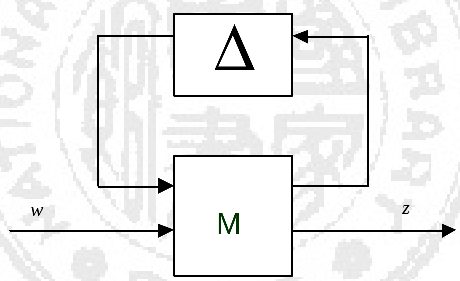
1.前言

1.1 m-設計理論

當我們在設控制系統時，最關切的問題就是受控系統是否達到強韌穩定(robust statbility)和強韌性能(robust performance)的要求。針對系統的不確定性，一般歸類成兩種型態來設計控制器：非結構型(unstructure)與結構型(structure)，我們藉由 H^{∞}-norm 和 Nevanlinna-P ick插值理論來解決非結構型的不確定系統，但所獲得的強韌穩定性能卻是較保守的。但對結構型不確定系統，則是使用 m-設計理論來完成。有關 m-設計理論說明如下。

考慮結構型不確定系統，設 G 為一般廣義系統，Δ 為其結構化不確定，控制器 K，其中 K 為未知待設計，G 和 K 之閉迴路(closed loop)設為 M，w 為外界干擾訊號，z 為誤差控制訊號。其圖如下



假若我們把所有不確定因子收集在一起，在固定 $w \in \square$ 之情形下，

$M(jw) \in M_n(\square)$，**定義結構化不確定系統** $X_{\Delta} \subset M_n(\square)$，**表示為**

$$X_{\Delta}=\left\{\begin{bmatrix} d_1 I_{r_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_s I_{r_s} & & & \\ & & & \Delta_1(jw) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \Delta_f(jw) \end{bmatrix} : d_i \in □,\ \Delta_i(jw) \in M_{n_i}(□)\right\}$$

其中d_i**代表純量不確定因素的大小，** Δ_i **表示範數有界的複變數矩陣，且**

$$\sum_{i=1}^{s} r_i + \sum_{i=1}^{f} n_i = n$$

為了找出閉迴路系統的穩定性，利用可接收最大的$\bar{s}\left(\Delta(jw)\right)$**範圍來界定，我們定義**$M(jw)$**的結構化奇異值**(structured singular value) $\left\|M(jw)\right\|_m$**如下定義：**

定義 1.1　對任意$M(jw) \in M_n(□)$**，**$M(jw)$**的結構化奇異值** $m_{\Delta}\left(M(jw)\right)$ **定義成**

$$m_{X_{\Delta}}\left(M(jw)\right) □ \frac{1}{\inf\left\{\bar{s}\left(\Delta(jw)\right) : \Delta \in X_{\Delta}, \det\left(I - M(jw)\Delta(jw)\right) = 0\right\}}.$$

若 X_{Δ} **中所有的**$\Delta(jw)$**均滿足**

$$\det\left(I - M(jw)\Delta(jw)\right) \neq 0$$

則 $m_{\Delta}\left(M(jw)\right) □ 0.$

由定義 1.1**，令** $\left\|M\right\|_m \overset{\Delta}{=} \sup_w \left\|M(jw)\right\|_m$**，稱之為** M **的** m **範數**(norm)。**令** $\left\|M\right\|_{\infty} = \sup_w m_{\Delta}\left(M(jw)\right)$**，而**$\left\|M\right\|_s = \sup_w r\left(M(jw)\right)$**，其中** $r\left(M(jw)\right)$ **為** $M(jw)$**的頻譜半徑**(spectral radius)**，** $\bar{s}\left(M(jw)\right)$**為** $M(jw)$**的最大奇異值**(maximum singular value)。**當** M **為從**$\mathrm{D} \rightarrow M_{n\times n}(□)$**之函數時，上述三個範數可相對應的定義如下：**

$$\|M\|_{\infty} = \sup_{l \in \mathrm{D}} \overline{s}\left(M\left(l\right)\right),$$
$$\|M\|_{m} = \sup_{l \in \mathrm{D}} m_{\Delta}\left(M\left(l\right)\right),$$
$$\|M\|_{s} = \sup_{l \in \mathrm{D}} r\left(M\left(l\right)\right).$$

這三種範數應滿足下列不等式：

$$\|M\|_{s} \leq \|M\|_{m} \leq \|M\|_{\infty}.$$

1.2 研究動機

當我們在探討控制系統時，系統的可控性與可觀測性是系統控制中最重要的性質。對於系統的可控性，控制輸入的能量集合中，我們希望能夠求得最小的能量控制，若能在一些特定的狀態表示法下，可控 Gramian $P(t)$ 能表為對角化矩陣，則我們便能容易的辨別出移動個別狀態分量所需的個別能量多寡。同樣的對於系統的可觀測性，希望能夠求得最小的觀測能量，若可觀測 Gramian $Q(t)$ 能表為對角化矩陣，則我們便能容易的量測出各個狀態分量在最小觀測能量中所佔的比例。平衡化理論便是求出特定的座標變換，使最小控制能量的 $P(t)$ 與最小觀測能量的 $Q(t)$ 都為對角化形式，且值相等。

在 m-synthesis 理論所衍生出來的 m-Nevanlinna-Pick 插值理論中，考慮其下界的情況即所謂的 spectral Nevanlinna-Pick 插值問題。在這個問題的發展上，首推在 1999 年 Agler、Young 成功的將 Σ_2 上的插值問題簡化為 Γ_2 上的插值問題[1]。之後 Agler、Yeh 和 Young 於 2003 年提出此種插值問題之實現式[2]，並且蔡英林論文中[12]所提出當此實現式本身就即是平衡化而且對應的可控與可觀 Gramian 為單位矩陣時之必要條件為 $q = \bar{q} \in$ □，本論文就是將此實現式作平衡化更深入的討論。

2.數學預備知識

2.1 離散系統的可控性與可觀測性

2.1.1 系統的可控性(Controllability)

考慮一個差分動態方程式

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \qquad k \in \{0\} \cup N$$

系統狀態的解為

$$x(k) = f(k,0)x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} f(k,i+1)B(i)u(i)$$

其中 $f(k,0) = A(k-1)A(k-2)\cdots A(0)$

現在我們考慮一個差分動態方程式，且 A 與 B 維度相當之常數矩陣。系統

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad , \quad k \in \{0\} \cup N$$

稱為可控(controllable)或稱(A,B)為可控，其定義如下：

若對於任意起始值 $x(0)$，對給定的 $x_c \in$ □，均存在ㄧ個控制力 u 及 $k \in \{0\} \cup N$，使得 $x(k) = x_c$。

換句話說，若一個系統是狀態可控制，則系統中的每一個狀態分量 $x_i(k)$ 都能受到控制輸入 u 的影響，在任意有限間隔內到達希望的目的地。簡單而言，狀態可控制的系統隱含著控制輸入可以影響每個狀態。

不失通則性下，我們假設 $x_c = 0$，若系統為可控，則對於任意 $x(0)$，均存在 u 及 k 使得系統狀態的解為

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) = 0$$

$$= A^k[x(0)+\sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1}Bu(i)] = 0$$

或

$$-x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{-(i+1)}Bu(i) = y_c(u) \qquad (1)$$

此函數y_c**稱為可控變換。**

設函數y_c**的定義域為非空集合，亦即存在有非零函數** $u_1 \neq 0$ **滿足**（1）。**將**（1）**式兩邊乘以使**$x^T x(0)$**成立的**x**，對任意的** u_1**函數而言有下列關係**

$$-x^T x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} x^T A^{-i-1}Bu_1(i) = 0$$

亦即

$$x^T A^{-i-1}B = 0$$

又根據$Cayley-Hamilton$**定理，** A^{-i-1}**可寫成：**

$$A^{-i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(i)A^j$$

可得

$$x^T \sum_{j=0}^{n-1} a_j(i)A^j B = 0$$

則

$$x^T\left[B, AB, \cdots, A^{n-1}B\right]\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = 0 \qquad (2)$$

但由於當 $x(0)$ **為任意實數，而且對任意**$x \in R^n$**均使關係式**

$$-x^T x_0 = 0$$

成立之 x 必為

$$x \equiv 0$$

於（2）式中， $x=0$ 之充要條件為矩陣 $\left[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B\right]$ 為全秩，

亦即

$$\operatorname{rank}\left[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B\right] = n$$

定理 2.1[11] **下面的敘述為同義：**

(a)（A,B）是可控。

(b) $\operatorname{rank}\left[B, AB, A^2B, \ldots., A^{n-1}B\right] = n$ 。

(c) 若 $x^T A^{-i-1} B = 0$ **，則** $x=0$。

(d) $P(k) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1} BB^T (A^{-i-1})^T$ **為嚴格正定(strictly positive define , SPD) 矩陣。**

證明：敘述(a)(b)(c)已討論如上，因此只證明敘述(c)與(d)同義即可。因為

$$x^T P(k) x = \sum_{i=0}^{k-1} x^T A^{-i-1} BB^T (A^{-i-1})^T x = \sum_{i=0}^{k-1} \left\| x^T A^{-i-1} B \right\|^2 \geq 0$$

