

東 海 大 學
應 用 數 學 研 究 所

碩士論文

控制變異與 Halton Sequences

蒙地卡羅之臺指選擇權模擬



研 究 生：翁如慧

指 導 老 師：葉芳栢 教授

中 華 民 國 九 十 六 年 一 月

The study of
control variate and Halton sequences of
Monte Carlo simulation for TXO Valuation

By
Ju-Hui Weng

Advisor: Dr. Fang-Bo Yeh

A Thesis
Submitted to the Institute of Mathematics
at Tunghai University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Department of Mathematics

January 2007

控制變異與 Halton Sequences

蒙地卡羅之臺指選擇權模擬

研究生：翁如慧

指導教授：葉芳栢 教授

東海大學應用數學系研究所

摘要

本文以臺指選擇權為例，模擬其價格評價之模型，以 Black-Scholes 模型為基礎進行蒙地卡羅模擬法時，探討搭配各種降低變異數的方法：使用 Halton Sequences 取代隨機數、動差配適模擬法 (MMS)、反向亂數變異法 (ARN)、控制變異法 (CV)、反向亂數結合控制變異法 (ARNCV)、控制變異結合反向亂數變異法 (CVARN) 等六種，並相互搭配，試圖找出最適合進行臺指選擇權模擬之模型。

關鍵字：蒙地卡羅模擬法、降低變異數、Halton Sequences。

誌謝

歷經多年的波折，我終於完成了碩士論文，感謝葉芳栢教授、黃皇男教授容忍我這各不用功的學生，讓我重新返回學校完成學位。在研究所期間，受恩師葉芳栢教授對學術研究的熱忱與活力的影響，還有黃皇男教授教學認真的態度及堅持，再加上在私立高中任教的經驗，讓我下定決心重新規劃人生的安排，所以非常慶幸老師們能給我這麼大的空間。

此外，也由衷感謝口試委員陳美源教授的指導，對論文詳加閱讀並給予意見，使論文品質得以提昇。

還要感謝蔡兆鈞學弟協助我完成論文的模擬程式，也謝謝學弟謝駿偉及其他學弟、同學的精神鼓勵。最後感謝我爸爸、媽媽和阿媽支持我，且尊重我的任何決定，讓我無後顧之憂。

翁如慧

謹誌於 東海大學應用數學系研究所

目錄

誌謝.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	V
表目錄.....	VII
第一章 緒論	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 論文架構.....	3
第二章 數學知識	5
2.1 布朗運動與平賭.....	5
2.2 THE IT δ CALCULUS.....	9
2.3 測度轉換 CAMERON-MARTIN-GIRSANOV 定理.....	17
第三章 選擇權	24
3.1 選擇權之沿革.....	24
3.2 選擇權之簡介.....	24
3.3 影響選擇權價值的因素.....	29
3.4 買權賣權平價關係 (PUT-CALL PARITY).....	29
3.5 BLACK-SCHOLES 選擇權評價模型.....	31
第四章 蒙地卡羅模擬法	36
4.1 文獻回顧.....	36
4.2 蒙地卡羅法模擬法 (MONTE CARLO SIMULATION) 簡介.....	36
4.3 THE HALTON SEQUENCES.....	38
4.4 降低變異 (VARIATE REDUCTION).....	41
第五章 實證分析	47
5.1 資料來源與說明.....	47
5.2 模擬結果.....	48
5.3 各降低變異法模擬結果比較.....	59
第六章 結論	65
附錄.....	69
參考文獻.....	79

圖目錄

圖 1.1	論文架構圖	4
圖 3.1	歷年臺指選擇權 (TXO) 日平均成交量示意圖	28
圖 4.1	比較二維的擬似亂數 (Pseudo-Random Numbers) 與 Halton Sequences	40
圖 4.2	模擬半徑為一的圓面積	41
圖 4.3	降低變異法之搭配	46
圖 5.1	傳統 Monte Carlo、Halton sequences 取代隨機數、動差配適法 (MMS)	49
圖 5.2	反向亂數變異法 (ARN) 之 Monte Carlo	49
圖 5.3	控制變異法 (CV) 之 Monte Carlo	50
圖 5.4	反向亂數結合控制變異法 (ARNCV) 之 Monte Carlo	50
圖 5.5	控制變異結合反向變異法 (CVARN) 之 Monte Carlo	51
圖 5.6	傳統 Monte Carlo、Halton sequences 取代隨機數、動差配適法 (MMS)	51
圖 5.7	反向亂數變異法 (ARN) 之 Monte Carlo	52
圖 5.8	控制變異法 (CV) 之 Monte Carlo	52
圖 5.9	反向亂數結合控制變異法 (ARNCV) 之 Monte Carlo	53
圖 5.10	控制變異結合反向變異法 (CVARN) 之 Monte Carlo	53
圖 5.11	傳統 Monte Carlo、Halton sequences 取代隨機數、動差配適法 (MMS)	54
圖 5.12	反向亂數變異法 (ARN) 之 Monte Carlo	54
圖 5.13	控制變異法 (CV) 之 Monte Carlo	55
圖 5.14	反向亂數結合控制變異法 (ARNCV) 之 Monte Carlo	55
圖 5.15	控制變異結合反向變異法 (CVARN) 之 Monte Carlo	56
圖 5.16	傳統 Monte Carlo、Halton sequences 取代隨機數、動差配適法 (MMS)	56
圖 5.17	反向亂數變異法 (ARN) 之 Monte Carlo	57
圖 5.18	控制變異法 (CV) 之 Monte Carlo	57
圖 5.19	反向亂數結合控制變異法 (ARNCV) 之 Monte Carlo	58
圖 5.20	控制變異結合反向變異法 (CVARN) 之 Monte Carlo	58
圖 5.21	傳統 Monte Carlo 模擬 5000 次的結果	59

圖 5.22	傳統 Monte Carlo 模擬 50000 次的結果	59
圖 5.23	單獨使用六個降低變異數的方法	60
圖 5.24	動差配適模擬法 (MMS) 搭配其他五種降低變異數的方法比較	61
圖 5.25	以 Halton sequences 取代隨機數搭配其他五種降低變異數方法比較	62
圖 5.26	以 Halton sequences 取代隨機數與動差配適模擬法的搭配，再加上其他四種降低變異數的方法比較	63
圖 5.27	傳統蒙地卡羅的變異數	63
圖 5.28	六種降低變異數方法的變異數	64
圖 5.29	傳統蒙地卡羅模擬法與最簡易降低變異數方法的比較	64
圖 6.1	傳統蒙地卡羅法及動差配適模擬法之模擬時間	66
圖 6.2.1	以 Halton sequences 取代隨機數及動差配適模擬法之模擬時間	67
圖 6.2.2	以 Halton sequences 取代隨機數及動差配適模擬法之模擬時間	67
圖 6.2.3	以 Halton sequences 取代隨機數及動差配適模擬法之模擬時間	68

表目錄

表 3.1	以買權為例，選擇權買賣交易之關係	25
表 3.2	臺灣證券交易所股價指數選擇權契約規格	26
表 3.3	各變數對選擇權價值的影響	29
表 5.1	模擬之選擇權數據	48
表 6.1	傳統蒙地卡羅模擬法及動差配適模擬法之模擬時間	66
表 6.2	以 Halton Sequences 取代隨機數及動差配適模擬法之 模擬時間	66

第一章 緒論

1.1 研究背景與動機

選擇權是可以作多、可以作空；是一項可以讓投資人活用的投資工具，它也可以作套利，不受市場多頭或空頭之影響，從市場盤整中獲利。不同選擇權或選擇權和期貨、現貨搭配，所衍生出來之各種投資策略，更是千變萬化。此外，選擇權也可以用來避險，具備期貨的功能，鎖定投資最大損失或投資利潤。選擇權的原理簡單，特性靈活而且成本低廉，加上其演化出來的各種千變萬化之投資策略，使得選擇權深受投資人的喜愛。基本上，選擇權是一場零合遊戲，有人贏，必有人輸；必須善用分析工具，做好研判，擬定策略並備妥因應措施，才能成為買賣選擇權的常勝軍。

利率選擇權的評價模型發展已非常完善，以下簡單列舉一些常用之利率模型：

一、Black-Scholes Model

這是最早的利率評價模型，自從 Black-Scholes (1973) 提出選擇權評價模型後，財務金融便邁入一個新紀元。而 Black-Scholes Model 必須假設遠期利率為指數常態分配，但實際上利率或債券價格的走勢較符合隨機過程，且 Black-Scholes Model 沒有考慮利率有回復均衡 (Mean Reverting) 的特性，縱使容易計算，但需要一些假設成立之下才可用於計算利率選擇權價值，所以將此模型限制放寬，就必須討論利率的期間結構模型 (Term Structure Model)，分為均衡模型及無套利模型兩類。

二、Equilibrium Models

最常使用的為單因子均衡模型 (One-Factor equilibrium Models)，其中習慣上會使用 Vasicek 或 CIR (Cox, Ingersoll, and Ross) 模型來進行利率選擇權的定價。另外，雙因子均衡模型 (Two-Factor equilibrium Models)，以 Brennan and Schwartz (1982) 及 Longstaff and Schwartz (1992) 為代表。

三、No-Arbitrage Models

無套利模型設計可以與現在的利率期間結構一致，這是跟均衡模型最大的差別，其中以 Ho and Lee 模型及 Hull and White 模型為代表。

其中 Black-Scholes Model 有解析解，故本文針對 Black-Scholes Model，有效使用蒙地卡羅模擬法作選擇權評價模擬，以期後續研究者針對現今其

他的利率評價模型及利率模型中市場參數的估計，在使用蒙地卡羅模擬時，快速有效地降低變異數。

蒙地卡羅模擬是數值方法的一種，最早由 Boyle 在 1977 年時應用到選擇權評價上，主要概念乃是在風險中立的假設下，根據衍生性商品標的資產價格變動之隨機過程，利用電腦抽取亂數，模擬出資產價格的多種可能路徑，假設每一種路徑發生的機會相等之下，並根據選擇權的邊界條件 (Boundary Condition)，求出選擇權到期時之價值，隨後將所有模擬得到的到期價值加以平均，再以無風險利率折現到目前時點，進而求算出此衍生性商品的理論價值。可以利用下列式子來表示：

$$P = e^{-rT} E[f(S_0, \dots, S_T)]$$

其中 P 為衍生性商品的理論價值， T 為到期日， $f(S_0, \dots, S_T)$ 為衍生性商品到期日的現金流量，其可能決定於標的資產 $t=0$ 至 T 的價格， $E(\bullet)$ 為風險中立的期望值運算因子。

相較於其他兩種常見的數值方法：樹狀圖法 (Tree Structure Model) 與有限差分法 (Finite Difference Methods)，蒙地卡羅法最大的優點是可以處理多維度 (multi-dimensionality) 問題，不但較具有彈性，且在評價路徑相依或是其他新奇選擇權上也較有效率。然而收斂速度太慢，欲降低模擬誤差就必須大量增加模擬次數，相當耗費時間與資源；另一方面，Papageorgiou and Traub (1996) 指出傳統蒙地卡羅在模擬的過程中採用擬似亂數 (Pseudo Random Numbers)，缺點在於其隨機變數會有群聚 (Clustering) 的現象，因為有些區域沒有樣本點，有些區域樣本點太過集中，這種群聚現象浪費了觀察值，使得模擬誤差變大，影響評價效率；且蒙地卡羅模擬的樣本點太少，其正確性是存疑的。因此這裡將以低差異序列 (Low Discrepancy Sequences) 取代擬似亂數，改善樣本點會有群聚現象的缺點，均勻地分配每個樣本點，使得模擬誤差降低，而且只要少量的樣本點就可以達到和蒙地卡羅需要大量的樣本得到相同的精確性。再加上使用相反變數法 (Antithetic Variable Technique)、控制變數法 (Control Variable Technique)，期望有更佳的结果。

1.2 論文架構

本文架構如下：第一章介紹研究背景與動機；第二章是本論文所應具備之數學知識，介紹數學上相關的基本定義及隨機過程（Stochastic Process）的觀念。第三章是選擇權簡介，包括臺指選擇權、買賣權關係及評價模型。第四章是蒙地卡羅模擬法之文獻探討，列出過去與本研究相關的文獻；及 Halton Sequences、降低變異法理論分析，亦即說明本文所需使用的理論性質；第五章是實證分析。透過數據的支持，來分析各降低變異法對結果的影響，作為選擇權評價的模擬依據與考量；最後第六章結論，除了歸納本篇成果外，亦列出本篇研究未來可能之探討方向。架構如下圖 1.5.1。

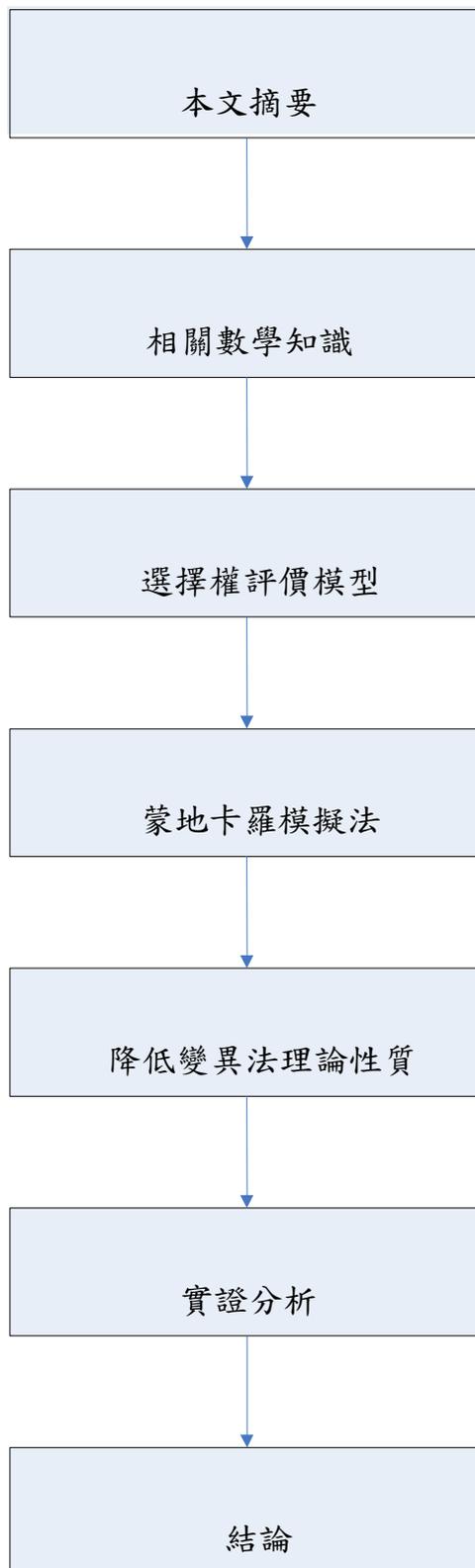


圖 1.1 論文架構圖

第二章 數學知識

本章節為本論文所應具備之數學知識，介紹數學上相關的基本定義及隨機過程（Stochastic Process）的觀念。

2.1 布朗運動與平賭

令 (Ω, F, P) 為一具有樣本空間（Sample Space） Ω 和 σ -algebra F 與機率測度（Probability Measure） P 之機率空間。

定義 2.1

令 $X = \{X(t): t \geq 0\}$ 為隨機變數（Random Variable） $X(t)$ 之隨機過程；亦即，對所有 $a < b$ ，

$$X(t, w): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \{w: X(t, w) \in (a, b)\} \in F, \forall a < b$$

定義 2.2

標準布朗運動（Standard Brownian Motion）有下列性質：

1. $W(0) = 0$ a.s.；亦即， $P\{w: X(0, w) = 0\} = 1$ 。
2. 對所有 w ， $W(t)$ 為變數 t 之連續函數，且 $W(t) \sim N(0, t)$ 。
3. 若 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ，則

$$W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1}) \underset{i.i.d.}{\sim} N(0, t_i - t_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n$$

定義 2.3

若 $\{F(t): t \in I\}$ 為 family of sub- σ -algebra of F ， $I = [0, 1, 2, \dots, T]$ ， $T \in N$ 。若 $s, t \in I, s \leq t, F(s) \subset F(t)$ ，則 $\{F(t): t \in I\}$ 為一資訊流（Filtration）。

定義 2.4

隨機過程 $X = \{X(t): t \geq 0\}$ 在 (Ω, F, P) 之機率空間下，若滿足

$$\sigma(X(t)) \subset F(t)$$

則稱 $X(t)$ 為 $F(t)$ -可測 (Measurable)。亦即，

$$\{X(t) \in (a, b)\} \subset F(t), \forall a < b$$

定義 2.5

隨機過程 $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ 在 (Ω, F, P) 之機率空間下，若符合下列條件：

1. $E_p(|X(t)|) < \infty, t \geq 0$ ；
2. $X(t)$ 是 $F(t)$ -可測, $t \geq 0$ ；
3. $E_p(X(t) | F(s)) = X(s), 0 \leq s \leq t$ 。

則稱 $X(t)$ 為 P 測度平賭 (P -martingale)。

定理 2.1

標準布朗運動 $W = \{W(t) : t \geq 0\}$ 具有平賭性質。

證明：若 $s < t$ ，則 $W(t) - W(s)$ 與 $F(s)$ 獨立且

$$\begin{aligned} E(W(t) | F(s)) &= E(W(t) - W(s) + W(s) | F(s)) \\ &= E(W(t) - W(s) | F(s)) + E(W(s) | F(s)) \\ &= E(W(t) - W(s)) + W(s) \\ &= W(s) \end{aligned}$$

若 $s \geq t$ ，則 $E(W(t) | F(s)) = W(t)$ 。因此

$$E(W(t) | F(s)) = W(t \wedge s)$$

定義 2.6

令 $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ 為 $[0, T]$ 區間的分割。定義分割的間距 (Mesh) 為

$$\|\Pi\| = \max_{k=0,1,\dots,n-1} (t_{k+1} - t_k)$$

我們定義函數 f 在區間 $[0, T]$ 的二次變異 (Quadratic Variation) 為

$$\langle f \rangle(T) = \lim_{\|\Pi \rightarrow 0\|} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^2$$

定理 2.2

令 $W(t)$ 為標準布朗運動， $t \geq 0$ ，則 $\langle W \rangle(T) = T$ 。換言之，

$$P\{W \in \Omega : \langle W(\cdot, w) \rangle(T) = T\} = 1$$

證明：令 $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ 為 $[0, T]$ 區間的分割，令 $D_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ ，又令

$$Q_\Pi = \sum_{k=0}^{n-1} D_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |W(t_{k+1}) - W(t_k)|^2$$

我們將會證明

$$\lim_{\|\Pi \rightarrow 0\|} (Q_\Pi - T) = 0$$

因為

$$Q_\Pi - T = \sum_{k=0}^{n-1} [D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)]$$

且

$$D_k = W(t_{k+1}) - W(t_k) \sim N(0, t_{k+1} - t_k), k = 0, 1, \dots, n-1$$

則

$$\begin{aligned}
E(Q_{\Pi} - T) &= E\left(\sum_{k=0}^{n-1} [D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [E(D_k^2) - (t_{k+1} - t_k)] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [\text{Var}(D_k) - (t_{k+1} - t_k)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

根據標準布朗運動的性質， $\forall i \neq j$ ， D_i 和 D_j 是獨立的，所以

$$D_i^2 - (t_{k+1} - t_k) \text{ 和 } D_j^2 - (t_{k+1} - t_k)$$

也是獨立的。因此

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Q_{\Pi} - T) &= \text{Var}\left(\sum_{k=0}^{n-1} [D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \text{Var}\left([D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E\left([D_k^2 - (t_{k+1} - t_k)]^2\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E\left(D_k^4 - 2(t_{k+1} - t_k)D_k^2 + (t_{k+1} - t_k)^2\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [E(D_k^4) - 2(t_{k+1} - t_k)E(D_k^2) + (t_{k+1} - t_k)^2] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [3(t_{k+1} - t_k)^2 - (t_{k+1} - t_k)^2] \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \\
&\leq 2\|\Pi\| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \\
&= 2\|\Pi\|T
\end{aligned}$$

(如果 $X \sim N(0, \sigma^2)$ ，則 $E(X^4) = 3\sigma^4$)

因為

$$E(Q_{\Pi} - T) = 0$$

$$\text{Var}(Q_{\Pi} - T) \leq 2\|\Pi\|T$$

因此 $\|\Pi\| \rightarrow 0$ ，使得 $\text{Var}(Q_{\Pi} - T) \rightarrow 0$ ，所以

$$\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} (Q_{\Pi} - T) = 0$$

註 2.1

因為

$$E[(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k)] = 0$$

$$\text{Var}[(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 - (t_{k+1} - t_k)] = 2(t_{k+1} - t_k)^2$$

所以當 $(t_{k+1} - t_k)$ 很小時，則 $(t_{k+1} - t_k)^2$ 更小，因此我們得到

$$(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 \approx (t_{k+1} - t_k)$$

也可以表示為 $(dW(t))^2 = dt$

2.2 The Itô Calculus

定義 2.7 測度 (Measure)

$$L^2[0, T] := L^2([0, T], \Omega, F, \{F(t)\}_{t \in [0, T]}, P)$$

$:= \{X(t), F(t)\}_{t \in [0, T]}$ 為隨機過程 | $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是 $F(t)$ 測度平賭，且

$$E\left(\int_0^T X^2(t) dt\right) < \infty\}$$

定義在 $L^2[0, T]$ 之範數 (Norm) 為

$$\|X\|_T^2 := E\left(\int_0^T X^2(t) dt\right)$$

也就是所謂的 L^2 -norm。

定義 2.8

令 $\delta \in L^2[0, T]$ 為一過程 (Process)，且 $W = \{W(t) : t \geq 0\}$ 為具有資訊流 $F(t)$ 的布朗運動，並且具有下列性質：

1. $s \leq t \Rightarrow F(s) \subset F(t)$ ；
2. $W(t)$ 是 $F(t)$ -可測 $\forall t$ ；
3. 對於所有 $t \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ， $W(t_1) - W(t)$, \dots , $W(t_n) - W(t_{n-1})$ 與 $F(t)$ 都是獨立的。

則我們定義 Itô Integral 為

$$I(t) = \int_0^t \delta(u) dW(u), \quad t \geq 0$$

2.2.1 The Itô Calculus of Simple Function

令 $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ 為 $[0, T]$ 區間的分割。假設 δ 在每個 $[0, T]$ 的子區間 $[t_k, t_{k+1}]$ ， $k = 0, 1, \dots, n-1$ 中為一常數函數，我們稱 δ 為 Simple Function。因此，Itô Integral 可寫成

$$I(t) = \begin{cases} \delta(t_0)[W(t) - W(t_0)], & 0 \leq t \leq t_1 \\ \delta(t_0)[W(t_1) - W(t_0)] + \delta(t_1)[W(t) - W(t_1)], & t_1 \leq t \leq t_2 \\ \vdots \\ \delta(t_0)[W(t_1) - W(t_0)] + \dots + \delta(t_{n-1})[W(t) - W(t_{n-1})], & t_{n-1} \leq t \leq t_n \end{cases}$$

假設在一般情形下 $t_k \leq t \leq t_{k+1}$

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \delta(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \delta(t_k) [W(t) - W(t_k)]$$

