

東 海 大 學
工 業 工 程 與 經 營 資 訊 研 究 所

碩 士 論 文

在 不 完 美 製 程 下 最 佳 生 產 週 期 與 檢 測 策 略 之 研 究



研 究 生：戴翰林
指 導 老 師：王文清 教授
姚銘忠 教授

中 華 民 國 九 十 三 年 七 月

The study of
optimal strategy of production cycle time and inspection policy
with an imperfect production process

By
Han-Lin Tai

Advisor: Dr. Wen-Ching Wang
Dr. Ming-Jong Yao

A Thesis
Submitted to the Institute of Industrial Engineering and
Enterprise Information
at Tunghai University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Industrial Engineering and Enterprise Information

July 2004

在不完美製程下最佳生產週期與檢測策略之研究

研究生：戴翰林

指導教授：王文清 教授

姚銘忠 教授

東海大學工業工程與經營資訊研究所

摘要

過去研究最佳生產週期問題的學者，多假設製程為一完美製程。換言之，在製造過程中不會產生不良品。但從製程品質管制的角度來看，不良品的產生實際上是絕對無法避免的。因此，基於此原因且有別於過去的研究，本文假設製程為一不完美製程。然而，當製程為一不完美製程時，會因不良品的產生而增加額外成本，如：修復不良品成本與不良品造成的機會成本。所以，為了能降低不良品所帶來的額外機會成本，於是在製程中加入檢測的動作，期能透過檢測來減少不良品數，以降低不良品所增加的成本。

本文基於上述考量，考慮在某個製造設施，重複生產單一產品族的不完美製程下，建立一個數學模式，透過對該模式求解，找出最佳生產週期與檢測次數，以最小化總成本。在成本分析中，透過對成本項的觀察，分析其最佳解結構，發現本模式目標函數的最好平均成本曲線(the best average cost curve)為一片段凹性連續函數曲線(piece-wise continuous convex curve)，因此，在進行搜尋演算法的分析與設計時，透過片段凹性連續函數曲線所產生的接合點，以協助求取生產週期與檢測次數的最佳解。

於本文中，提出一組數據與隨機試驗的數據，以驗證本研究模式所得到的結果，作為生產管理決策於決定生產週期與檢測策略時的參考。

關鍵字：不完美製程、最佳生產週期、檢測策略、接合點、搜尋演算法。

**The optimal strategy of production cycle time
and inspection policy
with an imperfect production process**

Student : Han-Lin Tai

Advisor : Dr. Wen-Ching Wang
Dr. Ming-Jong Yao

Department of Industrial Engineering and Enterprise Information,
Tunghai University.

ABSTRACT

In the past, those scholars who made a study of the optimal cycle time often presumed that the production process was perfect which implied the defective product would not be produced. However, from the point of view of controlling production process quality, the production of the defective product is inevitable. In addition, in order to be different from those previous researches, in this research we assume that the production process is imperfect and the prime cost would increase on this condition because of the production of the defective product. Therefore, in order to reduce the extra opportunity cost, which accompanied by the defective product, inspection will be acceded to the production process and that will lower the total production costs.

While preceding the analysis and the design of the search algorithm, we can acquire the optimal cycle time and the optimal inspection frequency through the observation of the junction point produced by piece-wise continuous convex curve. In this research, we bring up two sets of data, one of which is random, to examine the result of this model and can be consulted when the decision of production cycle time and testing frequency is made.

Keywords: *Imperfect production process , Optimal cycle time , Inspection policy ,Junction point , Search Algorithm.*

誌謝

本論文得以順利完成，首先要感謝兩位指導教授-王文清老師與姚銘忠老師，除在學習上鼓勵我多涉獵不同領域外，並悉心指導，使論文漸趨完備。在生活上也給予關心和指導，令我受益良多。

此外，也由衷感謝口試委員古思明教授、陸行教授、呂俊德教授們的指導，對論文詳加閱讀並給予意見，使論文品質得以提昇。而在學期間，非常感謝過去這兩年來，各位碩士班同學與師長給予敝人的指教與鼓勵。

這本論文的完成，讓我更瞭解自己個性的缺失與不積極面。特別感謝姚銘忠老師對我的諸多忍讓與包容。另外，要感謝我過去的朋友，沒有她，這本論文壓根不會有機會得以完成，雖然她已遠離，對她的感謝，言溢於表。還有要感謝我的姊妹-祐慈與彧文。在我對碩士學業灰心放棄的時候，給了我最大最大的支持與鼓勵。

