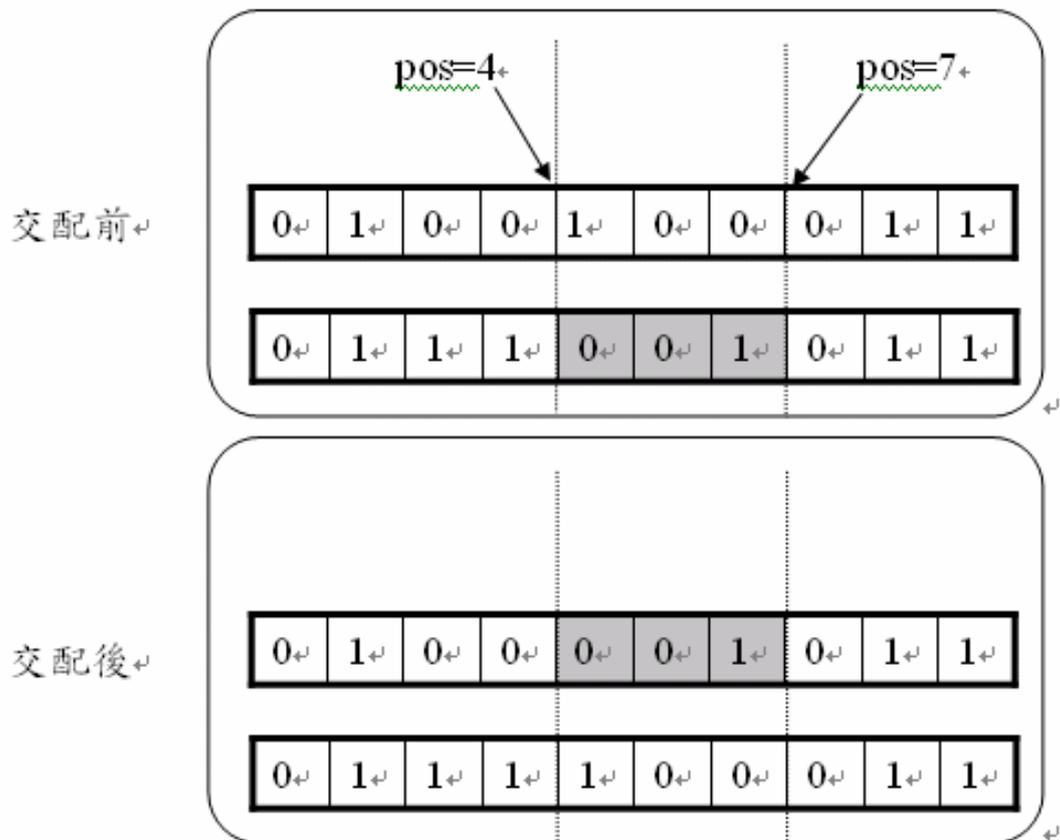


圖 5.4 交配

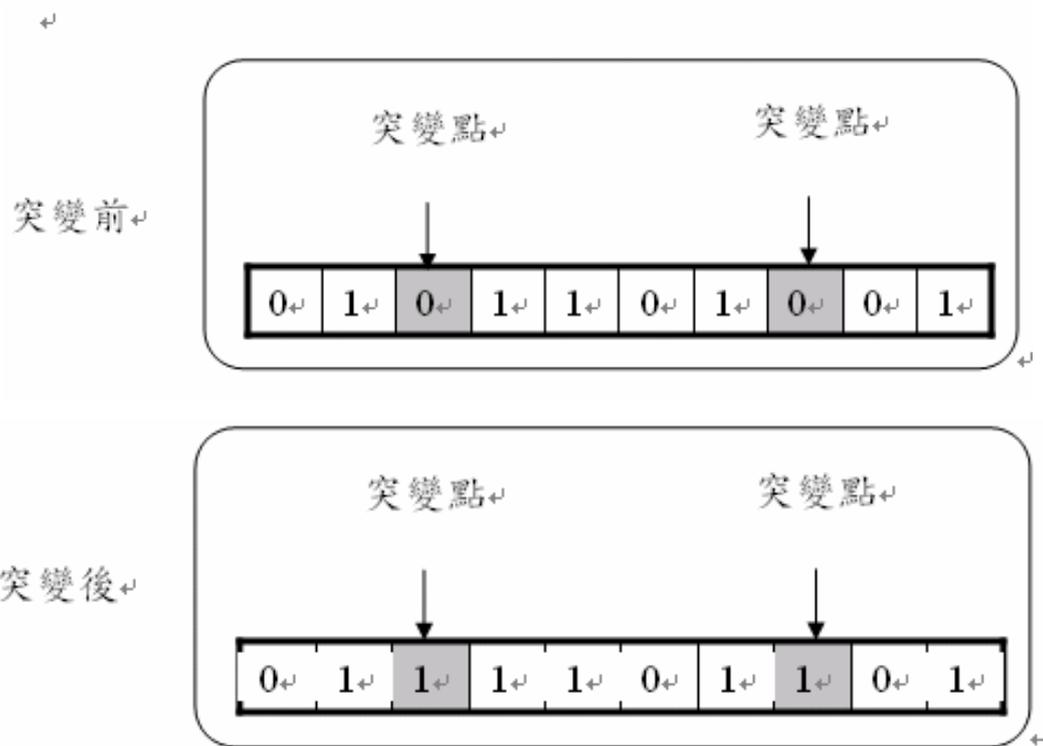


圖 5.5 突變

突變 (mutation) 機制是為了防止搜尋最佳解的過程中掉入區域最佳解的窘境。要檢視某個位元是否需要突變前，先隨機產生機率值 $R \in (0,1)$ ，若 R 小於突變率 p_m ，則選取該位元進行突變，以圖 5.5 說明。

5.1.4 參數設定

遺傳演算法主要包括四項參數：染色體個數、交配率、突變率與終止條件。一組相對較佳的參數組合可使 GA 在合理的運作時間內得出非常近似最佳解(close-to-optimal)的最佳目標函數解。