知 $P(k) \geq 0$，且

$$x^T A^{-i-1} B = 0 \Rightarrow x = 0$$

之充要條件為

$$P(k)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

即 $P(k)$ 為可逆矩陣，故 $P(k)$ 為嚴格正定矩陣。 ■

令$\|u\|_2^2$表示u的能量，即

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=0}^{k-1} u(i)^T u(i) = < u, u >$$

因

$\|u_1\|_2^2 = < u_1, u_1 >$

$= < u_1 - u_* + u_*, u_1 - u_* + u_* >$

$= < u_1 - u_*, u_1 - u_* > + < u_*, u_* > + < u_1 - u_*, u_* > + < u_*, u_1 - u_* >$

$= < u_1 - u_*, u_1 - u_* > + < u_*, u_* > + 2 < u_1 - u_*, u_* >$

$= \|u_1 - u_*\|_2^2 + \|u_*\|_2^2 + 2\sum_{i=0}^{k-1} u_*(i)^T [u_1(i) - u_*(i)]$

(假設存在一個u_*使得$\sum_{i=0}^{k-1} u_*(i)^T [u_1(i) - u_*(i)] = 0$，證明由下列推述可得)

$= \|u_1 - u_*\|_2^2 + \|u_*\|_2^2$

$\geq \|u_*\|_2^2$

我們想藉由下列推導求得u_*:

由可控性的定義知當(A, B)為可控時，必存在u使

$$y_c(u) = -x(0)$$

又由於

$$y_c(u_1) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1} B u_1(i) = -x(0) \quad , \quad y_c(u_*) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1} B u_*(i) = -x(0)$$

可知

$$y_c(u_1) - y_c(u_*) = -x(0) + x(0) = \sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1} B [u_1(i) - u_*(i)] = 0$$

則我們令 $u_*(i)^T = K A^{-i-1} B$ 使得

$$\sum_{i=0}^{k-1} KA^{-i-1}B[u_1(i)-u_*(i)]=0$$

且

$$x(k)=A^k x(0)+\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu_*(i)$$

$$=A^k x(0)+\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}BB^T(A^{-i-1})^T K^T$$

$$=A^k x(0)+A^k\sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1}BB^T(A^{-i-1})^T K^T$$

$$=A^k x(0)+A^k P(k)K^T=0$$

因此 $C^T=-P(k)^{-1}x(0)$ **所以** $u_*(i)^T=KA^{-i-1}B=-x(0)P(k)^{-1}A^{-i-1}B$

則

$$u_*(i)=-B^T(A^{-i-1})^T P(k)^{-1}x(0)$$

由此可知 u_* **為滿足（1）式中最小能量控制。若令** $E^C[x(0)]$ **表示控制函數** u **能移動系統從** $x(0)$ **至** $x(k)$ **所需之控制輸入能量集合，即**

$$E^C[x(0)]=\{\|u\|_2^2 : y_c(u)=-x(0)\}$$

則

$$\min\ E^C[x(0)]=\sum_{i=0}^{k-1} u_*(i)^T u_*(i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}(-x(0)^T P(k)^{-1}A^{-i-1}B)(-B^T(A^{-i-1})^T P(k)^{-1}x(0))$$

$$=x(0)^T P(k)^{-1}[\sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1}BB^T(A^{-i-1})^T]P(k)^{-1}x(0)$$

$$=x(0)^T P(k)^{-1}x(0)$$

若能在某特定狀態表示法下， $P(k)$ **可表示成對角化的形式，並令** $s_1(k)\geq s_2(k)\geq\cdots\geq s_n(k)$ **使得**

$$P(k)=\mathrm{diag}\,(s_1(k),s_2(k),\cdots,s_n(k))$$

則

$$x(0)^T P(k)^{-1} x(0)=\frac{x_{01}^2}{s_1(k)}+\frac{x_{02}^2}{s_2(k)}+\cdots+\frac{x_{0n}^2}{s_n(k)}$$

其中 $x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n}$ 為狀態變數 x_0 的 n 個分量。當 $s_r(k)$ 很小時，則 $\frac{x_{0r}^2}{s_r(k)}$ 所代表的能量在 $\min E^C[x(0)]$ 中所佔的比重較大，也就是說將狀態分量 x_{0r} 移動到 0 需花費較大能量才能達成，所以我們可依據 s_i 之間的大小關係，去判別出移動各個狀態分量所需能量的多寡。

當 $x_c\neq 0$ 時，最小能量控制 u_* 會使得 $x(k)=x_c$ 及所對應的能量分別變為

$$u_*(k)=-B^T A^{-i-1}P(k)^{-1}(x(0)-A^{-k}x(k))$$

$$\min E^c(x(0))=(x(0)-A^{-k}x(k))^T P(k)^{-1}(x(0)-A^{-k}x(k))$$

2.1.2 系統的可觀測性(Observability)

系統

$$x(k+1)=Ax(k)$$

$$y(k)=Cx(k)$$

稱為可觀測性(observable)或稱(A,C)為可觀測之定義為：

觀察 $[0,k]$ 期間系統可以量測的信號，則可唯一決定 $x(0)$ 之值。

換句話說，若一個系統是狀態可觀測性，隱含著每個狀態都會影響某個輸出。亦即，狀態可觀察性的系統可由輸出訊號的量測而獲得起始狀態的消息。

若系統為可觀察，則因

$$x(k) = A^k x(0)$$

所以

$$y(k) = CA^k x(0)$$

又根據$Cayley-Hamilton$**定理，** A^k **可寫成：**

$$A^k = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(k) A^j$$

因此

$$y(k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(k) CA^j x(0)$$

$$= a_0(k)Cx(0) + a_1(k)CAx(0) + \cdots + a_{n-1}(k)CA^{n-1}x(0)$$

$$= [a_0(k), a_1(k), \cdots a_{n-1}(k)] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x(0)$$

由定義可知系統是狀態可觀察的充分必要條件是在任何有限間隔內，可由 $y(k)$ **決定** $x(0)$。**意指** $x(0)$ **可由** $y(k)$ **唯一決定，因此** $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ **為全秩，亦即**

$$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

採用與可控性的證明相類似的作法，可得下列之結果：

定理 2.2[11]　下面的敘述具有等價關係：

(a) (A, C) 是可觀測。

(b) $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

(c) 可觀測 $Q(k) = \sum_{i=0}^{k} (A^i)^T C^T C A^i$ 為嚴格正定矩陣。

令 $E^o(x(0))$ 表示在 $[0, k]$ 期間系統的輸出能量：

$$E^o(x(0)) = \{\|y\|_2^2 : y_o(x(0)) = y\}$$

則

$$\|y\|_2^2 = x(0)^T Q(k) x(0)$$

如同可控分析一樣，若 $Q(k)$ 可以化為對角矩陣，其對角元素為

$s_1(k) \geq s_2(k) \geq \cdots \geq s_n(k)$ ，即

$$Q(k) = \operatorname{diag}(s_1(k), s_2(k), \cdots, s_n(k))$$

則

$$E^o(x(0)) = x_{01}^2 s_1(k) + x_{02}^2 s_2(k) + \cdots + x_{0n}^2 s_n(k)$$

當 $s_r(k)$ 很小，則 $x_{0r}^2 s_r(k)$ 的能量在 $E^o(x(0))$ 中所佔的比例很小，難以量測，除非用更精密的感測儀器才行。換言之，從感應器的角度來說， $s_i(k)$ 之值可用來判別觀測狀態分量 x_{0i} 之難易程度。

2.2 平衡化理論(balanced realization)

所謂的平衡化實現便是一種狀態空間的表示法，使對應的最小控制能量中的 $P(k)$ 與對應的最小觀測能量的 $Q(k)$ 都為對角化形式，且其值相等，即

$$P(k)=Q(k)=\mathrm{diag}(s_1(k),s_2(k),\cdots s_n(k))$$

亦即

$$\begin{aligned}x(k+1)&=Ax(k)+Bu(k)\\ y(k)&=Cx(k)+Du(k)\end{aligned}$$

或者 $G(z)=\left[\begin{array}{c|c}A&B\\\hline C&D\end{array}\right](z)=Cz(I-zA)^{-1}B+D$

找到一個可逆矩陣 T，使得 $\hat{x}=Tx$ 且

$$G=\left[\begin{array}{c|c}\hat{A}&\hat{B}\\\hline \hat{C}&\hat{D}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}TAT^{-1}&TB\\\hline CT^{-1}&D\end{array}\right]$$

其中 $\hat{P}=\hat{Q}=\begin{bmatrix}s_1&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&s_n\end{bmatrix}$

令 $\left[B,AB,\cdots,A^{n-1}B\right]=c$

因此，變換後系統的可控矩陣為

$$\hat{c}=\left[TB,TAT^{-1}TB,\cdots,TA^{n-1}T^{-1}TB\right]=T\left[B,AB,\cdots,A^{n-1}B\right]=Tc$$

利用 $(\mathrm{rank}(AB)=\min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$ 且 T 為可逆矩陣)，因此 $\mathrm{rank}(\hat{c})=\mathrm{rank}(c)$

即系統的可控性不受狀態變數變換影響。

回到主題，假設 $G(z)=C(zI-A)^{-1}B+D$，A 為穩定矩陣。令 $P=P^T>0$，$Q=Q^T>0$，為下列 Lyapunov 方程式之解

$$APA^T - P + BB^T = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$A^TQA - Q + C^TC = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