謝謝我的現任女友-瑋君。在我碩士學業快結束，也是最忙碌的時候陪著我，一路給予我支持與鼓勵。真的非常感謝她，所給予我的包容與支持。當然，更要感謝我的父母親，沒有他們，就不會有我，也更不會有這篇論文的誕生，爸媽，謝謝你們！也謝謝各位和我一起成長的朋友！謝謝！

～戴翰林～

謹誌於～東海工業工程與經營資訊研究所～

目錄

誌謝.....	I
目錄.....	II
圖目錄.....	IV
表目錄.....	V
第一章 研究背景與目的.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 研究目的.....	1
1.3 研究方法.....	2
1.4 研究工具.....	2
1.5 論文架構.....	2
第二章 文獻探討.....	4
2.1 不完美製程的研究發展.....	4
2.2 不完美製程上檢測的研究發展.....	6
2.3 預備知識.....	7
第三章 數學模式與成本分析.....	9
3.1 符號定義.....	9
3.2 假設條件.....	10
3.3 目標函數.....	11
1. 設置成本.....	11
2. 檢測成本.....	11
3. 期望修復成本.....	11
4. 期望機會成本.....	12
5. 存貨持有成本.....	13
6. 總生產成本.....	13
3.4 數學模式.....	14
第四章 理論性質分析.....	16
4.1 $TC_i(n_i, T)$ 圖形的觀察.....	16
4.2 接合點.....	18
4.3 片段凹性.....	20
第五章 演算法設計.....	24
5.1 演算法的下界.....	24
5.2 演算法的上界.....	27
5.3 設計搜尋演算法.....	31

5.4 演算法流程圖	32
第六章 數據驗證.....	34
6.1 數據實驗範圍	34
6.2 隨機數據實驗.....	36
第七章 結論.....	40
7.1 研究貢獻.....	40
7.2 未來發展.....	40
附錄 A.....	41
A.1 產品 I 修復期望成本	41
A.2 產品 I 不良品機會成本	41
A.3 產品 I 的存貨持有成本計算過程	42
參考文獻.....	44

圖目錄

圖 1.5.1 論文架構圖	3
圖 4.1.2 $TC_i(n_i, T)$ 的最好平均成本曲線 $\underline{TC}_i(T)$	18
圖 4.1.1 $TC_i(n_i, T)$ 圖形	17
圖 5.4.1 演算法流程圖	33

表目錄

表 4.1.1 各項參數數據.....	17
表 6.2.1 各項參數的數據表.....	36
表 6.2.2 兩種演算法所求出的最佳解	36
表 6.2.3 針對產品數 5,10,15,20 進行分析	37
表 6.2.4 針對設置成本進行分析	37
表 6.2.5 針對設置成本進行分析	38
表 6.2.6 針對修復成本進行分析	38
表 6.2.7 針對不良率進行分析.....	38
表 6.2.8 針對需求率進行分析.....	39
表 6.2.9 針對存貨持有成本進行分析	39
表 6.2.10 針對不良品成本進行分析	39

第一章 研究背景與目的

1.1 研究背景與動機

在生產管理的領域，決定生產批量是相當重要的問題。因為批量大小直接影響到實施生產計劃的成本績效。因此，如何找到最佳批量的方法，成為研究者關心的焦點。一直以來，在生產批量的領域，就有許多研究投入其中。例如，從 Harris(1915)所提出的經濟訂購量(economic order quantity ; EOQ)、經濟生產批量(economic production quantity ; EPQ)到 Rogers(1958)的經濟批量排程問題(economic lot scheduling problem ; ELSP)等。

而在過去之研究中，針對經濟生產批量 (EPQ) 模式的研究已不勝其數，並且有了許多相當顯著的成果。由於經濟生產批量模式當初之設計，是為了幫助決策者在訂定生產批量與衡量產品生產成本時，能有一個符合經濟效益的參考依據。基於該種模式能提供有效決策，以幫助決策者進行控管生產批量與成本之優點，因此，它在工業界已廣被接受並應用於生產管制領域，協助決策者訂定生產批量大小，降低產品存貨水準與生產成本，進而提升產品的獲利能力。

