

東海大學經濟學系碩士班

碩士論文

結構性改變下 Black-Scholes 與 Hull-White 評
價模型之應用 - 以台灣股價指數選擇權為例



指導教授：陳文典 博士

研究生：林慧芳

中華民國九十五年六月

摘要

多數實證研究所使用的波動估計模型，皆隱含假設在樣本觀察期間內，波動（或波動的參數）為固定不變，此隱含假設了市場結構是沒有發生改變，也就是波動路徑的形式是一致的，本研究認為此隱含假設其實並不盡合理。因此，本文將傳統計量方法中，對於結構性改變之檢定運用至此情況，以檢測樣本期間內是否存在著結構性改變。若確實存有結構性改變，則找出結構性改變之時間點，據此將研究期間加以分割，求得並非永遠是固定不變之待估參數，進而求出更適合模型的波動，以增加模型的績效。

本研究以 Black-Scholes 與 Hull-White 兩評價模型分別搭配歷史波動與 GARCH 模型，對台灣股價指數選擇權進行實證研究，所得之實證結果如下：

- (1) 在樣本期間內，對歷史波動模型，本文找出了 3 個結構性改變時間點，運用在 Black-Scholes 模型下，發現除了遠月賣權之少數情形外（例如深價內與價內），平均而言，“考慮結構性改變後”之訂價誤差明顯小於“不考慮結構性改變”。
- (2) 對 GARCH 模型，則找出了 1 個結構性改變點將全樣本區分為 2 個區段，運用到 Hull-White 評價模型下，也有同樣之結論，即“考慮結構性改變”能明顯改善模型的績效，並降低訂價誤差。。

自從 Black, F., and M. Scholes，在 1973 年發表了著名的 B-S 模型後，後續許多學者為了減少訂價誤差、改善模型，無不費盡心思；但在繁複的數學代價下，所獲得的可能只是誤差的些微改善。在此本文提供了另一種思維來增進績效，我們不改變先天模型的設定，而是從後天實務操作上著手做修改。

關鍵字：台灣股價指數選擇權、結構性改變、Black-Scholes 模型、Hull-White 模型、GARCH 模型。

目錄

第一章 研究動機、目的與本文架構	1
第一節 研究動機與目的.....	1
第二節 本文架構.....	1
第二章 文獻回顧	3
第三章 研究方法	4
第一節 選擇權評價模型.....	4
第二節 波動估計模型.....	10
第三節 定價模型績效評估之方法.....	11
第四節 波動結構性改變之檢定方法.....	11
第四章 實證研究	13
第一節 資料來源與處理.....	13
第二節 GARCH (p ,q) 的認定及估計 GARCH 參數.....	14
第三節 不考慮結構性改變下之訂價誤差.....	14
第四節 Structure Change.....	16
第五節 考慮結構性改變後之訂價誤差.....	17
第五章 結論與建議	19
第一節 研究結論.....	19
第二節 對後續研究之建議.....	20
參考文獻	21
附錄一	23
附錄二	27
附錄三	29
附圖	30

表目錄

(表 1) 以不同時間序列 (p,q) 模型計算之 AIC、BIC	14
(表 2) 估計 GARCH (1,1) 參數.....	14
(表 3) 不考慮結構性改變下的 MAPE.....	15
(表 4) 不考慮結構性改變下的 RSMPE.....	15
(表 5) F-test 檢定結果.....	16
(表 6) 各區間估計所得之波動.....	16
(表 7) 各子區間估計所得之波動參數.....	17
(表 8) “不考慮結構性改變”與“考慮結構性改變後”的 MAPE	18
(表 9) “不考慮結構性改變”與“考慮結構性改變後”的 RSMPE	18

圖目錄

圖 1 Wald-test 之 χ^2 值.....	16
---------------------------------	----

第一章 研究動機、目的與本文架構

第一節 研究動機與目的

自從 Black, F., and M. Scholes, 在 1973 年發表了著名的 B-S 模型後，經過後來許多學者的不斷發展、放寬假設條件，衍生出許多更符合現實世界卻也更複雜的模型，例如：隨機波動性模型(stochastic volatility option model)，如 Hull-White (1987) Wiggins(1987) Scott(1987)及 Heston(1993)；隨機利率模型(stochastic interest rate option model)，如 Merton (1973) Amin & Jarrow (1992)；隨機波動性與跳躍擴散模型 (stochastic volatility and poisson jump diffusion option model)，如 Bates (1996a) 及 Scott (1997) 等。

但在諸多種評價模型，波動度始終為衍生性金融商品評價公式中，最根本、重要的參數之一；對於波動的估計常見的有：歷史波動模型、GARCH 模型、GJR-GARCH 模型、隱含波動性模型等。在實證研究上，也常有文獻討論何種評價模型應搭配何種波動性模型，除比較各評價模型的績效外，也比較各波動估計模型之間的優劣。但多數實證研究使用的波動估計模型，皆隱含假設在樣本觀察期間內，波動（或波動的參數）為固定不變，例如：在 GARCH (1,1) 模型中 ($\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$)，假設在樣本觀察期中 ω 、 α 、 β 為固定不變；而本研究認為此一假設其實並不盡合理。

本文認為若市場中曾發生過某種衝擊，則此衝擊可能會改變波動路徑(path) 的形式，即發生結構性改變(structure change)，因此，本文欲將傳統計量方法中，對於結構性改變之檢定運用至此情況，以檢測樣本期間內是否存在結構性改變。若確實存有結構性改變，則找出結構性改變之時間點，據此將研究期間加以分割，求得並非永遠是固定不變之待估參數，進而求出更適合模型的波動，以達增加模型的績效，降低訂價誤差之目的。

第二節 本文架構

本論文共分成五章，各章的內容簡述如下：第一章是緒論，說明本研究之研究動機、目的及本文架構；第二章是文獻回顧，介紹國內學者對台灣股票指數選擇權定價的實證研究，包括所使用的評價模型及搭配的波動性模型；第三章是研究方法，略述本研究中所使用的評價模型及波動估計模型，並介紹本研究關於結

構性改變的檢定過程；第四章則是實證研究，除略述資料之來源及處理方法外，最主要之重點之於比較“不考慮結構性改變”與“考慮結構性改變後”之訂價誤差；最後一章則為結論與建議，對於“考慮結構性改變後”之績效評估歸納出結論，並對未來可能再研究之方向提出建議。

第二章 文獻回顧

本章略述國內學者對台灣股票指數選擇權定價的實證研究，包括所使用的評價模型及搭配的波動性模型。

(1)陳浚泓(2003)以台灣股價指數選擇權為標的，採用 Black-Scholes 模型、Hull-White(1987)模型及 Heston(1993)模型三種模型分別配合歷史波動性與 GJR GARCH 波動性進行實證研究，衡量及比較理論價格之誤差，並進行誤差原因的分析。結果指出：對近月台股指數選擇權，不論是利用何種模型配合何種波動度，對價平、價內或價外選擇權而言，理論價都高估了市場價格。GJR GARCH 波動性模型及隨機波動性模型皆並未優於歷史波動性模型。在誤差來源的分析上，價內程度、存續期間、標的股價報酬波動性皆存在顯著的線性關係。

(2)關旭東(2004)以台灣股價指數選擇權為標的，用 Hull-White(1987)模型分別搭配隱含波動度及 GJR GARCH 波動度，探討隨機波動度評價模型是否優於 Black-Scholes 模型。結果發現：近月時，價內程度愈高，使用 Hull & White 模型搭配 GJR GARCH 效果最佳。而價外程度愈高時，則以使用 Black-Scholes 模型配合隱含波動度效果最佳。

(3)陳昶均(2004)以台灣股價指數選擇權為標的，採用 Black-Scholes 模型分別配合歷史波動性、EWMA、GARCH、等權重加權平均隱含波動性、VEGA 加權平均隱含波動性及彈性加權平均隱含波動性等六種波動性模型來計算其理論價格。結果發現：以 VEGA 加權平均隱含波動性模型所計算之理論價格最接近市場價格。而短天期選擇權方面，整體而言，隱含波動性模型的評估績效表現較時間序列模型佳。

第三章 研究方法

第一節 選擇權評價模型

本節將介紹並推導在本研究中所使用的評價模型。

一、Black-Scholes Model

為了找出由標的股價所得選擇權價值的公式，對股票市場、選擇權市場作之理想假設如下：

- a) 短期利率為已知且固定的。
- b) 在連續時間內，股價服從其變異率 (variance rate) 與股價平方成比例之 Ramdon walk。因而，在某已定期間結束時，股價服從對數常態分配。股票報酬之變異率為固定不變。
- c) 不分配股利或其它分配。
- d) 選擇權為歐式選擇權。
- e) 沒有交易成本。
- f) 為了買或持有股票，可用短期利率借入有價證券價格之任一部份。
- g) 對“放空”沒有限制。未持有有價證券之賣方，只是單純接受買方有價證券之價格，等未來某一日期時支付買方等於該日期證券價格之金額進行平倉。

且標的股價之隨機過程可寫為：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1)$$

其中

- S：標的股票價格
- μ ：標的股票瞬時報酬率之期望值
- σ ：標的股票瞬時報酬率之標準差
- dz：為 standard Wiener Process

在這些假設下，選擇權價值只受標的股價、時間及被取作已知常數之變數的影響。故令選擇權的價格函數為 $f(S, t)$ 。

對 $f(S, t)$ 全微分，運用 *Itô's Lemma*，並將(1)式代入，

可得：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (2)$$

然後建構一可將 Wiener Process dz 部份 (risk 部份) 消除之投資組合，
即購買股價 S 之股票 $\frac{\partial f}{\partial S}$ 單位，賣價格 $f(S, t)$ 之選擇權 1 個單位，
則此投資組部位內之資產價值 V 為：

$$V = \frac{\partial f}{\partial S} S - 1 \cdot f(S, t) \quad (3)$$

在 Δt 短期間內，此投資組合價值 V 之變化量為：

$$\Delta V = \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S - 1 \cdot \Delta f \quad (4)$$

若將
$$\begin{cases} \Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \\ \Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \end{cases} \quad \text{代入(4)式，}$$

整理後可得：

$$\frac{\partial f}{\partial S} \Delta S - \Delta f = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (5)$$

若市場之無風險利率為 r ，且在 arbitrage free principle 下，
則

$$\Delta V = V \cdot r \cdot \Delta t \quad (6)$$

$$\text{即} \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = \left(\frac{\partial f}{\partial S} S - f \right) \cdot r \cdot \Delta t \quad (7)$$

重新整理得選擇權價值之偏微分方程

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + r \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (8)$$

(8)式即為 Black-Scholes Merton equation。

且此時買權及賣權的邊界條件分別為：

$$f(S_T, T) = \begin{cases} S_T - K & \text{if } S_T \geq K \\ 0 & \text{if } S_T < K \end{cases}; \quad f(S_T, T) = \begin{cases} K - S_T & \text{if } K \geq S_T \\ 0 & \text{if } K < S_T \end{cases}$$

(K 為履約價)