因為 A 為穩定矩陣，所以 $l(A) < 1$，則 $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$，因此

$$A^TQA - Q = [\lim_{k\to\infty}(A^k)^T C^T C(A)^k] - C^TC = -C^TC$$

所以 $Q = \sum_{i=0}^{\infty}(A^i)^T C^T C(A)^i$ 為 $A^TQA - Q + C^TC = 0$ 之解

引理 2.1　已知 A 為穩定矩陣，Lyapunov 矩陣方程式之解具有唯一性。

證明:　**因為 A 為穩定矩陣，所以 $l(A) < 1$，則 $\lim_{k\to\infty} A^{k+1} = 0$。**

令 Q_1 為滿足(2)式的其他解。由

$$Q_1 - Q = -[\lim_{k\to\infty}(A^{k+1})^T Q_1 (A)^{k+1}] + Q_1 - Q$$

$$= -\sum_{i=0}^{\infty}(A^{i+1})^T Q_1 (A)^{i+1} + \sum_{i=0}^{\infty}(A^i)^T Q_1 (A)^i - Q$$

$$= -\sum_{i=0}^{\infty}(A^i)^T (A^TQ_1A - Q_1)(A)^i - Q$$ **(因 Q_1 為滿足(4)式的其他解。)**

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(A^i)^T C^T C(A)^i - Q \equiv 0$$

亦即 Q 為唯一。 ■

引理 2.2[11]　若 (A,B) 為可控，則

$$APA^T - P + BB^T = 0$$

之解 $P > 0$ 的充要條件為 A 穩定。

定理 2.3[11]　下列敘述為等價:

(a)　**A 為穩定矩陣。**

(b)　**對所有正定矩陣 E，方程式 $A^TQA - Q + E = 0$ 有 $Q = \sum_{i=0}^{\infty}(A^i)^T E(A)^i > 0$ 之解。**

證明: (a)=>(b)

對於任意 $x \neq 0$**，則**

$$x^T Qx = \sum_{i=0}^{\infty} x^T (A^i)^T E(A^i)x$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (A^i x)^T E(A^i)x$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (A^i x)^T R^T R(A^i)x$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left\| R(A^i)x \right\|_2^2 > 0$$

(b)=>(a)

令 l **為** A **之任一特徵值，而** x **為對應之特徵向量**

$$Ax = lx$$

則有

$$-x^T Ex = x^T (A^T QA - Q)x$$

$$= x^T A^T QAx - x^T Qx$$

$$= \bar{l} x^T Ql x - x^T Qx$$

$$= (l\bar{l} - 1)x^T Qx$$

由於 E **及** Q **均為正定矩陣，得** $l\bar{l} < 1(|l|^2 < 1)$**，即**

$$l(A) < 1$$

故 A **為穩定** ■

由上述定理得知當 A **為穩定時，可求得(3)(4)** $P = P^T > 0$**，** $Q = Q^T > 0$**。為我們平衡化的第一步。**

$P>0$ **所以可以分解成** $P=R^TR$ **為我們平衡化的第二步。，** $Q>0$ **而且令** Σ^2 **為** PQ **特徵值所形成的對角矩陣，又** $PQ=R^TRQ$ **和** RQR^T **具有相同的特徵值，所以存在一個** unitary **矩陣** U **使得，**

$$U^{-1}RQR^TU=U^TRQR^TU=\Sigma^2 \quad (\text{亦即} \quad RQR^T=U\Sigma^2U^T)$$

為我們平衡化的第三步。

則 $T=\Sigma^{1/2}U^{-1}(R^T)^{-1}$ **可以被選取使得**

$$\hat{P}=TPT^T=\Sigma$$

$$\hat{Q}=(T^{-1})^TQT^{-1}=\Sigma$$

我們知道 $TPQT^{-1}=\hat{P}\hat{Q}=\Sigma^2$**，因此當我們令** $T=\Sigma^{1/2}U^{-1}(R^T)^{-1}$ **時。則**

$$\hat{P}=TPT^*=\Sigma^{1/2}U^*(R^*)^{-1}R^*RR^{-1}U\Sigma^{1/2}=\Sigma^{1/2}U^*U\Sigma^{1/2}=\Sigma$$

$$\hat{Q}=(T^{-1})^*QT^{-1}=\Sigma^{-1/2}U^*RQR^*U\Sigma^{-1/2}=\Sigma^{-1/2}\Sigma^2\Sigma^{-1/2}=\Sigma$$

可得

$$\hat{P}=\hat{Q}=\Sigma$$

為我們平衡化的第四步

若 (A,B,C,D) **為** $G(z)$ **的最小實現〔亦即，** (A,B) **可控制，** (A,C) **可觀測〕，其中** A **為穩定。**

演算法 2.4 系統平衡化實現的步驟如下：

1. 求出可控 $P>0$ **與可觀測** $Q>0$**。**

2. 求一矩陣 R **使之滿足** $P=R^TR$**。**

3.對角化 RQR^T **，得** $RQR^T = U\Sigma^2U^T$ **(**U**是 unitary)。**

4.令$T = \Sigma^{1/2}U^{-1}(R^T)^{-1}$**，** $TPT^* = (T^*)^{-1}QT^{-1} = \Sigma$ **，則**$\left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array}\right]$**為系統的平衡化實現。** ■

2.3 Nevanlinna-Pick 插值理論

傳統的 Nevanlinna-Pick **插值理論問題如下：**

給定單位圓內相異點 $l_1, l_2, \cdots, l_n$**，** $W_1, W_2, \cdots, W_n$ **為** $m \times m$ **的複數矩陣且**

$\|W_i\|_\infty \le 1$ $i = 1,2,\cdots,n$。**尋求一解析函數** $j : \mathrm{D} \to M_m(\mathrm{C})$ **使得**

(1) $j(l_i) = W_i$,

(2) $\|j\|_\infty \le 1 \quad \forall l \in \mathrm{D}$.

此解析函數 j **存在之充要條件如下**

定理 2.4 傳統 Nevanlinna-Pick **問題解存在的充分必要條件是其 Pick 矩陣：**

$$P \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{1-W_1W_1^*}{1-l_1\overline{l}_1} & \cdots & \dfrac{1-W_1W_n^*}{1-l_1\overline{l}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1-W_nW_1^*}{1-l_n\overline{l}_1} & \cdots & \dfrac{1-W_nW_n^*}{1-l_n\overline{l}} \end{bmatrix}$$

為半正定(positive semi-definite**)矩陣，其中** $W_i^* \overset{\Delta}{=} \overline{W}_i^T$。

而由 m-synthesis **理論所衍生出來的** m-Nevanlinna-Pick **插值問題敘述如下：**

給定單位圓內相異點 $l_1, l_2, \cdots, l_n$**，** $W_1, W_2, \cdots, W_n$ **為** $m \times m$ **的複數矩陣且**

$\|W_i\|_m \le 1$ $i = 1,2,\cdots,n$。**尋求一解析函數** $j : \mathrm{D} \to M_m(\square)$ **使得**

(1) $j(l_i) = W_i$,

(2) $\|j\|_m \le 1 \quad \forall l \in \mathrm{D}$.

其中

$$\|j\|_s \le \|j\|_m \le \|j\|_\infty .$$

2.4 頻譜 Nevanlinna-Pick 問題

Spectral Nevanlinna-Pick 插值理論問題如下：

給定單位圓相異點 $l_1, l_2, \cdots, l_n$， $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 為 $m \times m$ 的複數矩陣且

$\|W_i\|_s \leq 1 \; i = 1,2,\cdots,n$。尋求一解析函數 $j : \mathrm{D} \to M_m(\mathrm{C})$ 使得

(1) $j(l_i) = W_i$,

(2) $\|j\|_s \leq 1 \quad \forall l \in \mathrm{D}$.

考慮上面的問題我們定義以下的空間：

定義 2.1 $n-$頻譜單位球（spectral unit ball）：

$$\Sigma_n \overset{\Delta}{=} \left\{ W \in M_n(\mathrm{C}) : \; \|W\|_s \leq 1 \right\}.$$

由於 Σ_n 是一個 n^2 維的空間，且是一個非凸(non-convex)，非圓滑(non-smooth)，無界(unbounded)的集合，所以處理這個問題是很困難的。如果 $W \in M_n(\mathrm{C})$ 不是純量矩陣(scalar matrix)，則我們可知 W 相似於(similar)其友矩陣(companion matrix) E，換句話說，存在一可逆(non-singular)矩陣 P 使得 $PWP^{-1} = E$，其中 E 可以寫成如下之形式：

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} s_n & (-1)^n s_{n-1} & (-1)^{n-1} s_{n-2} & (-1)^{n-2} s_{n-3} & \cdots & -s_2 & s_1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

若考慮其特徵多項式(characteristic polynomial)：

故

$$\det(lI-E)=l^n-s_1l^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}l+(-1)^n s_n$$

其 n **個特徵值** $l_1, l_2, \cdots, l_n$ **滿足**

$$s_1=l_1+l_2+\cdots+l_n=\mathrm{tr}(E)$$

$$s_2=\prod_{\substack{i<j\\ i\neq j}} l_i l_j$$

$$\vdots$$

$$s_n=l_1l_2\cdots l_n=\det(E)$$

由上述的特性，我們可考慮以下的定義：

定義 2.2 對稱 n **盤** Γ_n **定義如下：**

$\Gamma_n \overset{\Delta}{=} \{(s_1, s_2, \cdots, s_n): l^n-s_1l^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}l+(-1)^n s_n=0$ **,且其根** l_i **,**