1. 母體大小 ($N_{popsize}$): Yao(2007)建議每代染色體應有 $10 \times k = 50$ 條。
2. 交配率 (p_c): $p_c = 0.5$
3. 突變率 (p_m): $p_m = 0.3$
4. 終止條件 (Γ): 演化所得手上的最佳解(best_on_hand solution)連續 50 代都沒有改變或是已演化 500 代，即可視為找到最佳解，則停止搜尋。

5.1.5 倉儲空間限制下考慮運輸折扣的聯合補貨問題之遺傳演算法

遺傳演算法步驟詳述如下。

步驟 1：定義參數：母體大小 ($N_{popsize}$)、交配率 (p_c)、突變率 (p_m)、終

止條件 (Γ)、選擇壓力 (SP)。令執行代數計次器 $\chi_{gen} = 1$ ，找出 n_{ub} 與 n_{lb} ，令 $n = n_{ub}$ 。

步驟 2：計算染色體長度進行染色體編碼。利用 5.1.1 節中的式(5.9)找出 m_i 之上界 m_i^{UB} 所需要的位元數 u_i ，此時設定染色體長度為 $\sum_{i=1}^k u_i$ ，補貨週期下界 $M^{LB} = 1$ 。因此將 m_i 以二元編碼的表現方式，呈現在染色體的位元上。

步驟 3：產生染色體長度為 $\sum_{i=1}^k u_i$ ，母體大小為 $N_{popsize}$ 的初始母體。

步驟 4：計算基本週期與目標函數。令 $j=1$ 。

(4.1) 計算第 j 條染色體對應的基本週期 T_j 與目標函數

$$TC_j(M_j, T_j)。令 j = j + 1。$$

(4.2) 重覆步驟 (4.1)，直到 $j = N_{popsize}$ 為止。

步驟 5：計算適應值，進入輪盤選擇機制。

(5.1) 依 $TC_j(M_j, T_j)$ 大小排列，令平均總成本最大的染色體（即最差的染色體）為 $j_{temp} = 1$ ，平均總成本最小的染色體（即最好的染色體）為 $j_{temp} = N_{popsize}$ 。計算適應值 $F_{j_{temp}}$ 。

(5.2) 隨機產生 $N_{popsize}$ 個變數 $R \in (0, \sum F_{j_{temp}})$ ，並判斷 R 屬於哪一區間，挑選出該條染色體，形成交配父代。

步驟 6：染色體進行兩點交配。 $j=1$ 。

(6.1) 產生 $N_{popsize}$ 個隨機變數 $R_l \in (0, 1)$, $l \in (0, N_{popsize})$ ，若 $R_l \leq p_c$ ，挑選第 l 條染色體，形成交配候選名單。若 $R_l > p_c$ ，該條染色體不變。

(6.2) 判斷形成交配候選名單的染色體個數 N_{cross} ，若 N_{cross} 為奇數，刪除最後一條染色體。再隨機配對兩條染色體形成交配群組。

(6.3) 從交配群組中按順序挑選第 j 與第 $j+1$ 兩條染色體，並產生兩個隨機變數 $R \in (0, N)$ ，將此兩個隨機變數設為兩個交配斷點。將染色體從交配斷點形成一個區間。再將兩條染色體

中的交配斷點間的位元進行互換。 $j = j + 2$ 。

(6.4) 重複步驟 (6.3) 直到 $j = N_{cross}$ 。

步驟 7：染色體進行突變。令 $y = 1$ 。

(7.1) 逐一檢視每條染色體每個位元，開始檢視時產生隨機變數 $R \in (0,1)$ ，若 $R \leq p_m$ ，挑選該位元進行突變。若 $R > p_m$ ，該位元不變。

(7.2) 重複步驟 (7.1) 直到所有染色體中的每一個位元都被檢視完畢。

步驟 8：計算基本週期與目標函數。令 $j = 1$ 。

(8.1) 計算第 j 條染色體對應的訂貨乘數 m_j 與基本週期 T_j 與目標函數 $TC_j(M_j, T_j)$ ，由於本研究考量委外倉儲成本，因此本研究在計算基本週期時以式(5.6)所表示之基本週期公式進行計算。令 $j = j + 1$ 。

(8.2) 重覆步驟 (8.1)，直到 $j = N_{popsize}$ 為止。

步驟 9：針對執行 GA 所得到的最佳解 $TC_G^{gen}(M^F, T^F)$ 計算所需的運費。並測試 $TC_G^{gen}(M^F, T^F)$ 是否造成原物料補貨時倉儲空間需求超出倉儲限制。如果超過倉儲限制，則必須計算需要租借的倉儲空間，並依此得出額外倉儲成本 H_e 。

步驟 10：令 $gen = gen + 1$ 。重複步驟 5 至步驟 9，輸出可行解 $TC_G^{gen}(M^F, T^F)$ 。當 GA 執行超過 200 代後， $TC_G^{gen}(M^F, T^F)$ 連續 50 代都沒有改善，表示最佳解趨於收斂，則停止搜尋。

步驟 11：令 $n = n_{ub} - 1$ ，重複步驟 3 到步驟 10，直到 $n = n_{lb}$ 。輸出每次執行 GA 所得的最佳解 $TC_G^{gen}(M^F, T^F)$ ，與對應的運輸費用及額外倉儲費用。

第六章 演算法範例與隨機數據實驗

本章將提供前兩章所提出之啟發式與遺傳演算法的範例說明，並利用隨機產生的數據與 Matlab 7.0 軟體對兩種演算法進行隨機數據實驗，以比較兩種演算法的效率及求解能力，並從中了解運輸成本及委外倉儲成本對最佳解的影響。第 6.1 節介紹啟發式演算法的範例說明，第 6.2 節介紹遺傳演算法的範例說明，第 6.3 節利用隨機產生的數據對兩種演算法進行實驗並比較其效率與結果，第 6.4 節小結。

6.1 啟發式演算法範例說明

表 6.1 範例 6.1 的各項資料

物料	1	2	3	4	5
a_i	6	9	4.5	7	10
H_i	0.7	1.5	2.5	3	6
Hv_i	0.49	1.05	1.75	2.1	4.2
d_i	14320	7160	7160	14320	35800
w_i	2.5	2.5	2	1.5	0.8
A	18				