經由變數變化將(8)式轉為一熱傳導方程式，然後分離變數，並運用 Fourier 積分定理，再加上其邊界條件可得偏微分方程(8)式之 closed form solution¹：

$$C = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (9)$$

此即為 Black-Scholes 買權訂價公式
同理，可得賣權訂價公式為：

$$P = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \quad (10)$$

其中

C：為 Call option 的價格

P：為 Put option 的價格

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$N(\bullet)$ ：標準常態累積密度函數

S：標的股價

K：履約價

T-t：存續期間

二、Hull-White Model

衍生性金融商品的價值決定於其標的資產的價格(S)及標的資產之瞬間變異數(V)，

$$\text{且 } dS = \phi Sdt + \sigma Sdw \quad (11)$$

$$dV = \mu Vdt + \xi Vz \quad (12)$$

¹ 詳細推導過程請參附錄一。

其中

S : 標的股票股價

ϕ : 標的股票股價瞬時報酬率之期望值

σ : 標的股票股價瞬時報酬率之標準差

$$V = \sigma^2$$

μ : V 的瞬時報酬率之期望值

ξ : V 的瞬時報酬率之標準差

dw, dz : 皆為 standard Wiener Process , 且 dw 與 dz 之相關係數為 ρ

依據 Garman (1976) , 某證券 f 的價格 (決定於狀態變數 θ_i) 須滿足以下的微分方程 :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - rf = \sum_i \theta_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} [-\mu_i + \beta_j (\mu^* - r)] \quad (13)$$

其中

σ_i : θ_i 之瞬時標準差

ρ_{ij} : θ_i 與 θ_j 之瞬時相關係數

μ_i : θ_i 之趨勢率

β_i : 狀態變數報酬率 ($\frac{d\theta}{\theta}$) 對市場投資組合跑複迴歸之向量

係數值

μ^* : 市場投資組合之瞬時報酬率

r : 無風險利率向量內的元素

又當變數 i 是被交易時 , 它會滿足 (N+1) 因子 CAPM , 且第 i 個元素在(13)式右邊的值會等於 $-r\theta_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i}$;

而在此模型中 , 有 2 個狀態變數 S 和 V , 其中 S 是被交易的 , 故(13)式可改為 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + 2\rho\sigma^3 \xi S \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial V} + \xi^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \right] - rf \\ & = -rS \frac{\partial f}{\partial S} - [\mu - \beta_v (\mu^* - r)] \sigma^2 \frac{\partial f}{\partial V} \end{aligned} \quad (14)$$

其中

ρ : 為 S 和 V 之瞬時相關係數

β_v : 為 $\frac{dV}{V}$ 對市場投資組合跑迴歸之向量係數值

假設 $\beta_v(\mu^* - r) = 0$ (波動的系統性風險為 0),

則此衍生性資產須滿足 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + 2\rho\sigma^3 \xi S \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial V} + \xi^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \right] - rf \\ = -rS \frac{\partial f}{\partial S} - \mu\sigma^2 \frac{\partial f}{\partial V} \end{aligned} \quad (15)$$

(15)式即為 Hull & White 之偏微分方程式。

若再假設 $\rho = 0$, 則可利用 “ risk-neutral valuation ” 來推出歐式

選擇權之解析解 , 即 $f(S_t, \sigma_t^2, t)$ 必等於用無風險利率折現的期末 f 預

期值 ,

故

$$f(S_t, \sigma_t^2, t) = e^{-r(T-t)} \int f(S_T, \sigma_T^2, T) P(S_T | S_t, \sigma_t^2) dS_T \quad (16)$$

且若 \bar{V} 為衍生性商品存續期間變異數之平均值 ,

$$\bar{V} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_\tau^2 d\tau \quad (17)$$

則 S_T 的條件密度函數 $p(S_T | \sigma_t^2)$ 可改寫為 :

$$p(S_T | \sigma_t^2) = \int g(S_T | \bar{V}) \cdot h(\bar{V} | \sigma_t^2) d\bar{V} \quad (18)$$

其中

$g(S_T | \bar{V})$: 為 S_T 的條件密度函數

$h(\bar{V} | \sigma_t^2)$: 為 \bar{V} 的條件密度函數

將(18)式代入(16)式 ,

可得

$$f(S_t, \sigma_t^2, t) = \int \left[e^{-r(T-t)} \int f(S_T) g(S_T | \bar{V}) dS_T \right] h(\bar{V} | \sigma_t^2) d\bar{V} \quad (19)$$

且既然 $\rho = 0$ (S 和 V 為瞬時無關) ,

$$\text{則 } \log \left(\frac{S_T}{S_0} | \bar{V} \right) \sim N \left(rT - \frac{\bar{V}T}{2}, \bar{V}T \right) \quad (20)$$

故(19)式裡面的 “ $e^{-r(T-t)} \int f(S_T) g(S_T | \bar{V}) dS_T$ ” 就是 Black-Scholes 對一變異平均數為 \bar{V} 之證券的選擇權訂價；若為買權，則表示為 $C(\bar{V})$ ¹。

其中

$$C(\bar{V}) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\bar{V}}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\bar{V}}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}}$$

因而，(19)式可寫為

$$f(S_t, \sigma_t^2, t) = \int C(\bar{V}) h(\bar{V} | \sigma_t^2) d\bar{V} \quad (21)$$

且若將 $C(\bar{V})$ 對變異平均數的期望值 \bar{V} 做 Taylor 展開並代回(21)，可得

$$f(S_t, \sigma_t^2) = C(\bar{V}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{V}^2} \Big|_{\bar{V}} \text{Var}(\bar{V}) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C}{\partial \bar{V}^3} \Big|_{\bar{V}} \text{Skew}(\bar{V}) + \dots \quad (22)$$

並將 Boyle and Emanuel (1985) 所導出 $\mu = 0$ 時， \bar{V} 之各級動差代入(22)式，可得

$$\begin{aligned} f(S, \sigma^2) = & C(\sigma^2) + \frac{1}{2} \frac{S \sqrt{T-t} N'(d_1) (d_1 d_2 - 1)}{4\sigma^4} \times \left[\frac{2\sigma^4 (e^k - k - 1)}{k^2} - \sigma^4 \right] \\ & + \frac{1}{6} \frac{S \sqrt{T-t} N'(d_1) [(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2)]}{4\sigma^4} \\ & \times \sigma^6 \left[\frac{e^{3k} - (9 + 18k)e^k + (8 + 24k + 18k^2 + 6k^3)}{3k^3} \right] + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $k = \xi^2 (T-t)$ ，且時間下標已省略；

¹ $e^{-r(T-t)} \int f(S_T) g(S_T | \bar{V}) dS_T = C(\bar{V})$ 之推導請參附錄二。

(23)式即為 Hull-White 在 $\rho=0$, $\mu=0$ 下之買權訂價公式
同理 , 可得 Hull-White 在 $\rho=0$, $\mu=0$ 下之賣權訂價公式 :

$$\begin{aligned}
 f(S, \sigma^2) = & P(\sigma^2) + \frac{1}{2} \frac{S\sqrt{T-t}N'(d_1)(d_1d_2-1)}{4\sigma^4} \times \left[\frac{2\sigma^4(e^k - k - 1)}{k^2} - \sigma^4 \right] \\
 & + \frac{1}{6} \frac{S\sqrt{T-t}N'(d_1)[(d_1d_2-3)(d_1d_2-1) - (d_1^2 + d_2^2)]}{4\sigma^4} \quad (24) \\
 & \times \sigma^6 \left[\frac{e^{3k} - (9+18k)e^k + (8+24k+18k^2+6k^3)}{3k^3} \right] + \dots
 \end{aligned}$$

第二節 波動估計模型

因為在 B-S 評價模型中, 假設 “ 在某已定期間, 股票報酬率之變異數為一固定常數 ”, 且為強調本研究的重點, 所以本研究只採用簡單歷史資料來估計 B-S 評價模型之波動 (為方便起見, 在本文中仍稱為歷史波動模型, 但須注意此與波動隨時間變動 (σ_t) 之歷史波動模型的區別); 而在 Hull-White 評價模型中認為股票報酬率之變異數為一不隨時間固定之隨機變數, 故本研究採用 GARCH 模型來估計 Hul-White 評價模型中之波動度。

一、歷史波動模型

$$\begin{aligned}
 u_t &= \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \\
 \sigma^2 &= \frac{\sum (u_t - \bar{u})^2}{n-1}
 \end{aligned}$$

其中

- S_t = 第 t 日的股價
- u_t = 第 t 日的連續複利報酬率
- n = 觀察值個數
- \bar{u} = 平均日報酬率

二、GARCH 模型

Bollerslev(1986)考慮落後期的條件變異數, 將其納入 ARCH 模型中擴展成一般化自我條件迴歸變異數模型(GARCH)。且為求估計效率最大, 在本研究中一律採最大概似法來估計 GARCH 之參數。

GARCH(p,q) 模型結構可表示為：

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = u_t = c + \varepsilon_t$$

其中

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, p$$

$$\beta_j \geq 0, j = 1, \dots, q$$

第三節 定價模型績效評估之方法

定價模型績效評估主要是在比較理論價格與實際市場價格之間的差異，本研究採用平均絕對值百分比誤差與均方根百分比誤差做為衡量不同模型績效之方法。

(一) 平均絕對百分比誤差(mean absolute percentage error, MAPE)

MAPE 能對誤差的程度予以加總，並不會因為誤差之正負而相互抵消。

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum \left(\frac{|\text{市場價格} - \text{理論價格}|}{\text{市場價格}} \right)$$

(二) 均方根百分比誤差(root squared mean percentage error, RSMPE)

RSMPE 的特色是對誤差程度較大的資料，給予懲罰。

$$RSMPE = \left[\frac{1}{n} \sum \left(\frac{\text{市場價格} - \text{理論價格}}{\text{市場價格}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

第四節 波動結構性改變之檢定方法

本節將介紹在本研究如何執行結構性改變之檢定，進而找出資料結構性改變的時間點。但因為在此我們並不知結構性改變的確切時間點，所以必須對於樣本期間內的所有觀察點一一檢測。

本研究對於歷史波動模型的檢定方法採用 F-test；

而對於 GARCH 模型則採用 Wald-test。

一、 F-test

將總樣本數 N ，分別以第 X 筆 ($X=X_1, X_1+1, X_1+2, \dots, N-X_1$) 資料為基準，將全樣本分割為兩獨立樣本 N_1 (第 1 筆~第 X_1 筆) 及 N_2 (第 X_1+1 筆~第 N 筆)，

且 $\hat{\sigma}_1^2$ 及 $\hat{\sigma}_2^2$ 分別為樣本 N_1 、 N_2 變異數 σ_1^2 及 σ_2^2 之估計量，

在 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 之虛無假設下，

檢定統計量為

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2 / \sigma_1^2}{\hat{\sigma}_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{(N_1-1), (N_2-1)}$$

若 H_0 顯著不成立，則認為 N_1 之最末點為一結構性改變之時間點；且將 N_2 作為新的總樣本 N ，並重覆以上之檢定步驟；直到無顯著拒絕 H_0 為止。

二、 Wald-test

將總樣本數 N ，分別以第 X 筆 ($X=X_1, X_1+1, X_1+2, \dots, N-X_1$) 資料為基準，將全樣本分割為兩獨立樣本 N_1 (第 1 筆~第 X_1 筆) 及 N_2 (第 X_1+1 筆~第 N 筆)，