$|l_i|\le 1,\ i=1,\cdots,n\}$

若我們只考慮 2 **維的情形即** $n=2$**，又相較於** Σ_2 **不利的幾何性質，雖然** Γ_2 **為非凸**

(non-convex)**，非平滑**(non-smooth)**，但至少是一個緊緻集合**(compact set)。**假設**

$W\in M_2(\mathbb{C})$ **且** E **為** W **的友矩陣，則** E **可表示為**

$$E=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -p & s\end{bmatrix}$$

其特徵多項式

$$\det(lI-TWT^{-1})=\det(T(lI-W)T^{-1})$$

$$=\det(lI-W)$$

$$=0$$

故

$$\det\left(l\,I - W\right) = \det\left(l\,I - E\right).$$

因此W**所有的特徵值** l **皆滿足**

$$l^2 - s\,l + p = 0.$$

若

$$W \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & s \end{bmatrix}$$

其中~表示相似於，且$\|W\|_s \le 1$**。則我們有以下的定義：**

$$\Gamma_2 \overset{\Delta}{=} \left\{\left(s,\, p\right) \;:\; l^2 - s\,l + p = 0,\; \left|l\right| \le 1\right\}$$

$$= \left\{\left(\mathrm{tr}W, \det W\right) \;:\; W \in \Sigma_2\right\}$$

$$= \left\{\left(l_1 + l_2,\, l_1 l_2\right) : \left|l_1\right| \le 1,\; \left|l_1\right| \le 1,\right\}$$

其中

$$\mathrm{int}\left(\Gamma_2\right) \overset{\Delta}{=} \left\{\left(s, p\right) :\; l^2 - s\,l + p = 0, \left|l\right| < 1\right\}$$

$$\Sigma_2 \overset{\Delta}{=} \left\{W \in M_2(\square) \;:\; \|W\|_s \le 1\right\}.$$

以下為 Agler **和** Young **在** 1999**年將**Σ_2**上的插值法轉換至**Γ_2**上插值問題的兩個重要定理：**

定理 2.5 [1] 令兩個不同的$l_1,\, l_2 \in \mathrm{D}$**，且**$W_1, W_2 \in \Sigma_2$**，假設**$W_1, W_2$**同時為純量矩陣，或同時都不是純量矩陣，則下面的敘述具有等價關係：**

存在一個解析函數$F : \mathrm{D} \to \Sigma_2$**使得**

$F(l_i) = W_i,\; i = 1{,}2$

存在一個解析函數 $f : \mathrm{D} \to \Gamma_2$**使得**

$f(l_i)=(trW_i,\det W_i),\ i=1,2$

定理 2.6[1] **令兩個不同的** $l_1,\ l_2\in \mathrm{D}$**，且** $W_1,W_1\in\Sigma_2$**，假定** W_1 **為純量矩陣，但** W_2 **不為純量矩陣，則下面的敘述具有等價關係：**

存在一個解析函數 $F:\mathrm{D}\to\Sigma_2$ **使得**

$F(l_i)=W_i,\ i=1,2$

存在一個解析函數 $f:\mathrm{D}\to\Gamma_2$ **使得**

$f(l_i)=(trW_i,\det W_i),\ i=1,2$

且

$f_2'(l_1)=cf_1'(l_1)$

由上面兩個定理可知，在 Σ_2 **上的兩個點的頻譜** Nevanlinna-Pick **插值問題可以完全轉移到** Γ_2 **上。**

2.5 Γ_2 上的一些性質

Γ_2 是一個 2 維的空間，其為非凸，非平滑，但至少是一個緊緻集合。下面的定理說明了 Γ_2 上的一些性質：

定理 2.7 [4.5] 下面的敘述具有等價關係：

(1) $(s, p) \in \Gamma_2$;

(2) $|s - \bar{s}p| \le 1 - |p|^2$;

(3) $2|s - \bar{s}p| + |s^2 - 4p| \le 4 - |s|^2$;

(4) $|s| \le 2$ **，且對於任意** $z \in \mathbb{D}$ **，**

$$\left|\frac{2zp - s}{2 - zs}\right| < 1 ;$$

(5) $|p| < 1$**，則可找到** $b \in \mathbb{D}$**，使得** $s = b\,p + \bar{b}$ **，其中** $b = \dfrac{\bar{s} - s\bar{p}}{1 - |p|^2}$.

對於任意 $w \in \mathbb{D}$**，令**

$$\Phi_w(s, p) = \frac{2wp - s}{2 - ws}$$

由定理 2.7(1)~(4)**知** Φ_w **為** Γ_2 **映至** $\bar{\mathbb{D}}$ **之函數，稱為神奇函數**(Magic function)。

3. 主要想法與結果

3.1 2×2 SNP 頻譜插值函數之實現

在 Agler、Yeh 和 Young 於 2003 年提出此種插值問題推得 j 的實現式，可

由以下的定理簡單的說明 2×2 SNP 頻譜插值問題之實現式的求法。

我們定義一個函數 $y : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{D}^2$，其中

$$y(w_0, l) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right](w_0, l)$$

$$= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \left(I - \begin{bmatrix} w_0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

使得

$$y_{11}(w_0, l) + y_{22}(w_0, l) = 0$$
$$s(w_0, l) = 2y_{11}(w_0, l)$$
$$p(w_0, l) = \frac{(s(w_0, l))^2}{4} + y_{11}(w_0, l)y_{22}(w_0, l)$$

頻譜插值函數之實現式的求法在 Agler、Yeh 和 Young 的論文中均有詳細低說明，

下列定理也有說明。

定理 3.1 [2] 若存在一個解析函數

$$j = (s(\cdot), p(\cdot)) : \mathrm{D} \to \Gamma_2$$

從 D **映到** Γ_2 **若且唯若存在一個在** D **上解析的** 2×2 **矩陣函數** $y = \left[y_{ij}\right]$ **使得**

(1) $\|y\|_\infty \le 1$

(2) $\mathrm{tr}\, y(l) = 0$，**對任意** $l \in \mathrm{D}$

(3) $s = 2y_{11}$

(4) $p = -\det y$

定理 3.2 [2] 若存在一個解析函數

$$j = (s, p) : \mathrm{D} \to \Gamma_2$$

從D **映到**Γ_2**若且唯若存在一個 Hilbert 空間** ***H*** **和一個 unitary 算子**

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : H \oplus \mathbb{C}^2 \to H \oplus \mathbb{C}^2$$

使得

$$s = \left[\begin{array}{c|c} A & B_1 \\ \hline C_1 & D_{11} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} A & B_2 \\ \hline C_2 & D_{22} \end{array}\right]$$

且

$$p = (\frac{1}{4}\mathrm{tr}^2 - \det)\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} : \mathbb{C}^2 \to H, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} : H \to \mathbb{C}^2$$

且

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

更進一步來說，對於任意的解析函數$j : \mathrm{D} \to \Gamma_2$**，我們可以選取** ***H*****、*A*、*B*、*C*** **和** ***D***

使得

$$\operatorname{tr}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \equiv 0$$

因此

$$s = 2\left[\begin{array}{c|c} A & B_1 \\ \hline C_1 & D_{11} \end{array}\right] = -2\left[\begin{array}{c|c} A & B_2 \\ \hline C_2 & D_{22} \end{array}\right]$$

同時

$$p = -\det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

假設給定一個解析函數$j : \mathrm{D} \to \Gamma_2$**，我們如何藉由上面定理中所述找出**$j$ **的一般實現式呢 ？由**[1]**，若** $j = (s, p)$ **且選擇** $f_1, f_2 \in H^\infty$**，使得**

$$f_1 f_2 = 4p - s^2$$

且

$$|f_1(z)| = |f_2(z)|\text{，對所有 } z \in \mathrm{T}$$

函數

$$y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} s & f_1 \\ f_2 & -s \end{bmatrix}$$

為一個2×2 **的 Schur function，在** D **中解析且滿足**

$$\|y(z)\| \le 1\text{，對所有 } z \in \mathrm{D}$$

定理 3.3 [2] 若$(s_1, 0), (s_2, 0) \in \operatorname{int}\Gamma_2$**且令**$w_0$**是對任意**$w \in \mathrm{T}$ **在**$\operatorname{Re}(2wt - w^2 q)$**有最大值時的點。令**$y_w(l) = (s(l), p(l))$**，對任意** $l \in \mathrm{D}$

$$p(l)=\frac{v_2 l^2+v_1 l+q}{\bar{q}l^2+\overline{v_1}l+\overline{v_2}}$$

且

$$s(l)=2\frac{\overline{w_0 q}l^2+hl+w_0 l}{\bar{q}l^2+\overline{v_1}l+\overline{v_2}}$$