表 6.2 $TC(T)$ 曲線上之接合點

接合點 物料編號	$m_i = 7$ 與 $m_i = 8$	$m_i = 6$ 與 $m_i = 7$	$m_i = 5$ 與 $m_i = 6$	$m_i = 4$ 與 $m_i = 5$	$m_i = 3$ 與 $m_i = 4$	$m_i = 2$ 與 $m_i = 3$	$m_i = 1$ 與 $m_i = 2$
1	0.005562	0.006381	0.007550	0.009247	0.011938	0.016882	0.029241
2	0.006539	0.007550	0.008933	0.010941	0.014125	0.019975	0.034599
3	0.003581	0.004135	0.004893	0.005993	0.007737	0.010941	0.018950
4	0.002883	0.003329	0.003939	0.004825	0.006229	0.008808	0.015257
5	0.001541	0.001780	0.021060	0.002579	0.003329	0.004708	0.008155

續表 6.2 $TC(T)$ 曲線上之接合點

接合點 物料編號	$m_i = 11$ 與 $m_i = 12$	$m_i = 10$ 與 $m_i = 11$	$m_i = 9$ 與 $m_i = 10$	$m_i = 8$ 與 $m_i = 9$
1	0.003599	0.003943	0.004359	0.004874
2	0.004259	0.004665	0.005158	0.005766
3	0.002333	0.002555	0.002825	0.003158
4	0.001878	0.002057	0.002274	0.002543
5	0.001004	0.001100	0.001216	0.001359

範例 6.1 資料如表 6.1 所示，參考 Sijadi et al.(2005)中求解的範例。假設配銷倉儲系統中有 5 項產品，啟發式演算法詳細步驟如下。

步驟 1：輸入已知參數與設立初始條件。

(1.1) 令 $l=1$ 、 $j=1$ ，初始假設 $n=1$ 。計算搜尋上界 $T_{ub} = 0.021436$ 、搜尋下界 $T_{lb} = 0.006337$ 與 $TC(T)$ 曲線上，所有產品的接合點，如表 4.3 所示。並找出 $\omega_0 = \min\{\delta_i(m_i) : \delta_i(m_i) > T_{ub}\} = 0.029241$ 。計算 $\bar{W}_{\max} = \max\{S_{\max}(\mathbf{M}_l), \bar{T}_l\} \cdot 65\% = 2398.4$ 。

(1.2) 以式(4.11)計算 $n_{ub} = 1$ ， $n_{lb} = 1$ ，令 $n = n_{ub} = 1$ 。

步驟 2：測試 (\bar{M}_l, \bar{T}_l) 是否造成原物料補貨時倉儲空間需求超出倉儲限制。如果超過倉儲限制，則必須依式(4.33)調整基本週期並計算需要租借的倉儲空間，依此得出額外倉儲成本 H_e 。計算 (\bar{M}_l, \bar{T}_l) 所需要的運輸費用。

步驟 2：尋找下一個接合點。

(2.1) 找出接合點中，小於 ω_0 且最大的接合點之產品編號

$$\pi = \arg \max_i \{\delta_i(m_i) < \omega_0 = 0.029241\} = 2, \text{ 令}$$

$$\omega_1 = \delta_1(m_1) = 0.019975。$$

(2.2) 依式(4.14)搜尋補貨乘數集合

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1 &= M(\omega_0 = 0.024113) = \{2, 2, 1, 1, 1\}, \text{ 並計算} \\ \tilde{T}_1 &= \tilde{T}(\tilde{M}_1) = 0.0079559 \text{ 與 } TC(\tilde{M}_1, \tilde{T}_1) = 17,806。 \end{aligned}$$

(2.3) 令 $l = l + 1 = 2$ 。

(2.4) 修正產品 1 的補貨乘數集合 $M(\omega_1) = M(\omega_0) \setminus \{m_2 = 1\} \cup \{m_2 + 1 = 3\} = \{2, 3, 1, 1, 1\}$ 。

(2.5) 找出接合點中，小於 ω_1 且最大的接合點之產品編號

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \delta_2(m_2) = 0.01895, \text{ 其中} \\ \pi &= \arg \max_i \{\delta_i(m_i) < \omega_1 = 0.019975\} = 3。 \end{aligned}$$

(2.6) 令 $\tilde{M}_2 = M(\omega_1 = 0.019975)$, $\tilde{T}_2 = \tilde{T}(\tilde{M}_2) = 0.0083$, 並計算 $TC(\tilde{M}_2, \tilde{T}_2) = 16,892$ 。

步驟 3：令 $j = j + 1 = 2$, 重複步驟 2, 直到 $\omega_5 = 0.0062285 < T_{lb} = 0.006337$ 。

步驟 4：測試每組 (\tilde{M}, \tilde{T}) 是否造成原物料補貨時倉儲空間需求超出倉儲限制。如果超過倉儲限制，則必須計算需要租借的倉儲空間，並依此得出額外倉儲成本 H_e 。計算每組 (\tilde{M}, \tilde{T}) 所需要的運輸費用。計算結果如表 6.3 所示。

步驟 5：令 $n = n_{ub} - 1$, 重複步驟 2 到步驟 5, 直到 $n = n_{lb}$ 。

步驟 6：比較所有可行的區域最佳解，並輸出最佳解

$$(\tilde{M}^*, \tilde{T}^*) = \arg \min_l \{TC(\tilde{M}_l^F, \tilde{T}_l^F)\} = 12,684$$

搜尋過程如表 6.4 所示。

表 6.3 運輸費用與額外倉儲成本

組合編號	運輸費用	委外倉儲費用	組合編號	運輸費用	委外倉儲費用
1	19	0	10	25	0
2	20	0	11	26	0

續表 6.3 運輸費用與額外倉儲成本

3	21	0	12	28	0
4	21	0	13	33	0
5	24	0	14	34	0
6	24	0	15	35	0
7	24	0	16	35	0
8	25	0	17	36	0
9	25	0	18	37	0