N_1 樣本期間變異數 σ_1^2 之參數為 θ_1 ，

N_2 樣本期間變異數 σ_2^2 之參數為 θ_2 ，

又 $\hat{\theta}_1$ 及 $\hat{\theta}_2$ 分別為 θ_1 、 θ_2 之一致、漸近常態估計量，

且其漸近變異數分別為 V_1 及 V_2

則在 $H_0: \theta_1 = \theta_2$ 之虛無假設下，

$(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)$ 之期望期為 0，漸進共變異數距陣為 $(V_1 + V_2)$

其檢定統計量為

$$W = (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)' (\hat{V}_1 + \hat{V}_2)^{-1} (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) \sim \chi_k^2$$

共可計算得 $(n-2 X_1+1)$ 個 χ^2 值。

比較所有的 χ^2 值，最大者即為結構性改變之點。

第四章 實證研究

第一節 資料來源與處理

本研究以台灣股價指數選擇權之買權及賣權進行實證研究，其所需資料及處理，分述如下：

一、台灣加權股價指數選擇權

資料來源為台灣期貨交易所選擇權每日行情下載區¹，分析期間為 2004 年 7 月 1 日至 2005 年 7 月 31 日；且為確保資料實證操作的合理與客觀性，故將成交量為 0、到期日未滿 5 日及選擇權收盤價 5 元以下者捨去。

對於選擇權價位分類之標準參考自陳浚泓（2003），其文指出由於台灣加權股價指數選擇權履約價之間隔為 100 點，因此若欲使用 Bakshi, Cao, and Chen（1997）之分類標準，將會有多個相同價位之選擇權，十分不易選取適當相對應的價位；因此其文為與 Bakshi, Cao, and Chen 分類之定義保持一般性，故定義以最接近加權股價指數之履約價作為價平買（賣）權，價平買（賣）權履約價上 200 點為價外買權（價內賣權），價平買（賣）權履約價下 200 點為價內買權（價外賣權），價平買（賣）權履約價上 400 點為深價外買權（深價內賣權），價平買（賣）權履約價下 400 點為深價內買權（深價外賣權）。

並依據距到期日長短，將選擇權資料再區分為近月選擇權（距到期日小於 30 天）及遠月選擇權（距到期日大於 30 天，小於 60 天）。

二、台灣加權股價指數

台灣加權股價指數為台灣股價指數選擇權之標的資產，資料來源為台灣證券交易所的統計報表下載區²，選擇期間仍為 2004 年 7 月 1 日至 2005 年 7 月 31 日，共計 268 個交易日。

三、無風險利率

本研究採用與台灣股價指數選擇權樣本同期間之銀行同業拆款利率作為無風險利率，資料來源為中央銀行³。

¹ <http://www.taifex.com.tw/>

² <http://www.tse.com.tw/ch/index.php>

³ <http://www.cbc.gov.tw/>

第二節 GARCH (p , q) 的認定及估計 GARCH 參數

一、GARCH(p, q)的認定

為了找出最適合本研究的 GARCH (p, q)模型，我們將各(p, q)模型所計算而得 AIC、BIC 之值列入表 1。由表 1 可得雖然 AIC 選擇 GARCH(1, 2)，而 BIC 選擇 GARCH(1, 1)；但為避免過度認定，所以在精簡原則下，最合適本研究時間序列模型為 GARCH (1,1)。

(表 1) 以不同時間序列 (p, q) 模型計算之 AIC、BIC。

	GARCH(1, 1)	GARCH(1, 2)	GARCH(2, 1)	GARCH(2, 2)
AIC	-1761.310	-1762.342*	-1761.655	-1760.438
BIC	-1746.946*	-1744.387	-1743.700	-1738.892

* 號為 AIC 或 BIC 值最小者

二、GARCH 參數的估計

參數估計是利用 S-PLUS 6.2 軟體所求得，樣本期間之 GARCH 模型如下：

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = c + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

估計所得如表 2，且由表 2 之結果，可再求得 $\xi = 2.178E-05$ ¹

(表 2) 估計 GARCH (1,1) 參數

Est.Par	Value	Std.Error	t value
c	6.13×10 ⁻⁰⁵	5.42×10 ⁻⁰⁴	0.113
ω	2.81×10 ⁻⁰⁷	4.27×10 ⁻⁰⁶	0.06587
α	3.30×10 ⁻⁰³	1.18×10 ⁻⁰²	0.28081
β	9.92×10 ⁻⁰¹	6.72×10 ⁻⁰²	14.76129

第三節 不考慮結構性改變下之訂價誤差

本節將比較 Black-Scholes 模型搭配歷史波動模型與 Hull-White 模型搭配 GARCH 模型所得理論價格與實際市場價格之誤差。對於誤差的衡量本研究採用

¹ 之計算公式請參附錄三

(1)平均絕對百分比誤差(mean absolute percentage error , MAPE) 與(2)均方根百分比誤差(root squared mean percentage error , RSMPE), 衡量結果如下：

(1) 平均絕對百分比誤差(mean absolute percentage error , MAPE)

平均絕對百分比誤差衡量理論價格與市場價格之絕對差距百分比，且不會因理論價格高估或低估而互相抵銷，因而能找出最接近市場價格之定價模型。

由表 3 可得，除了遠月賣權之深價內與價內之情形外，Hull-White 模型皆優於 Black-Scholes 模型。

(表 3) 不考慮結構性改變下的 MAPE

MAPE	近月買權		遠月買權		近月賣權		遠月賣權	
	B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W
深價內	0.0634	0.0622	0.1208	0.1135	0.1036	0.1031	0.0759	0.0780
價內	0.0978	0.0897	0.2050	0.1811	0.1664	0.1620	0.1168	0.1195
價平	0.2821	0.2395	0.3905	0.3259	0.4090	0.3755	0.2194	0.2192
價外	0.6060	0.4937	0.7016	0.5494	0.7726	0.6820	0.3930	0.3875
深價外	0.6148	0.5603	0.9101	0.6513	0.7526	0.7469	0.5713	0.5449

註：粗體數字為 B-S 與 H-W 兩者間 MAPE 較小者。

(2) 均方根百分比誤差(root squared mean percentage error , RSMPE)

均方根百分比誤差的特色是能對誤差程度較大的資料，給予懲罰。

由表 4 所得之結果仍與(1)平均絕對百分比誤差之結果相吻合，即除了遠月賣權之深價內與價內之情形外，Hull-White 模型皆優於 Black-Scholes 模型。

(表 4) 不考慮結構性改變下的 RSMPE

RSMPE	近月買權		遠月買權		近月賣權		遠月賣權	
	B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W
深價內	0.0851	0.0835	0.1880	0.1779	0.1282	0.1273	0.0964	0.0984
價內	0.1328	0.1215	0.3107	0.2781	0.2064	0.1992	0.1450	0.1469
價平	0.3457	0.2901	0.5540	0.4646	0.5513	0.4914	0.2521	0.2502
價外	0.7475	0.5835	0.9856	0.7631	1.0201	0.8730	0.4419	0.4225
深價外	0.6829	0.6218	1.2597	0.8711	0.7945	0.7864	0.6275	0.5832

註：粗體數字為 B-S 與 H-W 兩者間 RSMPE 較小者。

第四節 Structure Change

一、歷史波動模型 - F-test

為使分割後樣本所估計而得出之參數具有良好的統計特性，因而分割之獨立樣本數不可過少（在本研究中最少取 30 筆，即 $X_1=30$ ）。

表 5 為檢定過程最後所得出的結果；如表 5 所示本檢定過程最後得出三個結構性改變之時間點將全樣本分為四段樣本區間，分別為第 1 至第 36 筆、第 37 至第 73 筆、第 74 至第 103 筆及第 104 至第 268 筆。各子區間估計所得之歷史波動（ σ ）如表 6。

（表 5）F-test 檢定結果

est.VAR1	N_1	est.VAR2	N_2	F 值	$F_{0.975}(N1-1,N2-1)$	$F_{0.025}(N1-1,N2-1)$	H_0
1.42×10^{-04}	36	7.19×10^{-05}	232	1.981266	1.586361	0.57273	reject
1.12×10^{-04}	37	6.48×10^{-05}	195	1.723061	1.591456	0.57456	reject
1.19×10^{-04}	30	5.54×10^{-05}	165	2.15556	1.666727	0.53603	reject

（表 6）各區間估計所得之波動

	全樣本 [1~268]	區間 1 [1~36]	區間 2 [37~73]	區間 3 [74~103]	區間 4 [104~268]
σ	9.01×10^{-03}	1.19×10^{-02}	1.06×10^{-02}	1.09×10^{-02}	7.44×10^{-03}

二、GARCH 模型 - Wald-test

因為時間序列資料之長度不可過短，所以分割之最少樣本在此取 100 筆（即 $X_1=100$ ），總樣本 268 筆，計算共得 69 個 χ^2 值；且由圖 1 可得最大之 χ^2 值為第 61 個 χ^2 （ $N_1: 1 \sim 160$ ， $N_2: 161 \sim 268$ ），故推測 GARCH 模型結構性改變之時間點發生在第 160 筆資料左右。並以第 160 筆資料為基準點將全樣本分為二段樣本區間，再分別利用 S-PLUS 6.2 軟體估算樣本區間之 GARCH 模型參數，所得結果如表 7 所示。

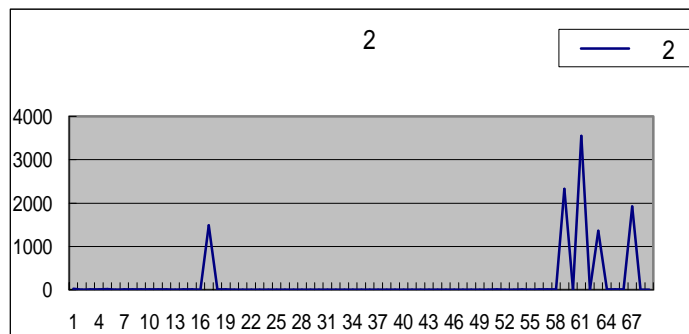


圖 1 Wald-test 之 χ^2 值

(表 7) 各子區間估計所得之波動參數

區間 1[1~160]				區間 2[161~268]			
Est.Par	Value	Std.Error	t value	Est.Par	Value	Std.Error	t value
c	4.13×10^{-04}	7.18×10^{-04}	0.57575	c	7.68×10^{-05}	7.97×10^{-04}	0.09639
ω	-3.12×10^{-07}	7.76×10^{-06}	-0.04015	ω	1.15×10^{-04}	8.82×10^{-06}	13.00446
α	4.03×10^{-03}	3.29×10^{-02}	0.12254	α	2.21×10^{-02}	1.06×10^{-02}	2.09074
β	9.97×10^{-01}	1.18×10^{-01}	8.45437	β	$-1.05 \times 10^{+00}$	3.65×10^{-02}	-28.7603
ξ	3.247×10^{-05}			ξ	9.761×10^{-04}		