可測性質： $I(t)$ 為 $F(t)$ 測度可測， $\forall t \geq 0$

線性性質： $I(t)$ 為一線性函數

證明：令 $I(t) = \int_0^t \delta(u) dW(u)$ ， $J(t) = \int_0^t \gamma(u) dW(u)$ ，則

$$I(t) \pm J(t) = \int_0^t (\delta(u) + \gamma(u)) dW(u)$$

$$cI(t) = \int_0^t c\delta(u) dW(u), c \text{ 為常數}$$

平賭性質： $I(t)$ 具有平賭性質，在下面定理中，我們將證明 Simple Function 具有平賭性質。

定理 2.3

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \delta(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \delta(t_k) [W(t) - W(t_k)], t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

具有平賭性質。

證明：我們令 $s \in [t_l, t_{l+1}]$ ， $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 屬於不同區間且 $0 \leq s \leq t$ ，則

$$\begin{aligned} I(t) &= \sum_{j=0}^{l-1} \delta(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \delta(t_l) [W(t_{l+1}) - W(t_l)] \\ &+ \sum_{j=l+1}^{k-1} \delta(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \delta(t_k) [W(t) - W(t_k)] \end{aligned}$$

則其條件期望值為

$$E\left[\sum_{j=0}^{l-1} \delta(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \mid F(s)\right] = \sum_{j=0}^{l-1} \delta(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))$$

$$E[\delta(t_l)(W(t_{l+1}) - W(t_l)) \mid F(s)] = \delta(t_l)(E[W(t_{l+1}) \mid F(s)] - W(t_l)) = \delta(t_l)[W(t_s) - W(t_l)]$$

且

$$E\left[\sum_{j=l+1}^{k-1} \delta(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \mid F(s)\right]$$

$$= \sum_{j=l+1}^{k-1} E[E[\delta(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \mid F(t_j)] \mid F(s)]$$

$$= \sum_{j=l+1}^{k-1} E[\delta(t_j)(E[W(t_{j+1}) \mid F(t_j)] - W(t_j)) \mid F(s)]$$

$$= \sum_{j=l+1}^{k-1} E[\delta(t_j)(W(t_j) - W(t_j)) \mid F(s)]$$

$$= 0$$

$$E[\delta(t_k)(W(t) - W(t_k)) \mid F(s)]$$

$$= E[\delta(t_k)(E[W(t) \mid F(t_k)] - W(t_k)) \mid F(s)]$$

$$= E[\delta(t_k)(W(t_k) - W(t_k)) \mid F(s)]$$

$$= 0$$

因此

$$E[I(t) \mid F(s)] = \sum_{j=0}^{l-1} (\delta(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))) + \delta(t_l)(W(t_s) - W(t_l)) = I(s)$$

定理 2.4 Itô Isometry

證明：假設 $t = t_k$ ，所以

$$I(t) = \sum_{j=0}^k \delta(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)]$$

$$\begin{aligned}
I^2(t) &= \left(\sum_{j=0}^k \delta(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] \right)^2 \\
&= \sum_{j=0}^k \delta^2(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)]^2 + 2 \sum_{i < j} \delta(t_i) \delta(t_j) [W(t_{i+1}) - W(t_i)] [W(t_{j+1}) - W(t_j)]
\end{aligned}$$

因為 $\forall t$ ， $E[W(t_{j+1}) - W(t_j)] = 0$ ，且 $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ 與 $W(t_{j+1}) - W(t_j)$ 獨立，所以

$$E[(W(t_{i+1}) - W(t_i))(W(t_{j+1}) - W(t_j))] = 0$$

因此

$$\begin{aligned}
E[I^2(t)] &= \sum_{j=0}^k E[\delta^2(t_j) (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2] \\
&= \sum_{j=0}^k E[\delta^2(t_j) (t_{j+1} - t_j)] \quad (\text{註 2.1}) \\
&= E \left[\sum_{j=0}^k \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \delta^2(u) du \right) \right] \\
&= E \left[\int_0^t \delta^2(u) du \right]
\end{aligned}$$

2.2.2 The General Itô Integral

令 δ 為一過程且

$$\int_0^T \delta(t) dW(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \delta_n(t) dW(t)$$

其中 $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 為 Simple Process 數列。我們在後面的定理中說明此極限的存在。

定理 2.5

對所有 $\delta \in L^2[0, T]$ ，存在一組 Simple Process $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ ，使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_0^T (\delta_n(t) - \delta(t))^2 dt \right) = 0$$

證明：我們先定義

$$\delta_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \left(\frac{k-1}{2^n} 1_{\left[\frac{k-1}{2^n} \leq \delta < \frac{k}{2^n} \right]} \right) + n 1_{\delta \geq n}$$

其中 1 為標誌函數 (Indicator Function)。因為 $\delta \in L^2[0, T]$ ，所以 $\delta_n \in L^2[0, T]$ ，且 δ_n 為 Simple Process 數列，其中 $\delta_n \leq \delta_{n+1}$ 。若 $\delta(\omega) < \infty$ ，當 n 足夠大時，

$$|\delta(\omega) - \delta_n(\omega)| \leq \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

若 $\delta(\omega) = \infty$ 時，則 $\delta_n(\omega) = n \rightarrow \infty$ ，因為 L^2 -norm 的定義為

$$\|\delta\|_T^2 := E \left(\int_0^T \delta^2(t) dt \right) < \infty$$

則 $\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_0^T (\delta_n(t) - \delta(t))^2 dt \right) = 0$ 。我們再定義

$$I_n(T) = \int_0^T \delta_n(t) dW(t)$$

則

$$\begin{aligned} \text{Var}[I_n(T) - I_m(T)] &= E \left[\left(\int_0^T [\delta_n(t) - \delta_m(t)] dW(t) \right)^2 \right] \\ &= E \left[\int_0^T (\delta_n(t) - \delta_m(t))^2 dt \right] \quad (\text{Itô Isometry}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E\left[\int_0^T (\delta_n(t) - \delta(t) + \delta(t) - \delta_m(t))^2 dt\right] \\
&= 2E\left[\int_0^T |\delta_n(t) - \delta(t)|^2 dt\right] + 2E\left[\int_0^T |\delta_m(t) - \delta(t)|^2 dt\right] \\
&((a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2)
\end{aligned}$$

當 n, m 足夠大時， $\text{Var}[I_n(T) - I_m(T)]$ 非常小。這確保數列 $\{I_n(T)\}_{n=1}^\infty$ 極限存在。我們定義

$$I(T) = \int_0^T \delta(u) dW(u)$$

其中 δ 為任意可測，二次可積 (Square-Integrable) 之過程。

可測性：對 $\forall t$ ， $I(t)$ 為 F 可測

線性：若 $I(t) = \int_0^t \delta(u) dW(u)$ ， $J(t) = \int_0^t \gamma(u) dW(u)$ ，則

$$I(t) \pm J(t) = \int_0^t (\delta(u) + \gamma(u)) dW(u)$$

$$cI(t) = \int_0^t c\delta(u) dW(u), c \text{ 為常數}$$

平賭性質： $I(t)$ 為具有平賭性質

$$\text{It\hat{o} Isometry} : E[I^2(t)] = E\left[\int_0^t \delta^2(u) du\right]$$

2.2.3 It\hat{o} Formula

定理 2.6 It\hat{o}'s Lemma

若 $W(t)$ ， $t \geq 0$ 為標準布朗運動， f 為二次可微分函數，則

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))(dt)$$

積分形式為

$$f(W(t)) = f(W(0)) + \int_0^t f'(W(s))dW(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W(s))ds$$

證明：令 f 為無限可微分函數，由泰勒展開式知

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2!} f''(W(t))(dW(t))^2 + \frac{1}{3!} f'''(W(t))(dW(t))^3 + \dots$$

而 $(dW(t))^3$ 、 $(dW(t))^4$ 、... 與 $(dW(t))^2$ 相比之下可忽略，因此只需計算到 f'' ，故只要求 f 為二次可微分函數，則上述式子可寫成

$$\begin{aligned} df(W(t)) &= f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2!} f''(W(t))(dW(t))^2 \\ &= f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2!} f''(W(t))dt \end{aligned}$$

寫成積分形式

$$\int_0^t df(W(t)) = \int_0^t f'(W(s))dW(s) + \int_0^t \frac{1}{2} f''(W(s))ds$$

或

$$f(W(t)) = f(W(0)) + \int_0^t f'(W(s))dW(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W(s))ds$$

定義 2.9 幾何布朗運動

幾何布朗運動 (Geometric Brownian Motion) 為

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \sigma W(t) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\}$$

其中 μ 和 $\sigma > 0$ ，且為常數， $W(t)$ 為標準布朗運動。令

$$f(t, W(t)) = S(t) = S(0) \exp \left\{ \sigma W(t) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t \right\}$$

因為 $f_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) f$ ， $f_{W(t)} = \sigma f$ ， $f_{W(t)W(t)} = \sigma^2 f$ ，透過 Itô Formula，

$$\begin{aligned} dS(t) &= df(t, W(t)) \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) f dt + \sigma f dW(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 f dt \\ &= \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t) \end{aligned}$$

因此，幾何布朗運動的微分形式為

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t)$$

積分形式為

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \mu S(u) du + \int_0^t \sigma S(u) dW(u)$$

2.3 測度轉換 Cameron-Martin-Girsanov 定理

定理 2.7 Cameron-Martin-Girsanov 定理

假設 $0 \leq t \leq T$ ， $W(t)$ 為在一機率空間 (Ω, F, P) 上之布朗運動， $F(t)$ 為一資訊流，且 $\lambda(t) \in L^2[0, T]$ ，我們定義一新測度 Q

$$Q(A) = \int_A M dP, \quad \forall A \in F$$

其中 $M(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s) ds\right)$ ，則下面過程

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \lambda(s) ds$$

為符合 Q 測度之布朗運動 (Q Brownian Motion)。

定理 2.8

令 $M = \{M(t) : t \in [0, T]\}$ 為一隨機過程在一機率空間 (Ω, F, P) 上，及

$$M(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(s) ds\right)$$

則 $M(t)$ 為在 P 測度下之 $F(t)$ -可測。

證明：

$$\begin{aligned} dM(t) &= M(t) \cdot \left[-\lambda(t) dW(t) - \frac{1}{2} \lambda^2(t) dt + \frac{1}{2} \lambda^2(t) dt \right] \\ &= -\lambda(t) M(t) dW(t) \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} E_p(dM(t) | F(t)) &= E_p(-\lambda(t) M(t) dW(t) | F(t)) \\ &= -\lambda(t) M(t) E_p(dW(t) | F(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

註 2.3

在 Cameron-Martin-Girsanov 定理所提到之新測度 Q 是一機率空間。

$\forall A \in F$ ，

$$\begin{aligned}
Q(A) &= \int_A M_T(\omega) dP(\omega) \\
&= \int_{\Omega} 1_A M_T(\omega) dP(\omega) \\
&= E_p(1_A M(T))
\end{aligned}$$

$\forall t \geq 0$, $M(t) \geq 0$, 所以 $Q(A) \geq 0$, $\forall A \in F$ 。若 A 、 $B \in F$, $A \cap B = \phi$, 則

$$\begin{aligned}
Q(A \cup B) &= \int_{A \cup B} M_T(\omega) dP(\omega) \\
&= \int_A M_T(\omega) dP(\omega) + \int_B M_T(\omega) dP(\omega) \\
&= Q(A) + Q(B)
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
Q(\Omega) &= \int_{\Omega} M_T(\omega) dP(\omega) \\
&= E_p(M(T)) \\
&= E_p(M(T) | F(0)) \\
&= M(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

註 2.4

$$\forall A \in F , Q(A) = \int_A dQ(\omega) = \int_{\Omega} 1_A(\omega) dQ(\omega) = E_Q(1_A)$$

同時 ,

$$Q(A) = \int_{\Omega} 1_A M_T(\omega) dP(\omega) = E_p(1_A M(T))$$

因此 , $E_Q(1_A) = E_p(1_A M(T))$

引理 2.1

若 X 為 F -可測，則 $0 \leq t \leq T$ ，

$$E_Q(X) = E_P(XM(t))$$

證明：因為 $M(t)$ ， $0 \leq t \leq T$ 為 P 測度之平賭，所以

$$\begin{aligned} E_Q(X) &= E_P(X \cdot M(T)) \\ &= E_P[E_P(X \cdot M(T) | F(t)) | F(0)] \\ &= E_P[X \cdot E_P(M(T) | F(t))] \\ &= E_P(X \cdot M(t)) \end{aligned}$$

引理 2.2 Baye's Rule

若 X 為 $F(t)$ -可測且 $0 \leq s \leq t \leq T$ ，則

$$E_Q(X | F(s)) = \frac{1}{M(s)} \cdot E_P(XM(t) | F(s))$$

證明： $A \in F(s) \subset F(t)$ ，因此

$$\begin{aligned} &E_Q \left[1_A \frac{1}{M(s)} E_P(X \cdot M(t) | F(s)) \right] \\ &= E_P[1_A E_P(X \cdot M(t) | F(s))] \quad (\text{引理 2.1}) \\ &= E_P[1_A X \cdot M(s)] \quad (\text{定理 2.8}) \\ &= E_Q[1_A X] \quad (\text{引理 2.1}) \\ &= E_Q[E_Q(1_A X | F(s))] \\ &= E_Q[1_A E_Q(X | F(s))] \end{aligned}$$

所以

$$E_Q(X | F(s)) = \frac{1}{M(s)} \cdot E_P(XM(t) | F(s))$$

定理 2.9

依據 Cameron-Martin-Girsanov 定理，我們得到下列平賭性質

$$E_Q(\tilde{W}(t) | F(s)) = \tilde{W}(s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

證明：我們首先確認 $\tilde{W}(t)M(t)$ 為在測度 P 下具有平賭性質。前面我們提到

$$\begin{aligned} d\tilde{W}(t) &= \lambda(t)dt + dW(t) \\ dM(t) &= -\lambda(t)M(t)dW(t) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} d(\tilde{W}(t)M(t)) &= \tilde{W}(t)dM(t) + M(t)d\tilde{W}(t) + d\tilde{W}(t)dM(t) \\ &= -\tilde{W}(t)\lambda(t)M(t)dW(t) + M(t)\lambda(t)dt + M(t)dW(t) - \lambda(t)M(t)dt \\ &= (-\tilde{W}(t)\lambda(t)M(t) + M(t))dW(t) \end{aligned}$$

所以 $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} &E_P(d(\tilde{W}(t)M(t)) | F(s)) \\ &= E_P((- \tilde{W}(t)\lambda(t)M(t) + M(t))E_P(dW(t) | F(t)) | F(s)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

下面我們使用 Baye's Rule，對 $0 \leq s \leq t \leq T$ ，

$$\begin{aligned}
& E_Q[\tilde{W}(t) | F(s)] \\
&= \frac{1}{M(s)} E_P(\tilde{W}(t)M(t) | F(s)) \\
&= \frac{1}{M(s)} \tilde{W}(s)M(s) \\
&= \tilde{W}(s)
\end{aligned}$$

現在我們將證明 Cameron-Martin-Girsanov 定理，在此之前先證明 $\tilde{W}(t)$ ， $0 \leq t \leq T$ 為一標準布朗運動，首先

$$\tilde{W}(0) = W(0) + \int_0^0 \lambda(u) du = 0$$

再者，因為 $W(t)$ 為連續函數 a.s.，故為一連續過程 a.s.，所以 $\tilde{W}(t)$ 為一連續過程 a.s.。最後，令

$$X(t) = \int_0^t (\theta - \lambda(u)) dW(u), \quad \theta \in R$$

因此

$$\begin{aligned}
de^{X(t)} &= e^{X(t)} \left[(\theta - \lambda(t)) dW(t) + \frac{1}{2} (\theta - \lambda(t))^2 dt \right] \\
e^{X(t)} &= e^{X(0)} + \int_0^t (\theta - \lambda(u)) e^{X(u)} dW(u) + \frac{1}{2} \int_0^t (\theta - \lambda(u))^2 e^{X(u)} du \\
E_P(e^{X(t)}) &= 1 + \frac{1}{2} \int_0^t (\theta - \lambda(u))^2 E_P(e^{X(u)}) du \\
\frac{d}{dt} E_P(e^{X(t)}) &= \frac{1}{2} ((\theta - \lambda(t))^2 E_P(e^{X(t)})) \\
E_P(e^{X(t)}) &= e^{X(0)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t (\theta - \lambda(u))^2 du \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t (\theta - \lambda(u))^2 du \right\}
\end{aligned}$$

在 Q 測度下， $W(t)$ 之 Moment Generating Function 為

$$\begin{aligned}
E_Q \left[e^{\theta W(t)} \right] &= E_P \left[M(t) e^{\theta W(t)} \right] \\
&= E_P \left[\exp \left\{ -\int_0^t \lambda(u) dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(u) du \right\} \cdot \exp \left\{ \int_0^t \theta dW(u) \right\} \right] \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(u) du \right\} E_P \left[\exp \left\{ \int_0^t (\theta - \lambda(u)) dW(u) \right\} \right] \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(u) du \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t (\theta - \lambda(u))^2 du \right\} \\
&= \exp \left\{ -\theta \int_0^t \lambda(u) du + \frac{1}{2} \theta^2 \int_0^t 1 du \right\}
\end{aligned}$$

因此

$$W(t) \sim N_Q \left(-\int_0^t \lambda(u) du, t \right)$$

換言之

$$\tilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \lambda(u) du \sim N_Q(0, t)$$

由定理 2.9，我們知道 $\tilde{W}(t)$ 為 Q -martingale，因此對於 $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ ，則 $\tilde{W}(t_1) - \tilde{W}(t_0), \dots, \tilde{W}(t_n) - \tilde{W}(t_{n-1})$ 為獨立，呈常態分佈且

$$E_Q \left[\tilde{W}(t_i) - \tilde{W}(t_{i-1}) \right] = 0$$

$$E_Q \left[\left(\tilde{W}(t_i) - \tilde{W}(t_{i-1}) \right)^2 \right] = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

第三章 選擇權

3.1 選擇權之沿革

1973年4月26日最早的選擇權交易所—芝加哥選擇權交易所(Chicago Board Option Exchange, CBOE)成立,當時只推出了十六種股票選擇權(Stock Option)的買權(Call Option),一直到1977年才有賣權(Put Option)。至此選擇權的契約標準化了,交易有保障。其餘歐美國家於七十年代末也開始推出選擇權交易,而新加坡國際金融交易所(Singapore International Monetary Exchange, SIMEX)於1982年開始交易選擇權,為亞洲國家中最早。

我國在1997年9月4日開始認購權證交易,其可被視為美式股票選擇權的買權,兩者不同點在於認購權證距到期日期間比股票選擇權長,一般而言,股票選擇權距到期日期間往往少於一年,而認購權證之距到期日期間多於一年,這也是認購權證會產生股利發放的問題。後來政府為了更提昇國內金融的競爭力,台灣期貨交易所在2001年12月24日推出了「臺灣發行之加權股價選擇權」,為我國衍生性金融商品市場建立了另一個新的里程碑,而股票選擇權也於2003年1月20日開放交易。

3.2 選擇權之簡介

選擇權屬於一種契約,是一種「選擇的權利」,指當契約的買方付出權利金(Premium)後,在特定期間內有權利向契約的賣方依契約載明的履約價格(Exercise Price)買入或賣出一定數量的標的物(Underlying Assets)。其距到期日期間多為三個月、六個月及九個月,發行人為交易所。

若此權利為買進標的物,稱為「買入選擇權」(Call Option),簡稱「買權」;若權利為賣出標的物,則稱為「賣出選擇權」(Put Option),簡稱「賣權」。

在選擇權交易上,對於買權、賣權皆可買進或賣出,因此可以區分為四種交易方式:買進買權、買進賣權、賣出買權與賣出賣權。所以投資人在進行選擇權的投資時,可以藉由同時買進或放空數種選擇權契約來獲得足夠的保障與追求期望的獲利。

表 3.1 以買權為例，選擇權買賣交易之關係

	買方 (Long)	賣方 (Short)
對市場的預期	預期多頭買進 Call (大漲) 預期多頭賣出 Put (不跌)	預期空頭買進 Put (大跌) 預期空頭賣出 Call (不漲)
權利與義務	買方有執行契約的權利 無義務	賣方只有義務、無權利
權利金	買方支付	賣方收取
履行契約	決定權在買方	賣方無法要求買方履約
最大獲利	無限獲利	權利金
最大損失	權利金	無限損失

選擇權的標的物幾乎涵蓋了所有的資產類別，包括一般實物商品、股票、股價指數、外匯、期貨等。而選擇權契約的內容通常必須載明下列幾項：

1. 標的物 (Underlying)：即為買賣雙方所要買賣的資產。在契約中必須明確描述標的物的各項特性，以利於契約標準化，作為未來交易的依據。選擇權依標的物可分為兩大類，其中一類為現貨 (Cash)，此類的選擇權稱為「現貨選擇權」(Options on Futures) 或「期權」。
2. 單位契約數量：與期貨一樣，選擇權也有規定單位契約數量，而且隨著不同種類的選擇權契約或不同交易所，或有不同的單位契約數量。
3. 到期日 (Expiration Date)：亦可稱為契約存續期間，即買方最後可執行此契約之時點。一般的選擇權契約的到期日是由交易所依一定的規則訂定，以利於選擇權之流通。
4. 履約價格 (Striking Price)：履約價格是選擇權買方在履約日期買賣特定標的物所依據的價格，此價格通常是由交易所事先決定。同一種標的物的選擇權契約，都有數個不同的履約價格，這些不同的履約價格常是依照現貨或期貨價格再加減一定數額所定。但股票的市價是不斷波動，因此如果高過此股票選擇權之最高履約價格或是低於履約價格，交易所會再推出履約價格更高或更低的契約來滿足市場的需求。
5. 權利金：即為選擇權之價值。對買方而言，由於擁有權利而非義務，自然應付權利金；對賣方而言，因其提供權利，並有履約之義務，宜獲取權利金。

6. 選擇權型態：買權或賣權。買權的買方有權利於到期日或到期日前，以約定的價格、數量，買進標的物，而賣方有義務依約賣出該標的物；賣權的買方有權利於到期日或到期日前，以約定的價格、數量，賣出標的物，而賣方有義務依約買進該標的物。
7. 履約時機：美式或歐式。在契約到期日之前的任何時點，買方可要求履約之選擇權契約稱為美式選擇權(American Option)；而買方只能在契約到期日當時點要求履約之選擇權契約稱為歐式選擇權(European Option)。

此外，股票選擇權依股票價格與執行價格之關係，可分為價內、價平、價外。當選擇權的買方會因為行使履約權利而獲利時，稱為價內選擇權(In-the-money Option)。以買權來說，當買權的現貨價大於履約價時，該買權屬價內買權；反之，若會因為行使履約權利而產生損失時，則稱為價外選擇權(Out-of-the-money Option)。以買權來說，當買權的現貨價小於履約價時，該買權為價外買權；當選擇權的買方不論是否行使履約權利，都不會生利潤或損失的情形，則稱之為價平選擇權(At-the-money Option)。以買權來說，當買權的現貨價與履約價相等時，則稱之為價平買權。賣權則與買權相反。

選擇權的價格就是權利金，不管將來投資人盈虧，皆不可要求退還權利金，故為一沉入成本(Sunk Costs)，且該價格會隨著到期日的逼近而趨近於零。而權利金可分為兩個部分，對買權而言，現貨股價與履約價格的差距稱之為內含價值(Intrinsic Value)，代表若選擇權在今日到期所呈現的價值；剩下的部分為時間價值(Time Value)，指的是期望選擇權在到期日前來到價平水準所願意支付的成本。

3.2.1 臺灣股價指數選擇權

表 3.2 臺灣證券交易所股價指數選擇權契約規格
(資料來源為臺灣期貨交易所)