表 6.4 不考慮運輸折扣及委外倉儲成本下的區域最佳解

l	$[\omega_{j+1}, \omega_j)$	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	\check{T}_l	$TC(\check{T}_l)$
1	(0.029241, 0.019975)	2	2	1	1	1	0.007956	17806
2	(0.019975, 0.018950]	2	3	1	1	1	0.008301	16892
3	(0.018950, 0.016882]	2	3	2	1	1	0.008817	15918
4	(0.016882, 0.015257]	3	3	2	1	1	0.009054	15525
5	(0.015257, 0.014125]	3	3	2	2	1	0.009928	14328
6	(0.014125, 0.011938]	3	4	2	2	1	0.010127	14105
7	(0.011938, 0.010941]	4	4	2	2	1	0.010278	13957
8	(0.010941, 0.010941]	4	5	3	2	1	0.010681	13620
9	(0.010941, 0.009247]	4	5	4	2	1	0.010874	13510
10	(0.009247, 0.008933]	5	5	4	2	1	0.011001	13432
11	(0.008933, 0.008808]	5	6	4	2	1	0.011135	13356
12	(0.008808, 0.008155]	5	6	4	3	1	0.011690	13089
13	(0.008155, 0.007737]	5	6	4	3	2	0.015156	12651
14	(0.007737, 0.007550]	5	6	5	3	2	0.015500	12697

續表 6.4 不考慮運輸折扣及委外倉儲成本下的區域最佳解

15	(0.007550, 0.007550]	6	7	5	3	2	0.015956	12753
16	(0.007550, 0.006539]	7	7	5	3	2	0.016176	12791
17	(0.006539, 0.006381]	7	8	5	3	2	0.016421	12835
18	(0.006381, 0.006229)	8	8	5	3	2	0.016648	12883

由表 6.4 中可以看到，未考慮運輸費用與額外倉儲成本的最佳解為 12,651，但加入運輸費用與倉儲限制後的區域最佳解如表 6.5 所示。利用啟發式演算法求得的補貨作業中的存貨成本，加入額外倉儲成本與運輸費用後的最佳解為 12,684。

表 6.5 考慮倉儲限制與運輸折扣之區域最佳解

l	$TC(\tilde{T}_l)$	運輸費用	額外倉儲成本	總成本
1	17,806	19	0	17,825
2	16,892	20	0	16,912
3	15,918	21	0	15,939
4	15,525	21	0	15,546
5	14,328	24	0	14,352
6	14,105	24	0	14,129
7	13,957	24	0	13,981
8	13,620	25	0	13,645
9	13,510	25	0	13,535
10	13,432	25	0	13,457
11	13,356	26	0	13,382
12	13,089	28	0	13,117

續表 6.5 考慮倉儲限制與運輸折扣之區域最佳解

13	12,651	33	0	12,684
14	12,697	34	0	12,731
15	12,753	35	0	12,788
16	12,791	35	0	12,826
17	12,835	36	0	12,871
18	12,883	37	0	12,920

傳統的 JRP 問題為非多項式求解的問題 (Arkin et al.,1989)，本研究將供應商方面的原物料存貨成本，與製造商的完成品存貨成本加入傳統 JRP 模式，使存貨成本模式更為複雜。啟發式演算法可求解倉儲空間限制下的聯合補貨問題，但由於本研究決策情境中考慮供應商的存貨成本對模式的影響，可以由範例 6.1 的求解過程中可以發現，供應商的原料存貨成本高於製造商的原料存貨成本，因此必須降低訂貨乘數以求降低系統中原物料的存貨持有成本。本次求解執行時間約 0.12 秒，下一節將利用 GA 進行求解，以驗證倉儲空間具有限制下，考慮運輸折扣的聯合補貨問題之啟發式演算法的效率較佳，作為決策者在考慮運輸折扣的運輸費用與委外倉儲成本下，進行最佳批量排程決策的輔助參考。

6.2 遺傳演算法範例說明

以範例 6.1 為例，資料如表 6.1 所示，可參考 Sijadi et al.(2005)。假設補貨系統中有 5 種原物料，遺傳演算法詳細步驟如下。

步驟 1：定義參數：母體大小 $N_{popsize} = 10 \times k = 50$ 、交配率 $p_c = 0.5$ 、突變率 $p_m = 0.3$ 、終止條件 $\Gamma = 50$ 、選擇壓力 $SP = 1.75$ 。令執行代數計次器 $\chi_{gen} = 1$ 。以式(4.11)找出 $n_{ub} = 1$ 與 $n_{lb} = 1$ ，令 $n = n_{ub} = 1$ 。

步驟 2：計算染色體長度進行染色體編碼。

(2.1) 利用式(5.3)得出補貨週期上界 $M^{UB} = [11,10,9,10,10]$ ，補貨

週期下界 $M^{LB} = 1$ 。由補貨週期上界可知 $u_i = [4, 4, 4, 4, 4]$ 。

(2.2) 設定染色體長度為 $\sum_{i=1}^k u_i = 20$ 。

步驟 3：隨機產生染色體長度為 20 位元，母體大小為 50 的初始母體。

步驟 4：計算基本週期與目標函數：計算 50 條染色體對應的基本週期 T_j 與目標函數 $TC_j(M_j, T_j)$ 。

步驟 5：計算適應值，進入輪盤選擇機制。

(5.1) 依 $TC_j(M_j, T_j)$ 大小排列，令平均總成本最大的染色體（即最差的染色體）為 $j_{temp} = 1$ ，平均總成本最小的染色體（即最好的染色體）為 $j_{temp} = N_{popsize} = 50$ 。計算適應值 $F_{j_{temp}}$ 。

(5.2) 隨機產生 $N_{popsize}$ 個變數 $R \in (0, \sum F_{j_{temp}})$ ，並判斷 R 屬於哪一區間，挑選出該條染色體，形成交配父代。

步驟 6：染色體進行兩點交配。 $j=1$ 。

(6.1) 產生 50 個隨機變數 $R \in (0, 1)$ ，若 $R \leq p_c$ ，挑選第 j 條染色體，形成交配候選名單。 $R > p_c$ ，該條染色體不變。令 $j = j + 1$ 。

(6.2) 重複步驟 (6.1) 到步驟 (6.2)，直到 $j=50$ 為止。

(6.3) 判斷形成交配候選名單的染色體個數 N_{cross} ，若 N_{cross} 為奇數，刪除最後一條染色體。再隨機配對兩條染色體形成交配群組。

(6.4) 從交配群組中按順序挑選第 j 與第 $j+1$ 兩條染色體，並產生兩個隨機變數 $R_1 = 5.3341, R_2 = 7.4266$ ，將 $[R_1] = 6, [R_2] = 8$ 設為兩個交配斷點。將染色體從交配斷點形成一個區間。再將兩條染色體中的交配斷點間的位元進行互換。 $j = j + 2$ 。