第五節 考慮結構性改變後之訂價誤差

本節將上節所得“考慮結構性改變後各子區間”估計所得之波動分別代回 Black-Scholes 與 Hull-White 評價模型，計算其訂價誤差；並與“不考慮結構性改變下全樣本”之訂價誤差做比較（表 8 及表 9），並合理預期若樣本觀察期間存在著結構性改變，且經由檢定所找出之改變點為正確改變之時間點，則前者（考慮結構性改變後）之訂價誤差應小於後者（不考慮結構性改變），藉以評證本研究之主旨，即波動或波動之參數並非永遠固定不變。

一、若以表 8 或表 9 主要橫列之上下為主，可比較不考慮結構改變（All）與考慮結構改變後（Sub）之差異。

由表 8 及表 9 可得：

- (1) 在 Black-Scholes 模型下，除了少數情形外（例如遠月賣權之深價內與價內），考慮結構性改變後之訂價誤差明顯小於不考慮結構性改變，有些誤差值甚至下降為不到原來的一半（例如表 8 近月買權之價外，MAPE 由 0.6060 降為 0.2999）。
- (2) 在 Hull-White 模型下，同樣除了遠月賣權之少數情形外，考慮結構性改變後之訂價誤差明顯小於不考慮結構性改變。
- (3) 無論是在 Black-Scholes 或 Hull-White 模型下，只要是愈往深價外（即在買權時，K 愈大於 S；在賣權時，K 愈小於 S），考慮結構性改變所能降低的訂價誤差幅度就愈大。

二、若以表 8 或表 9 主要欄位之左右兩邊為主，可比較 Black-Scholes 與 Hull-White 兩評價模型間之優劣。

由表 8 及表 9 可得：

- (1) 在不考慮結構性改變下，如本章第三節所述，除了遠月賣權之深價內與價內之情形外，Hull-White 模型皆優於 Black-Scholes 模型。
- (2) 而若在考慮結構性改變下，無論近、遠月，買或賣權之深價內及價內，Hull-White 模型仍優於 Black-Scholes 模型；但在價平、價外及

深價外時，則為 Black-Scholes 模型優於 Hull-White 模型。

(表 8) “不考慮結構性改變”與“考慮結構性改變後”的 MAPE

MAPE	訂價模型 區間	近月買權		遠月買權		近月賣權		遠月賣權	
		B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W
深價內	All	0.0634	0.0622	0.1208	0.1135	0.1036	0.1031	0.0759	0.0780
	Sub	0.0635	0.0616	0.1137	0.1097	0.1032	0.1023	0.0852	0.0802
價內	All	0.0978	0.0897	0.2050	0.1811	0.1664	0.1620	0.1168	0.1195
	Sub	0.0858	0.0824	0.1611	0.1541	0.1608	0.1584	0.1258	0.1220
價平	All	0.2821	0.2395	0.3905	0.3259	0.4090	0.3755	0.2194	0.2192
	Sub	0.1648	0.1867	0.2382	0.2430	0.3392	0.3460	0.2171	0.2152
價外	All	0.6060	0.4937	0.7016	0.5494	0.7726	0.6820	0.3930	0.3875
	Sub	0.2999	0.3943	0.3528	0.3609	0.6115	0.6242	0.3699	0.3811
深價外	All	0.6148	0.5603	0.9101	0.6513	0.7526	0.7469	0.5713	0.5449
	Sub	0.4241	0.5091	0.3621	0.4633	0.6612	0.7116	0.5233	0.5463

註：All 表波動是由不考慮結構性改變下全樣本所估算而得；Sub 表波動是由考慮結構性改變後子區間所估算而得；粗體數字為“考慮結構改變後”所得誤差小於“不考慮結構改變”者。

(表 9) “不考慮結構性改變”與“考慮結構性改變後”的 RSMPE

RSMPE	訂價模型 區間	近月買權		遠月買權		近月賣權		遠月賣權	
		B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W	B-S	H-W
深價內	All	0.0851	0.0835	0.188	0.1779	0.1282	0.1273	0.0964	0.0984
	Sub	0.0844	0.0827	0.1736	0.1644	0.1275	0.1266	0.1072	0.1006
價內	All	0.1328	0.1215	0.3107	0.2781	0.2064	0.1992	0.145	0.1469
	Sub	0.1141	0.1115	0.2516	0.2263	0.197	0.1939	0.1563	0.1461
價平	All	0.3457	0.2901	0.554	0.4646	0.5513	0.4914	0.2521	0.2502
	Sub	0.2202	0.2384	0.3794	0.326	0.4539	0.4491	0.2615	0.2471
價外	All	0.7475	0.5835	0.9856	0.7631	1.0201	0.873	0.4419	0.4225
	Sub	0.3856	0.4953	0.55	0.4499	0.9929	0.8553	0.4284	0.4178
深價外	All	0.6829	0.6218	1.2597	0.8711	0.7945	0.7864	0.6275	0.5832
	Sub	0.5068	0.5623	0.5293	0.5407	0.7124	0.753	0.5879	0.5869

註：All 表波動是由不考慮結構性改變下全樣本所估算而得；Sub 表波動是由考慮結構性改變後子區間所估算而得；粗體數字為“考慮結構改變後”所得誤差小於“不考慮結構改變”者。

第五章 結論與建議

第一節 研究結論

在評價模型或估計波動模型的選擇上，本文所取用的皆為最基本且簡化之模型，並且不考慮其他更複雜的情況（例如：在 Hull-White 評價模型時，只取用當 $\rho=0$ 且 $\mu=0$ 時的情況，不考慮 $\rho \neq 0$ 時的情況；在異質變異數模型時，所選擇的為最正常的、一般化的 GARCH，而不考慮其他種變形。），皆因本研究雖有比較各模型間“相對”評價能力的優劣，但最主要著重之焦點仍為：經過結構性改變調整後之模型，其“絕對”評價能力是否能增加，藉以達到減少訂價誤差之目的。

我們合理預期若樣本觀察期間存在結構性改變，且經由檢定所找出之改變點為正確改變之時間點，則經過結構性改變調整後之波動模型，應能更吻合實際波動；那麼代入評價模型中時，“考慮結構性改變後”之訂價誤差應小於“不考慮結構性改變”之訂價誤差。因此本研究以 Black-Scholes 與 Hull-White 兩評價模型分別搭配歷史波動與 GARCH 模型，對台灣股價指數選擇權進行實證研究，所得之實證結果如下：

- (1) 在樣本期間內，對歷史波動模型，本文找出了 3 個結構性改變時間點，運用在 Black-Scholes 模型下，發現除了遠月賣權之少數情形外（例如深價內與價內），平均而言，“考慮結構性改變後”之訂價誤差明顯小於“不考慮結構性改變”。
- (2) 對 GARCH 模型，則找出了 1 個結構性改變點將全樣本區分為 2 個區段，運用至 Hull-White 評價模型下，也有同樣之結論，即除了遠月賣權之少數情形外，考慮結構性改變確實能明顯降低訂價誤差。
- (3) 無論是在 Black-Scholes 或 Hull-White 模型下，只要是愈往深價外（即在買權時， K 愈大於 S ；在賣權時， K 愈小於 S ），考慮結構性改變所能降低的訂價誤差幅度就愈大。可能原因為：對市場上選擇權的買家而言，價外程度愈高，風險的承擔也愈大，因而對價格波動的敏感度也就愈大；因此，“考慮結構性改變後”修正的波動所能改善的幅度也愈大。
- (4) 一般而言，眾人普遍認定 Hull-White 模型（隨機波動模型）優於 Black-Scholes 模型（固定波動模型），但在運用了一個簡單的步驟後 - 考慮結構性改變，我們卻能使得 Black-Scholes 模型（固定波動模型）的績效大幅提升，甚而在某些情況下（價平、價外及深價外）將優於隨機波動模型。

第二節 對後續研究之建議

- (1) 本文總樣本長共 268 筆，但因時間序列模型所需之資料筆數須有一定長度，所以對 GARCH 模型，只找出了 1 個結構性改變點將全樣本區分為 2 個區段，故建議後續研究可將樣本期間拉長，以便能將總樣本分割成更多個子區間，且各子區間之長度不至於過短。
- (2) 在評價模型或估計波動模型的選擇上，本文所取用的皆為最基本且簡化之模型，建議後續研究者可採用其他不同的估計波動模型或運用至其他評價模型。
- (3) 本研究以台灣股價指數選擇權之買、賣權進行實行研究，但因台灣股價指數選擇權之標的為台灣加權股價指數，而台灣之股票市場為淺盤市場，股價波動易過於不理性，故建議後續學者可以國外不同之選擇權市場進行實行研究。

參考文獻

1. 石村貞夫、石村園子 (2004), 細說 Black-Scholes 微分方程式, 鼎茂圖書, 李詩政、吳文峰 譯。
2. 黃昭元(2003), 台灣、美國、日本、香港、中國大陸股價報酬與波動性外溢效果之研究 - 多變量 BEKK-GARCH 模型之應用, 東海大學經濟學系研究所碩士論文。
3. 黃健喬(2004), 選擇權定價與行為分析之探討 - Black and Schoels 模型、隨機波動模型之應用, 東海大學經濟學系研究所碩士論文。
4. 陳浚宏(2003), B-S 模式與隨機波動性定價模式之比較-台灣股價指數選擇權之實證, 成功大學企業管理研究所碩士論文。
5. 陳昶均(2004), 不同波動性估計模型下台指選擇權評價績效之比較, 東吳大學商學院企業管理學系碩士班碩士論文。
6. 關旭東(2004), 隨機波動度下選擇權評價之實證 - 以台灣股價指數選擇權為例, 輔仁大學金融學系研究所碩士論文。
7. Amin, K. and Jarrow, R. (1992), "Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy," *Mathematical Finance*, Vol. 2, pp. 217-237.
8. Bakshi, G., Cao, C. and Chen, Z. (1997), "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models", *Journal of Finance*, Vol.52, pp.2003-2049.
9. Bates, D. (1996), "Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutschemark Options," *Review of Financial Studies*, Vol.9, pp.69-108.
10. Black, F. and Scholes, M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-659.
11. Bollerslev, T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, Vol.31, pp.307-327.
12. Boyle, P. P. and Emanuel, D. "Mean Dependent Options." Working Paper, Accounting Group, University of Waterloo, 1985.
13. Garman, M. B. "A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes." Working Paper No. 50, University of California, Berkeley, 1976.
14. Greene, W. H. (2003), *Econometric Analysis*, 5th ed., N. J.: Prentice-Hall.
15. Heston, S. L. (1993), "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and currency Options," *Review of Financial Studies*, Vol.6, pp.327-343.
16. Hull, J. (2003), *Options, Futures, and Other Derivatives*, 5th ed., N. J.: Prentice-Hall.
17. Hull, J. and White, A. (1987), "The pricing of Options on Assets with Stochastic

- Volatilities,” *Journal of Finance*, Vol. 42, pp.281-300.
18. Merton, R. C. (1973), “Theory of Rational Option Pricing,” *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, No. 1, pp.141-183.
 19. Scott, L. O. (1987), “Option Pricing when the Variance Changes randomly: Theory, Estimation and Testing,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 22, pp.419-438.
 20. Scott, L. O. (1997), “Pricing Stock Options in a Jump-diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Applications of Fourier Inversion Methods,” *Mathematical Finance*, Vol. 7, pp.345-358.
 21. Wiggins, J. B. (1987), “Option Values under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Evidence,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 19, pp.351-372.