項目	內容
交易標的	臺灣證券交易所發行量加權股價指數
中文簡稱	臺指選擇權（臺指買權、臺指賣權）
英文代碼	TXO
履約型態	歐式（僅能於到期日行使權利）
契約乘數	指數每點新台幣 50 元
到期月份	自交易當月起連續三個月份，另加上三月、六月、九月、十二月中二個接續的季月，總共有五個月份的契約在市場交易
履約價格間距	三個連續近月契約：100 點 接續之二個季月契約：200 點
契約序列	<p>新到期月份契約掛牌時，以前一營業日標的指數收盤價為基準，向下取最接近之一百點倍數推出一個序列，另以此履約價格為基準，交易月份起之三個連續近月契約，依一百點之履約價格間距上下各推出三個不同履約價格之契約；接續之二個季月契約，依二百點之履約價格間距上下各推出二個不同履約價格之契約。契約存續期間，於到期日五個營業日之前，遇下列情形時，即推出新履約價格契約：</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 當標的指數收盤指數達已上市近月契約之第三高或第三低履約價格時，於次一營業日依履約價格間距依序推出新履約價格契約，至履約價格高於或低於前一營業日標的指數收盤指數之契約達三個為止。 2. 當標的指數收盤指數達已上市季月契約之次高或次低履約價格時，於次一營業日即依履約價格間距依序推出新履約價格契約，至履約價格高於或低於前一營業日標的指數收盤指數之契約達二個為止。
權利金報價單位	報價未滿 10 點：0.1 點（5 元） 報價 10 點以上，未滿 50 點：0.5 點（25 元） 報價 50 點以上，未滿 500 點：1 點（50 元） 報價 500 點以上，未滿 1000 點：5 點（250 元） 報價 1000 點以上：10 點（500 元）
每日漲跌幅	以前一營業日臺灣證券交易所發行量加權股價指數收盤價之百分之七為限。
部位限制	交易人於任何時間持有本契約之同一方未了結部位合計數，應符合下列規定： <ol style="list-style-type: none"> 1. 自然人 10000 契約

	2. 法人機構 20000 契約 3. 法人機構基於避險需求得向本公司申請放寬部位限制 4. 期貨自營商及綜合帳戶之持有部位不在此限 所謂同一方未了結部位，係指買進買權與賣出賣權之部位合計數，或賣出買權與買進賣權之部位合計數。
交易時間	本契約之交易日與臺灣證券交易所交易日相同 交易時間為營業日上午 8:45~下午 1:45
最後交易日	各該契約交割月份第三個星期三
到期日	最後交易日之次一營業日
最後結算價	以到期日臺灣證交所所提供依標的指數各成分股當日交易時開始後十五分鐘內之平均價計算之指數訂之。前項平均價係採每筆成交價之成交量加權平均，但當日市場交易時間開始後十五分鐘內仍無成交價者，以當日市價升降幅度之基準價替代之。
交割方式	符合本公司公告範圍之未沖銷價內部位，於到期日當天自動履約，以現金交付或收受履約價格與最後結算價之差額。

臺灣股價指數選擇權在成立之初，由於對市場的不熟悉、投資者的觀望以及交易手續費昂貴等因素，成交量並不大。經過一年多後，由下圖可以清楚地發現成交量逐步增加，顯示市場的流通性已活絡。

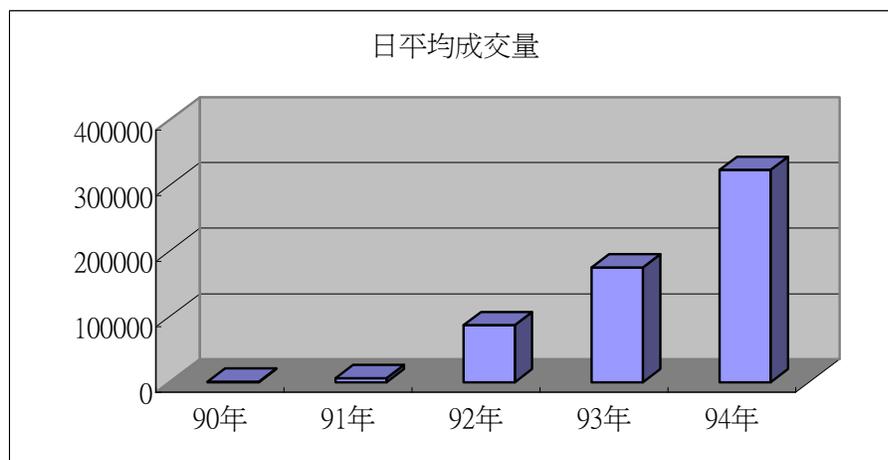


圖 3.1 歷年臺指選擇權 (TXO) 日平均成交量示意圖

3.3 影響選擇權價值的因素

為了對選擇權更進一步的探討，我們可以透過影響選擇權的主要因素，來更深入的了解：

表 3.3 各變數對選擇權價值的影響

變數	歐式買權	歐式賣權
標的股票價格	+	-
履約價	-	+
選擇權契約長度	不一定	不一定
標的股價波動性	+	+
無風險利率	+	-

資料來源：John Hull (1997), *Options, Futures, and Other Derivatives*, 3rded., Upper Saddle River, N. J. : Prentice-Hall., pp157.

1. 標的股票價格：購買選擇權時，所必須考慮的第一個因素為標的股票上漲的機會，若股價上漲，選擇權價值也上升，而在理論的探討上，稱股價的變動對選擇權價值變動的影響為 Delta。
2. 履約價：選擇權的內含價值乃是股價和履約價之間的差距，故當履約價越高，其內含價值越低，選擇權的價值也就越低。
3. 選擇權契約長度：若契約長度越長，則選擇權會產生價內的機率越高，越有機會獲利，所以選擇權的價值也越高。
4. 標的股價波動性：標的股價的標動程度越大，則股價大漲或大跌的機率也越大，但因為選擇權具有風險與報酬不對稱的性質，所以在下跌風險有限的情況下，波動性越大，價內的機率越大，選擇權的價值也越高。
5. 無風險利率：利率代表資金成本，利率越高，會使得履約價的現值降低，也就是說持有選擇權的人在未來現金流量之現值會下降，由於履約價是選擇權持有人潛在的債務，故利率上升，將來債務的現值降低（資金成本減少），所以目前的選擇權價值會上升。

3.4 買權賣權平價關係 (Put-Call Parity)

表面上看起來買權和賣權是不同的權利，但是兩者在價格上卻有密切的關係，這一個關係在選擇權定價上扮演很重要的角色。

假設某一標的資產的買權與賣權同時存在，考慮下面的投資組合：買進一張價格 S 之標的資產，再買進一張該標的資產之賣權，價格為 P ；與賣一張該標的資產之買權，價格為 C' ，設此投資組合付出金額為 Π 。

$$\Pi = S + P - C$$

並假設買權與賣權兩者之履約價格 E 和履約日期 T 均相同，所以當履約日期到達時，其損益 $Payoff(\Pi)$ 為

$$Payoff(\Pi) = S + \max(E - S, 0) - \max(S - E, 0)$$

此時有兩種損益情形：

若標的資產市價小於或等於履約價格 ($S \leq E$) 時，

$$Payoff(\Pi) = S + (E - S) - 0 = E$$

若標的資產市價高於履約價格 ($S > E$) 時，

$$Payoff(\Pi) = S + 0 - (S - E) = E$$

也就是在履約日期到達時， Π 之收益恆為 E 。因此在沒有任何風險，無套利空間的情況下， E 應是將 Π 放在銀行，以無風險利率 r ，在 $[t, T]$ 之間連續複利之本利和，即

$$\Pi e^{r(T-t)} = E$$

如果 $\Pi e^{r(T-t)} > E$ ，則馬上賣出此投資組合，將資金放在銀行，在 $t = T$ 時，有 $\Pi e^{r(T-t)} - E$ 之套利，此與無套利原則衝突；反之，若 $\Pi e^{r(T-t)} < E$ ，則馬上向銀行借款投資在此組合上，在 $t = T$ 時獲利 $E - \Pi e^{r(T-t)}$ ，亦與無套利空間矛盾，

故證明上面等式成立，即

$$S + P - C = Ee^{-r(T-t)}$$

此即為買權與賣權之平價關係 (Put-Call Parity)，買權價格與賣權價格差等於股價減去履約價格之折現值；換言之，若買權價格已知，利用此公式可求得買權價格，反之亦然。

3.5 Black-Scholes 選擇權評價模型

選擇權評價模型的採用上，一般常使用 Black-Scholes 模型 (Black-Scholes Option Pricing Models，簡稱 B-S 模型)，該模型自發表後便受到各界廣泛地討論與應用，為許多選擇權評價模型之基礎，故本研究使用 B-S 模型作為理論價格計算的工具。

Black-Scholes 選擇權評價模型是由兩位美國學者 Fischer Black 與 Myron Scholes 於 1973 年利用「無存在套利機會」的觀念所推導出的選擇權評價模型，即利用買入股票及賣出股票選擇權的方式，建構出一個無風險的投資組合。在市場均衡與風險中立下，承擔相同的風險應得到相同的報酬，否則即有套利機會，因此此投資組合的報酬率應該與投資無風險資產所得之報酬率相同。根據此無套利原則，在理想的市場環境及一些基本假設下，導出 Black-Scholes 模型。

Black-Scholes 模型的目的是給予投資人做選擇權買賣決策時的價值依據。由於此模式的誕生，促進了衍生性金融商品的快速發展。迄今，不論是在學術或實務應用的領域中，B-S 選擇權評價模型皆普遍被認可且成為選擇權合理價格的評斷依據。而 Black 更因此在 1997 年獲得了諾貝爾經濟學獎的殊榮。

Black-Scholes 模型有七點基本假設：

1. 標的資產價格呈對數常態分配(Lognormal Distribution)，而標的資產價格的變動服從幾何布朗運動(Geometric Brownian Motion)；
2. 該資本市場為一完全競爭市場，不存在稅賦、交易成本與放空成本；
3. 標的資產可以無限制地分割；

4. 市場中不存在套利的機會；
5. 選擇權只有在到期時才可履約(歐式選擇權)；
6. 在選擇權存續期間中，無風險利率與波動性為已知常數；
7. 無現金股利或股票股利的發放。

上述七項基本假設，大多數的假設都與真實市場的情況不符合，例如：股價報酬一般並非常態分配、市場存在有諸多的交易障礙(如：手續費、交易稅)，並充斥著套利機會、標的資產難以無限分割、無風險利率及波動性並非為固定不變，其中波動性更是難以捕捉。然而，此模型之主要目的在於提供一個可茲參考之依據，故其貢獻還是不可抹滅的。

Black-Scholes 首先假設未來之股價行為遵循下列的隨機過程

$$dS_t = rS_t dt + S_t d\hat{W}_t$$

其中 S_t 為在時間 $t, t \in [0, T]$ 之股價， r 為無風險年利率， \hat{W}_t 為 Q-布朗運動。

由 Itô Formula 知

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\hat{W}_t}$$

令 $f(t, S_t)$ 為歐式買權，及 Π_t 為在時間 $t, t \in [0, T]$ 之投資組合，因無套利空間，故

$$f(t, S_t) = \Pi_t = e^{-r(T-t)} E_Q(f(T, S_T) | F_t)$$

其中 Q 為風險中立機率空間，如 $f(T, S_T) = f(S_T)$ ，則

$$\Pi_t = e^{-r(T-t)} E_Q \left(S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\hat{W}_{T-t}} | F_t \right)$$

令 $T - t = \theta$ ，則

$$\begin{aligned}\Pi_t &= e^{-r\theta} E_Q \left(S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\theta + \sigma\sqrt{\theta}\hat{W}_1} \mid F_t \right) \\ &= f(t, S_t)\end{aligned}$$

其中

$$f(t, S_t) = e^{-r\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} f \left(x e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\theta + \sigma\sqrt{\theta}y} \right) \varphi(y) dy$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \sim N(0,1)$$

因為此為歐式買權，則

$$f(S_T) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

其中 K 為歐式買權之履約價格，即

$$\begin{aligned}f(S_T) &= e^{-r\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\theta + \sigma\sqrt{\theta}y} - K \right) \varphi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta + \sigma\sqrt{\theta}y} - K e^{-r\theta} \right)^+ \varphi(y) dy\end{aligned}$$

首先我們計算

$$x e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta + \sigma\sqrt{\theta}y} \geq K e^{-r\theta}$$

$$e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\theta + \sigma\sqrt{\theta}y} \geq \frac{K}{x}$$

$$\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\theta + \sigma\sqrt{\theta}y \geq \ln \frac{K}{x} = -\ln \frac{x}{K}$$

$$\sigma\sqrt{\theta}y \geq -\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\theta + \ln \frac{x}{K}\right)$$

$$y \geq -\frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\theta + \ln \frac{x}{K}}{\sigma\sqrt{\theta}} = -d_2$$

所以

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \int_{-d_2}^{+\infty} \left(x e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta + \sigma\sqrt{\theta}y} - K e^{-r\theta} \right) \varphi(y) dy \\ &= \int_{-d_2}^{+\infty} x e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta + \sigma\sqrt{\theta}y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{-r\theta} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= x \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta + \sigma\sqrt{\theta}y - \frac{1}{2}y^2} dy - K e^{-r\theta} \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= x \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{\theta})^2} dy - K e^{-r\theta} \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= x \int_{-d_2 - \sigma\sqrt{\theta}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du - K e^{-r\theta} \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy, \quad y - \sigma\sqrt{\theta} = u \end{aligned}$$

令 $d_2 + \sigma\sqrt{\theta} = d_1$ 及

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \int_{-d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

得

$$f(t, x) = xN(d_1) - K e^{-r\theta} N(d_2)$$

其中 N 即為累積常態分配函數，

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

同理，歐式賣權為

$$f(t,x) = Ke^{-r\theta}N(-d_2) - xN(-d_1)$$

在 Black-Scholes 模型中，我們更可清楚的看出影響選擇權價格的主要因素有股票價格、履約價格、選擇權契約長度、股價波動性及無風險利率。

第四章 蒙地卡羅模擬法

4.1 文獻回顧

Papageorgiou and Traub (1996) 指出傳統蒙地卡羅在模擬的過程中採用擬似亂數 (Pseudo Random Numbers)，缺點在於其隨機變數會有群聚 (Clustering) 的現象，因為有些區域沒有樣本點，有些區域樣本點太過集中，這種群聚現象浪費了觀察值，使得模擬誤差變大，影響評價效率；且蒙地卡羅模擬的樣本點太少，其正確性是存疑的。

P. Boyle, M. Broadie and P. Glasserman (1997) 討論近代蒙地卡羅模擬法應用於衍生性金融商品的問題，試圖提出改善蒙地卡羅模擬法效率不彰的方法。如一些降低變異量 (Variance Reduction) 的方法，其中包含低差異數列法 (Low Discrepancy Sequences)，並討論如何應用於美式選擇權商品的評價上。

S. Galanti and A. Jung (1997) 是應用低差異數列法於數種路徑相依的選擇權商品中，包含障礙選擇權 (Barrier Option)、亞洲選擇權 (Asian Option) 及回顧選擇權 (Look-Back Option) 三種，並認為 Moro (1995) 轉換法優於 Box-Muller 轉換法 (Press et al., 1992)，故應用於將介於 $[0, 1]$ 間均勻分佈的隨機亂數，加以轉換為標準常態隨機亂數。

G. Okten and W. Eastman (2004) 使用較簡單的歐洲及亞洲選擇權，進行傳統蒙地卡羅模擬法與低差異性數列方法的比較，結果發現後者不僅可以降低誤差，而且可以增進效率性。此外亦發現，欲將介於 $[0, 1]$ 間均勻分佈的隨機亂數，加以轉換為標準常態隨機亂數，在轉換方法的選擇上，Box-Muller 轉換法則優於一般統計上的轉換方法。

由國外的文獻中可發現，在近幾年來，低差異性數列法的發展，廣受研究學者的引用，更甚者，將傳統蒙地卡羅模擬法與典型的低差異性數列法加以合併，以達最佳的績效，此類數值的方法，亦被廣泛應用在各種複雜的衍生性金融商品上。W. Eastman et al. (2004) 則定義低差異性數列法不可看作隨機過程，此數列的產生，乃取決於最佳的均勻配適。

4.2 蒙地卡羅法模擬法 (Monte Carlo Simulation) 簡介

蒙地卡羅模擬法是極有彈性，主要根據標的資產價格的隨機過程，形

成標的資產，利用電腦隨機抽樣，模擬出幾百次至幾萬次的可能資產價格之路徑，再轉換成可能的買權或賣權之價值，再將幾千次之買（賣）權平均，便可以得到買權或賣權在發行日之價值

$$C = e^{-rT} E(S_T - K | S_T > K) = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$$

其中 S_T 為到期日股價、 K 為履約價、 r 為無風險利率、 C_i 為每次模擬的選擇權價格及 n 為模擬次數。因此，進行蒙地卡羅模擬法的步驟如下：

步驟一：選定標的資產價格產生模型、平均數及標準差。

步驟二：抽取隨機亂數，產生下一期股價，如此一直循環產生一條股價路徑及到期日股價。

$$S_t = S_{t-1} e^{(r-0.5\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}N(0,1)}$$

其中 S_{t-1} 為前一期股價、 σ 為資產價格標準差及 Δt 為股價的間隔時間。

步驟三：依據選擇權到期的定義，求期末選擇權價值，如歐式買權為 $\max(0, S_T - K)$ ，或歐式賣權為 $\max(0, K - S_T)$ 。

步驟四：將上述步驟二及三重複 N 次，求 N 次選擇權的平均值。

步驟五：以無風險利率將平均值折現，即為選擇權發行日之價值。

4.2.1 Box-Muller Method

先造出兩個亂數 (u_1, u_2) ，由 Box-Muller Method 的方法我們可以轉換為兩個獨立的常態變數 (Standard Normal Variates) (x, y) ，方法如下：

$$x = \sqrt{-2\log(u_1)} \cos(2\pi u_2)$$

$$y = \sqrt{-2\log(u_1)} \sin(2\pi u_2)$$

< 證 >

透過極座標，設 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ 且 $dxdy = r dr d\theta$ ，則在二維平面上機率累積密度函數為

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dxdy &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \\ &= \left(\frac{\theta}{2\pi} \right) \left(e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right) \end{aligned}$$

主幅角 $u_2 = \frac{\theta}{2\pi}$ 為一均勻分佈 (Density: $re^{-\frac{r^2}{2}}$; Distribution: $u_1 \rightarrow 1-u_1$)，

所以

$$1-u_1 = p(r) = \int_0^r e^{-\frac{u^2}{2}} u du = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}$$

$$r = p^{-1}(u_1) = \sqrt{-2 \log(u_1)}$$

因此，我們透過 $(u_1, u_2) \rightarrow (r, \theta) \rightarrow (x, y)$ ，即可把平面上均勻分佈的點轉換為平面上常態分佈的點。



4.3 The Halton Sequences

我們先造在區間 $[0, 1]$ 之一維度 Halton Sequences。此序列的元素由下列式子計算：

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} n_{k,i} p^{-k-1}$$

其中 $i > 0$ ， $p = 2$ ，且

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} n_{k,i} p^k; 0 \leq n_{k,i} < p; n_{k,i} \in \mathbb{N}$$

例如：

$$i = 1 \Rightarrow n_{0,1} = 1, \dots, n_{k,1} = 0, \dots (k > 0)$$

$$i = 2 \Rightarrow n_{1,2} = 1, \dots, n_{k,2} = 0, \dots (k \neq 1)$$

$$i = 3 \Rightarrow n_{0,3} = n_{1,3} = 1, \dots, n_{k,3} = 0, \dots (k > 1)$$

因此我們可以得到這樣的序列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \dots$ 。若擴展到維度

$j = 1, \dots, d$ ，則定義 x_i^j 為 $x_i^j = \sum_{k=0}^{\infty} n_{k,i}(j) p_j^{-k-1}$ ，其中 p_j 是由小排列到大的第 j 個質數，此時

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} n_{k,i}(j) p_j^k; 0 \leq n_{k,i}(j) < p_j; n_{k,i}(j) \in \mathbb{N} \forall j$$

例如用 $p_1 = 2$ ， $p_2 = 3$ ，可以得到二維 Halton Sequences： $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ， $(\frac{1}{4}, \frac{2}{3})$ ， \dots 。

圖 4.1 是各取 100 個點的擬似亂數(Pseudo-Random Numbers)與 Halton Sequences，可以清楚的比較二維的擬似亂數 (Pseudo-Random Numbers) 與 Halton Sequences 的優劣，看出 Halton Sequences 比較均勻，比較無群聚現象。另外，利用蒙地卡羅法，並使用 Halton Sequences 取代隨機數，模擬半徑為一的圓面積，如圖 4.2 所示，發現使用小質數較有效逼近近似值，故本文取最小的質數在使用 Halton Sequences 取代隨機數，作選擇權評價模擬。