(6.5) 重複步驟 (6.4) 直到 $j = N_{cross}$ 。

步驟 7：染色體進行突變。令 $y=1$ 。

(7.1) 逐一檢視每條染色體每個位元，開始檢視時產生隨機變數

$R \in (0,1)$ ，若 $R \leq p_m$ ，挑選該位元 p_i 進行突變。若 $R > p_m$ ，該位元不變。

(7.2) 重複步驟 (7.2) 直到所有染色體中的每一個位元都被檢視完畢。

步驟 8：計算基本 50 條染色體對應的訂貨乘數 m_i 與基本週期 T_j 與目標函數 $TC_j(M_j, T_j)$ 。

步驟 9：針對執行 GA 所得到的最佳解 $TC_G^{gen}(M^F, B^F)$ 計算所需的運費。本次求解最終求出的訂貨乘數 $m_i = [4, 7, 5, 1, 1]$ ，基本週期為 0.021335。

步驟 10：令 $gen = gen + 1$ 。重複步驟 5 至步驟 9，輸出可行解 $TC_G^{gen}(M^F, T^F)$ 。當 GA 執行超過 200 代後， $TC_G^{gen}(M^F, T^F)$ 連續 50 代都沒有改善，表示最佳解趨於收斂，則停止搜尋。

步驟 11：令 $n = n_{ub} - 1 = 1$ ，重複步驟 3 到步驟 10。輸出每次執行 GA 所得的最佳解 $TC_G^{gen}(M^F, T^F)$ ，與對應的運輸費用及額外倉儲費用。最後得出最佳解為 $n=1$ 時，訂貨乘數 $m_i = [1, 2, 2, 1, 1]$ ，基本週期為 0.024511，包含運輸費用及委外倉儲費用的平均總成本為 12,437。

本節利用遺傳演算法求解考慮運輸折扣與委外倉儲成本的聯合補貨問題。受限於範例的參數設定，由圖 6.1 可以看出，在範例 6.1 中，求解過程在 50 代以內即開始收斂，從第 15 代開始到第 251 代，存貨成本最佳解均維持在 $TC_{gen}^H = 12,437$ ，表示經過 251 代的搜尋，總成本的最佳解已經趨於收斂。整個求解過程中存貨成本最好的解(best on hand)與其運輸費用及額外倉儲成本如表 6.6 所示。

演算所花時間共 8.08 秒，遠高於第四章啟發式演算法的 0.12 秒。兩種方法皆可作為決策者在倉儲空間具限制下，進行考慮運輸折扣的聯合補貨問題決策的輔助參考。

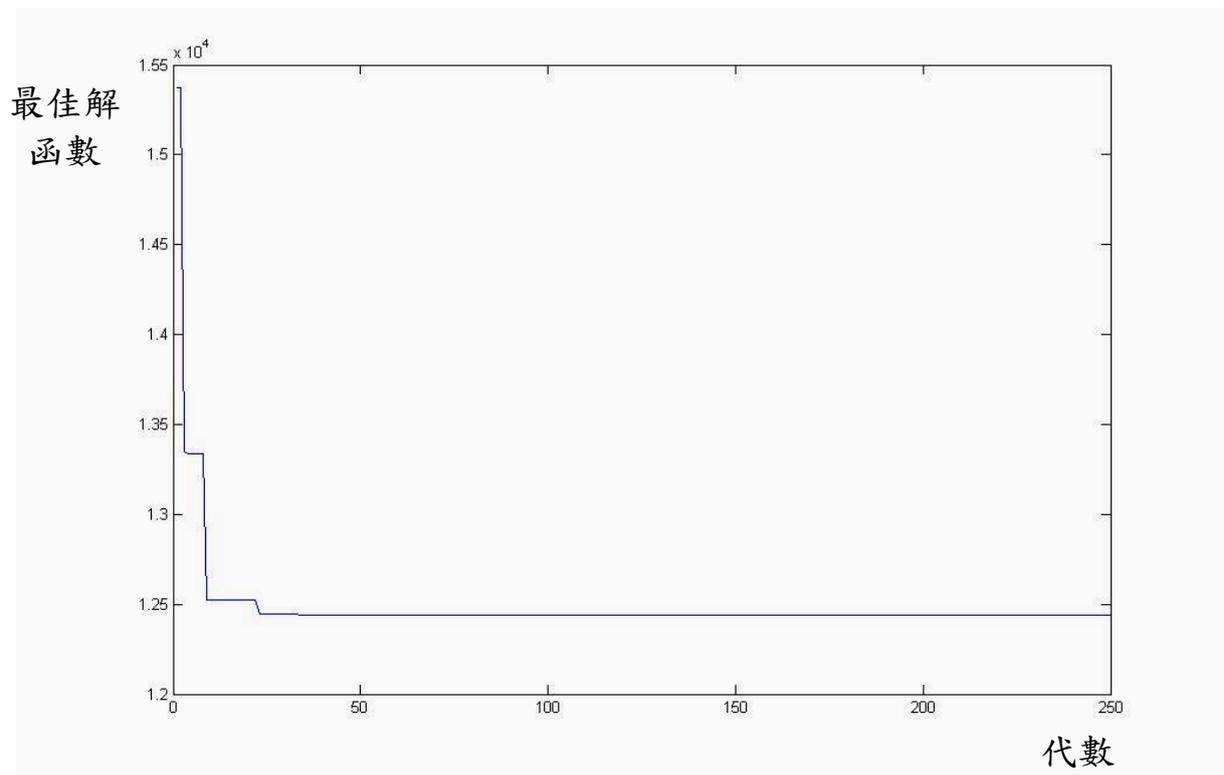


圖 6.1 求解過程中存貨成本最好的解(best on hand)