附錄一

本附錄推導由 Black-Scholes 偏微分方程，再加上其邊界條件，推導出 Black-Scholes 買權訂價公式¹。

推導過程如下：

$$\text{Black-Scholes 偏微分方程：} rf(S, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + r \frac{\partial f}{\partial S} S \quad 1$$

$$\text{邊界條件：} f(S_T, T) = \begin{cases} S_T - K & \text{if } S_T \geq K \\ 0 & \text{if } S_T < K \end{cases} ,$$

Step 1. 變數變換：

$$\text{令} \begin{cases} u = \ln \frac{S}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \\ x = (T - t) \end{cases} , \text{ 將變數 } (S, t) \text{ 轉成變數 } (u, x) ,$$

$$\text{則 } f(S, t) = e^{-r(T-t)} \cdot y(u, x)$$

$$= e^{-rx} \cdot y(u, x)$$

$$\text{將} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \\ = e^{-rx} \left[- \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) y_u + ry - y_x \right] \\ \frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \\ = e^{-rx} y_u \cdot S^{-1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right) \\ = e^{-rx} \frac{1}{S^2} (y_{uu} - y_u) \end{cases} \quad \text{代入 1 式 ,}$$

可得

$$e^{-rx} \left[- \left(r - \frac{\sigma^2}{2} y_u + ry - y_x \right) \right] + rS \cdot e^{-rx} y_u S^{-1} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \cdot e^{-rx} S^{-2} (y_{uu} - y_u) = rf$$

¹參自石村貞夫、石村園子 (2004) ,《細說 Black-Scholes 微分方程式》, 李詩政、吳文峰 譯, 鼎茂圖書。

$$= r \cdot e^{-rx} \cdot y$$

$$\Rightarrow y_{uu} - \frac{2}{\sigma^2} y_x = 0 \dots \dots \text{熱傳導方程式}$$

2

且其邊界條件

$$f(S_T, T) = \begin{cases} S_T - K & \text{if } S_T \geq K \\ 0 & \text{if } S_T < K \end{cases} \Rightarrow y(u, 0) = \begin{cases} Ke^u - K & \text{if } u \geq 0 \\ 0 & \text{if } u < 0 \end{cases}$$

Step 2 . 分離變數 :

為解出 2 式 , 首先分離變數 , 令 2 式之解 $y(u, x) = V(u) \cdot W(x)$

$$\Rightarrow V_{uu}(u) \cdot W(x) = \frac{2}{\sigma^2} V(u) \cdot W_x(x)$$

$$\Rightarrow \frac{V_{uu}}{V} = \frac{2}{\sigma^2} \frac{W_x}{W} \stackrel{\text{設}}{=} -k^2$$

↓

只有在共軛複數解時 ($-k^2 < 0$), 才能滿足邊界條件

分別由 $\frac{V_{uu}}{V} = -k^2$ 及 $\frac{2}{\sigma^2} \frac{W_x}{W} = -k^2$ 解出

$$\begin{cases} V(u) = c_1'(k) \cdot \cos(ku) + c_2'(k) \cdot \sin(ku) \\ W(x) = c_3 e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} \end{cases}$$

其中 $c_1'(k)$ $c_2'(k)$ 為與 k 有關之常數 , c_3 為常數

則

$$y(u, x) = \left[c_1'(k) \cdot \cos(ku) + c_2'(k) \cdot \sin(ku) \right] \cdot c_3 e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x}$$

此為偏微分方程之其

$$= \left[c_1(k) \cdot \cos(ku) + c_2(k) \cdot \sin(ku) \right] \cdot c_3 e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x}$$

中一解 , 則代入所有的 $k (0 \leq k < \infty)$ 所得解之加總亦為其解 (重疊原理)。

$$\text{故得 } y(u, x) = \int_0^\infty \left[c_1(k) \cdot \cos(ku) + c_2(k) \cdot \sin(ku) \right] \cdot c_3 e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk$$

Step 3 . 由初始條件，運用 Fourier 積分定理求解：

若 $x = 0$

$$\text{則 } y(u, 0) = y(u) = \int_0^{\infty} [c_1(k) \cdot \cos(ku) + c_2(k) \cdot \sin(ku)] dk$$

$$\Rightarrow \text{Fourier 係數} \begin{cases} c_1(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cos(ku) du \\ c_2(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \sin(ku) du \end{cases}$$

3

為了區別符號，將 3 式改為

$$\begin{cases} c(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \cos(ka) da \\ c(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \sin(ka) da \end{cases}, \quad \text{邊界條件 } g(a) = \begin{cases} Ke^a - K & \text{if } a \geq 0 \\ 0 & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

故可得

$$\begin{aligned} y(u, x) &= \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \cos(ka) da \right) \cos(ku) + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \sin(ka) da \right) \sin(ku) \right] \cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk \\ &= \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \cdot [\cos(ka) \cdot \cos(ku) + \sin(ka) \cdot \sin(ku)] da \right] \cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \left[\int_0^{\infty} \cos[k(a-u)] \cdot e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} x} dk \right] da \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma \sqrt{2x}} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \cdot e^{-\frac{(a-u)^2}{2\sigma^2 x}} da \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a-u}{\sigma \sqrt{x}} \right)^2} da \end{aligned}$$

$$\text{變數變換：let } V = \frac{a-u}{\sigma \sqrt{x}} \quad \Rightarrow a = u + \sigma \sqrt{x}$$

$$\text{邊界條件 } g(a) = g(u + \sigma \sqrt{x}) = \begin{cases} Ke^{u + \sigma \sqrt{x} V} - K & \text{if } V \geq -\frac{u}{\sigma \sqrt{x}} \\ 0 & \text{if } V < -\frac{u}{\sigma \sqrt{x}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y(u, x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \cdot e^{-\frac{1}{2}(V)^2} da \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{\infty} \left(Ke^{u+\sigma\sqrt{x}V} - K \right) \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} \sigma\sqrt{x} dV \\
&= \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Ke^{u+\sigma\sqrt{x}V} \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} dV - \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} dV \\
&= \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} Se^{rx - \frac{\sigma^2 x}{2} + \sigma\sqrt{x}V} \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} dV - \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K \cdot e^{-\frac{V^2}{2}} dV
\end{aligned}$$

再次變數變換：let $Z = V - \sigma\sqrt{x}$, $dZ = dV$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y(u, x) &= Se^{rx} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} - \sigma\sqrt{x}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ - K \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{V^2}{2}} dV \\
&= Se^{rx} N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - KN\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right)
\end{aligned}$$

故可得

$$\begin{aligned}
f(S, t) &= e^{-rx} y(u, x) \\
&= e^{-rx} \left[Se^{rx} N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - KN\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right) \right] \\
&= SN\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}} + \sigma\sqrt{x}\right) - Ke^{-rx} \left(\frac{u}{\sigma\sqrt{x}}\right)
\end{aligned}$$

附錄二

本附錄利用變數變換，簡略推導 $e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(S_T) \cdot g(S_T | \bar{V}) dS_T = C(\bar{V})$ 。

推導過程如下：

$$\begin{aligned}
 & e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} f(S_T) \cdot g(S_T | \bar{V}) dS_T \\
 &= e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} (S_T - K) \cdot g(S_T | \bar{V}) dS_T \\
 &= e^{-r(T-t)} \int_K^{\infty} S_T \cdot g(S_T | \bar{V}) dS_T - e^{-r(T-t)} K \int_K^{\infty} g(S_T | \bar{V}) dS_T
 \end{aligned} \tag{1}$$

變數變換：let $w = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$ ，並利用 Jacobian 轉換，將原變數 S_T 轉換為新變數 w ，

$$\begin{aligned}
 \text{則 1 式} &= e^{-r(T-t)} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{\infty} S_t e^w \cdot \frac{g(w | \bar{V})}{S_T} S_T dw - e^{-r(T-t)} K \int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{\infty} \frac{g(w | \bar{V})}{S_T} S_T dw \\
 &= e^{-r(T-t)} \int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{\infty} S_t e^w \cdot g(w | \bar{V}) dw - e^{-r(T-t)} K \int_{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)}^{\infty} g(w | \bar{V}) dw
 \end{aligned} \tag{2}$$

變數變換：let $y = \frac{w - \left[r(T-t) - \frac{\bar{V}}{2}(T-t) \right]}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}}$ ，同樣利用 Jacobian 轉換，將原變數

w 轉換為新變數 y ，

$$\begin{aligned}
 \text{則 2 式} &= e^{-r(T-t)} \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left[r(T-t) - \frac{\bar{V}}{2}(T-t) \right]}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}}}^{\infty} S_t \cdot e^{\sqrt{\bar{V}(T-t)}y + \left[r(T-t) - \frac{\bar{V}}{2}(T-t) \right]} \cdot \frac{g(y | \bar{V})}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}} \sqrt{\bar{V}(T-t)} dy \\
 &\quad - e^{-r(T-t)} K \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left[r(T-t) - \frac{\bar{V}}{2}(T-t) \right]}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}}}^{\infty} \frac{g(y | \bar{V})}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}} \sqrt{\bar{V}(T-t)} dy \\
 &= e^{-r(T-t)} \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left[r(T-t) - \frac{\bar{V}}{2}(T-t) \right]}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}}}^{\infty} S_t \cdot e^{\sqrt{\bar{V}(T-t)}y + \left(r - \frac{\bar{V}}{2} \right)(T-t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\
 &\quad - e^{-r(T-t)} K \cdot N \left[\frac{\left(\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{\bar{V}}{2} \right)(T-t) \right)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-r(T-t)} \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left[r(T-t) - \frac{\bar{V}}{2}(T-t)\right]}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}}}^{\infty} S_t \cdot e^{r(T-t)} e^{-\frac{1}{2}(y - \sqrt{\bar{V}(T-t)})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&\quad - e^{-r(T-t)} K \cdot N \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_t}\right) + \left(r - \frac{\bar{V}}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}} \right)
\end{aligned}$$

3

再次變數變換：let $z = y - \sqrt{\bar{V}(T-t)}$ ，並利用 Jacobian 轉換，將原變數 y 轉換為新變數 z ，

$$\begin{aligned}
\text{則 3 式} &= S_t \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left[r(T-t) - \frac{\bar{V}}{2}(T-t)\right]}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&\quad - e^{-r(T-t)} K \cdot N \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_t}\right) + \left(r - \frac{\bar{V}}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}} \right) \\
&= S_t N \left[- \left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left[r(T-t) - \frac{\bar{V}}{2}(T-t)\right]}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}} - \sqrt{\bar{V}(T-t)} \right) \right] \\
&\quad - e^{-r(T-t)} K \cdot N \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_t}\right) + \left(r - \frac{\bar{V}}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}} \right) \\
&= S_t N \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_t}\right) + \left(r + \frac{\bar{V}}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}} \right) - e^{-r(T-t)} KN \left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_t}\right) + \left(r - \frac{\bar{V}}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}} \right) \\
&= C(\bar{V})
\end{aligned}$$

附錄三

本附錄推導如何將 GARCH (1,1) 模型轉換成隨機波動模型¹，藉以推得 之計算公式。

推導過程如下：

$$\begin{aligned} \text{GARCH (1,1) 模型：} \quad \sigma_t^2 &= \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2 &= \omega + (\beta - 1) \sigma_{t-1}^2 + \alpha u_{t-1}^2 \end{aligned} \quad 1$$