然在過去之大部分模式中，都加入一項強烈的假設，即製程為完美製程。換言之，在製造過程中，不允許產生不良品。事實上，在實際生產過程中，不良品之產生是不可忽略且無法避免。因此，本文基於過去相關經濟生產批量的研究，將完美製程的假設放寬，而考慮製程為一不完美製程，即允許產生不良品，以符合實際生產過程的情況。當製程變為不完美製程時，則在製造過程中就會產生不良品。為了降低不良品的數目，以減少成本浪費，於是就在生產過程中，進行產品品質檢測。當發現不良品時，即刻予以修復，以減少生產不良品所帶來的機會成本，進而減少總生產成本，相對地，這將使產品的利潤提升。

1.2 研究目的

根據前一節所描述的研究動機與背景，本研究的目的乃在協助生產管理決策者，在一不完美製程下，如何訂定適當的生產週期與產品在生產過程中的檢測次數，換言之，安排檢驗的排程，以減少不良品所帶來的機會成本，使總生產成本達到最小。

因此，本研究從此方向著手，並將所考慮的決策情境，透過假設條件的輔助，轉化為數學模式，以利分析，進而得到一參考依據，作為決策者之參考。

1.3 研究方法

探討本篇研究模式的最佳解結構時，發現目標函數的最好平均成本曲線(the best average cost curve)，為一段凹性連續函數(piece-wise continuous convex function)。因此，在求取最佳解時，首先分析一段凹性函數的性質，且對一段凹性函數裡，一段段的凹性函數進行分析，發現每兩兩緊鄰的凹性函數，有一接合點(junction point)。而該接合點所具有的性質，恰好可作為求取最佳解之依據，進而求得目標函數總體最佳解，而非局部最佳解。

1.4 研究工具

本研究使用 Matlab 來進程式編碼。由於該套軟體當初的發展理念，是提供一套非常完善的矩陣運算指令。因此，它在矩陣運算指令表達上，相當簡潔。於是本研究在程式編碼時，在以 Matlab 所具備的優異矩陣運算能力與簡潔指令之考量下，選用 Matlab5.3 版作為程式編碼的工具。

1.5 論文架構

本文架構如下：第一章介紹研究背景與動機；第二章是文獻探討，列出過去與本研究相關的文獻；第三章是模式建構。將決策情境轉化為數學模式；第四章是理論性質分析。乃為了後續第五章演算法之設計，所需使用的理論性質，在本章予以分析；第五章是演算法設計，開始著手進行模式最佳解的求解；第六章是數據驗證。透過數據的支持，來分析模式裡，參數對結果的影響，作為生產管理決策者的決策依據與考量；第七章為結論。除了歸納本篇成果外，亦列出本篇研究未來可能之發展與方法。架構如下圖 1.5.1。