表 6.6 求解過程中平均總成本的變化

代	運輸+委外 倉儲	平均總成本	代	運輸+委外 倉儲	平均總成本
1	523.06	15370	28	1461	12446
2	523.06	15370	29	1461	12446
3	1055.1	13347	30	1461	12446
4	1055.8	13340	31	1461	12446
5	1055.8	13340	32	1461	12446
6	1055.8	13340	33	1461	12446
7	1055.8	13340	34	1276.2	12437
8	1055.8	13340	35	1276.2	12437
9	1239.2	12520	36	1276.2	12437
10	1239.2	12520	37	1276.2	12437
11	1239.2	12520	38	1276.2	12437

12	1239.2	12520	39	1276.2	12437
13	1239.2	12520	40	1276.2	12437
14	1239.2	12520	41	1276.2	12437
15	1239.2	12520	42	1276.2	12437
16	1239.2	12520	43	1276.2	12437
17	1239.2	12520	44	1276.2	12437
18	1239.2	12520	45	1276.2	12437
19	1239.2	12520	46	1276.2	12437
20	1239.2	12520	47	1276.2	12437
21	1239.2	12520	48	1276.2	12437
22	1239.2	12520	49	1276.2	12437
23	1461	12446	50	1276.2	12437
24	1461	12446	51	1276.2	12437
25	1461	12446	52	1276.2	12437
26	1461	12446	53	1276.2	12437
27	1461	12446	54	1276.2	12437

6.3 隨機實驗

本節中我們將隨機產生 10 組隨機資料。為了更貼近真實作業情境，本研究將存貨持有成本分為兩種水準，分別是隨機產生的存貨持有成本，與隨機產生再提高 100 倍的存貨持有成本，並隨機產生原物料數分別為 10, 15, 20, 25, 30 種的隨機資料，其餘各項參數的隨機產生方式如表 6.7 所示。

表 6.7 各項參數隨機區間

參數	隨機區間	參數	隨機區間
a	[1,10]	A_p	[5,50]
Hv_i	[1,5]	A_s	[5,50]
H_i	$[1,2] \times Hv_i$	H_p	[10,20]
r_i	[1,5]	D	[1000,15000]
w_i	[0.5,2]	P	$[1.2,3] \times D$
A	[5,50]		
A_h	[1,10]		

表 6.8 隨機實驗數據結果

啟發式演算法				遺傳演算法			
$k = 10$							
n	T	TC	time	n	T	TC	time
1	0.0083	21,725	0.12 Sec.	1	0.0088	22,710	71.092 Sec.
2	0.0078	22,344		2	0.0120	19,972	
3	0.0075	23,584		3	0.0098	23,092	
$k = 15$							
n	T	TC	time	n	T	TC	time
1	0.0152	17,334	0.11 Sec.	1	0.0202	17,164	98.202 Sec.
2	0.0148	16,740		2	0.0192	17,410	
3	0.0146	16,795		3	0.0262	14,944	
$k = 20$							
n	T	TC	time	n	T	TC	time
1	0.0155	14,195	0.16 Sec.	1	0.0191	14,291	241.47 Sec.
2	0.0151	13,834		2	0.0161	16,126	

3	0.0149	14,163		3	0.0258	13,889	
$k = 25$							
n	T	TC	time	n	T	TC	time
1	0.0084	39,176	0.12 Sec.	1	0.0090	38,260	407.26 Sec.
2	0.0083	37,403		2	0.0072	43,840	
3	0.0082	37,596		3	0.0090	41,052	
$k = 30$							
n	T	TC	time	n	T	TC	time
1	0.0099	29,932	0.13 Sec.	1	0.0108	29,192	662.17 Sec.
2	0.0097	29,007		2	0.0077	34,767	
3	0.0096	29,310		3	0.0143	29,926	

由表 6.8 可以看出，啟發式演算法可以在較短時間內求得比遺傳演算法更好的解。即使求解的原物料種類數為 30 種，執行時間只需 0.13 秒。同樣的參數環境下，遺傳演算法需要 662.17 秒，且無法求得較好的最佳解。由此可見，在原物料數很多時，啟發式演算法還是一個提供管理者決策參考的依據。

由啟發式演算法的求解過程中可以看出，受限於範例問題的參數設定，最佳解幾乎都出現在基本週期上界附近。在上述隨機實驗的參數設定中，次要整備成本與存貨持有成本差距不大，因此製造商在補貨時會選擇較短的訂購週期以降低原物料兩次訂購之間的存貨持有成本。本研究接下來將存貨持有成本放大，希望能使訂購週期增加，並藉此觀察訂購週期增加對運輸費用與委外倉儲費用的影響。

表 6.9 將存貨持有成本放大後的隨機實驗數據結果

啟發式演算法				遺傳演算法			
$k = 10$							
n	T	TC	time	n	T	TC	time
1	0.0012	206,450	7.69 Sec.	1	0.0013	177,400	91.54 Sec.
2	0.0014	184,110		2	0.0014	183,050	
3	0.0015	176,930		3	0.0015	177,400	
$k = 15$							
n	T	TC	time	n	T	TC	time
1	0.0014	251,900	8.27 Sec.	1	0.0014	251,830	217.9 Sec.
2	0.0016	463,340		2	0.0014	240,030	
3	0.0016	235,120		3	0.0016	236,490	
$k = 20$							
n	T	TC	time	n	T	TC	time
1	0.0025	139,880	7.44 Sec.	1	0.0023	139,930	366.4 Sec.
2	0.0027	129,130		2	0.0026	128,490	
3	0.0029	122,820		3	0.0030	123,440	
$k = 25$							
n	T	TC	time	n	T	TC	time
1	0.0009	365,090	7.73 Sec.	1	0.0007	364,550	765.33 Sec.
2	0.0010	336,130		2	0.0008	334,210	
3	0.0011	324,530		3	0.0010	324,200	
4	0.0011	319,440		4	0.0009	316,030	
$k = 30$							
n	T	TC	time	n	T	TC	time
1	0.0023	212,370	8.11 Sec.	1	0.0019	212,180	791.93 Sec.
2	0.0024	203,110		2	0.0020	200,200	

3	0.0025	195,000		3	0.0024	193,320	
---	--------	---------	--	---	--------	---------	--