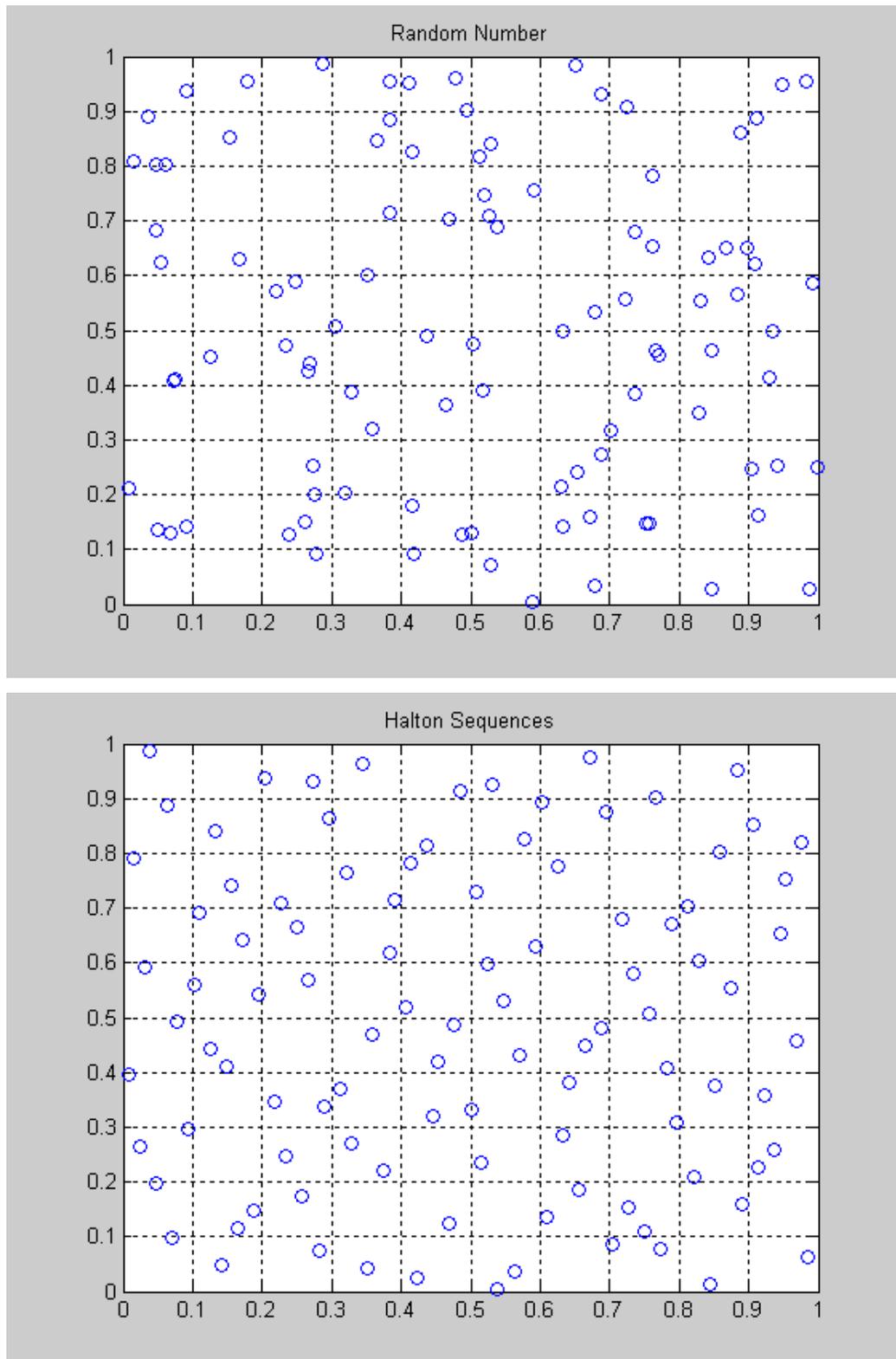


圖 4.1 比較二維的擬似亂數 (Pseudo-Random Numbers) 與 Halton Sequences

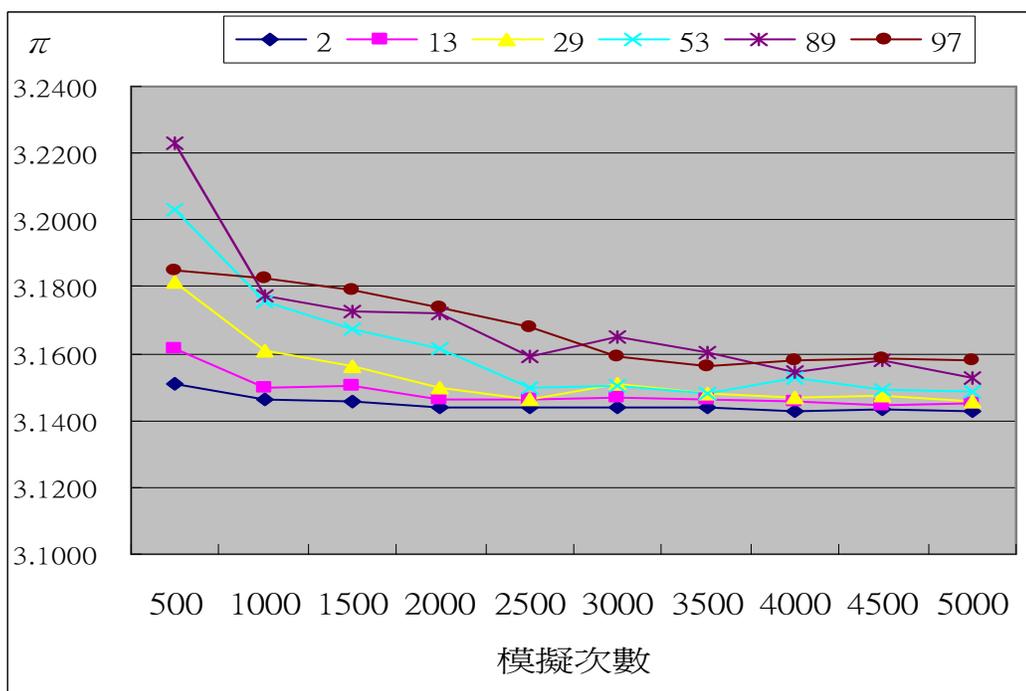


圖 4.2 模擬半徑為一的圓面積

4.4 降低變異 (Variate Reduction)

假設我們欲估計的選擇權價格為 θ ，可藉由蒙地卡羅法產生出一組獨立且有相同分佈的數列 $\{X_i, i=1,2,3,\dots\}$ ，其中 X_i 為一組常態的隨機樣本，平均數為 θ ，標準差為 σ^2 。

因此我們可用 \bar{X}

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$$

來估計 θ ，其中 $\theta = E(X)$ ，變異數為

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

標準差為 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。若欲使蒙地卡羅法的收斂速度加快，則須使 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 越小越好，

此時可用增加模擬路徑 n ，使收斂速度趨快。因此若欲使模擬出的估計值其準確度增為 10 倍（誤差降低一個百分點），則必須增加模擬的路徑數達 100 倍（試行次數必須增加 100 次）才可以，如此在運算上更為緩慢、無效率，因此各種降低變異數的方法因應而生。

4.4.1 動差配適模擬法 (Moment Matching Simulation, MMS)

在 Black-Scholes 模型，我們需要符合標準常態分配的隨機亂數以進行蒙地卡羅模擬，因此動差配適模擬法的做法是將一組從標準常態分配中抽取出的隨機樣本做一轉換，使其一階動差、二階動差，甚至更高階的動差皆能符合標準常態分配的特性。假設 $w_i (1 \leq i \leq N)$ 為自標準常態分配中抽取的隨機樣本，為了配適其一階動差及二階動差，計算出隨機樣本的平均值為 m 與標準差 s ，接著定義調整過後的樣本 $y_i (1 \leq i \leq N)$ 為

$$y_i = (w_i - m) \frac{\sigma}{s} + \mu$$

其中 μ 與 σ 分別為母體的平均數與標準差，由於母體為標準常態分配 ($\mu = 0, \sigma = 1$)，故上式可簡化為

$$y_i = \frac{w_i - m}{s}$$

隨機樣本經過轉換後皆符合了標準常態分配，其期望值為 0，標準差為 1，接著用此轉換過的樣本進行模擬，可降低其變異程度。

4.4.2 反向亂數變異法 (Antithetic Random Numbers, ARN)

反向變異法是最常用降低變異的方法，此法是因為要創造一個與原來資產完全負相關的同等資產，故稱為反向變異法，而其中被創造出的資產稱為相反變量。

反向變異法的概念為假設第一個選擇權的價值 θ_1 是由常態亂數表中隨

機抽取計算而得，而其相反變量的價值 θ_2 ，則由同一組常態亂數表加上負號來當作此相反變量的常態亂數表，再隨機抽取計算而得，意即兩組亂數表的符號是相反的。最後所欲模擬的選擇權價值 θ 為

$$\theta = \bar{\theta} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

其變異數為

$$\begin{aligned} \text{var}(\theta) &= \text{var}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}[\text{var}(\theta_1) + \text{var}(\theta_2) + 2\text{cov}(\theta_1, \theta_2)] \end{aligned}$$

其中 $\text{var}(\theta_1) = \text{var}(\theta_2) = \sigma^2$ ，且因為 θ_1 與 θ_2 呈現高度負相關， $\text{cov}(\theta_1, \theta_2) < 0$ ，因此

$$\text{var}(\theta) \leq \frac{1}{4}[\text{var}(\theta_1) + \text{var}(\theta_2)] = \frac{1}{2}\sigma^2$$

我們得到使用此方法可以降低二分之一以上的變異數。此一方法之所以有效，是因為某個被高估的選擇權價值由反向變異法所求得之相反變量的價值往往會低估實際價值，反之亦然。因此將兩值平均後可降低估計值的標準差，進而提高準確程度，不需增加模擬路徑數即可有效降低變異。

4.4.3 控制變異法 (Control Variate, CV)

控制變異法是欲找出一個與標的物有相關的選擇權作為控制變異量，此控制變異量須具備兩個條件：

1. 控制變異量必須與進行模擬的選擇權價格性質相近。
2. 控制變異量的理論值具有公式解。

當我們進行選擇權模擬時，必定先得到股價的變化，因此選擇權的價格與股價基本上是相關的，我們利用此一特性來進行選擇權價格的修正。

假設欲估計的選擇權價值為 θ_A ，而我們找到另一控制變異量，其已知的價值為 θ_B ， θ_A 與 θ_B 皆由蒙地卡羅模擬出來的估計值，變異數分別為 σ_A^2 與

σ_b^2 ，修正後的選擇權估計值定義為

$$\theta_A^* = \theta_A + c(\theta_B - E[\theta_B])$$

其中 c 為一調整參數。然而不是任意的 c 值，皆能降低變異數，因此欲得到最小的變異數，必須當

$$c^* = -\frac{\text{cov}(\theta_A, \theta_B)}{\sigma_B^2}$$

因此，其變異數為

$$\begin{aligned} \text{var}(\theta_A^*) &= \text{var}[\theta_A + c^*(\theta_B - E[\theta_B])] \\ &= \sigma_A^2 + (c^*)^2 \sigma_B^2 + 2c^* \text{cov}(\theta_A, \theta_B - E[\theta_B]) \\ &= \sigma_A^2 + \left(-\frac{\text{cov}(\theta_A, \theta_B)}{\sigma_B^2}\right)^2 \sigma_B^2 + 2\left(-\frac{\text{cov}(\theta_A, \theta_B)}{\sigma_B^2}\right) \text{cov}(\theta_A, \theta_B - E[\theta_B]) \\ &= \sigma_A^2 + \left(\frac{\text{cov}^2(\theta_A, \theta_B)}{\sigma_B^2}\right) - 2\left(\frac{\text{cov}^2(\theta_A, \theta_B)}{\sigma_B^2}\right) \\ &= \sigma_A^2 - \left(\frac{\rho_{A,B}^2 \sigma_A^2 \sigma_B^2}{\sigma_B^2}\right) \\ &= \sigma_A^2 (1 - \rho_{A,B}^2) \end{aligned}$$

因為 $0 \leq 1 - \rho_{A,B}^2 \leq 1$ ，所以若控制變異量與欲估計的選擇權之間相關性越大時，也就是相關係數 ρ_{AB} 越大，則所削減的變異量也越大。

4.4.4 降低變異法之結合

我們結合上面兩種方法得到另外兩個降低變異數的方法。其一為以反向變異法的架構結合控制變異法 (ARNCV)，意指先使用控制變異法得到

一個選擇權價格，再取第一次所使用隨機亂數的相反隨機亂數進行控制變異法，如此可得到兩個選擇權價格，再加以平均得到我們所求的選擇權價格。同時我們也使用動差配適模擬法搭配來進行模擬。

其變異數為

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\theta_{ARN+CV}) &= \text{var}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{4}[\text{var}(\theta_1) + \text{var}(\theta_2) + 2\text{cov}(\theta_1, \theta_2)] \\
 &= \frac{1}{2}[\text{var}(\theta_1) + \text{cov}(\theta_1, \theta_2)] \\
 &< \frac{1}{2}\text{var}(\theta_1)
 \end{aligned}$$

故此方法可以降低原來一半以上之變異數。

另一個方法是以控制變異法的架構結合反向變異法 (CVARN)，即先利用相反亂數得到兩組選擇權價格與股價，再帶入控制變異法的架構中，求出新的選擇權價格。

其變異數為

$$\begin{aligned}
 \text{var}(\theta_{CV+ARN}) &= \text{var}(\theta_{ARN})(1 - \rho_{ARN,B}^2) \\
 &= \text{var}\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)(1 - \rho_{ARN,B}^2) \\
 &= \frac{1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\text{cov}(\theta_1, \theta_2))(1 - \rho_{ARN,B}^2) \\
 &< \frac{1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(1 - \rho_{ARN,B}^2) \\
 &= \frac{1}{2}(\sigma_1^2)(1 - \rho_{ARN,B}^2) \\
 &< \frac{1}{2}\sigma_1^2
 \end{aligned}$$

同理，使用此方法可降低原來一半以上之變異數。

下圖為本文將互相搭配各種降低變異法進行模擬的架構圖。

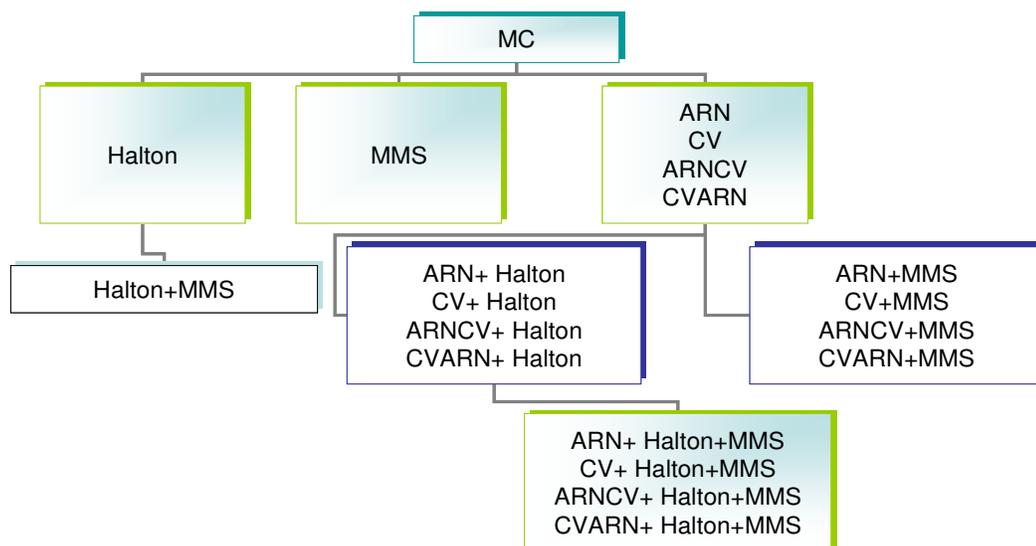


圖 4.3 降低變異法之搭配

第五章 實證分析

在本文中，我們選擇以臺灣期貨交易所發行之臺灣證券交易所發行量加權股價指數（簡稱臺指選擇權）為研究對象。以臺指買權進行契約長度分別為一個月及三個月的蒙地卡羅模擬，並利用降低變異法來進行實證研究。

在以蒙地卡羅模擬法求出各現貨價後，即可以實際選擇權價格來予以進行實證分析，並藉由各方法所求出的理論價格與實際價格的誤差程度，來予以判定哪一各方法才是整體而言（Overall）較為適合臺指選擇權現階段的評價模型。而其中誤差程度的衡量方式，本研究將採用均方根誤差（Root Mean Square Error, RMSE）

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i - P}{P} \right)^2}$$

其中 P 為實際買權的價格， P_i 為每次模擬的價格。並根據此一指標來予以判定與比較各方法之選擇權平價的優劣。

5.1 資料來源與說明

臺灣期貨交易所於 2001 年 12 月正式推出臺股指數選擇權，而接著於 2003 年一月再推出以個別上市公司之普通股股票為標的之股票選擇權，而選擇權之到期期間大多為少於一年。其交易量正隨著市場開放、資訊公開而逐年增加。根據臺灣期貨交易所所公佈之「臺灣證券交易所股價指數選擇權契約規格」得知，臺指選擇權履約型態為歐式，市場上所交易之契約長度為當月起連續三個月份之近月契約，加上三月、六月、九月及十二月中兩個接續的季月之季月契約，總共有五個月份的契約在市場交易。每個契約最後交易日為各契約交割月份第三個星期三，而隔日為到期日。最後結算價則是以到期日臺灣證券交易所所提供當日交易時間開始後十五分鐘內之平均加權指數為依據。

本文選擇契約長度分別為一個月及三個月進行模擬，以 2006 年 6 月 15 日及 8 月 17 日為到期日，再依契約長度推算，以 5 月 15 日及 5 月 17

日為契約購買日，並查出當時加權指數及選擇權價格。下表為模擬兩種長度不同履約價之臺指買權基本數據。

表 5.1 模擬選擇權之數據

購買日	到期日 (契約長度)	加權指數	履約價	無風險 利率	波動性	市場選擇 權價格
2006/05/15	2006/06/15 (一個月)	7176.35	7000	1.565%	19.65%	270
2006/05/15	2006/06/15 (一個月)	7176.35	7200	1.565%	19.65%	156
2006/05/18	2006/08/17 (三個月)	7034.03	7000	1.635%	18.75%	297
2006/05/18	2006/08/17 (三個月)	7034.03	7200	1.635%	18.75%	203

5.2 模擬結果

5.2.1~5.2.4 各個附圖顯示出，在短短模擬次數只有 5000 次內的情況下，兩個不一樣契約長度及不一樣履約價買權而言，所有使用降低變異數的方法，其均方根誤差已趨近小於 0.1%，效果明顯。而且使用 Halton Sequences 取代隨機數，並搭配降低變異數法進行模擬，更可降低誤差，大約於模擬近 2500 次時，均方根誤差已趨近於再多作模擬到 5000 次的結果。

以 2006/05/15~2006/06/15 (履約價 7000) 模擬結果為例，蒙地卡羅法搭配降低變異數法和使用 Halton Sequences 取代隨機數，共使用 20 種不同搭配模擬，以五個比較圖表示之。圖 5.1 顯示蒙地卡羅法並加以使用 Halton Sequences 取代隨機數，與動差配適模擬法 (MMS) 搭配的比較結果，此兩者的結合使用比個別使用，更可達到最佳的效果。接著以圖 5.1 為基礎，搭配反向亂數變異法 (ARN)、控制變異法 (CV)、反向亂數結合控制變異法 (ARNCV)、控制變異結合反向亂數變異法 (CVARN) 分別產生圖 5.2~圖 5.5 之比較圖。

由圖 5.2~圖 5.5 可見，當每一種方法去搭配動差配適模擬法時，皆能降低原方法模擬的均方根誤差，表示可以不單獨使用動差配適模擬法，同時搭配其他降低變異數的方法，在降低變異數上產生更好的效果。此外，搭配每一種降低變異法的模擬趨勢，與圖 5.1 是相同的，也就是在加上 Halton

Sequences 取代隨機數，與動差配適模擬法（MMS）的結合使用達到的效果是最佳的，無一例外。

5.2.1 2006/05/15~2006/06/15（履約價7000）模擬結果

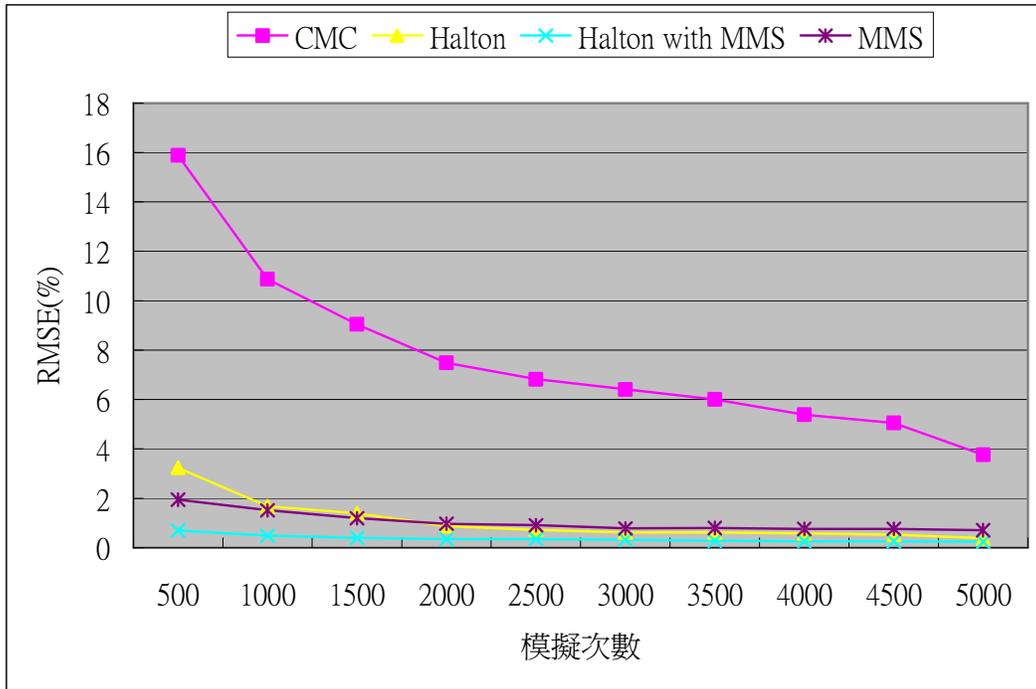


圖 5.1 傳統 Monte Carlo、Halton sequences 取代隨機數、動差配適法(MMS)