若假設 u_t 是由 Wiener process, dz 所產生

$$\text{且因 } E(u_{t-1})^4 - [E(u_{t-1}^2)]^2 = 2\sigma_{t-1}^4 ,$$

則

$$u_{t-1}^2 = \sigma_{t-1}^2 + \sqrt{2}\sigma_{t-1}^2 \varepsilon \quad 2$$

其中 ε 為一由標準常態分配產生之隨機樣本，

將 2 式代回 1 式，

可得

$$\sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2 = \omega + (\alpha + \beta - 1) \sigma_{t-1}^2 + \alpha \sqrt{2} \sigma_{t-1}^2 \varepsilon$$

若 $dV = \sigma_t^2 - \sigma_{t-1}^2$ ， $V = \sigma_{t-1}^2$ ， $a = 1 - \alpha - \beta$ ， $aV_L = \omega$ 且 $\xi = \alpha\sqrt{2}$

則

$$dV = a(V_L - V) + \xi V \varepsilon$$

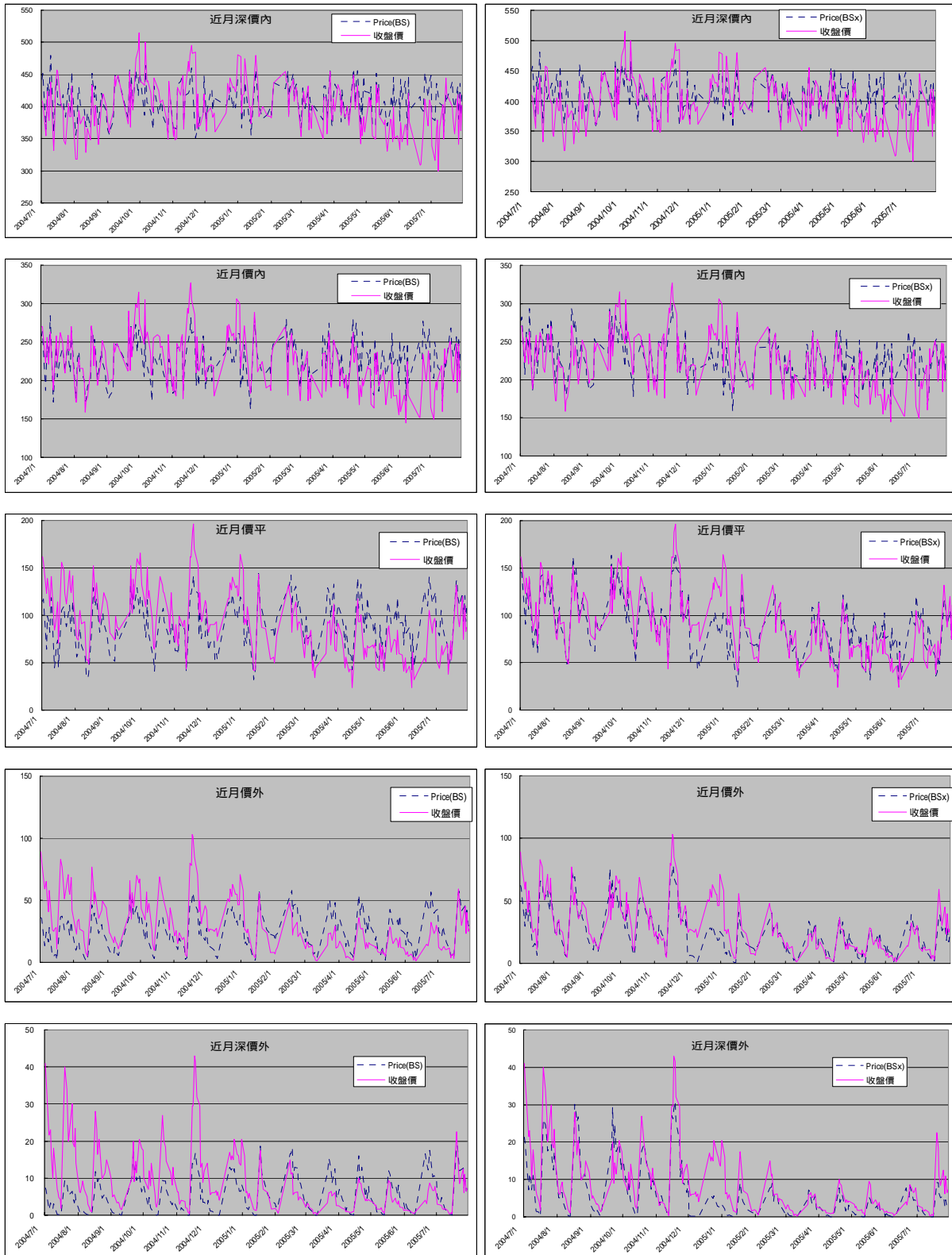
且因 $dt = 1$

$$\text{故得 } dV = a(V_L - V)dt + \xi V \varepsilon \sqrt{dt} \quad 3$$

3 式即為一隨機波動模型。

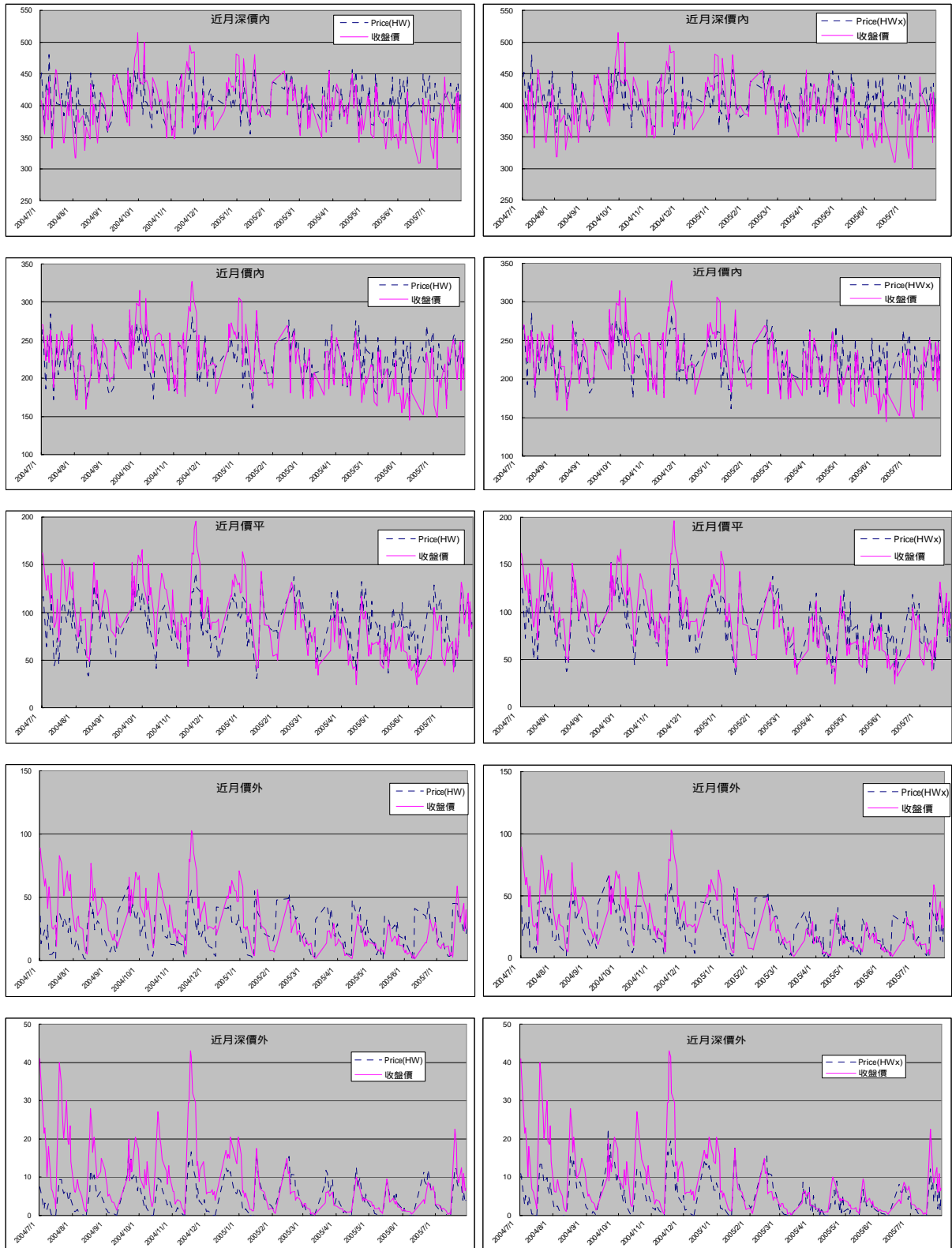
¹參自 John C. Hull ,Options, Futures and Other Derivatives , 5th , assignment questions 17.14。

附圖一（近月買權¹）



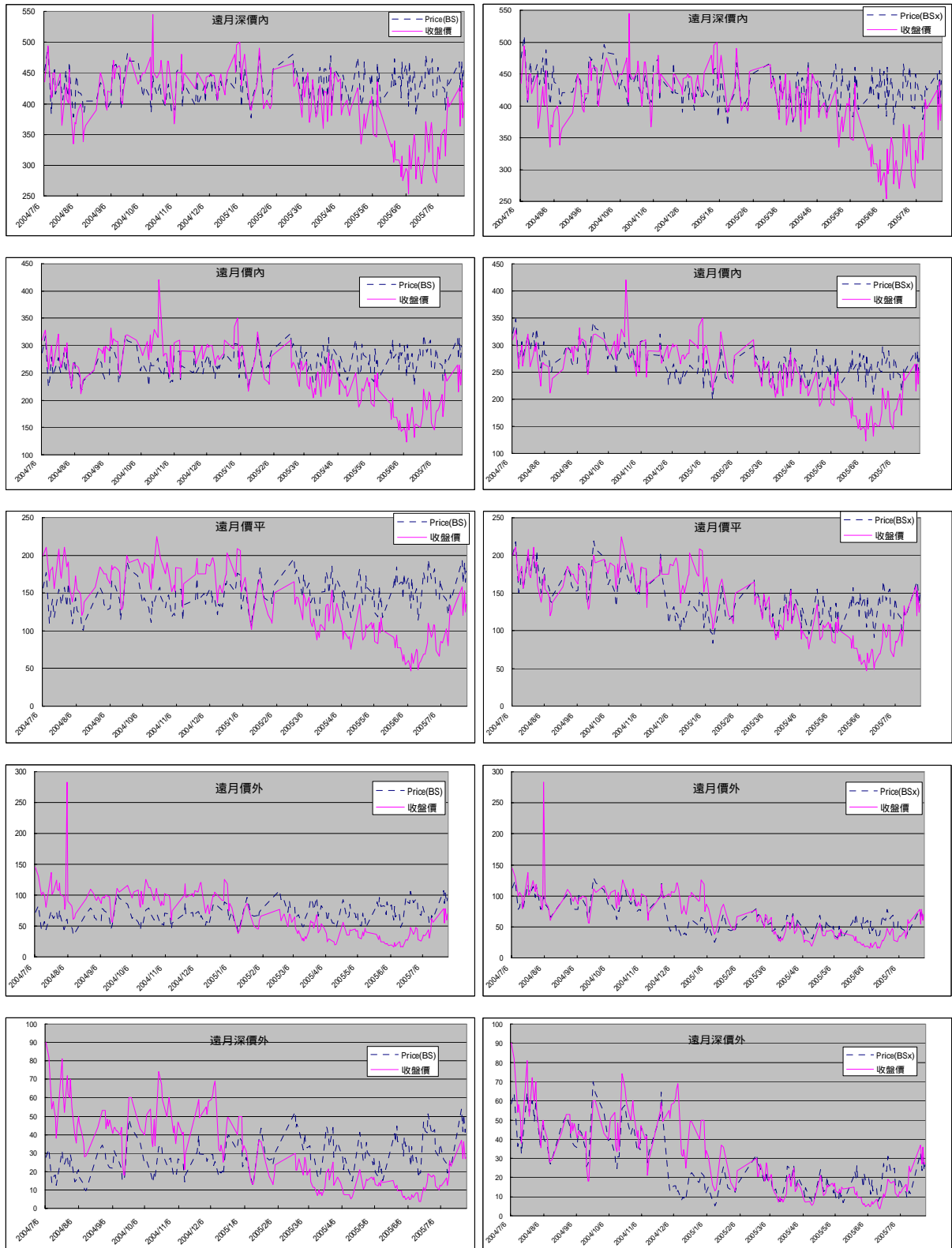
¹ 左半邊的圖為“不考慮結構性改變下”Black-Scholes 模型理論價與收盤價之比較圖；右半邊的圖則為“考慮結構性改變後”Black-Scholes 模型理論價與收盤價之比較圖。