由表 6.9 隨機實驗數據與求解過程看來，由於存貨持有成本變大(放大 100 倍)，因此基本週期相較於在原本參數設定下且求解相同原物料數的時而較小，而訂貨乘數則相對較高，如此能將求解的時間範圍縮小以求得較低的總成本。啟發式演算法在求解同一原物料數的前提下，求解能力一般較遺傳演算法稍差，但是遺傳演算法花的時間比啟發式演算法高出許多。因此，在求解本研究所針對的問題時，當決策者的原物料存貨持有成本較高，且也必須分多次補貨並運送完成品時，兩種演算法都能提供決策者輔助參考。遺傳演算法雖能求得較佳的解，但花費的時間太多，效率不高；而啟發式演算法雖然求出的解略差於遺傳演算法，但能在極短時間內提供決策者補貨決策的輔助參考。因此，本研究認為在本研究的決策情境中，各種參數設定下，啟發式演算法應能在短時間內提供決策者有效的輔助參考。

第七章 研究結論

7.1 結論

本研究探討考慮委外倉儲成本與運輸折扣下，生產存貨系統中多種原物料的聯合補貨問題。在本論文的第三章本研究推導考慮委外倉儲成本與運輸折扣下多種原物料聯合補貨問題之數學模式。本研究提出兩種演算法：本論文的第四章運用不考慮委外倉儲成本下問題的理論性質，提出一個啟發式演算法求解多種原物料的最佳補貨策略。另外，第五章介紹運用遺傳演算法進行求解。由第六章的演算法範例與隨機數據實驗可知，當求解原物料為 5 種的小型問題時，啟發式演算法與遺傳演算法的執行時間分別為 0.06 秒與 6 秒，遺傳演算法雖然較為費時，但兩者所花費時間均極為短暫，而遺傳演算法可以求得較好的解。由第 6.3 節的隨機數據實驗得知，隨著原物料數目的增加，遺傳演算法會花費顯著較久的求解時間，但是求解的品質則無顯著地比啟發式演算法為佳。因此，對關心本研究議題的運籌經理人，本研究提出下列的建議：面對多種原物料補貨作業或是強調需運用較短的運算時間求解時，建議使用啟發式演算法，作為多種原物料的最佳補貨策略決策的輔助參考。

7.2 未來研究建議

本研究之決策情境考慮考慮委外倉儲成本與運輸折扣下，生產存貨系統中多種原物料的聯合補貨問題。但本研究並未考量因為製造商生產時的重工與瑕疵品退回，而造成比預定更多的原物料需求以及運輸與額外倉儲需求，未來相關的研究可以將上述的考量加入決策模式的情境，以更貼近真實作業系統的特性，並提供決策者輔助與參考。

參考文獻

中文部分

1. 林美鳳著，單項產品、多個供應商存貨模型—考慮前置時間、數量折扣和資源限制，國立彰化師範大學商業教育學系碩士論文，2001。
2. 張建朝著，二階供應鏈體制下合併補貨問題之研究，東海大學工業工程與經營資訊學系碩士論文，2002。
3. 呂岳庭著，單一供應商多個零售商供應鏈中具損耗性產品之最佳補貨策略，東海大學工業工程與經營資訊學系碩士論文，2004。
4. 林晏妃著，配銷倉儲具空間限制下批量排程問題之研究，東海大學工業工程與經營資訊學系碩士論文，2004。
5. 沈哲鋒著，海運供應鏈中運送排程的最佳求解演算法，東海大學工業工程與經營資訊學系碩士論文，2006。

英文部分

1. Arkin, E., Joneja, D., and Roundy, R., 1989, Computational complexity of uncapacitated multi-echelon production planning problems, *Operations Research Letters*, 8, 61-6.
2. Abad, P.L and Aggarwal, V., 2005, Incorporating transport cost in the lot size and pricing decisions with downward sloping demand, *Production Economics*, 95, 297-305.
3. Banerjee, A. and Kim, S.L., 1995, An integrated JIT inventory model, *International Journal of Operations & Production Management*, 15, 9, 237-244.
4. Baumol, W.J. and Vinod, H.D., 1970. An inventory theoretic model of freight transport demand, *Management Science*, 16 (7), 413-421.
5. Goyal, S.K., 1973, Determination of economic packaging frequency for

- items jointly replenished, *Management Science*, 20(2), 232-235.
6. Goyal, S.K., 1973, Economic packaging frequency for items jointly replenished, *Operations Research*, 21, 644-647.
 7. Goyal, S.K., 1974, Optimum ordering policy for a multi item single supplier system, *Operational Research Quarterly*, 25(2), 293-298.
 8. Goyal, S.K., 1974, Determination of optimum packaging frequency of items jointly replenished, *Management Science*, 21(4), 436-443.
 9. Goyal, S.K., Belton A.S., 1979, On a simple method of determining order quantities in joint replenishments under deterministic demand, *Management Science*, 25(6),604.
 10. Goyal, S.K., 1988, Determining the optimal production-packaging policy for jointly replenished items, *Engineering Costs and Production Economics*, 15, 339-341.
 11. Hahm, J. and Yano, C.A., 1992, The economic lot and delivery scheduling problem: The single item case, *International Journal of Production Economics*, 28, 235-252.
 12. Hariga, M., 1994, Two new heuristic procedures for the joint replenishment problem, *Journal of the Operation Research Society*, 45(4), 463-471.
 13. Hartely, R.J., 1979, *Operations Research—Managerial Emphasis*, Santa Monica:Goodyear.
 14. Huang, C.K., 2003, An optimal policy for a single-vendor single-buyer integrated production-inventory problem with process unreliability consideration, *International Journal of Production Economics*, 91(1), 91-98.
 15. Hung, M. S. and Fisk, J.C., 1984, Economic Sizing of Warehouses—A Linear Programming Approach, *Computer & Operations Research*, 11(1), 13-18.
 16. Jackson, P., Maxwell, W., and Muckstadt, J., 1985, The joint replenishment