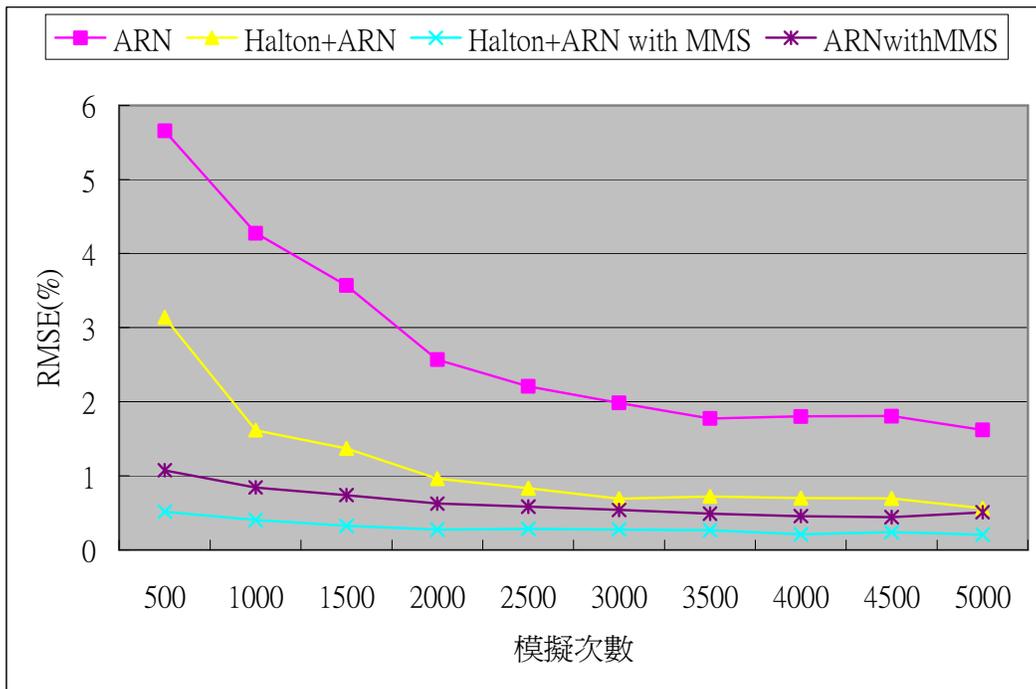


圖 5.2 反向亂數變異法（ARN）之 Monte Carlo

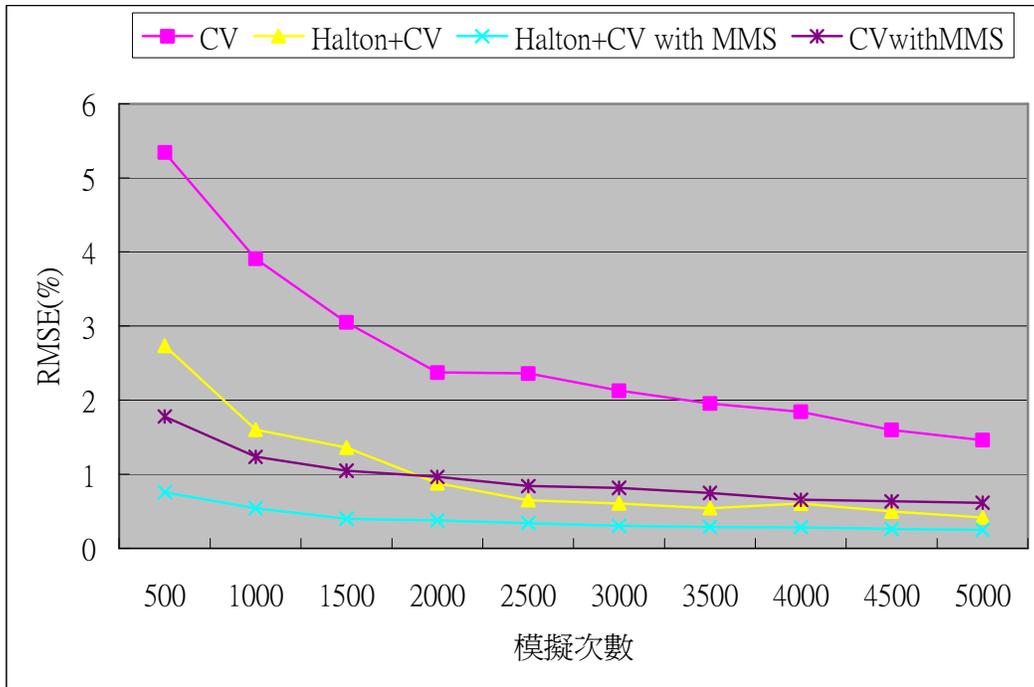


圖 5.3 控制變異法 (CV) 之 Monte Carlo

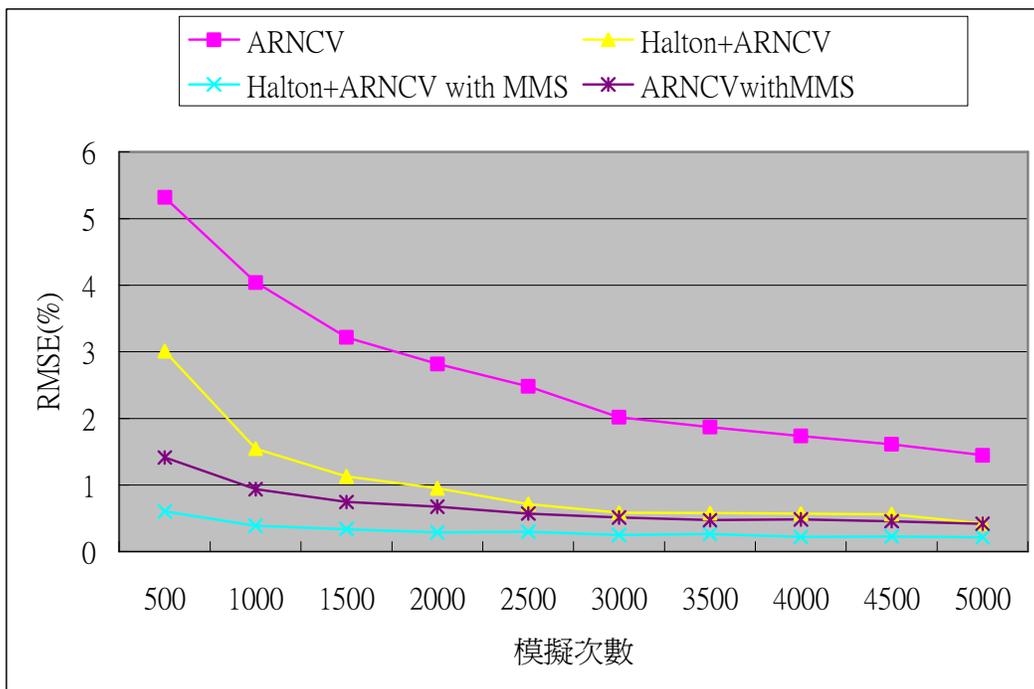


圖 5.4 反向亂數結合控制變異法 (ARNCV) 之 Monte Carlo

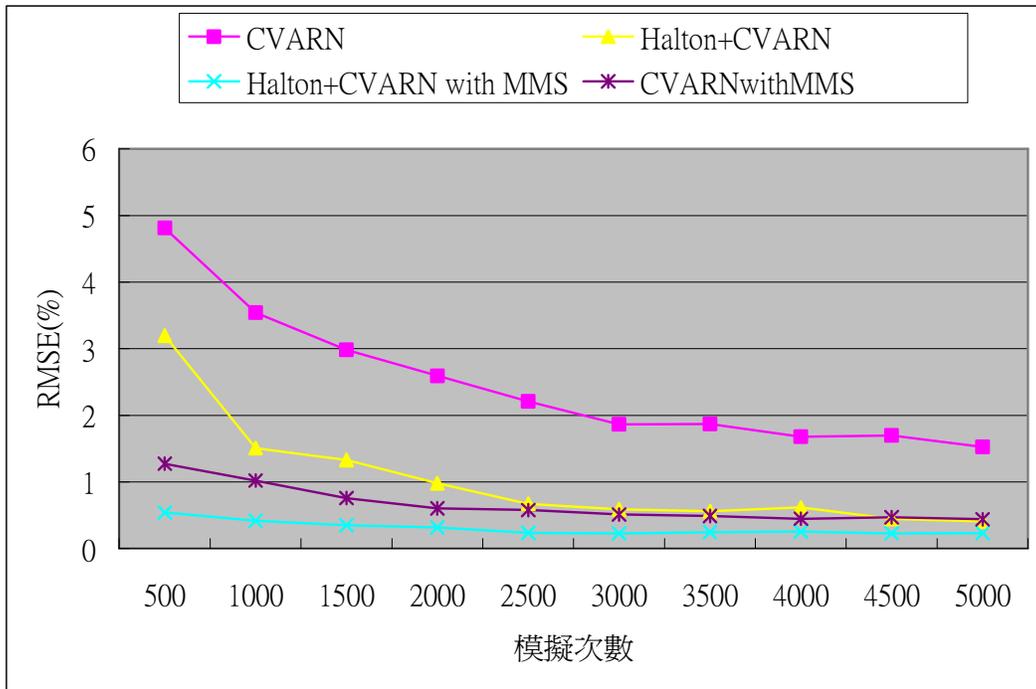


圖 5.5 控制變異結合反向亂數變異法 (CVARN) 之 Monte Carlo

5.2.2 2006/05/15~2006/06/15 (履約價7200) 模擬結果

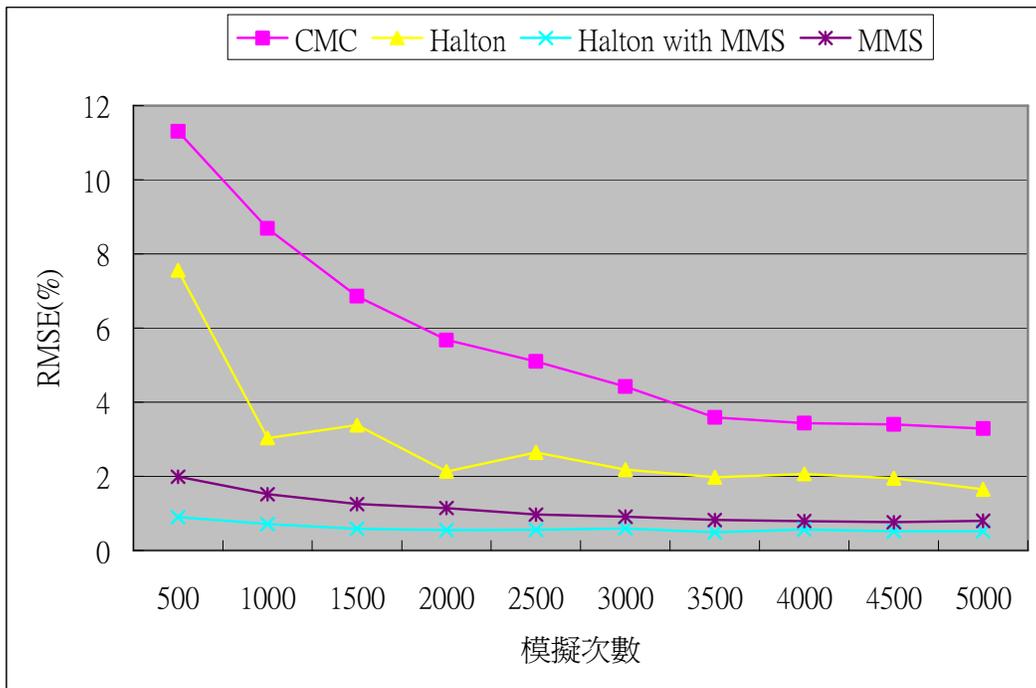


圖 5.6 傳統 Monte Carlo、Halton sequences 取代隨機數、動差配適法(MMS)

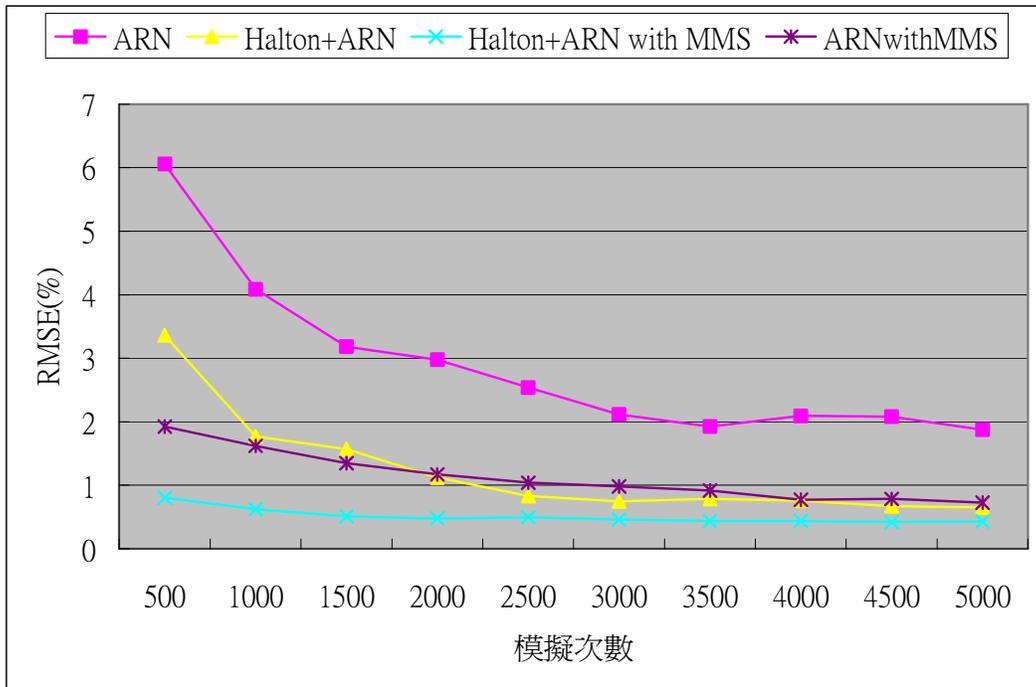


圖 5.7 反向亂數變異法 (ARN) 之 Monte Carlo

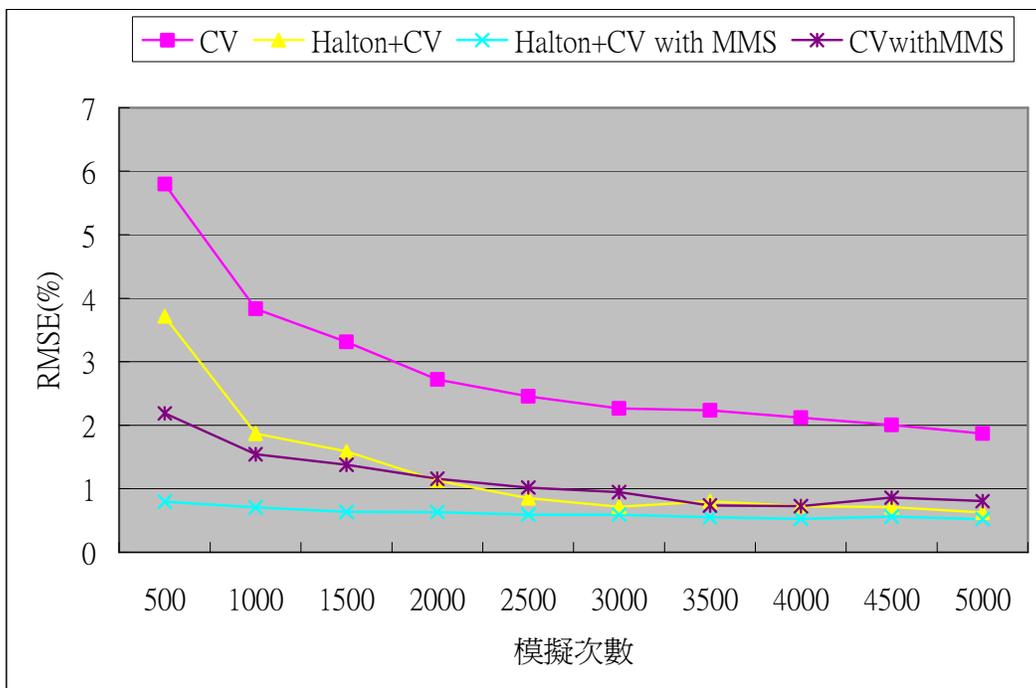


圖 5.8 控制變異法 (CV) 之 Monte Carlo

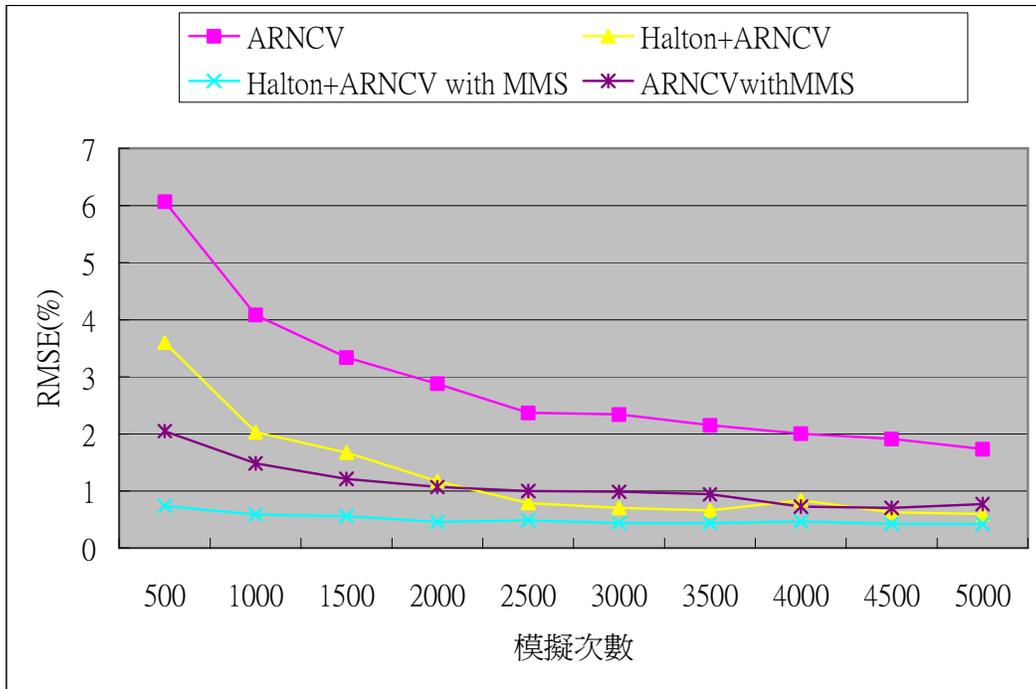


圖 5.9 反向亂數結合控制變異法 (ARNCV) 之 Monte Carlo

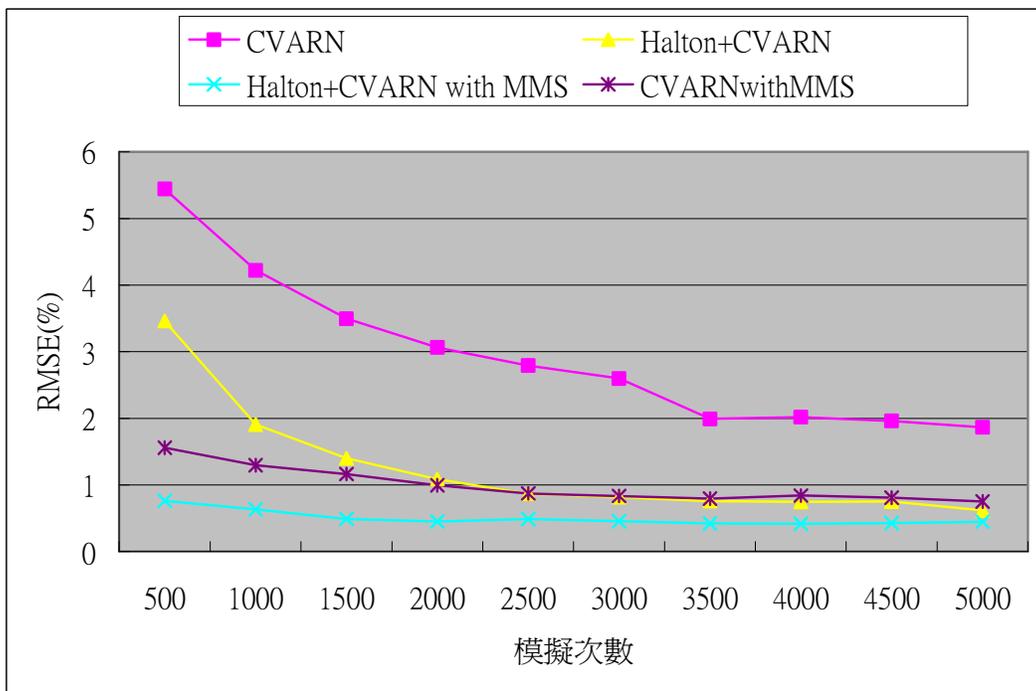


圖 5.10 控制變異結合反向亂數變異法 (CVARN) 之 Monte Carlo

5.2.3 2006/05/18~2006/08/17 (履約價7000) 模擬結果

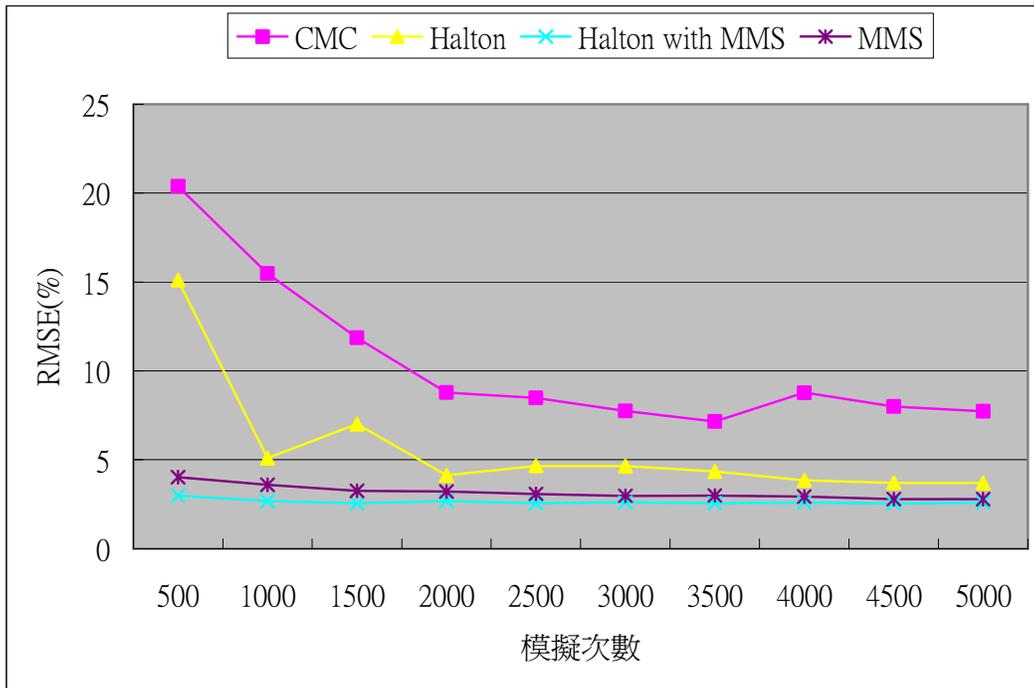


圖 5.11 傳統 Monte Carlo、Halton sequences 取代隨機數、動差配適法(MMS)