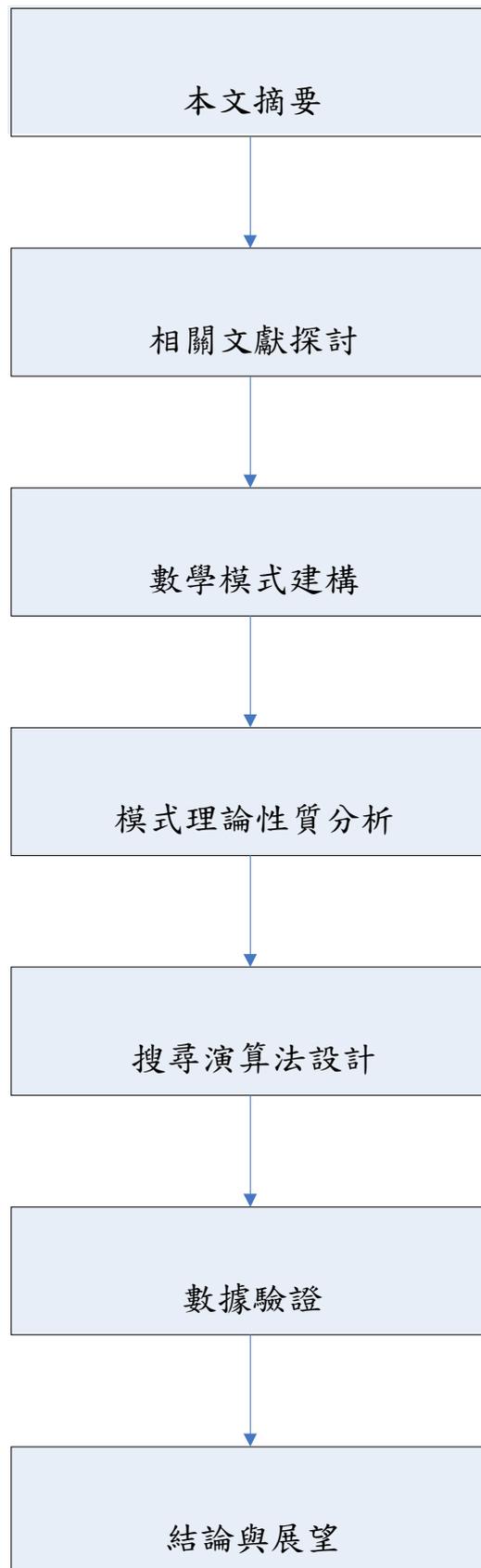


圖 1.5.1 論文架構圖

第二章 文獻探討

本篇研究主要是在探討，在不完美製程下最佳批量與檢測策略之研究。因此，在第一節中，先進行不完美製程的相關文獻分析；到了第二節，則針對在不完美製程上，進行檢測動作的相關研究進行探討。以分析過去研究文獻，對類似本研究主題的貢獻與發展，作為本研究的依據，及本研究於文獻上所付出貢獻，到了第三節，則直接列出與本文主要相關與直接引用的文獻，以作為第三章數學模式與成本分析的預備知識。

2.1 不完美製程的研究發展

自從 Harris(1915)提出經濟訂購量(economic order quantity ; EOQ)，有關生產批量的問題便開始廣為受到注意。但是，許多的模式在分析時，總是假設產品擁有完美的品質，且所訂購的原材料的品質，也是完美的。換言之，在 EOQ 模式中，並不會有不良品的參與及產出。而除了 EOQ 模式外，一般典型的經濟生產批量模式 (economic production quantity ; EPQ) Nahmias(1997)與 Silver(1998)也都假設製程為完美製程，且製程所生產的產品品質，不會隨著時間而變差，永遠保持為完美。然而實際上，生產的品質通常都會與製程的狀態有關，換言之，當製程是處於控制狀態時，所生產出的產品，將會是具有一定品質，符合品質標準，或是完美的產品。然而隨著時間的過去，製程可能由控制狀態轉變為失控狀態，使得製程品質開始降下，而開始生產不良品。因此，有關生產批量與產品品質，這兩者之間的關係其實是相當顯著的。

有鑑於此，開始有部分學者對生產批量與生產品質的模式開始進行研究。Porteus(1986)，以及 Rosenblatt & Lee(1987)，都開始考慮不良品對最佳生產批量與最佳訂購量的影響。在製程品質上，他們都假設製程會由控制狀態轉變為失控狀態。事實上，當製程發生狀態轉移的情況時，製程轉移的時間其實為一隨機變數，且符合一特定分佈。而 Rosenblatt & Lee(1987)與 Porteus(1986)，他們針對製程轉移時間的隨機變數各有其不同假設。

Rosenblatt(1987) 在對不完美製程的進行分析時，提出如下的假設：製程由控制狀態轉變為失控狀態的時間，其實是一隨機變數且其符合指數分配。

而 Porteus(1986)在進行分析不完美製程，對生產批量的影響時，則提出如下的假設：事實上，每當製程生產出一個產品後，都會存在一固定的機率，使得製程由控制狀態轉變為失控狀態。而且，當製程處於失控狀態時，則會不停產生不良品。

而除了上述的研究之外，還有其他的學者們，除了將不完美製程的假設加入到 EOQ 與 EPQ 模式上，Groenevelt et al.(1992)亦將典型的經濟製造批量(economic manufacture quantity ; EMQ)模式，進行兩種不同的延伸。在第一篇研究中的模式裡，他們探討在經濟批量決策上，機台的損壞與相關維修的影響；而在第二篇研究中，他們考慮當維修時間是相當顯著時，該如何決定批量大小與安全庫存數量的政策。而 Chung(1997)則將 Groenevelt et al.(1992)在求取最佳生產批量時，給予了一適合的範圍，以協助該模式求取最佳生產批量。

此外，Liu & Cao(1999)亦對不完美製程做出了相關研究，他們提出在一生產存貨模式上，假設產品的需求率是符合一卜耳松分配(Poisson distribution)，且機台的故障率為一隨機產生的隨機機率，進行相關研究。