其中

$$h=-4+2\mathrm{Re}(2w_0t-w_0^2q)=4-2\mathrm{Re}\,v_2 \quad , \quad v_1=2(t-w_0q)$$

$$v_2=4-2w_0t+w_0^2q \quad , \quad t=s_1+s_2 \quad , \quad q=s_1s_2$$

引理 3.1[2] 若$w=(t,q)\in \mathrm{int}\Gamma_2$**並令**$w_0$**是對所有**$w\in \mathrm{T}$**，使得**$\mathrm{Re}(2wt-w^2q)$**之值為最大，則下面式子成立**

$$\begin{aligned}
&(a)2|q|\le|v_1|=w_0v_1<2\\
&(b)v_2=4-|v_1|-w_0^2q\\
&(c)v_2-\overline{w_0}^2\bar{q}=4-2\mathrm{Re}(w_0t)>0\\
&(d)|v_2|>1
\end{aligned}$$

定理 3.4[2] 若$w=(t,q)\in \mathrm{int}\Gamma_2$**,**$w\neq(0,0)$**，令**

$$h(l)=\frac{2l_2p(l_1)-s(l_1)}{2-l_2s(l_1)} \quad , \quad l=(l_1,l_2)\in \mathrm{D}^2$$

對所有 $l,m\in \mathrm{D}^2$**，**

$$1-\bar{h}(m)h(l)=(1-\overline{m_1}l_1)\langle g_1(l),g_1(m)\rangle_{\mathbb{C}^2}+(1-\overline{m_2}l_2)\langle g_2(l),g_2(m)\rangle_{\mathbb{C}^2}$$

則 $g_1:\mathrm{D}^2\to\mathbb{C}^2, g_2:\mathrm{D}^2\to\mathbb{C}^2$**定義如下：**

令w_0**是對所有**$w\in \mathrm{T}$**，使得** $\mathrm{Re}(2wt-w^2q)$**之值為最大且令**

$$Q=(4-2\mathrm{Re}(w_0 t))^{\frac{1}{2}},$$
$$v_1=2(t-w_0 q)\quad,\quad v_2=4-2w_0 t+w_0^2 q,$$
$$h=4-2\mathrm{Re}(v_2),$$
$$f_1(x)=v_2 x^2+v_1 x+q\quad,\quad f_2(x)=\overline{w_0 q}x^2+hx+w_0 q,$$
$$\tilde{f}_1(x)=\bar{q}x^2+\overline{v_1}x+\overline{v_2},$$
$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|v_1|+\sqrt{|v_1|^2-4|q|^2}}.$$

則 $Q>0, x>0$ **且**

$$g_1(l)=\frac{Q}{\tilde{f}_1(l_1)-l_2 f_2(l_1)}\begin{bmatrix}(4-2|v_1|)^{\frac{1}{2}} & 1+l_1 l_2\\ \overline{w_0 q}x^{-1}-xl_2 & 1+w_0 l_1\end{bmatrix},$$
$$g_2(l)=\frac{Q}{\tilde{f}_1(l_1)-l_2 f_2(l_1)}(x+\overline{w_0 q}x^{-1}l_1)(1+w_0 l)$$

定理 3.5[2] 如果 $j_w(l)=(s(l),p(l))\in \operatorname{int}\Gamma_2$ **，如定理 3.3 所述。**

則

$$A=\overline{v_2}^{-1}\begin{bmatrix}-2\bar{t}+3\overline{w_0 q} & -xR\\ qx^{-1}R & -\overline{w_0 q}\end{bmatrix}$$
$$B=\begin{bmatrix}B_1 & B_2\end{bmatrix}=\overline{v_2}^{-1}\begin{bmatrix}w_0 qx^{-1}R & QR\\ -\overline{v_2}+|q|^2x^{-2} & \overline{w_0 q}Qx^{-1}\end{bmatrix}$$
$$C=\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\overline{v_2}^{-1}\begin{bmatrix}w_0 xR & \overline{v_2}-x^2\\ QR & -\overline{w_0}Qx\end{bmatrix}$$
$$D=[D]_{ij}=\overline{v_2}^{-1}\begin{bmatrix}w_0 q & Qx\\ qQx^{-1} & -w_0 q\end{bmatrix}$$

其中有關係式：

$$R = 2(1 - w_0 t + w_0^2 q)^{\frac{1}{2}} = (4 - 2|v_1|)^{\frac{1}{2}} \in \square$$

$$v_1 = 2(t - w_0 q)$$

$$v_2 = 4 - 2w_0 t + w_0^2 q = 4 - |v_1| - w_0^2 q = Q^2 + \overline{w_0}^2 \overline{q}$$

$$|v_1| = w_0 v_1 \in \square$$

$$|w_0| = 1$$

$$Q = (4 - 2\mathrm{Re}(w_0 t))^{\frac{1}{2}} = (v_2 - \overline{w_0}^2 \overline{q})^{\frac{1}{2}} \in \square$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|v_1| + \sqrt{|v_1|^2 - 4|q|^2}} \in \square$$

$$h = 4 - 2\mathrm{Re}(v_2) \in \square$$

且

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

為 unitary，而且

$$s = 2\left[\begin{array}{c|c} A & B_1 \\ \hline C_1 & D_{11} \end{array}\right] = -2\left[\begin{array}{c|c} A & B_2 \\ \hline C_2 & D_{22} \end{array}\right],$$

$$p = -\det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

3.2 頻譜插值實現式之平衡化處理

我們想得知由定理 3.5所得之實現式是否已經為平衡化, 以及若並非平衡化該如何進行平衡化處理, 並討論使定理 3.5為平衡化時, 相對參數間之關係為何?

我們整理定理 3.3和定理 3.5 可知

定理 3.6 若 $(s_1,0),(s_2,0)\in \operatorname{int}\Gamma_2$ 且令 w_0 是對任意 $w\in \mathrm{T}$ 在 $\operatorname{Re}(2wt-w^2q)$ 有最大值時的點。令 $j_w(l)=(s(l),p(l))$，對任意 $l\in \mathrm{D}$

$$p(l)=\frac{v_2 l^2+v_1 l+q}{\bar{q} l^2+\bar{v}_1 l+\bar{v}_2}$$

且

$$s(l)=2\frac{\overline{w_0 q} l^2+h l+w_0 l}{\bar{q} l^2+\bar{v}_1 l+\bar{v}_2}$$

則

$$A=\bar{v}_2^{-1}\begin{bmatrix}-2\bar{t}+3\overline{w_0 q} & -xR\\ qx^{-1}R & -\overline{w_0 q}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}B_1 & B_2\end{bmatrix}=\bar{v}_2^{-1}\begin{bmatrix}w_0 q x^{-1}R & QR\\ -\bar{v}_2+|q|^2x^{-2} & \overline{w_0 q}Qx^{-1}\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\bar{v}_2^{-1}\begin{bmatrix}w_0 xR & \bar{v}_2-x^2\\ QR & -\bar{w}_0 Qx\end{bmatrix}$$

$$D=[D]_{ij}=\bar{v}_2^{-1}\begin{bmatrix}w_0 q & Qx\\ qQx^{-1} & -w_0 q\end{bmatrix}$$

其中有關係式：

$$
\begin{aligned}
&R = 2(1-w_0 t + w_0^2 q)^{\frac{1}{2}} = (4-2|v_1|)^{\frac{1}{2}} \in \\
&v_1 = 2(t - w_0 q) \\
&v_2 = 4-2w_0 t + w_0^2 q = 4-|v_1| - w_0^2 q = Q^2 + \overline{w_0}^2 \overline{q} \\
&|v_1| = w_0 v_1 \in \\
&|w_0| = 1 \\
&Q = (4-2\mathrm{Re}(w_0 t))^{\frac{1}{2}} = (v_2 - \overline{w_0}^2 \overline{q})^{\frac{1}{2}} \in \\
&x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|v_1| + \sqrt{|v_1|^2 - 4|q|^2}} \in \\
&h = 4-2\mathrm{Re}(v_2) \in
\end{aligned}
$$

，且

$$
\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}
$$

為 unitary，而且

$$
\begin{aligned}
&s = 2\left[\begin{array}{c|c} A & B_1 \\ \hline C_1 & D_{11} \end{array}\right] - 2\left[\begin{array}{c|c} A & B_2 \\ \hline C_2 & D_{22} \end{array}\right], \\
&p = -\det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

我們知道求 Lyapunov 方程之解，所得的可控 Gramian P 及 Gramian Q，是系統是否為已經平衡化之重要步驟。

(1) 求可控 Gramian P 須解離散型的 Lyapunov 方程：

$$
APA^* - P + BB^* = 0
$$

若 $(APA^* - P + BB^*)^* = 0$，則得到 $AP^*A^* - P^* + BB^* = 0$

由

$$
\begin{aligned}
&APA^* - P + BB^* = 0 \\
&AP^*A^* - P^* + BB^* = 0
\end{aligned}
$$

所以得

$$P^{*}=P$$

可令欲求的 $P=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$**，其中** a、d **為實數且** b、c **互為共軛複數，為**