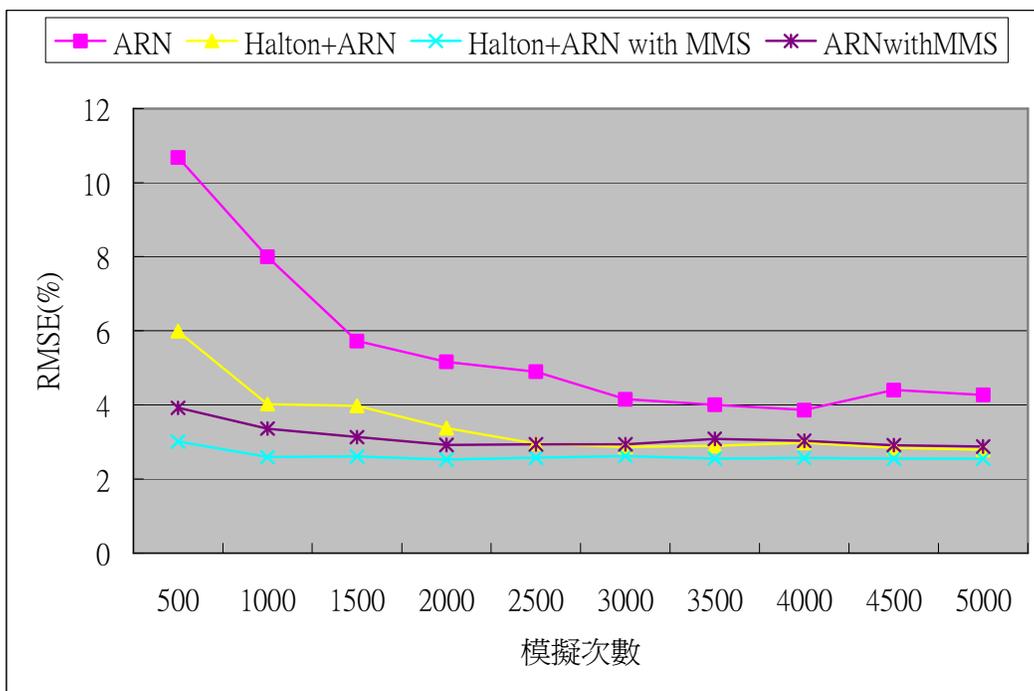


圖 5.12 反向亂數變異法 (ARN) 之 Monte Carlo

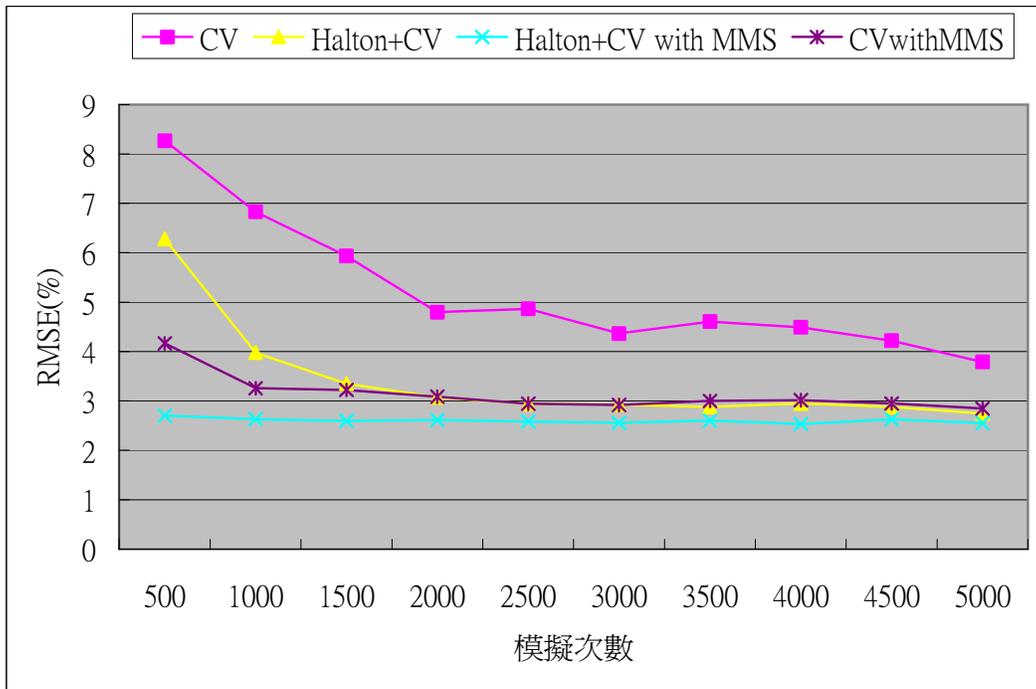


圖 5.13 控制變異法 (CV) 之 Monte Carlo

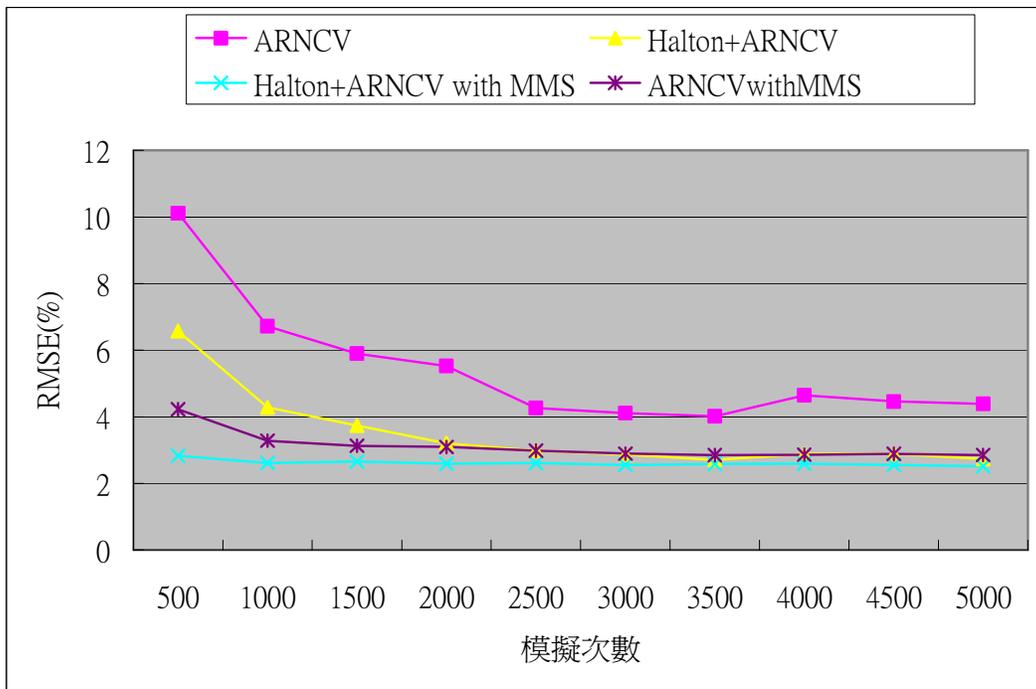


圖 5.14 反向亂數結合控制變異法 (ARNCV) 之 Monte Carlo

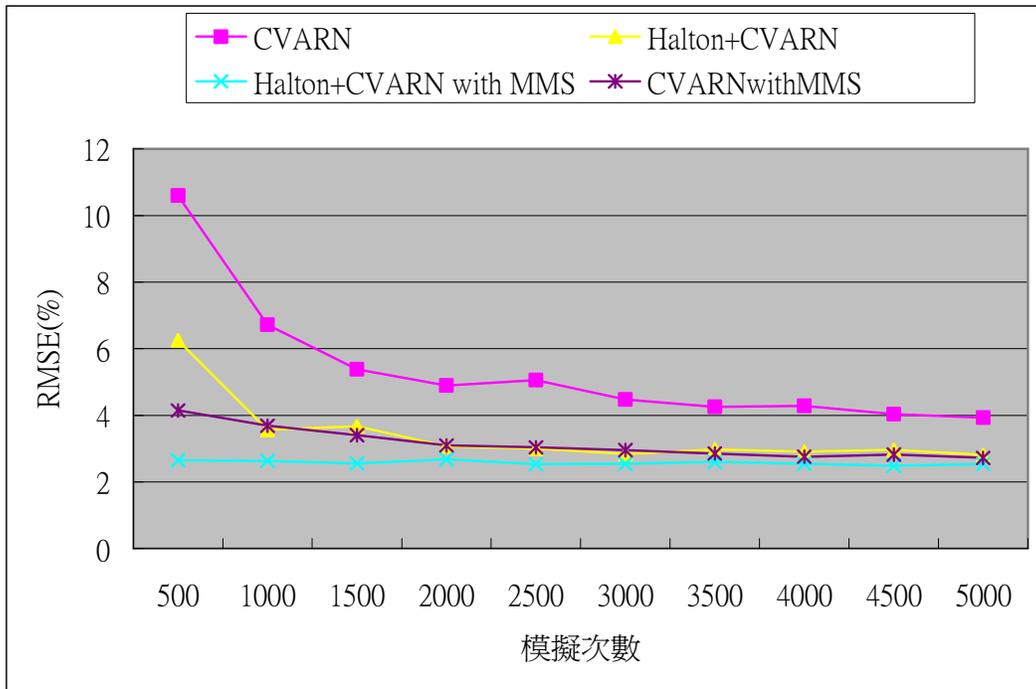


圖 5.15 控制變異結合反向亂數變異法 (CVARN) 之 Monte Carlo

5.2.4 2006/05/18~2006/08/17 (履約價7200) 模擬結果

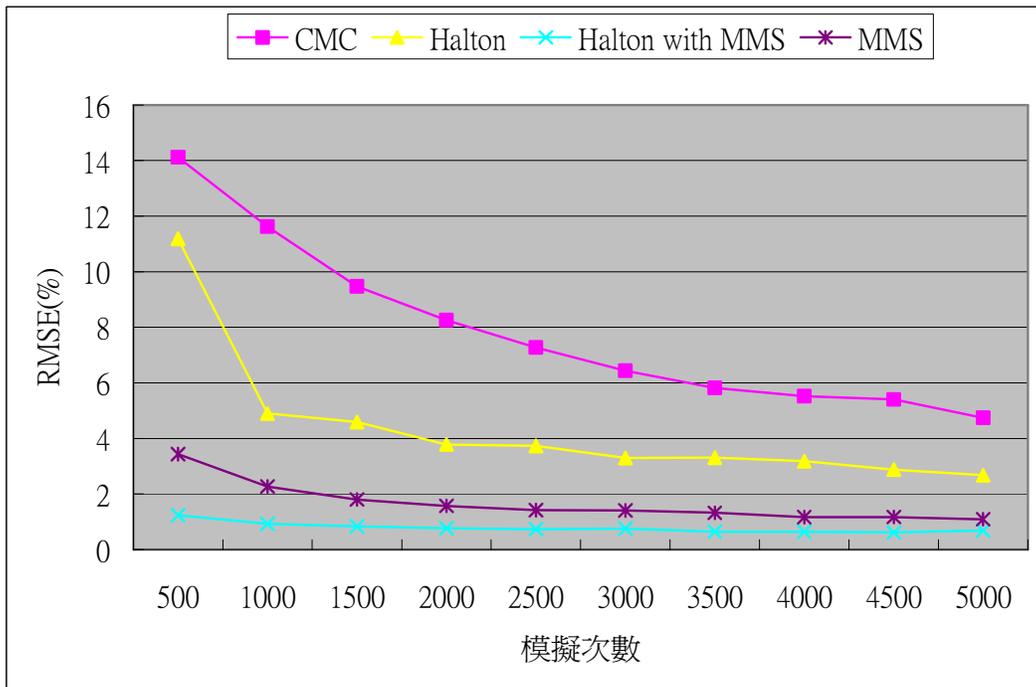


圖 5.16 傳統 Monte Carlo、Halton sequences 取代隨機數、動差配適法 (MMS)

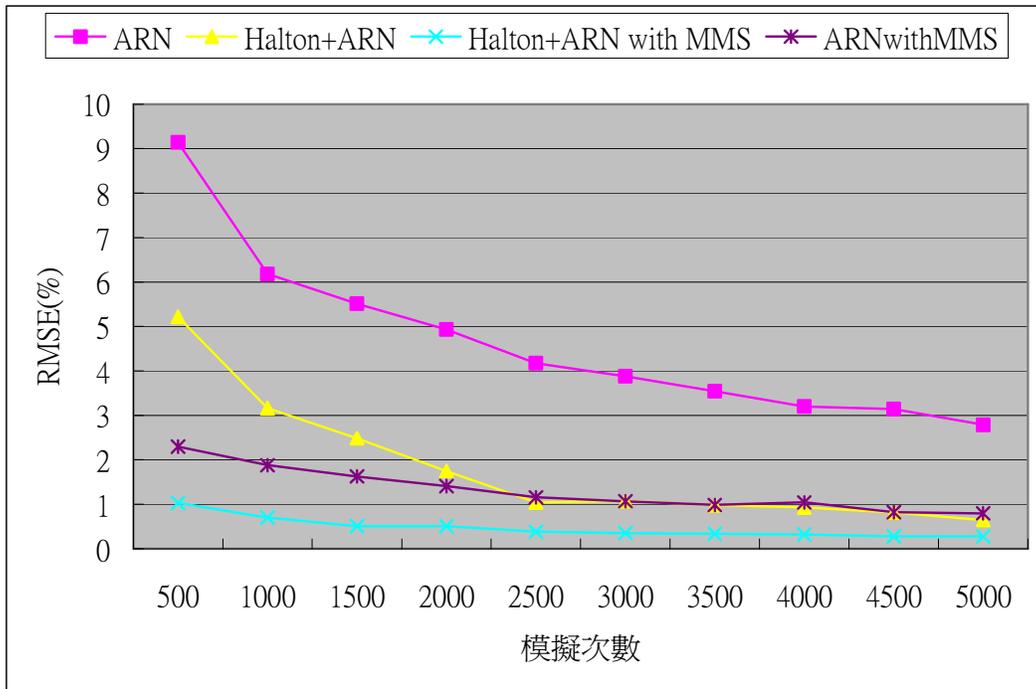


圖 5.17 反向亂數變異法 (ARN) 之 Monte Carlo

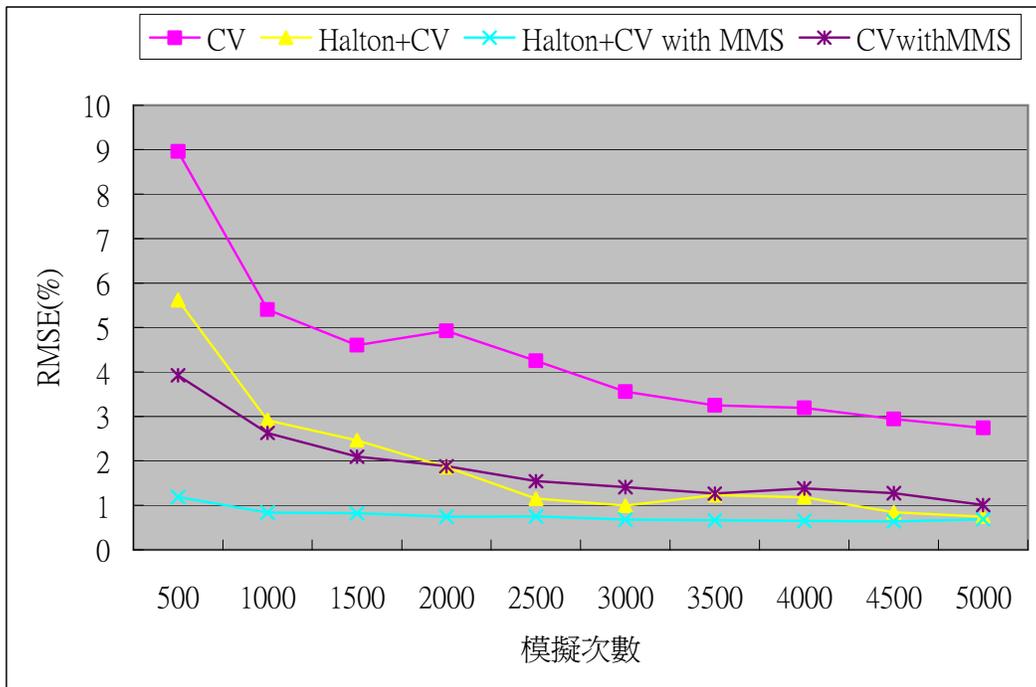


圖 5.18 控制變異法 (CV) 之 Monte Carlo

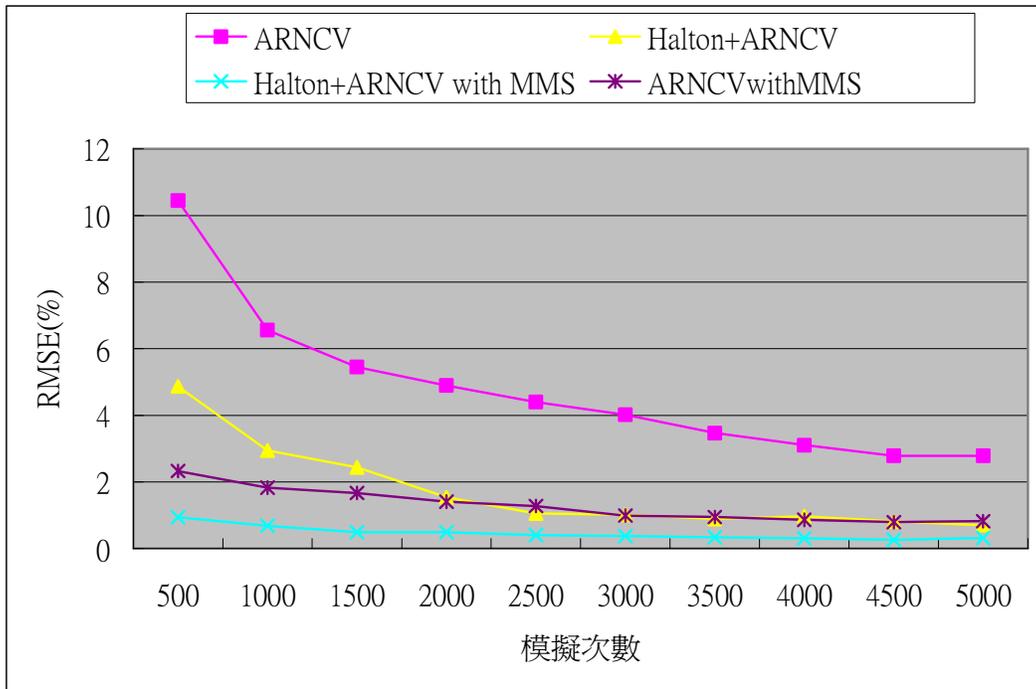


圖 5.19 反向亂數結合控制變異法 (ARNCV) 之 Monte Carlo

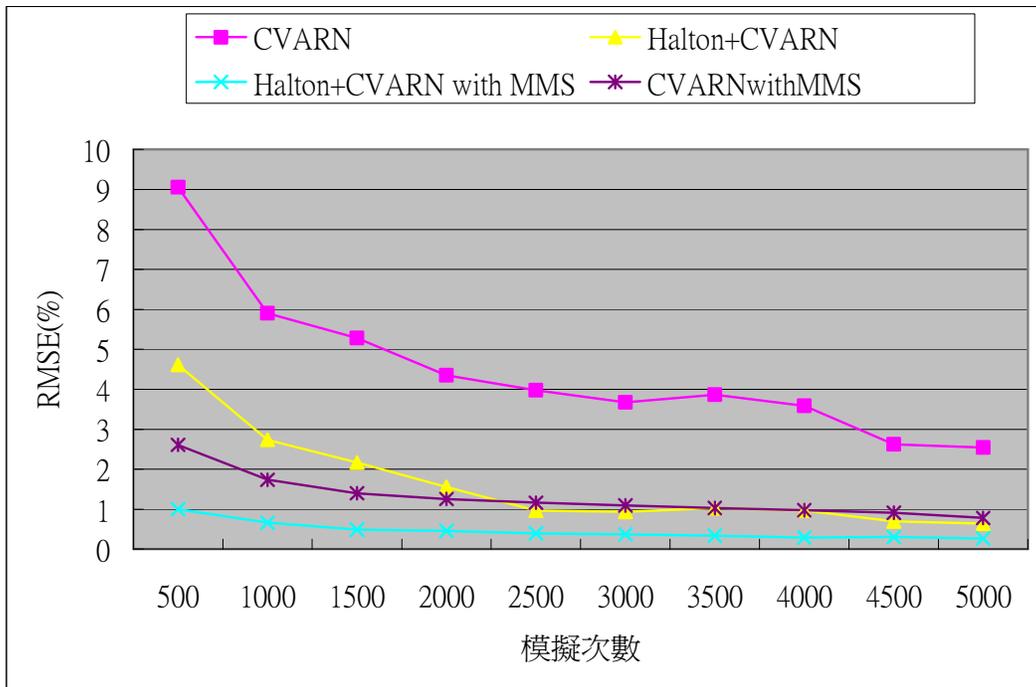


圖 5.20 控制變異結合反向亂數變異法 (CVARN) 之 Monte Carlo

5.3各降低變異法模擬結果比較

現在針對一個月契約，履約價 7000 的模擬結果來比較。

第一，先看傳統蒙地卡羅模擬法的均方根誤差。如圖 5.21 及圖 5.22 所示，使用傳統蒙地卡羅模擬法只模擬至 5000 次時，發現均方根誤差從 15.88% 下降到 3.76%，效果明顯不好，於是增加模擬次數至 50000 次，發現均方根誤差大概只能下降到 1.44%，倘若再繼續增加模擬次數似乎不能再降低均方根誤差，而且模擬 50000 次的時間大約是 4.203 秒，可見傳統蒙地卡羅模擬法效率不彰，也無需再繼續模擬下去。

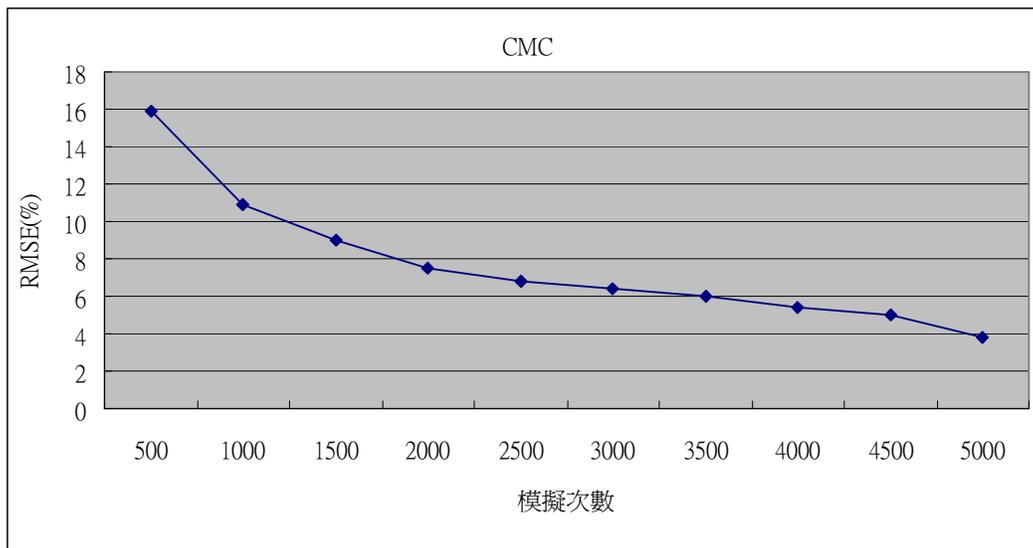


圖 5.21 傳統 Monte Carlo 模擬 5000 次的結果

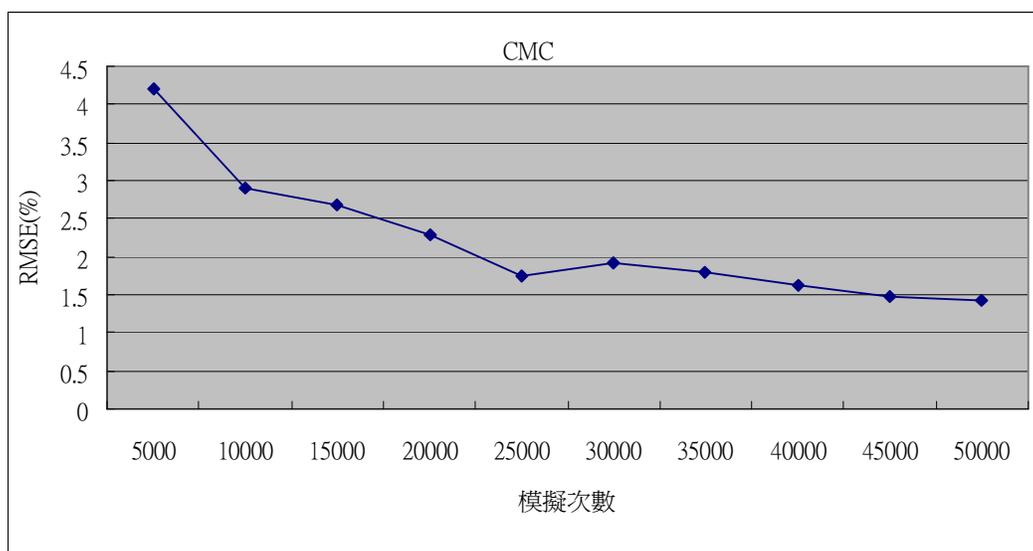


圖 5.22 傳統 Monte Carlo 模擬 50000 次的結果

第二，各個降低變異數的方法，單獨使用在傳統摩地卡羅法上，比較改善的效果。本文使用六個降低變異數的方法，每個方法單獨使用都可以有效降低傳統蒙地卡羅法的變異數，從圖 5.23 其中 ARN、CV、ARNCV、CVARN 降低變異數的程度差異不大，均方根誤差大概從 5%~6% 一路降低至 1% 左右，但是以 Halton Sequences 取代隨機數，與動差配適模擬法(MMS)這兩種方法，明顯有效降低均方根誤差從 2%~3% 左右降至 1% 以下，比其他四種方法改善的效果顯著。所以倘若在只能使用一種降低變異數的方法限制之下，選取以 Halton Sequences 取代隨機數或動差配適模擬法 (MMS) 是最好的選擇。