而 Kim & Hong(1997)則提出，在機台會發生故障情況下，EMQ 模式該如何求取最佳批量的問題。Das & Sarkar(1999)，提出一新的半更新製程模式，以處理無可避免的機台維修情形。

除了上述有關最佳批量問題的文獻外，其他相關的文獻，則包含 Federgruen & So(1990),Berg et al.(1997)與他們所採用的相關文獻。此外，Chung & Hou(2003)，在一不完美製程下，如果加入允許缺貨發生的假設，則該如何決定最佳生產批量。

過去這些不完美製程的問題，有許多的學者們一直努力解決。除了先前所介紹的研究外，其中大多數的研究，都加了一項強烈的假設。也就是不考慮原物料會在生產週期中消耗的事實，並且也忽略原物料的消耗率通常是不均勻。而只假設製程的品質會由良轉為不良。而為了有別於此，Goyal(1997)則提出，如何在一整合性 EPQ 模型中，且原物料會消耗的情形下，訂定原物料最佳訂購量的政策。

我們在介紹第二節前，Lee & Rosenblatt(1989)與 Lee & Park(1991)提出，製程所處的狀態，實際上是可透過檢測的方式來進行監測，以得知製程是處於控制狀態或失控狀態，並且透過修復，將處於失控狀態中的製程，

轉變為控制狀態中的製程。因此，我們將在下一節中，透過對製程進行檢測的方式，以監測製程的品質。

2.2 不完美製程上檢測的研究發展

Lee & Rosenblatt(1987)(1989)曾提出，如何在不完美的製造過程中，考量在一個生產批量內，透過檢測的策略來監控制程的生產模式。然而在成本的考量下，若生產批量小，且會產出不良品的情形下，若還需付出額外的製程檢測成本，來進行製程檢測，會對總生產成本造成負擔。因此，實際上該模式於是較適合進行大型批量生產的問題。

而 Lin et al.(1991)則提出，當製程的轉變機率是符合一遞增函數的情形下時，他們針對 Lee & Rosenblatt(1987)的模式，提出了一個判斷最佳檢測策略的模式。此外，Tseng(1996)則提出，如何透過完美的事前維修策略，以取代在製程中進行檢測的策略，進而改進不完美製程的可靠度。而事實上 Tseng(1996)的結果的確證實了，若透過事前維修策略所得到的效果，將會比 Lin et al.(1991)透過製程檢測所得到的效果要好。

且過去 Lin , Chen and Kroll(2003)在其文獻中認為，既然原料是整個生產系統中的主體，故原料經濟訂購量應同時和生產批量決定，且應針對整體系統而非個別貨品。同時，對於隨機失敗的系統，換言之，為一不完美的製程，尤其要經由頻繁檢驗，才能避免重製成本的損失。因此，為了使因原料和不完美製程所導致的期望總成本最小化，必須同時決定製程檢驗時程和原料訂購次數。

過去許多針對不完美製程進行研究的成果上中，有許多學者期望透過檢測動作，以修正製程不完美所帶來的影響。然而，在進行檢測的動作時，檢測的結果確有可能會發生誤差，因而對製程的品質造成影響。

所以，在不完美的 EMQ 模式上，曾由 Liou et al.(1994)，Makis & Fung(1998)以及 Makis(1998)提出研究，以分析當進行製程檢測時，檢測誤差對不完美製程所帶來的影響。

而 Liou et al.(1994)則將 Lee & Rosenblatt(1989)所提出的模式進行延伸，並且假設在進行檢測動作時，會有誤差發生，且假設型一與型二的假設誤差皆存在，以考慮檢測時，誤差對模式所帶來的影響。

其他相關檢測誤差的文獻，還包括了有 Cheng(1991)，Khouja and Mehrez(1994)以及他們所提及的相關文獻。

在下一節裡，我們將列出與建立數學模式直接相關的文獻，以作為進入第三章的預備知識。

2.3 預備知識

最初，Porteus(1986)曾以一種很簡單的方式，提出批量和品質之間的關係：每當剛開始生產某一生產批量時，製程一定會處在控制狀態，而當開始生產完一個單位的產品後，之後每生產一個單位的產品，製程都會存在以一特定的機率，使得製程由控制狀態變成失控狀態。且假設在開始生產某一生產批量時，製程是處在控制狀態，但是，一旦變成失控狀態，製程就會持續生產不良品，直到整個批量生產完為止。