- problem with a powers-of two restriction, *IIE Transactions*, 17(1), 25-32.
17. Kaspi, M. and Rosenblatt, M.J., 1983, An improvement of Silver's algorithm for the joint replenishment problem, *IIE Transactions*, 15, 264-267.
 18. Khan, L.R. and Sarker, R.A., 2002, An optimal batch size for a JIT manufacturing system, *Computers and Industrial Engineering*, 42,127-136.
 19. Khouja, M., Michalewicz, Z., and Satoskar, S.S., 2000, A comparison between genetic algorithms and the RAND method for solving the joint replenishment problem, *Production Planning and Control*, 11(6), 556-564.
 20. Lee, F.C. and Yao, M.J., 2003, A global optimum search algorithm for the joint replenishment problem under power-of-two policy, *Computers & Operations Research*, 30, 1319-1333.
 21. Lee, C., 1986. The economic order quantity for freight discount costs, *IIE Transactions*, 18 (3), 318–320.
 22. Nocturne, D.J., 1973, Economic ordering frequency for several items jointly replenished, *Management Science*, 19(9), 1073-1099.
 23. Russell, R.M. and Krajewski, L.J., 1997, Optimal Purchase and Transportation Cost Lot Sizing for a Single Item, *Decision Sciences*, 22(4), 940.
 24. Shu, F.T., 1971, Economic ordering frequency for two items jointly replenished, *Management Science*, 17(6), 406-410.
 25. Siajaji, H.R., Ibrahim, N., Lochert, P.B., and Chan, W.M., 2005, Joint replenishment policy in inventory-production systems, *Production Planning and Control*, 16(3), 255-262.
 26. Siajaji, H.R., Ibrahim, N. and Lochert, P.B., 2006, Joint economic lot size in distribution system with multiple shipment policy, *International Journal of Production Economics*, 102, 302-316.
 27. Stevenson, W.J., 1996, *Production/Operations Management*, 5th ed,

Chicago I.L.

28. van Eijs M.J.G., 1993, A note on the joint replenishment problem under constant demand, *Journal of Operational Research Society*, 44, 185-191.
29. Viswanathan, S., 1996, A new optimal algorithm for the joint replenishment problem, *Journal of the Operational Research Society*, 47(7), 936-944.
30. Wildman, R.E., Frenk, J.B.G., and Dekker, R., 1997, An efficient optimal solution method for the joint replenishment problem, *European Journal of Operational Research*, 99, 433-444.
31. Woo, Y.Y., Hsu, S.L., and Wu, S., 2001, An integrated inventory model for a single vendor and multiple buyers with ordering cost reduction, *International Journal of Production Economics*, 73, 203-215.
32. Yao, M.J., 2007, Solving the joint replenishment problem with warehouse-space restrictions using a genetic algorithm, *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, 24(2), 128-141.
33. Yao, M.J. and Huang, J.X., 2005, Solving the economic lot scheduling problem with deteriorating items using genetic algorithms, *Journal of Food Engineering*, 70, 309-322.

附錄 A 考量運輸折扣與委外倉儲成本下的基本週期詳細
推導過程

$$\begin{aligned}
 TC &= \frac{1}{T} \left(A + A_S + A_P + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{m_i} \right) \\
 &+ TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - Hv_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k Hv_i m_i r_i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k Hv_i r_i + H_P \frac{D}{2nP} \right] \\
 &+ \frac{A_o}{2\theta} \left(\left(\frac{\sum_{i=1}^k r_i s_i TD}{n} \right) - \bar{W} \right) \cdot \left(\left(\frac{\sum_{i=1}^k r_i s_i TD}{n} \right) - \bar{W} \right) \\
 &= \frac{1}{T} \left(A + A_S + A_P + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{m_i} \right) \\
 &+ TD \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - Hv_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k Hv_i m_i r_i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k Hv_i r_i + H_P \frac{D}{2nP} \right] \\
 &+ \frac{A_o}{2TP \left(\sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho - \sum_{i=1}^k r_i s_i \right)} \left[T^2 \left(\frac{\sum_{i=1}^k r_i s_i D}{n} \right)^2 - T \left(2\bar{W} \left(\frac{\sum_{i=1}^k r_i s_i D}{n} \right) \right) + \bar{W}^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dTC}{dT} &= -\frac{1}{T^2} \left(A + A_S + A_P + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{m_i} \right) \\
 &+ D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - Hv_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k Hv_i m_i r_i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k Hv_i r_i + H_P \frac{D}{2nP} \right] \\
 &+ \frac{A_o \left(\frac{\sum_{i=1}^k r_i s_i D}{n} \right)^2}{2P \left(\sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho - \sum_{i=1}^k r_i s_i \right)} - \frac{A_o \bar{W}^2}{2P \left(\sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho - \sum_{i=1}^k r_i s_i \right) \cdot T^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{dTC}{dT} = 0$$

則原式可改寫如下：

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{T^2} \right) \left(A + A_S + A_P + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{m_i} + \frac{A_o \bar{W}^2}{2P \left(\sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho - \sum_{i=1}^k r_i s_i \right)} \right) \\ &= D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k H v_i m_i r_i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + H_P \frac{D}{2nP} \right] \\ & \quad + \frac{A_o \left(\sum_{i=1}^k r_i s_i D / n \right)^2}{2P \left(\sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho - \sum_{i=1}^k r_i s_i \right)} \end{aligned}$$

$$\text{令 } \gamma = \left(\sum_{i=1}^k s_i \cdot \rho - \sum_{i=1}^k r_i s_i \right)$$

則原式可以改寫如下：

$$T^2 = \frac{\left(A + A_S + A_P + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{m_i} + \frac{A_o \bar{W}^2}{2P\gamma} \right)}{D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k H v_i m_i r_i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + \frac{H_P D}{2nP} \right] + \frac{A_o \left(\sum_{i=1}^k r_i s_i D / n \right)^2}{2P\gamma}}$$

$$\text{令 } \alpha = \frac{A_o \bar{W}^2}{2P\gamma}; \beta = \frac{A_o \left(\sum_{i=1}^k r_i s_i D / n \right)^2}{2P\gamma}$$

則基本週期 T 之封閉型(*closed - form*)可以改寫如下：

$$T = \left[\frac{\left(A + A_S + A_P + n(A_T + A_H) + \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{m_i} + \alpha \right)}{D \left[\frac{D}{nP} \sum_{i=1}^k r_i \left(\frac{H_i}{2} - H v_i \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k H v_i m_i r_i + \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^k H v_i r_i + \frac{H_P D}{2nP} \right] + \beta} \right]^{\frac{1}{2}}$$