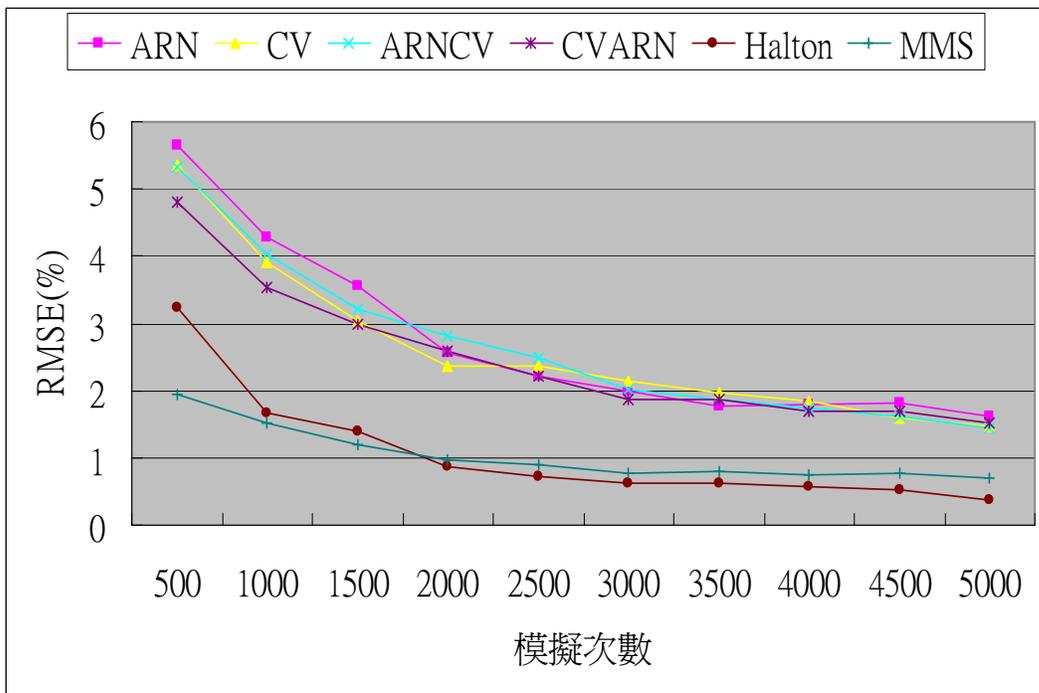


圖 5.23 單獨使用六個降低變異數的方法

第三，動差配適模擬法 (MMS) 搭配其他五種降低變異數的方法比較。如圖 5.24，此時較能明顯看出每個方法的差異，而且發現與動差配適模擬法 (MMS) 搭配降低均方根誤差的效果更佳，進行 500 次模擬時，均方根誤差就已小於 2%，當模擬次數達 5000 次時，均方根誤差以降低至 0.5% 上下，效果相當好。其中以 Halton Sequences 取代隨機數，與動差配適模擬法 (MMS) 的結合，是五種搭配表現最佳的，模擬 500 次時，均方根誤

差只有 0.69%，模擬 5000 次時，更降低誤差至 0.24%。因此，欲作最簡便降低變異，以改善傳統蒙地卡羅模擬法的方法，以 Halton Sequences 取代隨機數，與動差配適模擬法（MMS）的搭配為優先選擇。

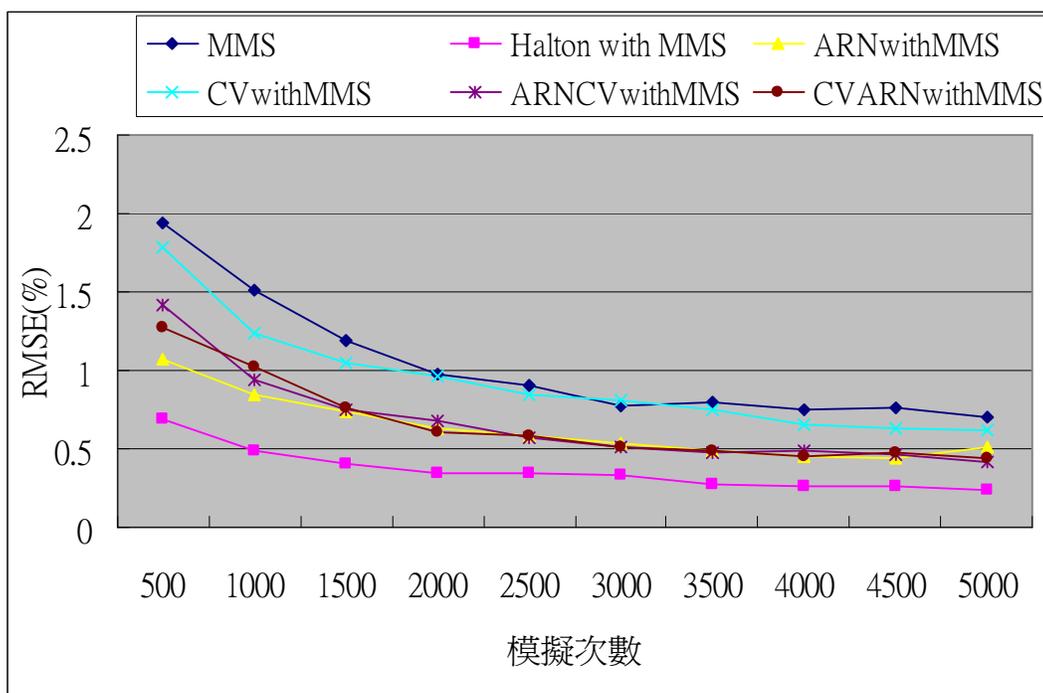


圖 5.24 動差配適模擬法（MMS）搭配其他五種降低變異數的方法比較

第四，以 Halton Sequences 取代隨機數，搭配其他五種降低變異數的方法比較。如圖 5.25，發現用 Halton Sequences 取代隨機數去搭配其他降低變異數方法的效果沒有用動差配適模擬法（MMS）來得好，均方根誤差大致只能從 3% 左右開始下降，其中最佳的方法比圖 5.24 更能看出以 Halton Sequences 取代隨機數，與動差配適模擬法（MMS）的搭配是最好的，而其他的搭配方式與單獨使用 Halton Sequences 取代隨機數的效果差異不大，因此更能肯定由圖 5.24 所看出的結論，也就是說，欲改善傳統蒙地卡羅模擬法的變異數，最簡便的方法就是以 Halton Sequences 取代隨機數，與動差配適模擬法（MMS）的搭配。

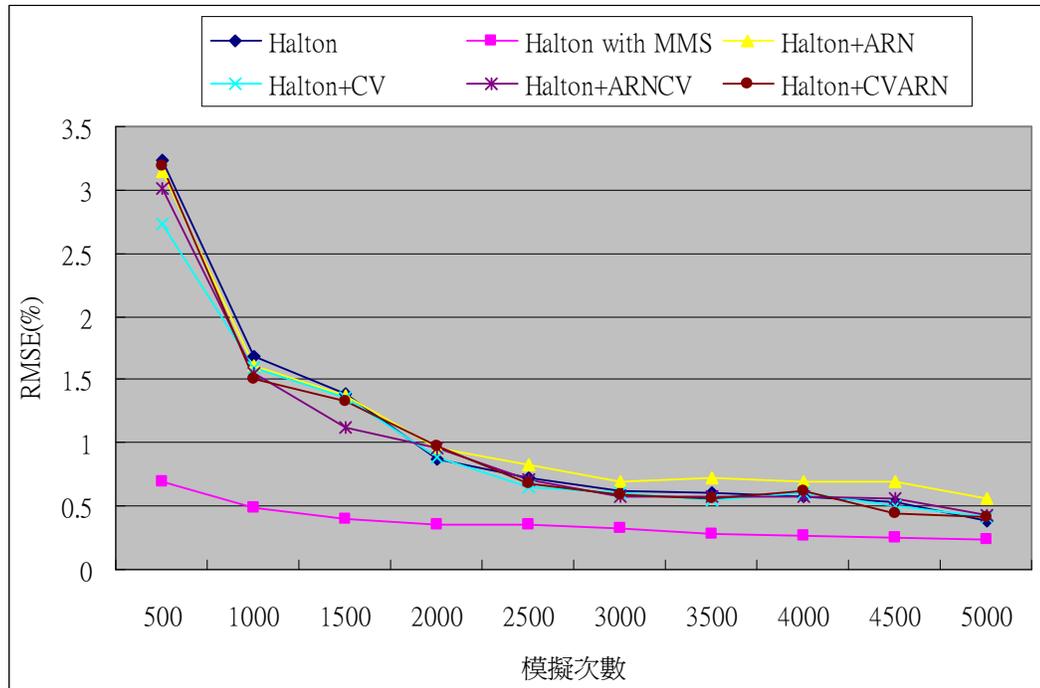


圖 5.25 以 Halton Sequences 取代隨機數搭配其他五種降低變異數方法比較

第五，以 Halton Sequences 取代隨機數與動差配適模擬法（MMS）的搭配，再加上其他四種降低變異數的方法比較。如圖 5.26 得知，此結果差異不大，均方根誤差從 0.5%~0.7% 降至 0.2% 左右，再跟圖 5.24 與圖 5.25 比較，顯示以 Halton Sequences 取代隨機數與動差配適模擬法（MMS）的搭配，再加上其他降低變異數的方法比兩者分開搭配其他降低變異法的效果還差，因此這樣的方法不是最簡易的。

第六，圖 5.27 與圖 5.28 顯示各個方法變異數的變化。圖 5.27 是傳統蒙地卡羅模擬法所得的變異數，相當大。圖 5.28 是六種降低變異數法的變異數，變異數較小的是以 Halton Sequences 取代隨機數和動差配適模擬法（MMS）。

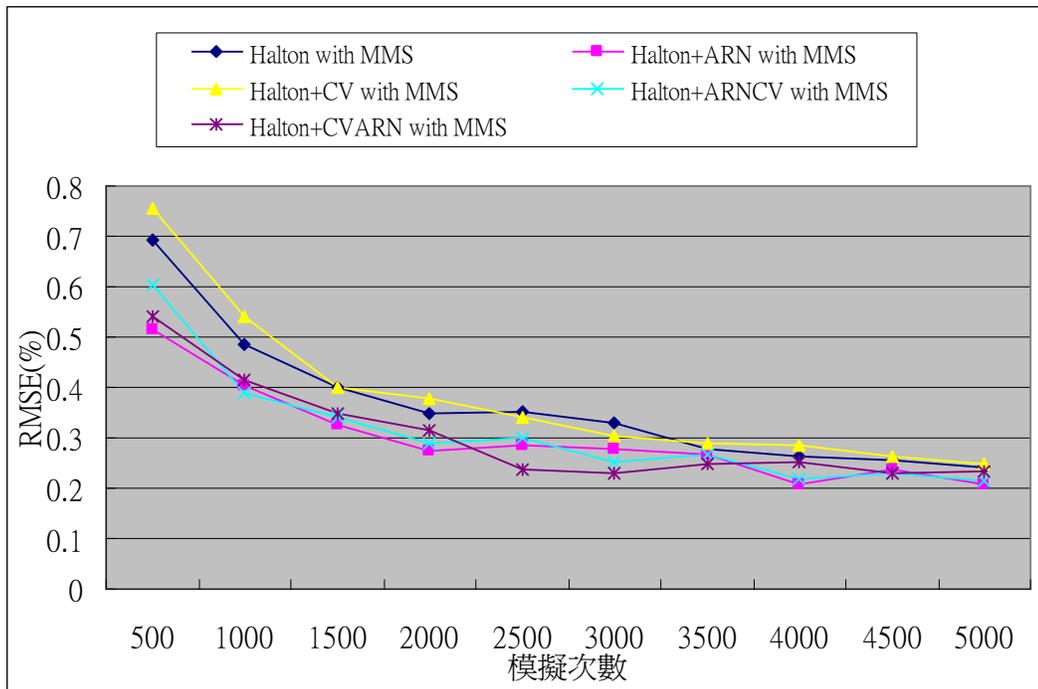


圖 5.26 以 Halton Sequences 取代隨機數與動差配適模擬法 (MMS) 的搭配，再加上其他四種降低變異數的方法比較

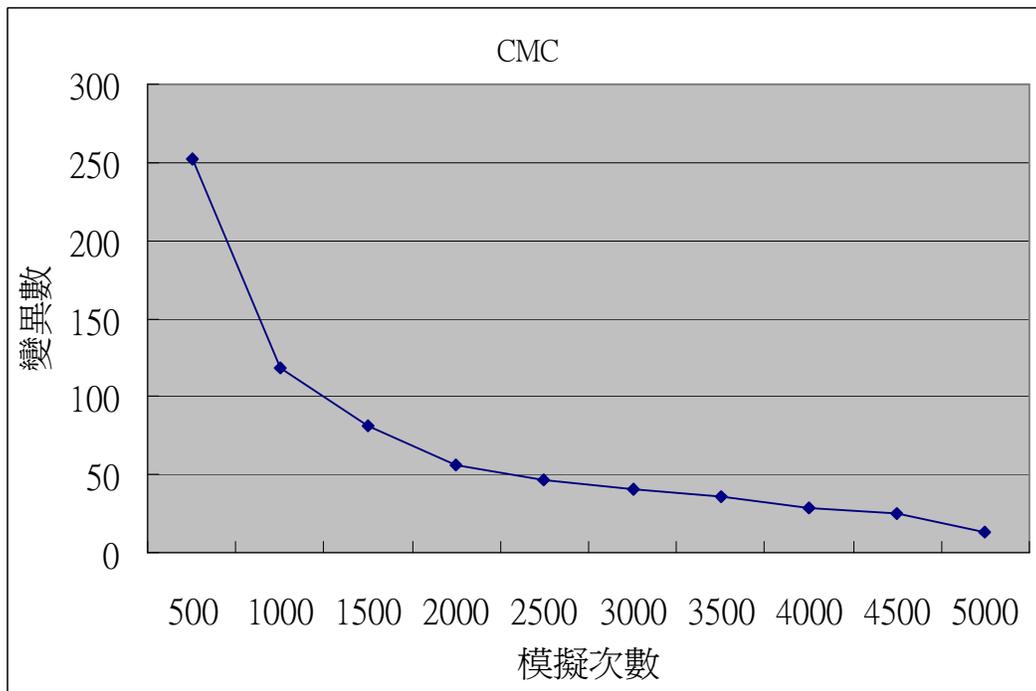


圖 5.27 傳統蒙地卡羅的變異數

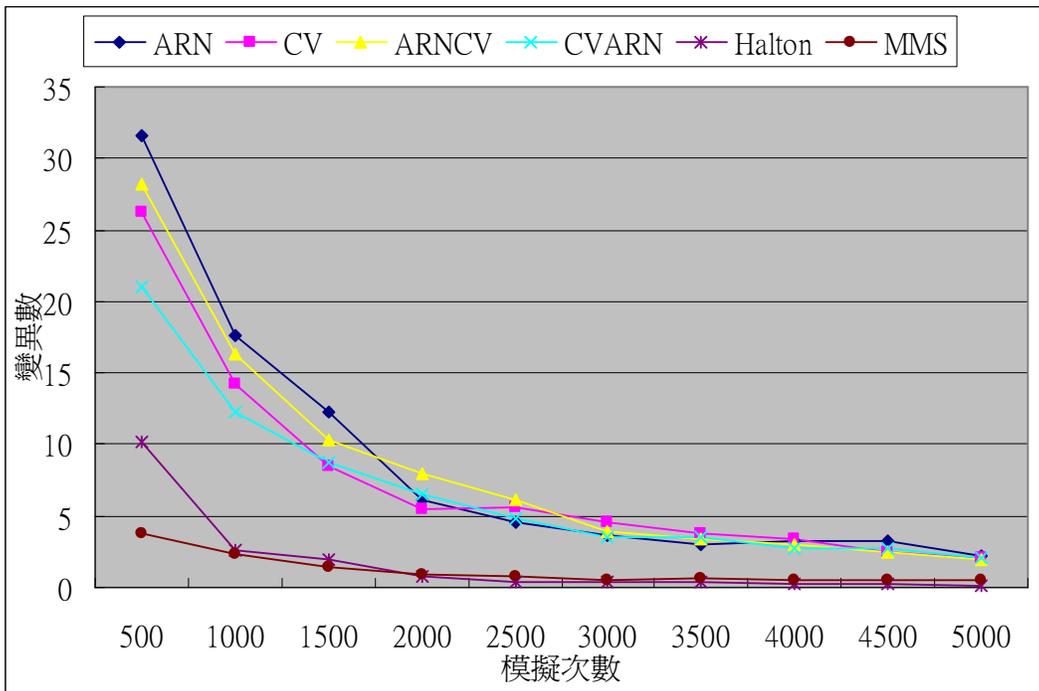


圖 5.28 六種降低變異數方法的變異數

最後，我們換用契約一個月履約價 7200 來比較。圖 5.29 是傳統蒙地卡羅模擬法與以 Halton Sequences 取代隨機數與動差配適模擬法 (MMS) 的改善搭配比較，後者大幅改善傳統蒙地卡羅法的變異數，是最簡易的方式。

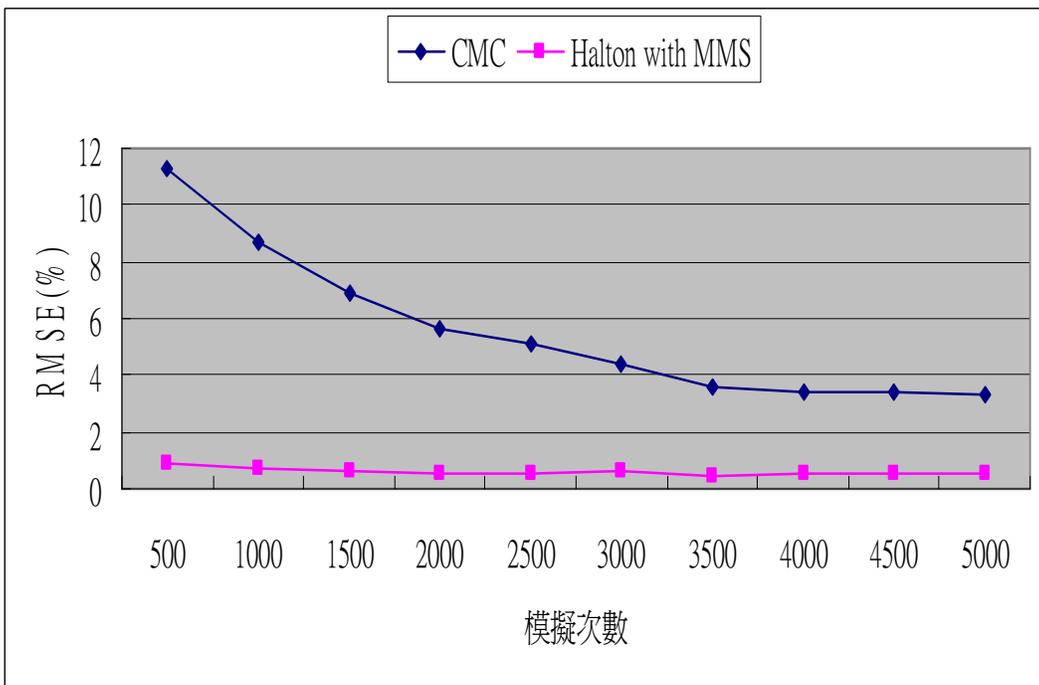


圖 5.29 傳統蒙地卡羅模擬法與最簡易降低變異數方法的比較

第六章 結論

利率衍生性商品的定價模型遠較一般股權衍生性商品複雜，而且並非所有的衍生性商品都有封閉解，事實上大部分的新金融商品由於牽涉多種資產、不同幣別或是路徑相依等特性，使得封閉解不存在，因此發展出數值分析方法，透過模擬或是分析來找出商品的理論價值。因為金融衍生性商品的多樣性，而相對地有許多不同的定價公式，一旦某些假設得不到滿足，使得公式的運用產生誤差。本文從金融衍生性商品的典型代表所具有的普遍性出發，在 Black-Scholes 定價模型的基礎上，運用數值分析方法，給出選擇權估計值的數值解，為選擇權定價提供了一個較為合理、準確的估值方法。

本文選擇以 Black-Scholes 模型為基礎進行蒙地卡羅模擬法，探討搭配各種降低變異數的方法：使用 Halton Sequences 取代隨機數、動差配適模擬法 (MMS)、反向亂數變異法 (ARN)、控制變異法 (CV)、反向亂數結合控制變異法 (ARNCV)、控制變異結合反向亂數變異法 (CVARN) 等六種，並相互搭配，共使用 20 種不同搭配降低變異法來改善傳統蒙地卡羅法。最後以臺指選擇權為模擬對象，針對一個月契約，履約價 7000 的模擬結果做最後的統整，以期找出使用蒙地卡羅模擬的最佳方法。

根據第五章發現模擬次數不需要過多，在 5000 次以內就可以比較出明顯的差異，也就是只要使用任何一種降低變異數的方法，便有效改善傳統蒙地卡羅模擬法的效果。更進一步使用 Halton Sequences 取代隨機數，並搭配降低變異數法進行模擬，更可有效降低誤差，只要大約模擬近 2500 次時，均方根誤差已趨近於模擬到 5000 次的結果了。而且發現最簡便降低變異，以改善傳統蒙地卡羅模擬法的方法，就是以 Halton Sequences 取代隨機數，與動差配適模擬法 (MMS) 的搭配為優先選擇。

另外，以下列出傳統蒙地卡羅模擬法、使用 Halton Sequences 取代隨機數及動差配適模擬法 (MMS) 模擬的大約時間比較表。在強調降低誤差的情況下，還是不能遺忘模擬時間長短的重要性。傳統蒙地卡羅模擬法模擬 50000 次，時間大約是 4.203 秒，而均方根誤差大概只能下降到 1.44%，倘若再繼續增加模擬次數似乎不能再降低均方根誤差。但一使用動差配適模擬法 (MMS) 只需 0.062 秒，均方根誤差便小於 2% 以下，且以 Halton Sequences 取代隨機數，與動差配適模擬法 (MMS) 搭配模擬的時間也只

需 0.406 秒。

表 6.1 傳統蒙地卡羅法及動差配適模擬法之模擬時間

RMSE ACCURACY	<2%	<1.5%
CMC	2.047 sec	3.688 sec
CMC with MMS	0.062 sec	0.125 sec

表 6.2 以 Halton Sequences 取代隨機數及動差配適模擬法之模擬時間

RMSE ACCURACY	<2%	<1.5%	<1%	0.5%
Halton	1.172 sec	1.906 sec	2.453 sec	5.609 sec
Halton & MMS	0.406 sec	0.578 sec	1.360 sec	5.172 sec