下列四元一次聯立方程組之解

$$\begin{cases}
\left((2\bar{t}-3\overline{w_0 q})(2t-3w_0 q)-|v_2|^2\right)a+\left((2\bar{t}-3\overline{w_0 q})xR\right)b+\left((2t-3w_0 q)xR\right)c+(x^2R^2)d \\
\qquad +|w_0|^2|q|^2x^{-2}R^2+Q^2R^2=0 \\
\left(-(2\bar{t}-3\overline{w_0 q})(\bar{q}x^{-1}R)\right)a+\left((2\bar{t}-3\overline{w_0 q})(w_0 q)-|v_2|^2\right)b+(-\bar{q}R^2)c+(w_0 qxR)d \\
\qquad -(w_0 qx^{-1}R)(v_2-|q|^2x^{-2}-Q^2)=0 \\
\left(-(2t-3w_0 q)(qx^{-1}R)\right)a+(-qR^2)b+\left((2t-3w_0 q)(\overline{w_0 q})-|v_2|^2\right)c+(\overline{w_0 q}xR)d \\
\qquad -(\overline{w_0 q}x^{-1}R)(\overline{v_2}-|q|^2x^{-2}-Q^2)=0 \\
(|q|^2x^{-2}R^2)a+(-w_0q^2x^{-1}R)b+(-\overline{w_0 q}^{2}x^{-1}R)c+(|w_0|^2|q|^2-|v_2|^2)d \\
\qquad +|v_2|^2-|q|^2x^{-2}(v_2+\overline{v_2}-|q|^2x^{-2}-|w_0|^2Q^2)=0
\end{cases} \tag{5}$$

(2) **求可觀測** Gramian Q **須解離散型的** Lyapunov **方程：**

$$A^{*}QA-Q+C^{*}C=0$$

若 $(A^{*}QA-Q+C^{*}C)^{*}=0$**，則得到** $A^{*}Q^{*}A-Q^{*}+C^{*}C=0$

由

$$A^{*}QA-Q+C^{*}C=0$$

$$A^{*}Q^{*}A-Q^{*}+C^{*}C=0$$

所以得

$$Q^{*}=Q$$

可令欲的 $Q=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$**，其中** a、d **為實數且** b、c **互為共軛複數，為**

下列四元一次聯立方程組之解

$$
\begin{cases}
\left((2\bar{t}-3\overline{w_0 q})(2t-3w_0 q)-|v_2|^2\right)a+\left(-(2t-3w_0 q)(qx^{-1}R)\right)b+\left(-(2\bar{t}-3\overline{w_0 q})(\bar{q}x^{-1}R)\right)c \\
\qquad +(|q|^2 x^{-2}R^2)d+|w_0|^2 x^2 R^2+Q^2 R^2=0 \\
\left((2t-3w_0 q)(xR)\right)a+\left((2t-3w_0 q)(\overline{w_0 q})-|v_2|^2\right)b+(-\bar{q}R^2)c+(-\overline{w_0 q}^2 x^{-1}R)d \\
\qquad +\overline{w_0}xR(\overline{v_2}-x^2)-\overline{w_0}Q^2 xR=0 \\
\left((2\bar{t}-3\overline{w_0}\bar{q})(xR)\right)a+(-qR^2)b+\left((2\bar{t}-3\overline{w_0}\bar{q})(w_0 q)-|v_2|^2\right)c+(-w_0 q^2 x^{-1}R)d \\
\qquad +w_0 xR(v_2-x^2)-w_0 Q^2 xR=0 \\
(x^2R^2)a+(\overline{w_0 q}xR)b+(w_0 qxR)c+(|w_0|^2|q|^2-|v_2|^2)d+(v_2-x^2)(\overline{v_2}-x^2) \\
\qquad +|w_0|^2 Q^2 x^2=0
\end{cases}
\tag{6}
$$

我們先考慮下列例子

例 3.7 **當**$(t,q)=(0,\frac{1}{2}i)\in \operatorname{int}\Gamma_2$。

由定理 3.5

$$
A=\frac{2}{7}\begin{bmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{4}i & -1 \\ i & \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i \end{bmatrix}
$$

$$
B=\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix}=\frac{2}{7}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i & 2\sqrt{2} \\ -3 & -1-i \end{bmatrix}
$$

$$
C=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}=\frac{2}{7}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i & 3 \\ 2\sqrt{2} & -1-i \end{bmatrix}
$$

$$
D=\frac{2}{7}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i & \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}i & \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i \end{bmatrix}
$$

其中有關係式：

$$
\begin{aligned}
&v_1 = -w_0 i \\
&|v_1| = 1 \\
&v_2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \in \square \\
&Q = 2 \in \square \\
&x^2 = \frac{1}{2} \in \square \\
&R = \sqrt{2} \in \square \\
&R^2 = 2 \in \square
\end{aligned}
$$

因為A的特徵值為$-0.101-0.101i$的重根，所以A是穩定的。因此我們由引理 2.1 得知 Lyapunov 矩陣方程式之解具有唯一性。

$$APA^T - P + BB^T = 0$$

$$A^T QA - Q + C^T C = 0$$

我們又從(5)，(6)二式中可以求得P和Q之解，其中

$$P = \begin{bmatrix} 0.9358 & -0.1461+0.1461i \\ -0.1461-0.1461i & 0.9774 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.8929 & 0.0078-0.4792i \\ 0.0078+0.4792i & 0.9624 \end{bmatrix}$$

為滿足 Lyapunov 之解。

我們得知定理 3.5 所得之實現在一般情形化並非平衡化，所以想藉由演算法 2.4 討論此系統之平衡化。

接下來求一矩陣 R 使之滿足 $P = R^T R$。

$$R = \begin{bmatrix} 0.9673 & -0.1510+0.1510i \\ 0 & 0.9653 \end{bmatrix}$$

緊接著對角化RQR^T，得 $RQR^T = U\Sigma^2 U^T$ （U 是 unitary)。

其中

$$U=\begin{bmatrix}0.7848 & -0.2463-0.5687i\\ 0.2463-0.5687i & 0.7848\end{bmatrix}$$

$$\Sigma^2=\begin{bmatrix}0.4729 & 0\\ 0 & 1.1611\end{bmatrix}$$

最後

$$T=\Sigma^{1/2}U^{-1}(R^T)^{-1}=\begin{bmatrix}0.5221 & 0.0820+0.4590i\\ -0.2567+0.5928i & 0.7639-0.1326i\end{bmatrix}$$

則 $\left[\begin{array}{c|c}\hat{A} & \hat{B}\\ \hline \hat{C} & \hat{D}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}TAT^{-1} & TB\\ \hline CT^{-1} & D\end{array}\right]$ **為系統的平衡化實現。**

其中 $\hat{P}$**，** $\hat{Q}$ **可控與可觀的對應，又有**

$$\hat{A}=TAT^{-1}=\begin{bmatrix}-0.3679+0.0874i & -0.1964+0.2492i\\ 0.3187-0.1077i & 0.1659-0.2894i\end{bmatrix}$$

$$\hat{B}=TB=\begin{bmatrix}-0.1758-0.2880i & 0.5296-0.1546i\\ -0.7226-0.0580i & -0.4636+0.2987i\end{bmatrix}$$

$$\hat{C}=CT^{-1}=\begin{bmatrix}0.5798-0.5500i & 0.7568-0.1580i\\ 0.5414-0.0161i & -0.3113-0.7517i\end{bmatrix}$$

$$\hat{D}=D=\frac{2}{7}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i & \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}i & \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i\end{bmatrix}$$

$$\hat{P}=\hat{Q}=\Sigma=\begin{bmatrix}0.6877 & 0\\ 0 & 1.078\end{bmatrix}$$

由此例我們已知定理 3.6 **並非平衡化實現，所以進一步想討論定理** 3.6 **所求得離散系統為平衡化實現式之條件。**

求可控 P:

$$
\begin{bmatrix}
|a|^2-|v_2|^2 & \bar{a}b & ab & b^2 \\
-\bar{a}\bar{q}\dfrac{b}{x^2} & \bar{a}w_0q-|v_2|^2 & -\bar{q}\dfrac{b^2}{x^2} & w_0qb \\
-aq\dfrac{b}{x^2} & -q\dfrac{b^2}{x^2} & a\bar{w}_0\bar{q}-|v_2|^2 & \bar{w}_0\bar{q}b \\
|q|^2\dfrac{b^2}{x^4} & -w_0q^2\dfrac{b}{x^2} & -\bar{w}_0\bar{q}^2\dfrac{b}{x^2} & |q|^2-|v_2|^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}
$$

經過運算之後可得

$$\begin{bmatrix} (|a|^2-|v_2|^2)(X-\overline{X}) & \overline{a}b(X-\overline{X})-(aqb)(\overline{Y}-|v_2|^2)-\overline{a}|q|^2\frac{b^3}{x^2} & ab(X-\overline{X})-(\overline{a}\overline{q}b)(-Y-|v_2|^2)+a|q|^2\frac{b^3}{x^2} & 0 \\ 0 & (aqb)(\overline{Y}-|v_2|^2)+\overline{a}|q|^2\frac{b^3}{x^2} & (\overline{a}\overline{q}b)(-Y-|v_2|^2)-a|q|^2\frac{b^3}{x^2} & (X-\overline{X})b^2 \\ |a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}+(|a|^2-|v_2|^2)\overline{X} & \overline{a}|q|^2\frac{b^3}{x^2}+\overline{a}b\overline{X} & (\overline{a}\overline{q})(-Y+|v_2|^2)b+ab\overline{X} & 0 \\ 0 & -\overline{a}|q|^2\frac{b^3}{x^2}-\overline{a}bX & -(\overline{a}\overline{q})(-Y+|v_2|^2)b-ab\overline{X} & x^2|a|^2(|q|^2-|v_2|^2)+\overline{X}b^2 \end{bmatrix}$$

$$*\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (X-\overline{X})b_1-aqbb_2+\overline{a}\overline{q}bb_3 \\ aqbb_2-\overline{a}\overline{q}bb_3 \\ \overline{X}b_1-\overline{a}\overline{q}bb_3 \\ x^2|a|^2b_4+\overline{a}\overline{q}bb_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$a = (2t - 3w_0 q)$$

$$b = xR \in \mathbb{R}$$

$$X = a w_0 q^2$$

$$Y = a \overline{w}_0 \overline{q}$$

$$b_1 = -|q|^2 x^{-2} R^2 - Q^2 R^2 \in \mathbb{R}$$

$$b_2 = (w_0 q x^{-1} R)(v_2 - |q|^2 x^{-2} - Q^2)$$

$$b_3 = (\overline{w_0 q} x^{-1} R)(\overline{v_2} - |q|^2 x^{-2} - Q^2)$$

$$b_4 = -|v_2|^2 + |q|^2 x^{-2}(v_2 + \overline{v_2} - |q|^2 x^{-2} - |w_0|^2 Q^2) \in \mathbb{R}$$