Hall(1983)也曾支持這種假設。他認為通大部分的製程一旦開始無法控制，且在其變異範圍內時，製程的失況狀態會一直繼續持續下去，不會改變，所以，應該在生產過程中實施檢驗時程計畫。

且過去 Lee and Park(1991)提出兩種成本：他們將不完美製程的 EPQ 模型加以延伸，即重製成本和保證成本。他們認為在生產週期中，製程會損耗，而開始生產不良品，而造成不良品的產出。且不良品在運送出去之前，則必須以某種成本重製；且若是不良品已交給顧客，則會因商譽損失，衍生更龐大的保證成本。

因此，每當透過檢驗發現，製程處於失控狀態時，必須將其立刻修復成控制狀態。故 Porteus(1986)假設系統為了所生產的每一個不良品，將額外衍生出重製等相關作業成本。

過去，Lin, Chen and Kroll(2003)提出在檢驗時程計畫下，針對有不完美製程的單一產品系統，檢討整合性的 EPQ 模型，然後發展出一種演算法，以找出產品的近似最佳生產批量、檢驗時程、及相對的原料訂購量。他採用定期檢驗，以便當製程失控時，能夠適時檢測出來而予以修護。在其文中也一併討論了原料和完成品的存貨問題。假設產品是以批量製造，原料則統一向外部供應商補貨。若在生產過程中系統損耗，則會生產出某種比例的不良品，導致在銷售前或銷售後以某一成本重製。為了便於系統運作，

故採用等時距定期檢驗和修復製程，目的是使系統的期望總成本最低。因此，他提出一種啟發式演算法。其程序是應用漸進搜尋局部近似最佳解的計算方式，並更進一步將分析延伸至各種不良率為整備成本函數、不良品比率並非常數、或存貨系統的原料產能有限的情況。

若將 Lin , Chen and Kroll(2003)文獻中的模型與 Johnson and Montgomery(1974)所說明的傳統 EPQ 相比較，不完美生產系統的最佳生產批量，明顯地比沒有不良品的系統要小。由於考慮不良品，故使得生產運轉時間較短。且由其所推導出的計算式顯示出，原料種類愈多或品質保證成本愈高，則生產運轉時間愈短；但是，當檢驗次數增加時，則經濟生產運轉時間變長。因此，事實上，雖然生產中存在不良品會產生較小的批量，但若運用檢驗時程計畫，則能夠彌補因不良品的產生，而使得生產批量的大小能夠增大。

第三章 數學模式與成本分析

介紹本章內容前，先透過下面的例子，將決策情境與決策者之間的關係給勾勒出來。例如：一間專門在罐頭上黏貼標籤的標籤工廠，承包一家知名的罐頭公司，只從事替該公司在罐頭上貼標籤的包裝工作。該罐頭公司生產三種不同的罐頭，且它們在市場上的佔有率為固定且已知。因此，這三種罐頭在市場上的需求率為固定且已知。

在進行罐頭標籤黏貼工作時，黏貼工作的機台操作一段時間後，有可能發生失控的情形。當機台處於失控狀態，它所黏貼的標籤可能變為不整齊或斷裂等黏貼不良的情形，直到現場監控人員發現，機台處於失控狀態並予以修復後，才會使機台恢復為控制狀態，再進行正常的標籤黏貼。

為了減少因為機台失控，而不斷黏貼出不合格標籤所帶來的額外機會成本，因此，在標籤黏貼的過程中，每當完成一定數量的罐頭標籤黏貼時，現場監控人員就必須進行一次檢測，檢查機台是否處於控制狀態。那些因機台失控而造成標籤黏貼不良的罐頭，需要進行修復，把標籤去除後重新黏貼，將其變成合格的標籤。

黏貼標籤工廠負責人，希望能在考慮機台生產良率的情況下，如何透過生產週期與機台檢測次數的安排，使從事標籤黏貼工作所需花費的總生產成本達到最小。

從前面的例子，使我們對決策情境的內容有了初步認知。後續的內容，將先進行相關符號的定義及列出所需要的假設條件，再透過對決策情境進一步分析與假設條件的輔助，將決策情境中所考慮的成本逐一轉化成數學模式。