附圖二（近月買權¹）



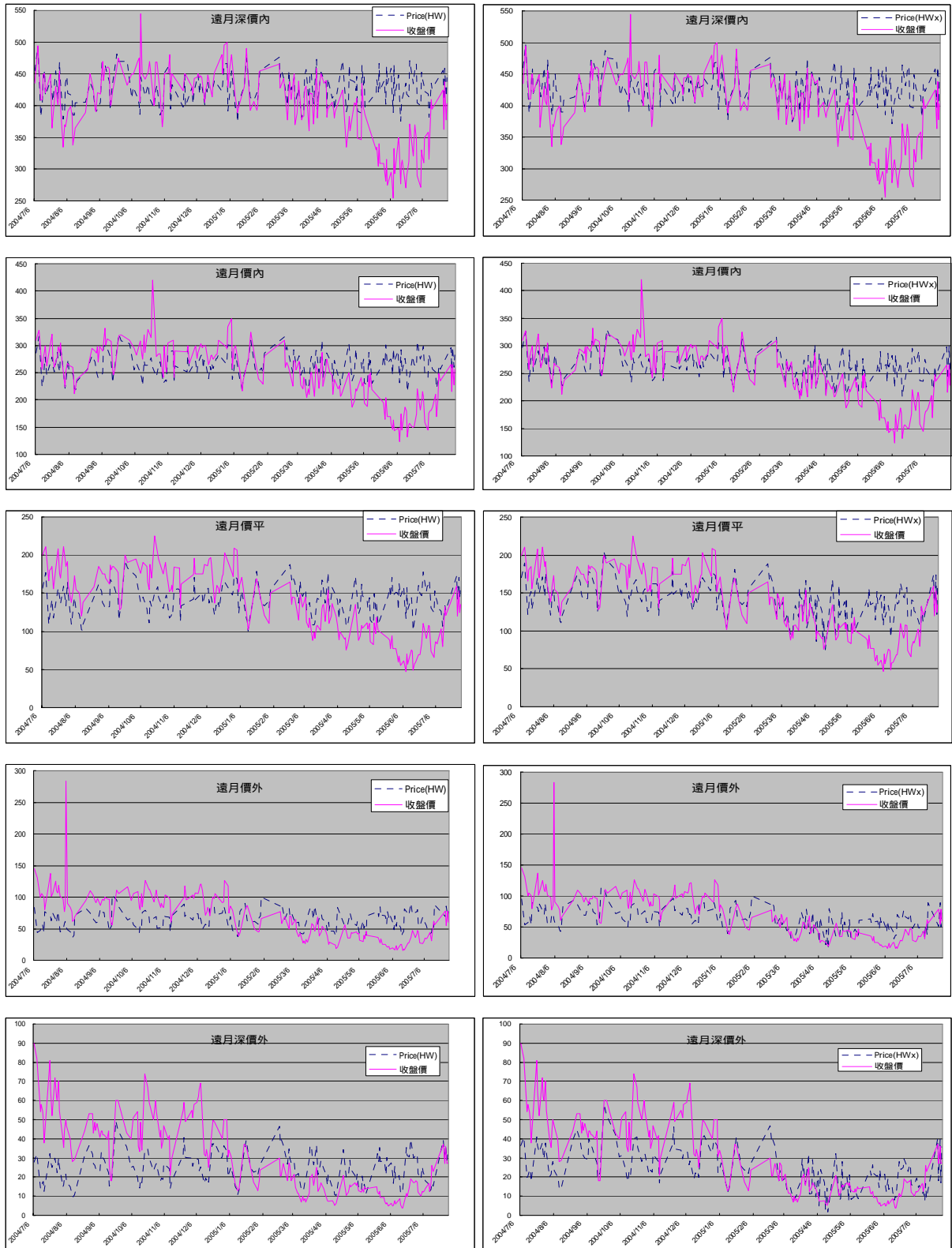
¹左半邊的圖為“不考慮結構性改變下”Hull-White 模型理論價與收盤價之比較圖；右半邊的圖則為“考慮結構性改變後”Hull-White 模型理論價與收盤價之比較圖。

附圖三（遠月買權¹）



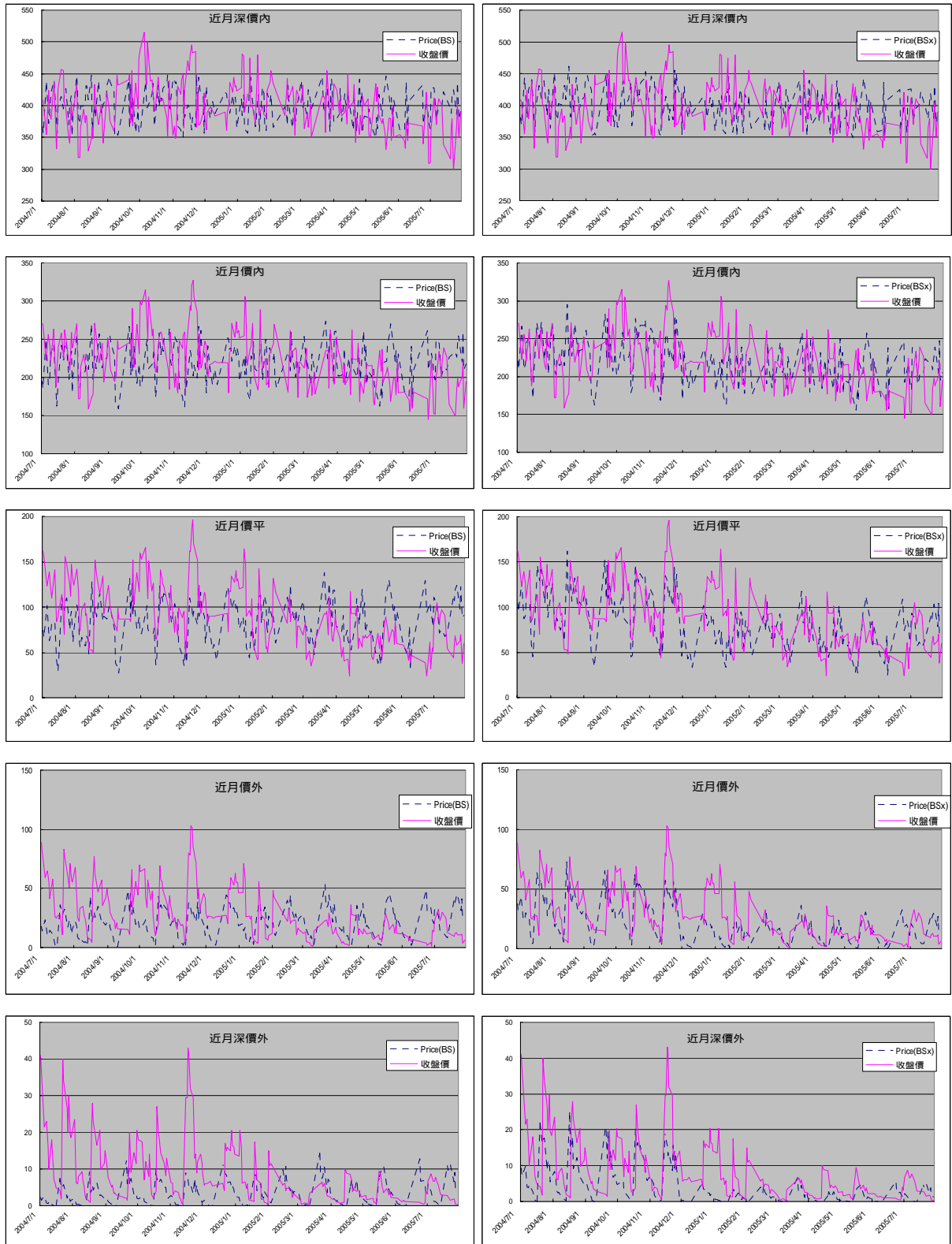
¹ 左半邊的圖為“不考慮結構性改變下”Black-Scholes 模型理論價與收盤價之比較圖；右半邊的圖則為“考慮結構性改變後”Black-Scholes 模型理論價與收盤價之比較圖。