同樣的我們開始求可觀測 Q

$$\begin{bmatrix} |a|^2 - |v_2|^2 & -a q \dfrac{b}{x^2} & -\overline{a}\,\overline{q} \dfrac{b}{x^2} & |q|^2 \dfrac{b^2}{x^4} \\ ab & a\overline{w}_0 \overline{q} - |v_2|^2 & -\overline{q} \dfrac{b^2}{x^2} & -\overline{w}_0 \overline{q}^2 \dfrac{b}{x^2} \\ \overline{a} b & -q \dfrac{b^2}{x^2} & \overline{a} w_0 q - |v_2|^2 & -w_0 q^2 \dfrac{b}{x^2} \\ b^2 & \overline{w}_0 \overline{q} b & w_0 q b & |q|^2 - |v_2|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \end{bmatrix}$$

經過運算之後可得

$$
\begin{bmatrix}
(|a|^2-|v_2|^2)(X-\bar{X}) & -(aq\frac{b}{x^2})(X-\bar{X})-(\bar{a}|q|^2\frac{b}{x^2})(Y-|v_2|^2)-aq|q|^2\frac{b^3}{x^4} & -(\bar{a}\bar{q}\frac{b}{x^2})(X-\bar{X})+(a|q|^2\frac{b}{x^2})(\bar{Y}-|v_2|^2)+\bar{a}\bar{q}|q|^2\frac{b^3}{x^4} & 0 \\
0 & (\bar{a}|q|^2\frac{b}{x^2})(Y-|v_2|^2)+aq|q|^2\frac{b^3}{x^4} & -(a|q|^2\frac{b}{x^2})(\bar{Y}-|v_2|^2)-\bar{a}\bar{q}|q|^2\frac{b^3}{x^4} & (X-\bar{X})|q|^2\frac{b^2}{x^4} \\
-|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}-(|a|^2-|v_2|^2)X & aq|q|^2\frac{b^3}{x^4}+a|q|^2x^{-2}bX & -(a|q|^2\frac{b}{x^2})(\bar{Y}-|v_2|^2)+\bar{a}\bar{q}\frac{b}{x^2}X & 0 \\
0 & -aq|q|^2\frac{b^3}{x^4}-a|q|^2x^{-2}b\bar{X} & -(\bar{a}|q|^2\frac{b}{x^2})(\bar{Y}-|v_2|^2)-\bar{a}|q|^2x^{-2}bX & -|q|^2x^{-2}|a|^2(|q|^2-|v_2|^2)-|q|^2\frac{b^2}{x^4}X
\end{bmatrix}
$$

$$
*\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
(X-\bar{X})\hat{b}_1-\bar{a}\,|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_2+a\,|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_3 \\
\bar{a}\,|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_2-a\,|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_3 \\
-X\hat{b}_1-a\,|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_3 \\
-x^{-2}|a|^2|q|^2\hat{b}_4+a\,|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_3
\end{bmatrix}
$$

其中

$$\hat{b}_1=-|w_0|^2x^2R^2-Q^2R^2\in \square$$

$$\hat{b}_2=-\overline{w_0}\,xR(\overline{v_2}-x^2)+\overline{w_0}\,Q^2xR$$

$$\hat{b}_3 = -w_0 x R(v_2 - x^2) + w_0 Q^2 x R$$
$$\hat{b}_4 = -(v_2 - x^2)(\overline{v_2} - x^2) - Q^2 x^2 \in \square$$

先由一些特殊情況來觀察可控 P 及可觀測 Q 的解情形(亦即系統已經平衡化)

求可控 P ：令 $P = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ 已經平衡化則

$$\begin{bmatrix} (|a|^2 - |v_2|^2)(X - \overline{X}) & 0 \\ 0 & (X - \overline{X}) b^2 \\ |a|^2 |q|^2 \dfrac{b^2}{x^2} + (|a|^2 - |v_2|^2)\overline{X} & 0 \\ 0 & x^2 |a|^2 (|q|^2 - |v_2|^2) + \overline{X} b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (X - \overline{X}) b_1 - a q b b_2 + \overline{a}\,\overline{q} b b_3 \\ a q b b_2 - \overline{a}\,\overline{q} b b_3 \\ \overline{X} b_1 - \overline{a}\,\overline{q} b b_3 \\ x^2 |a|^2 b_4 + \overline{a}\,\overline{q} b b_3 \end{bmatrix}$$

經過運算之後可得

$$\begin{bmatrix} |a|^2 |q|^2 \dfrac{b^2}{x^2} + (|a|^2 - |v_2|^2) X & 0 \\ 0 & x^2 |a|^2 (|q|^2 - |v_2|^2) + X b^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} X b_1 - Z b_2 \\ x^2 |a|^2 b_4 + Z b_2 \\ (X b_1 - Z b_2) \dfrac{-|a|^2 |q|^2 \dfrac{b^2}{x^2} - (|a|^2 - |v_2|^2)\overline{X}}{|a|^2 |q|^2 \dfrac{b^2}{x^2} + (|a|^2 - |v_2|^2) X} + \overline{X} b_1 - \overline{Z} b_3 \\ (x^2 |a|^2 b_4 + \overline{Z} b_2) \dfrac{-x^2 |a|^2 (|q|^2 - |v_2|^2) - \overline{X} b^2}{x^2 |a|^2 (|q|^2 - |v_2|^2) + X b^2} + x^2 |a|^2 b_4 + Z b_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$Z = a\,q\,b$$

可知當a, d有解時(亦即系統已經平衡化)

$$(Xb_1 - Zb_2)\frac{-|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2} - (|a|^2 - |v_2|^2)\bar{X}}{|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2} + (|a|^2 - |v_2|^2)X} + \bar{X}b_1 - \bar{Z}b_3 = 0$$

$$(x^2|a|^2 b_4 + \bar{Z}b_2)\frac{-x^2|a|^2(|q|^2 - |v_2|^2) - \bar{X}b^2}{x^2|a|^2(|q|^2 - |v_2|^2) + Xb^2} + x^2|a|^2 b_4 + Zb_3 = 0$$

也意味著當a, d有解時

$$\frac{Xb_1 - Zb_2}{|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2} + (|a|^2 - |v_2|^2)X} = \frac{\bar{X}b_1 - \bar{Z}b_3}{|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2} + (|a|^2 - |v_2|^2)\bar{X}} \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

$$\frac{x^2|a|^2 b_4 + \bar{Z}b_2}{x^2|a|^2(|q|^2 - |v_2|^2) + Xb^2} = \frac{x^2|a|^2 b_4 + Zb_3}{x^2|a|^2(|q|^2 - |v_2|^2) + \bar{X}b^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

其中解為

$$a = \frac{Xb_1 - Zb_2}{|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2} + (|a|^2 - |v_2|^2)X} \qquad (9)$$

$$d = \frac{x^2|a|^2 b_4 + \bar{Z}b_2}{x^2|a|^2(|q|^2 - |v_2|^2) + Xb^2} \qquad (10)$$

我們假設當已經平衡化時(亦即a, d有解)有

$X = \bar{X}$ 且 $Zb_2 = \bar{Z}b_3$將滿足(7),(8)兩式

可得

$a w_0 q^2 = \bar{a}\bar{w}_0\bar{q}^2$ 且 $v_2 = \bar{v}_2$

又由於

$$v_2 = 4 - 2w_0 t + w_0^2 q = 4 - |v_1| - w_0^2 q = Q^2 + \overline{w_0}^2 \overline{q}$$

$$Q = (4 - 2\mathrm{Re}(w_0 t))^{\frac{1}{2}} = (v_2 - \overline{w_0}^2 \overline{q})^{\frac{1}{2}}$$

則

$$v_2 = 4 - 2w_0 t + w_0^2 q = 4 - 2\mathrm{Re}(w_0 t) + \overline{w_0}^2 \overline{q}$$