3.1 符號定義

在本節中，將前一段決策情境中所提及與模式相關的符號，列舉並定義如下：

L ：產品數。

D_i ：產品 i 每單位時間(年)的需求率。

p_i ：產品 i 每單位時間(年)的生產率。

T ：每個批量的生產週期。

Q_i ：產品 i 在每週期的生產批量的大小。

$\rho_i = \frac{D_i}{p_i}$ 產品 i 的產能利用率(稼動率)(utilization rate)。

A_i ：產品 i 的設置成本。

n_i ：產品 i 在一次生產週期中的檢測次數。

v_i ：產品 i 的檢測成本。

r_i ：產品 i 的修復成本。

h_i ：單位時間內持有一單位產品 i 存貨的存貨持有成本。

π_i ：每單位產品 i 的不良品成本。

α_i ：每單位產品 i 在製造過程中，由「控制狀態」轉變為「失控狀態」的機率。

N_i ：在一個生產週期中，產品 i 所生產的不良品數目。

$TC(\bar{n}, T)$ ：所有產品在單位時間內的總生產成本，其中
 $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_L)$ 。

3.2 假設條件

在本節中，將決策情境裡需用來作為限制情境的假設，與協助將情境轉化為模式的假設列舉如下：

1. 該製程中所有產品皆由一個生產設備完成生產。
2. 在任一時間點上，在單一的生產設備中只能生產一個產品。
3. 在任何時間點上，所有產品的需求率(demand rate)、生產率(production rate)、設置成本(setup cost)和存貨持有成本(inventory holding cost)都是已知，而且不隨時間改變。
4. 在製程中，產品檢測為等距檢測。換言之，每當生產到一定數量的產品時，即需進行一次檢測。
5. Lee and Rosenblatt(1987)提出，進行檢測和修復所花費的時間可忽略。
6. Porteus(1986)提出，直到產品運送到下一站加工且在下一站加工前生

產完整個批量時，才能知道不良品的數目。

3.3 目標函數

進行目標函數分析前，先將目標函數所考量的成本進行個別分析，其中包含設置成本、檢測成本、期望修復成本、不良品所帶來的期望機會成本與存貨持有成本。透過對各項成本的個別分析，以得到目標函數。

本篇研究是在探討，考慮產品良率的生產過程中，如何透過檢測次數的安排與生產週期的控制，使得在單一產品設施中生產 L 種不同產品的生產製程，能達到單位時間內的總生產成本為最小。我們先針對生產單一產品 i 的生產批量為 Q_i 時，分析所考量的相關成本，最後再將 L 種產品的成本加總為總生產成本。而生產產品 i 一個生產批量 Q_i 時，所需考量的五種相關成本為：設置成本、檢測成本、期望修復成本、不良品所帶來的期望機會成本與存貨持有成本。後續內容將進行這五項成本的個別分析。

1. 設置成本(setup cost)

生產產品 i 時，需先進行生產線設置工作。假設進行生產線設置所需花費的成本為 A_i ，且每次生產都需滿足一個生產批量 Q_i 。因此，當生產產品 i 一個生產批量 Q_i 時，所需的生產設置成本即為 A_i 。

2. 檢測成本(inspection cost)

Lee and Rosenblatt(1987)提出，進行檢測和修復所花費的時間可以忽略。本研究也引用該假設，對於進行檢測所需花費的時間予以忽略。因此，衡量檢測成本時，只考慮檢測次數所花費的成本，而不考慮檢測時間所帶來的成本。已知產品 i 進行一次檢測所需的成本為 v_i ，且在一個生產批量 Q_i 下將進行 n_i 次檢測。所以，在生產批量 Q_i 下的檢測成本為 $n_i v_i$ 。

3. 期望修復成本(expected restoration cost)

Lee and Rosenblatt(1987)提出，進行檢測和修復所花費的時間可以忽略。本研究也採用該假設，忽略進行產品檢測和修復製程所需要的時間。因此，衡量修復成本時，只考慮修復次數的期望值，而不必考慮修復時間

所帶來的成本。因在生產過程中會進行等距檢測，假設在生產批量 Q_i 內進行 n_i 次檢測。所以，在求取修復成本時，需要知道進行一次製程檢測前，即生產 $\frac{Q_i}{n_i}$ 個產品時，製程會處於失控狀態的機率與修復製程所需要的成本，再將這兩者相乘，即可得到進行一次檢測，製程需要修復的期望修復成本。又在生產批量 Q_i 內會進行 n_i 次檢測，因此，製程在一週期內的期望修復成本，即是進行一次檢測的期望修復成本加總 n_i 次而來。