附圖四（遠月買權¹）



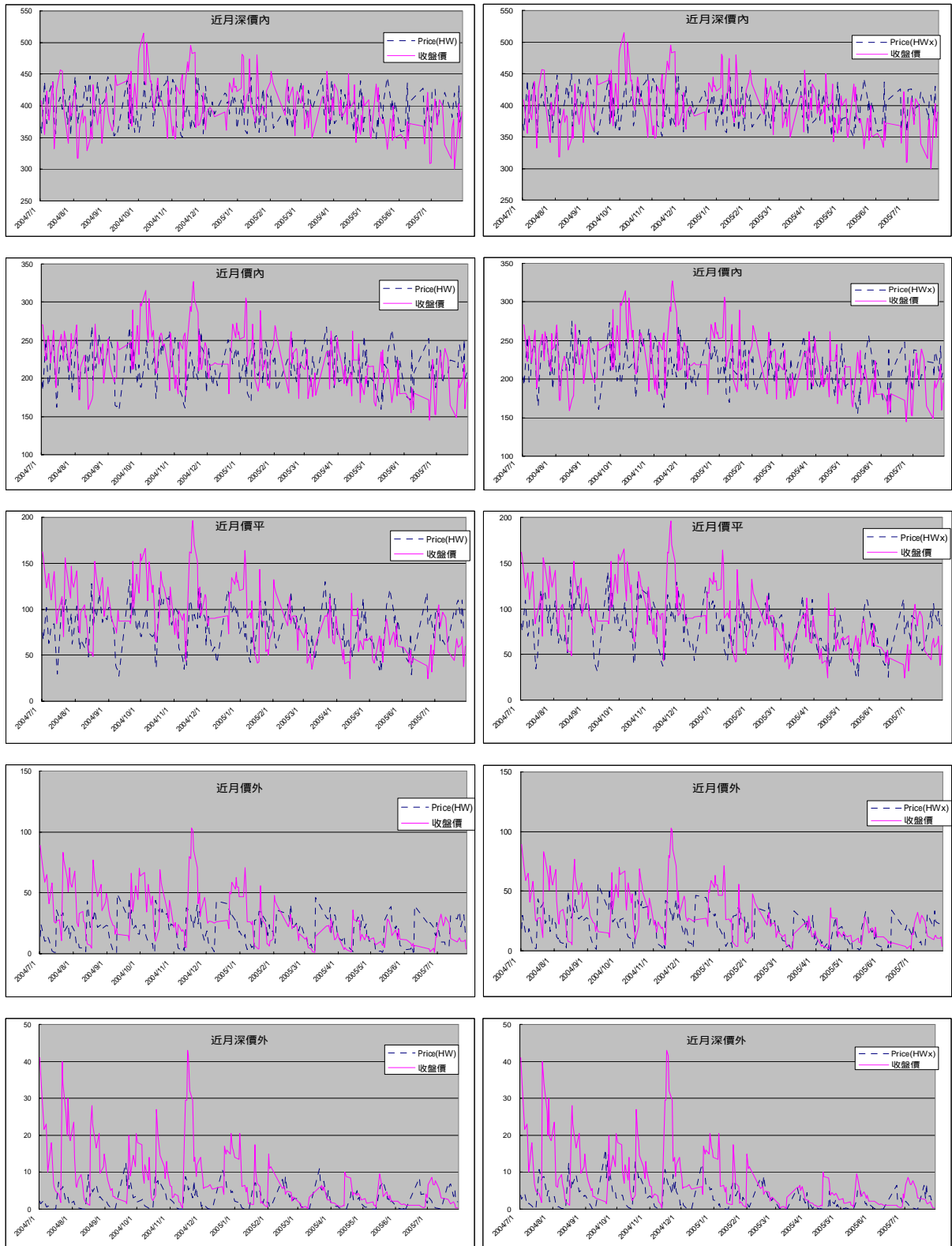
¹左半邊的圖為“不考慮結構性改變下”Hull-White 模型理論價與收盤價之比較圖；右半邊的圖則為“考慮結構性改變後”Hull-White 模型理論價與收盤價之比較圖。

附圖五（近月賣權¹）



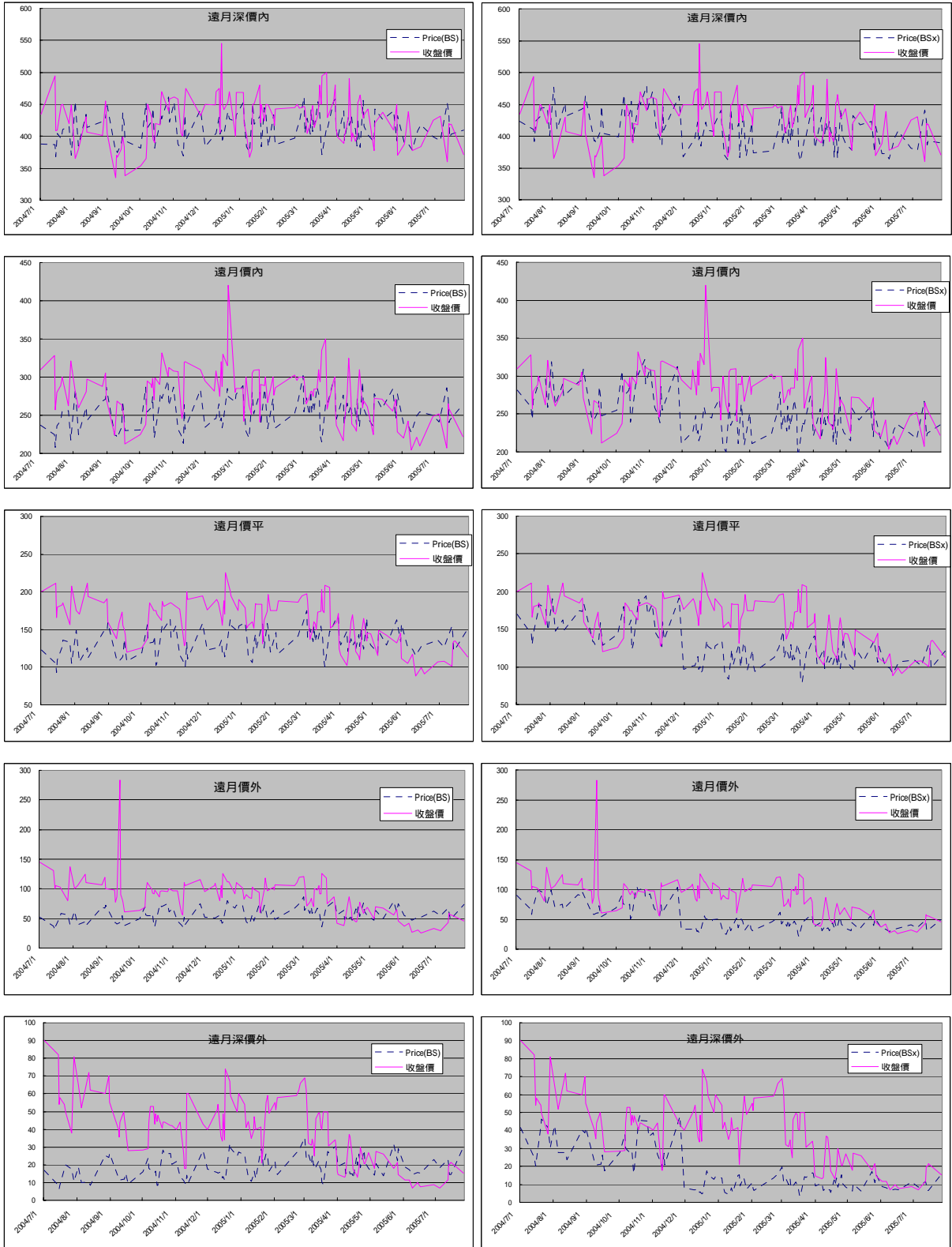
¹ 左半邊的圖為“不考慮結構性改變下”Black-Scholes 模型理論價與收盤價之比較圖；右半邊的圖則為“考慮結構性改變後”Black-Scholes 模型理論價與收盤價之比較圖。

附圖六（近月賣權¹）



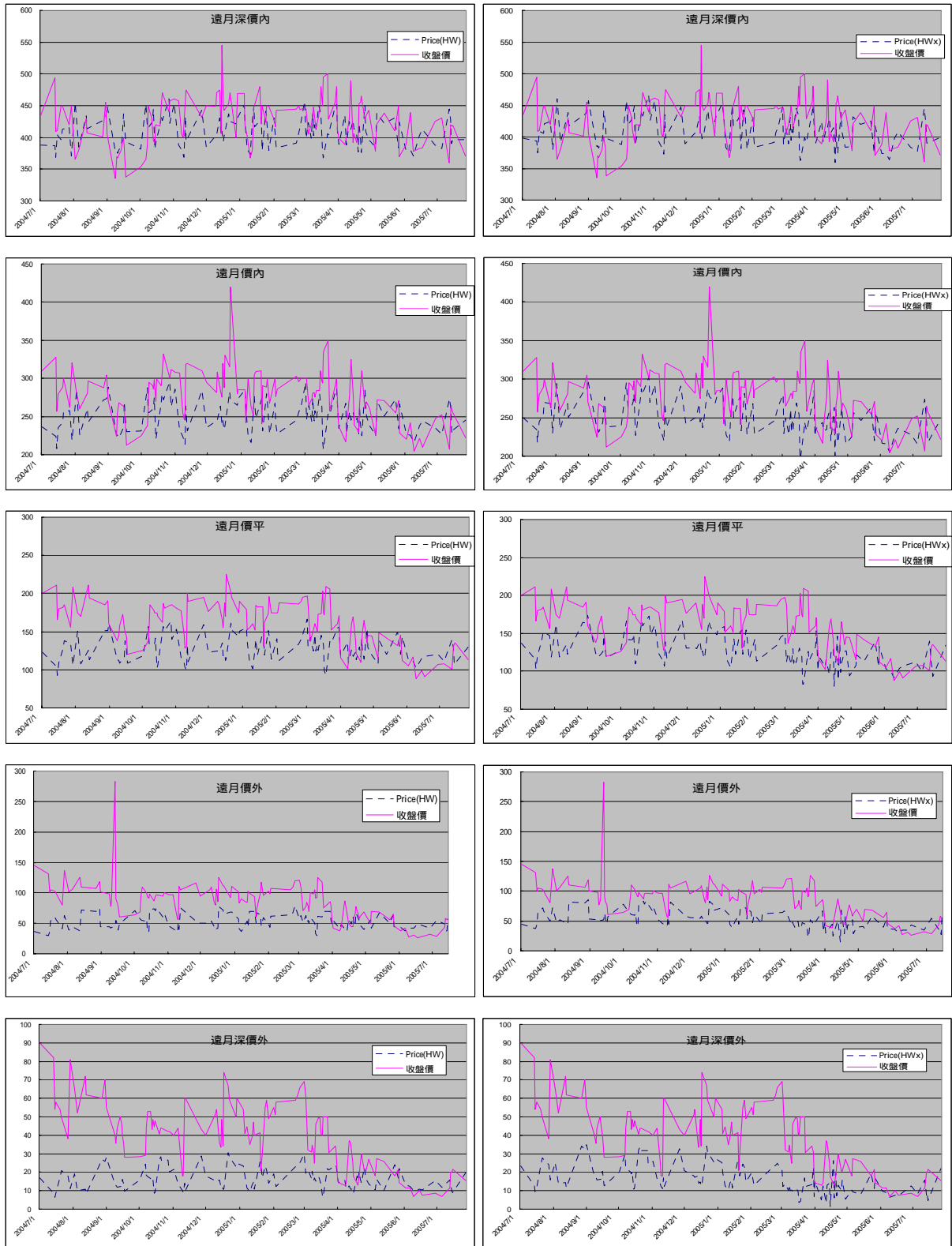
¹左半邊的圖為“不考慮結構性改變下”Hull-White 模型理論價與收盤價之比較圖；右半邊的圖則為“考慮結構性改變後”Hull-White 模型理論價與收盤價之比較圖。

附圖七（遠月賣權¹）



¹ 左半邊的圖為“不考慮結構性改變下”Black-Scholes 模型理論價與收盤價之比較圖；右半邊的圖則為“考慮結構性改變後”Black-Scholes 模型理論價與收盤價之比較圖。

附圖八（遠月賣權¹）



¹左半邊的圖為“不考慮結構性改變下”Hull-White 模型理論價與收盤價之比較圖；右半邊的圖則為“考慮結構性改變後”Hull-White 模型理論價與收盤價之比較圖。