可知

$$2\mathrm{Re}(w_0 t) - 2w_0 t + w_0^2 q - \overline{w_0}^2 \overline{q} = 0$$

也就是

$$\mathrm{Im}(w_0 t) = \mathrm{Im}(w_0^2 q)$$

所以可知已經平衡化時有

$$g^2 \in \Re \text{且} \, w_0^2 q \in \Re$$

同理求可觀測 Q**：令** $Q = \begin{bmatrix} \hat{a} & 0 \\ 0 & \hat{d} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} (|a|^2 - |v_2|^2)(X - \bar{X}) & 0 \\ 0 & (X - \bar{X})|q|^2 \frac{b^2}{x^4} \\ -|a|^2 |q|^2 \frac{b^2}{x^2} - (|a|^2 - |v_2|^2) X & 0 \\ 0 & -|q|^2 x^{-2} |a|^2 (|q|^2 - |v_2|^2) - |q|^2 \frac{b^2}{x^4} X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{d} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (X-\bar{X})\hat{b}_1-\bar{a}|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_2+a|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_3 \\ \bar{a}|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_2-a|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_3 \\ -X\hat{b}_1-a|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_3 \\ -x^{-2}|a|^2|q|^2\hat{b}_4+a|q|^2\frac{b}{x^2}\hat{b}_3 \end{bmatrix}$$

經過運算之後可得

$$\begin{bmatrix} -|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}-(|a|^2-|v_2|^2)\bar{X} & 0 \\ 0 & -|q|^2x^{-2}|a|^2(|q|^2-|v_2|^2)-|q|^2\frac{b^2}{x^4}\bar{X} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{d}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{X}\hat{b}_1-Z\hat{b}_2 \\ -|a|^2|q|^2x^{-2}\hat{b}_4+Z\hat{b}_2 \\ (-\bar{X}\hat{b}_1-Z\hat{b}_2)\dfrac{|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}+(|a|^2-|v_2|^2)X}{-|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}-(|a|^2-|v_2|^2)\bar{X}}-X\hat{b}_1-\bar{Z}\hat{b}_3 \\ (-|a|^2|q|^2x^{-2}\hat{b}_4+Z\hat{b}_2)\dfrac{|q|^2x^{-2}|a|^2(|q|^2-|v_2|^2)+|q|^2\frac{b^2}{x^4}X}{-|q|^2x^{-2}|a|^2(|q|^2-|v_2|^2)-|q|^2\frac{b^2}{x^4}\bar{X}}-|a|^2|q|^2x^{-2}\hat{b}_4+\bar{Z}\hat{b}_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$Z=\bar{a}|q|^2\frac{b}{x^2}$$

可知當 $\hat{a},\hat{d}$ **有解時(亦即系統已經平衡化)**

$$(-\bar{X}\hat{b}_1-Z\hat{b}_2)\frac{|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}+(|a|^2-|v_2|^2)X}{-|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}-(|a|^2-|v_2|^2)\bar{X}}-X\hat{b}_1-\bar{Z}\hat{b}_3=0$$

$$(-|a|^2|q|^2x^{-2}\hat{b}_4+Z\hat{b}_2)\frac{|q|^2x^{-2}|a|^2(|q|^2-|v_2|^2)+|q|^2\frac{b^2}{x^4}X}{-|q|^2x^{-2}|a|^2(|q|^2-|v_2|^2)-|q|^2\frac{b^2}{x^4}\bar{X}}-|a|^2|q|^2x^{-2}\hat{b}_4+\bar{Z}\hat{b}_3=0$$

也意味著當時 $\hat{a},\hat{d}$ **有解會**

$$\frac{\bar{X}\hat{b}_1+Z\hat{b}_2}{|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}+(|a|^2-|v_2|^2)\bar{X}}=\frac{X\hat{b}_1+\bar{Z}\hat{b}_3}{|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}+(|a|^2-|v_2|^2)X} \qquad (11)$$

$$\frac{|a|^2|q|^2x^{-2}\hat{b}_4-Z\hat{b}_2}{|q|^2x^{-2}|a|^2(|q|^2-|v_2|^2)+|q|^2\frac{b^2}{x^4}\bar{X}}=\frac{|a|^2|q|^2x^{-2}\hat{b}_4-\bar{Z}\hat{b}_3}{|q|^2x^{-2}|a|^2(|q|^2-|v_2|^2)+|q|^2\frac{b^2}{x^4}X} \qquad (12)$$

其中解為

$$\hat{a}=\frac{X\hat{b}_1+\bar{Z}\hat{b}_3}{|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}+(|a|^2-|v_2|^2)X}\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

$$\hat{d}=\frac{|a|^2|q|^2x^{-2}\hat{b}_4-\bar{Z}\hat{b}_3}{|q|^2x^{-2}|a|^2(|q|^2-|v_2|^2)+|q|^2\frac{b^2}{x^4}X}\ldots\ldots\ldots(14)$$

我們假設當已經平衡化時(亦即 $\hat{a},\hat{d}$ **有解)**

$X=\bar{X}$ 且 $Z\hat{b}_2=\bar{Z}\hat{b}_3$ **將滿足**(11),(12)**兩式**

可知

$$aw_0q^2=\bar{a}\bar{w}_0\bar{q}^2 \text{ 且 } v_2=\bar{v}_2 \text{ 且 } aw_0=\bar{a}\bar{w}_0$$

所以可知已經平衡化時有

$$g^2\in\Re \text{ 且 } w_0^2q\in\Re$$

從上面的推導，我們可以推得下列定理。

定理 3.8 如果定理 3.6 為平衡化實現(亦即 $P=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$**，** $Q=\begin{bmatrix} \hat{a} & 0 \\ 0 & \hat{d} \end{bmatrix}$)

則有 $g^2 \in \Re$ **且** $w_0^2 q \in \Re$。

推論 3.9 當定理 3.6 為平衡化實現且 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$**，** $Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

若且為若 $g=\overline{g}\in\Re$ 。

證明: 我們首先可以驗算出

$$
\begin{aligned}
&(|a|^2-|v_2|^2)+b^2=-|q|^2x^{-2}R^2-Q^2R^2=b_1\\
&(|q|^2-|v_2|^2)+|q|^2\frac{b^2}{x^4}=-|v_2|^2+|q|^2x^{-2}(v_2+\overline{v_2}-|q|^2x^{-2}-|w_0|^2Q^2)=b_4
\end{aligned}
\tag{15}
$$

及

$$
b_2=(w_0qx^{-1}R)(v_2-|q|^2x^{-2}-Q^2)=\overline{w_0}\,|q|^2\frac{b}{x^2}-w_0q|q|^2\frac{b}{x^4}
\tag{16}
$$

從(9)**式中可知當** $a=1$ **有**

$$
a=\frac{Xb_1-Zb_2}{|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}+(|a|^2-|v_2|^2)X}=1=\frac{(|a|^2-|v_2|^2)X+b^2X-Zb_2}{(|a|^2-|v_2|^2)X+|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}}
$$

$\Leftrightarrow$

$$
b^2X-Zb_2=|a|^2|q|^2\frac{b^2}{x^2}
$$

$$
\Leftrightarrow\qquad w_0gb^2-bb_2=\overline{a}\,\overline{g}\frac{b^2}{x^2}
\tag{17}
$$

將(16)**代入**(17)**整理過後，將可以得到**

$$\overline{w}_0\overline{g}-w_0|q|^2x^{-2}+\overline{w}_0\overline{g}|q|^2x^{-4}=v_1gx^{-2}-w_0g^2x^{-2}$$

$\Leftrightarrow$

$$\overline{w_0q}+x^{-2}(-v_1q+w_0q^2-w_0|q|^2+\overline{w_0q}|q|^2x^{-2})=0$$

$\Leftrightarrow$

$$(-v_1q+w_0q^2-w_0|q|^2+\overline{w_0q}|q|^2x^{-2})=(-\overline{w_0q})x^2$$

代入$x^2=\frac{1}{2}(|v_1|+\sqrt{|v_1|^2-4|q|^2})$, $x^{-2}=\frac{|v_1|-\sqrt{|v_1|^2-4|q|^2}}{2|q|^2}$

$$(-v_1q+w_0q^2-w_0|q|^2+\overline{w_0q}|q|^2\frac{|v_1|-\sqrt{|v_1|^2-4|q|^2}}{2|q|^2})=(-\overline{w_0q})\frac{1}{2}(|v_1|+\sqrt{|v_1|^2-4|q|^2})$$

$\Leftrightarrow$

$$(v_1-w_0q)(\overline{q}-q)=0$$

即$v_1=w_0q$**或**$\overline{q}=q$。

但是若$v_1=w_0q$**，則**$|v_1|^2=v_1\overline{v_1}=w_0q\overline{w_0q}=|q|^2$**帶入**$x^2$**明顯不合。**

$\Leftrightarrow$

$$\overline{q}=q。$$

同理從(10)**式中可知當** $d=1$**有相同結果。**

對於$Q=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$**我們代入**(13)**，**(14)**有相同結果。** ■

4 結論與展望

本文得到一個結論，若 Agler、Yeh 和 Young 於 2003 年提出此種插值問題之實現式本身就即是平衡化實現，則有 $g^2 \in \Re$ 且 $w_0^2 q \in \Re$。但是若考慮一般的情況下，也就是當 $(t,q)=(z_1+z_2, z_1 z_2) \in \operatorname{int}\Gamma_2$，其中 $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$，由本論文得到的結論得知並非本身就是一個平衡化實現。

我們得知定理 3.6 的插值問題為 $(s_1,0),(s_2,0) \in \operatorname{int}\Gamma_2$，我們希望未來的可能研究方向能將插值問題拓寬為 $(s_1,p_1),(s_2,p_2) \in \operatorname{int}\Gamma_2$，並且將插值問題之實現式做平衡化實現。