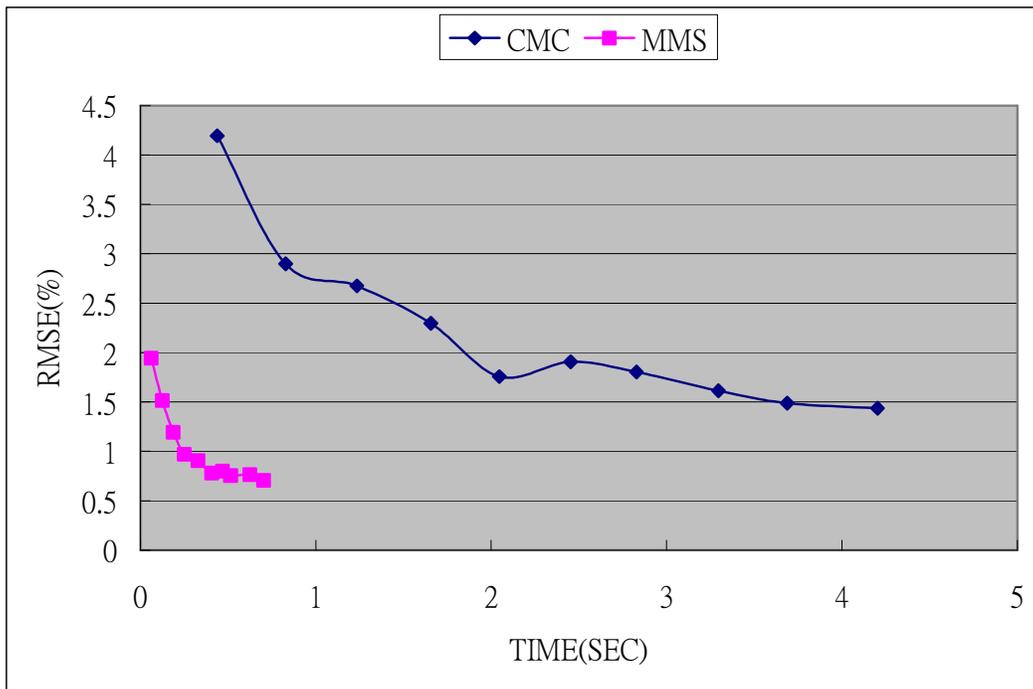


圖 6.1 傳統蒙地卡羅法及動差配適模擬法之模擬時間

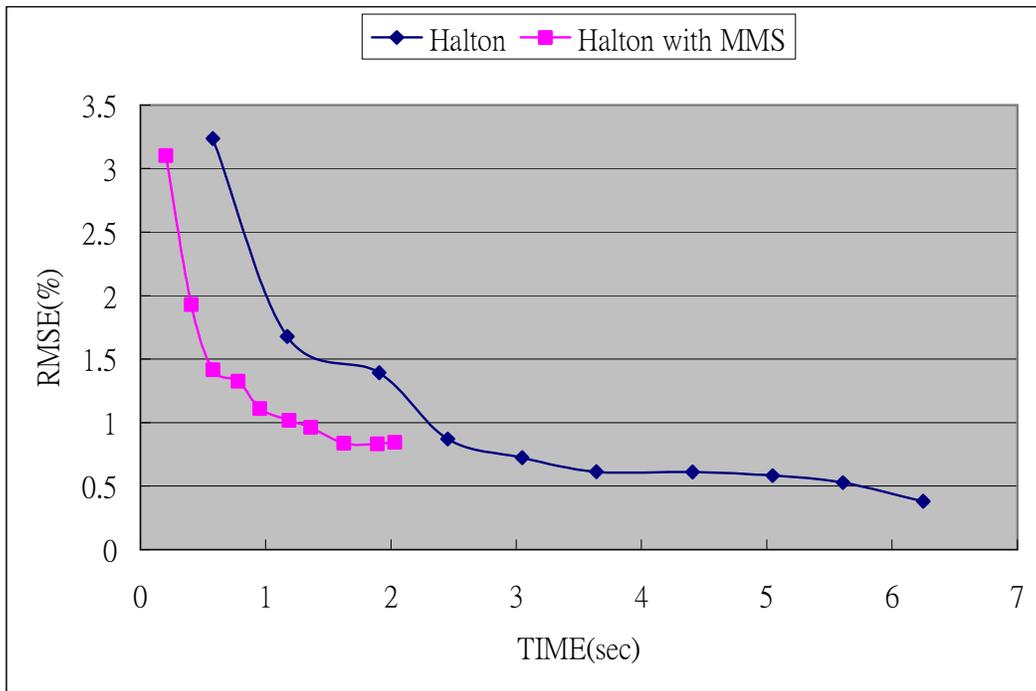


圖 6. 2. 1 以 Halton Sequences 取代隨機數及動差配適模擬法之模擬時間

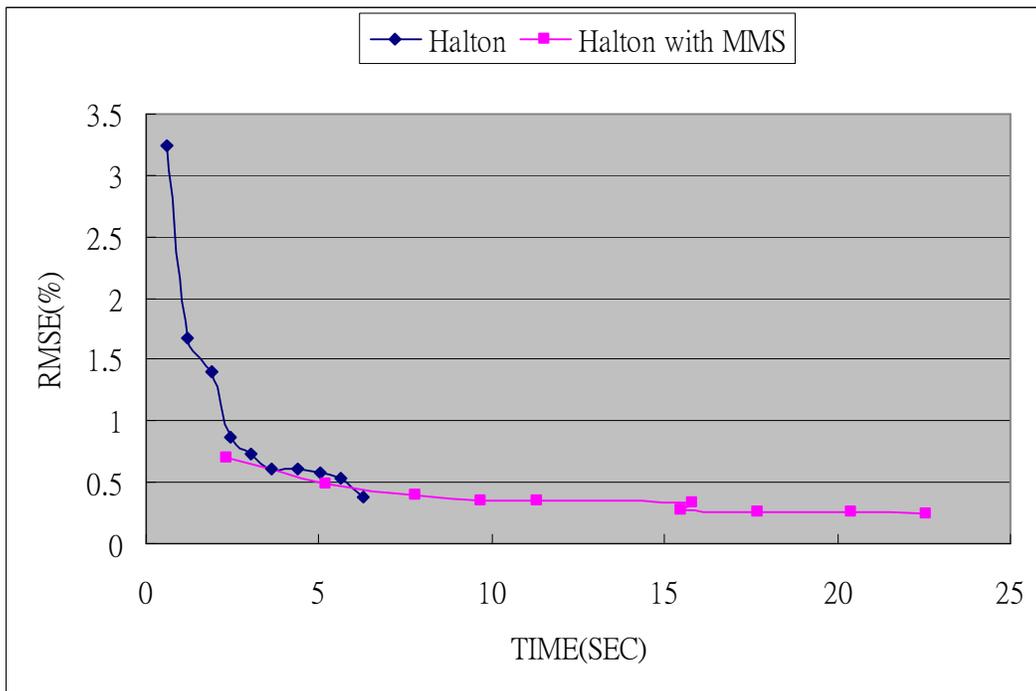


圖 6. 2. 2 以 Halton Sequences 取代隨機數及動差配適模擬法之模擬時間

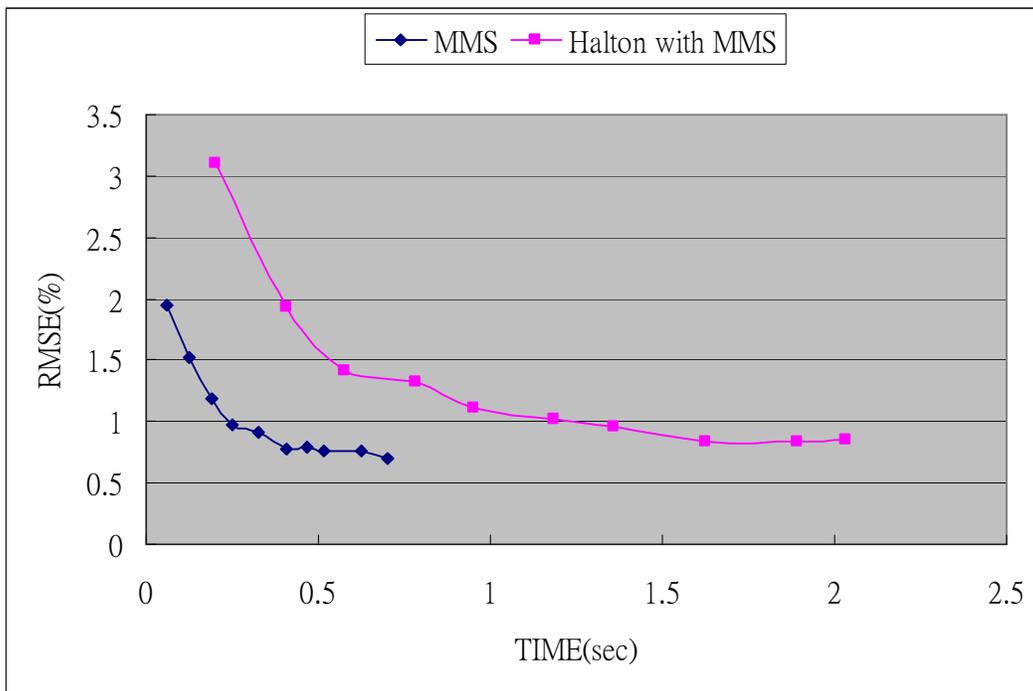


圖 6. 2. 3 以 Halton Sequences 取代隨機數及動差配適模擬法之模擬時間

本論文尚有許多需要加强的地方，最後提供幾點供後續研究者進一步探討。第一，本文之波動性及無風險利率假定為一常數，若能將兩者之數值更貼近實際狀況，相信有更好的效果；第二，更好的隨機數選擇；第三，加以使用現今投資者的技術分析，並延伸模擬出長期的趨勢等，以期蒙地卡羅模擬法能更有效應用在選擇權評價上。

附錄

一、2006/05/15~2006/06/15 (履約價 7000) 模擬結果				
RMSE(%)	CMC	Halton	Halton with MMS	MMS
500	15.879608	3.236256	0.693133	1.943108
1000	10.872039	1.677962	0.486611	1.514958
1500	9.044933	1.392727	0.401688	1.193769
2000	7.486207	0.871234	0.347625	0.970875
2500	6.822654	0.723302	0.350528	0.906773
3000	6.409464	0.613456	0.327907	0.779107
3500	6.002010	0.610916	0.276346	0.798616
4000	5.383888	0.582139	0.261322	0.754351
4500	5.046622	0.526725	0.257135	0.763331
5000	3.762882	0.380014	0.239816	0.707010
RMSE(%)	ARN	Halton+ARN	Halton+ARN with MMS	ARN with MMS
500	5.657342	3.139860	0.516010	1.074990
1000	4.275080	1.615731	0.403238	0.843151
1500	3.568366	1.369519	0.324592	0.739916
2000	2.568222	0.961669	0.274142	0.625617
2500	2.207197	0.832631	0.285300	0.583770
3000	1.983574	0.691975	0.276066	0.538838
3500	1.772724	0.721286	0.267307	0.489627
4000	1.801706	0.700774	0.209117	0.455483
4500	1.805217	0.695707	0.238131	0.442248
5000	1.617447	0.562081	0.205685	0.508165

RMSE(%)	CV	Halton+CV	Halton+CV with MMS	CV with MMS
500	5.343167	2.736373	0.756717	1.779791
1000	3.907820	1.602283	0.539950	1.233875
1500	3.049610	1.362693	0.399547	1.047039
2000	2.373372	0.878754	0.377494	0.965035
2500	2.360503	0.649801	0.341517	0.839523
3000	2.129434	0.608172	0.302110	0.814856
3500	1.955265	0.542603	0.287654	0.745585
4000	1.842193	0.605150	0.285264	0.655245
4500	1.597820	0.495361	0.261144	0.633183
5000	1.460707	0.417876	0.248214	0.615542
RMSE(%)	ARNCV	Halton+ARNCV	Halton+ARNCV with MMS	ARNCV with MMS
500	5.319538	3.011271	0.602739	1.413230
1000	4.040423	1.544947	0.387592	0.938936
1500	3.216813	1.128646	0.338976	0.744572
2000	2.818943	0.952925	0.289648	0.675145
2500	2.481377	0.716110	0.301308	0.572195
3000	2.019500	0.583118	0.250802	0.513899
3500	1.868917	0.578233	0.266684	0.473694
4000	1.737787	0.569414	0.218931	0.485413
4500	1.611426	0.56227	0.229667	0.458818
5000	1.447775	0.423542	0.216266	0.419755

RMSE(%)	CVARN	Halton+CVARN	Halton+CVARN with MMS	CVARN with MMS
500	4.814126	3.197209	0.541487	1.274506
1000	3.543123	1.507661	0.416446	1.020406
1500	2.984113	1.330636	0.349611	0.757792
2000	2.594674	0.981066	0.315589	0.603644
2500	2.211067	0.672532	0.235396	0.578748
3000	1.867665	0.590631	0.229539	0.511882
3500	1.870019	0.561191	0.247674	0.489247
4000	1.680589	0.616607	0.253669	0.449800
4500	1.699633	0.443979	0.228004	0.470971
5000	1.525365	0.407339	0.234265	0.439593

二、2006/05/15~2006/06/15 (履約價 7200) 模擬結果

RMSE(%)	CMC	Halton	Halton with MMS	MMS
500	11.301980	7.559190	0.897042	1.986896
1000	8.682559	3.030048	0.708673	1.514993
1500	6.854088	3.376194	0.586691	1.248533
2000	5.677855	2.132069	0.550697	1.143689
2500	5.100853	2.643170	0.551962	0.962998
3000	4.421852	2.178176	0.594327	0.907718
3500	3.587744	1.974999	0.485319	0.818687
4000	3.432317	2.063862	0.564833	0.788996
4500	3.398147	1.943500	0.513863	0.757365
5000	3.290299	1.646578	0.518260	0.796835

RMSE(%)	ARN	Halton+ARN	Halton+ARN with MMS	ARN with MMS
500	6.056183	3.362208	0.803203	1.922711
1000	4.086305	1.770397	0.620274	1.620504
1500	3.183020	1.568645	0.507390	1.347313
2000	2.975218	1.119743	0.476994	1.169671
2500	2.537392	0.830562	0.495440	1.040930
3000	2.114689	0.746918	0.459222	0.981056
3500	1.926208	0.784476	0.432044	0.914708
4000	2.093133	0.756957	0.436874	0.771658
4500	2.080372	0.671356	0.418197	0.784247
5000	1.872752	0.653089	0.427222	0.724300
RMSE(%)	CV	Halton+CV	Halton+CV with MMS	CV with MMS
500	5.797260	3.713329	0.794845	2.185757
1000	3.834227	1.868600	0.705649	1.541586
1500	3.310866	1.585464	0.635965	1.378089
2000	2.721190	1.127086	0.632320	1.158667
2500	2.454520	0.851210	0.594116	1.018469
3000	2.263290	0.715700	0.594116	0.945761
3500	2.236356	0.801147	0.548946	0.735654
4000	2.120757	0.728249	0.526893	0.725472
4500	2.001970	0.710452	0.559690	0.859254
5000	1.869996	0.624434	0.522746	0.804441

RMSE(%)	ARNCV	Halton+ARNCV	Halton+ARNCV with MMS	ARNCV with MMS
500	6.068502	3.600610	0.741303	2.048973
1000	4.080041	2.028141	0.589472	1.483162
1500	3.338142	1.676051	0.561032	1.212375
2000	2.877663	1.176207	0.461735	1.070022
2500	2.369153	0.789384	0.488136	0.999343
3000	2.339217	0.703602	0.438719	0.988019
3500	2.151615	0.663280	0.439521	0.942124
4000	2.004225	0.836964	0.467276	0.728435
4500	1.912281	0.628807	0.423345	0.703094
5000	1.733312	0.596693	0.422166	0.771408
RMSE(%)	CVARN	Halton+CVARN	Halton+CVARN with MMS	CVARN with MMS
500	5.440783	3.463001	0.763917	1.560153
1000	4.222773	1.907610	0.632674	1.297022
1500	3.496411	1.401139	0.491171	1.163501
2000	3.065468	1.088282	0.454015	0.995759
2500	2.793434	0.868773	0.489701	0.872428
3000	2.598244	0.818719	0.456336	0.835685
3500	1.993024	0.757424	0.422819	0.793379
4000	2.020245	0.745372	0.416985	0.842204
4500	1.961978	0.750815	0.425761	0.808965
5000	1.867254	0.617666	0.448833	0.751396

三、2006/05/18~2006/08/17 (履約價 7000) 模擬結果

RMSE(%)	CMC	Halton	Halton with MMS	MMS
500	20.385200	15.105480	2.986681	4.026490
1000	15.487480	5.094432	2.679409	3.602041
1500	11.871660	7.014198	2.555218	3.250832
2000	8.796685	4.127503	2.680035	3.215701
2500	8.481301	4.656747	2.557833	3.087743
3000	7.751254	4.649859	2.605165	2.979297
3500	7.160066	4.342587	2.559721	2.994011
4000	8.773727	3.844889	2.599810	2.930277
4500	7.992004	3.705657	2.547877	2.789245
5000	7.727867	3.696852	2.597533	2.792776
RMSE(%)	ARN	Halton+ARN	Halton+ARN with MMS	ARN with MMS
500	10.681990	5.989323	3.008300	3.924006
1000	7.997203	4.021811	2.591878	3.359864
1500	5.723788	3.973532	2.605606	3.130760
2000	5.162668	3.372897	2.524999	2.919729
2500	4.898856	2.949630	2.575465	2.936156
3000	4.152246	2.870016	2.624506	2.936385
3500	4.001870	2.892659	2.552340	3.082789
4000	3.861045	2.978992	2.571151	3.029960
4500	4.402726	2.838795	2.549286	2.915099
5000	4.270370	2.791015	2.545332	2.875146

RMSE(%)	CV	Halton+CV	Halton+CV with MMS	CV with MMS
500	8.266884	6.278221	2.701873	4.165284
1000	6.831052	3.977046	2.628948	3.255484
1500	5.935769	3.348632	2.596709	3.222160
2000	4.795846	3.071946	2.612199	3.085200
2500	4.862033	2.941986	2.582313	2.943969
3000	4.363513	2.924328	2.553861	2.918495
3500	4.605801	2.877001	2.598595	2.999757
4000	4.487690	2.951373	2.533007	3.014703
4500	4.217712	2.876958	2.625766	2.947895
5000	3.78509	2.740297	2.551587	2.843169
RMSE(%)	ARNCV	Halton+ARNCV	Halton+ARNCV with MMS	ARNCV with MMS
500	10.11368	6.572385	2.829897	4.225829
1000	6.719779	4.283596	2.615718	3.283318
1500	5.898124	3.738395	2.656882	3.134590
2000	5.522568	3.208553	2.591962	3.096274
2500	4.261968	2.985310	2.606562	2.982850
3000	4.110524	2.867169	2.558292	2.895402
3500	4.020730	2.711329	2.585860	2.848462
4000	4.646103	2.886877	2.595466	2.863729
4500	4.462480	2.891379	2.557531	2.891646
5000	4.394676	2.732450	2.519813	2.855692

RMSE(%)	CVARN	Halton+CVARN	Halton+CVARN with MMS	CVARN with MMS
500	10.600470	6.256900	2.652034	4.144957
1000	6.720580	3.569304	2.634525	3.688809
1500	5.380393	3.675808	2.559495	3.405371
2000	4.898156	3.076043	2.679100	3.097824
2500	5.062067	3.004075	2.531574	3.038980
3000	4.478502	2.845502	2.544583	2.957868
3500	4.252764	2.974062	2.599456	2.854036
4000	4.284116	2.903962	2.547161	2.761704
4500	4.032792	2.962756	2.484189	2.823819
5000	3.931777	2.809446	2.538243	2.725542

四、2006/05/18~2006/08/17 (履約價 7200) 模擬結果

RMSE(%)	CMC	Halton	Halton with MMS	MMS
500	14.121370	11.185650	1.237117	3.432033
1000	11.627960	4.894643	0.924870	2.269704
1500	9.468276	4.586801	0.833631	1.800803
2000	8.258906	3.779535	0.765357	1.572340
2500	7.275890	3.736242	0.734529	1.421753
3000	6.432120	3.297498	0.755210	1.412180
3500	5.822111	3.310377	0.645539	1.321064
4000	5.521008	3.178231	0.640416	1.169668
4500	5.403727	2.876979	0.615391	1.171554
5000	4.744123	2.673697	0.681541	1.093672

RMSE(%)	ARN	Halton+ARN	Halton+ARN with MMS	ARN with MMS
500	9.139825	5.218214	1.027846	2.296048
1000	6.180545	3.162860	0.700274	1.878000
1500	5.509900	2.485592	0.506780	1.627441
2000	4.927717	1.748501	0.507687	1.409745
2500	4.172287	1.047338	0.383753	1.156361
3000	3.880667	1.073357	0.352879	1.069867
3500	3.544719	0.979595	0.336779	0.985916
4000	3.200464	0.929157	0.322083	1.041779
4500	3.143476	0.813034	0.279914	0.824867
5000	2.788039	0.646355	0.275710	0.797696
RMSE(%)	CV	Halton+CV	Halton+CV with MMS	CV with MMS
500	8.962556	5.618702	1.188432	3.925336
1000	5.402868	2.914467	0.836017	2.630055
1500	4.602324	2.465841	0.820722	2.093232
2000	4.925910	1.858693	0.741604	1.880813
2500	4.252872	1.149524	0.749543	1.544780
3000	3.557886	0.992119	0.677992	1.409589
3500	3.249597	1.226707	0.661986	1.265315
4000	3.195625	1.183607	0.651558	1.380563
4500	2.942715	0.841456	0.639308	1.273281
5000	2.740859	0.746542	0.688098	1.005958

RMSE(%)	ARNCV	Halton+ARNCV	Halton+ARNCV with MMS	ARNCV with MMS
500	10.443140	4.868959	0.940725	2.329688
1000	6.562053	2.947829	0.686587	1.831488
1500	5.452414	2.439833	0.492177	1.669114
2000	4.893853	1.540610	0.493870	1.409816
2500	4.402801	1.054938	0.405248	1.280930
3000	4.021686	1.020043	0.371370	0.990777
3500	3.466893	0.892185	0.337010	0.948487
4000	3.105586	0.969454	0.308252	0.868086
4500	2.786605	0.813356	0.261869	0.794247
5000	2.784933	0.706612	0.316971	0.821423
RMSE(%)	CVARN	Halton+CVARN	Halton+CVARN with MMS	CVARN with MMS
500	9.056727	4.610251	1.001469	2.608655
1000	5.900741	2.738177	0.663604	1.734833
1500	5.278770	2.164290	0.488285	1.398152
2000	4.351125	1.558479	0.456906	1.256133
2500	3.979783	0.966800	0.391170	1.163174
3000	3.675369	0.929377	0.371082	1.094364
3500	3.862121	1.028164	0.338156	1.032499
4000	3.585482	0.964374	0.292712	0.97447
4500	2.623271	0.696670	0.301847	0.911388
5000	2.545359	0.638627	0.269480	0.781135

參考文獻

- [1]F. Black and M. Scholes, “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” Journal of Political Economics, 81, 637–659, 1973.
- [2]Phelim P. Boyle, “Options : A Monte Carlo Approach,” Journal of Financial Economics, 4, 323–338, 1997.
- [3]Don L. McLeish., Monte Carlo Simulation and Finance, John Wile & Sons, Inc. , Hoboken NJ, 2005.
- [4]Harald, Niederreiter, Random number generation and quasi-Monte Carlo methods, Philadelphia, 1992.
- [5]I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [6]Niederreiter Harald, Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing, Springer, New York, 2002.
- [7]Paolo Brandimarte, Numerical Methods in Finance : A MATLAB-Based Introduction, Wiley-Interscience, New York, 2002.
- [8]Paul Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer, NewYork, 2003.
- [9]Reuven Y. Rubinstein, Simulation and the Monte Carlo Method, New York, 1981.
- [10]Thomas N. Herzog, Graham Lord, Applications of Monte Carlo Methods to Finance and Insurance, Winsted, Conn. 2002.
- [11]Fang-Bo Yeh, Financial Engineering : Theory and Applications, National ChiaoTung University Department of Applied Mathematics, Lecture Note of Introduction to Financial Mathematics, 2000.
- [12]Fang-Bo Yeh, National ChiaoTung University Department of Applied Mathematics, Lecture Note of Introduction to Financial Mathematics, 2002.
- [13]Fang-Bo Yeh, Tunghai University EMBA, Lecture Note of Financial Engineering, 2003.

- [14] 蔡兆鈞，降低變異數之蒙地卡羅模擬法：運用於臺指選擇權評價之比較，碩士論文，東海大學數學系研究所，2006.
- [15] 謝駿璋，臺積電、臺股指數歐式買權之 Quasi-Monte Carlo 模擬，碩士論文，東海大學數學系研究所，2006.