經由上一段對期望修復成本的分析，本節後段將直接對期望修復成本進行計算。產品 i 生產一個批量 Q_i 時，需進行 n_i 次檢測，而製程由控制狀態轉變為失控狀態的機率為 α_i ，另，每次將製程由失控狀態修復為控制狀態的成本為 r_i 。因在生產過程中，必需進行等距檢測，且每生產 $\frac{Q_i}{n_i}$ 個產品即需進行檢測一次。在這 $\frac{Q_i}{n_i}$ 個產品中，皆為良品的機率為：

$$\beta_i \times \beta_i \times \cdots \times \beta_i = \beta_i^{n_i}, \quad \beta_i = 1 - \alpha_i。$$

因此，在生產 $\frac{Q_i}{n_i}$ 個產品中，至少有一不良品的機率為 $1 - \beta_i^{n_i}$ 。換言之，生產 $\frac{Q_i}{n_i}$ 個產品，就進行一次檢測，製程由控制狀態變為失控狀態的機率為 $1 - \beta_i^{n_i}$ ，故檢測一次的期望修復成本為 $r_i(1 - \beta_i^{n_i})$ 。因此，當生產產品 i 一個批量 Q_i 時，因進行了 n_i 次檢測，所以產品 i 在一週期內的期望修復成本為：

$$\sum_{j=1}^{n_i} r_i(1 - \beta_i^{n_i}) \approx \sum_{j=1}^{n_i} r_i \frac{\alpha_i Q_i}{n_i} = r_i \alpha_i Q_i = r_i \alpha_i TD_i, \quad Q_i = TD_i。$$

(推導過程參見附錄 A.1)

4. 期望機會成本(expected opportunity cost)

當製程處於失控狀態，所生產出的不良品會造成額外的機會成本，而使生產總成本增加。在求取不良品的期望機會成本時，需先知道不良品的

期望數目與生產一個不良品所花費的機會成本。因此，產品 i 的不良品期望機會成本，即在一個生產批量 Q_i 下，所生產出不良品的期望數乘上生產一個不良品所需的機會成本。

上一段是對不良品之期望機會成本的分析。接著將直接求取不良品的機會成本。當產品 i 的生產批量為 Q_i 時，所生產出的不良品期望數目為：

$$\begin{aligned} E[N_i|Q_i] &= Q_i - \frac{\beta_i(1 - e^{Q_i \ln \beta_i})}{\alpha_i} \\ &\approx \frac{\alpha_i Q_i^2}{2n_i} = \frac{\alpha_i D_i^2 T^2}{2n_i} \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

其中 $\beta_i = 1 - \alpha_i$ 。(推導過程參見附錄 A.2)

因此，產品 i 的生產批量為 Q_i 時，則不良品的期望機會成本為：

$$\pi_i \times \frac{\alpha_i D_i^2 T^2}{2n_i} = \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T^2}{2n_i} \quad (3.3.2)$$

5. 存貨持有成本(inventory holding cost)

當生產批量為 Q_i 時，產品 i 在一生產週期 T 的存貨持有成本為

$$\frac{h_i D_i (1 - \rho_i) T^2}{2} \quad (3.3.3)$$

(推導過程參見附錄 A.3)

6. 總生產成本(total production cost)

在生產批量為 Q_i 時，則產品 i 在一生產週期 T 內的設置成本、檢測成本、期望修復成本、存貨持有成本以及不良品所帶來的期望機會成本的總和為：

$$A_i + n_i v_i + r_i \alpha_i T D_i + \frac{h_i T^2 D_i (1 - \rho_i)}{2} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T^2}{2n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

因此，在生產週期 T 內生產 L 種產品的總生產成本為：

$$\sum_{i=1}^L \left(A_i + n_i v_i + r_i \alpha_i T D_i + \frac{h_i T^2 D_i (1 - \rho_i)}{2} + \frac{\alpha_i \pi_i T^2 D_i^2}{2n_i} \right)$$

則在單位時間內，生產 L 種產品的平均總生產成本為：

$$\sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i + n_i v_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i} \right) \quad (3.3.4)$$

為了後續章節方便引用，令

$$TC_i(n_i, T) = \frac{n_i v_i}{T} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (3.3.5)$$

$$TC(\bar{n}, T) = \sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i + n_i v_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i} \right) \quad (3.3.6)$$

，其中 $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_L)$ 。

3.4 數學模式

本篇研究的決策情境乃是在考慮生產良率的製程下，如何透過檢測次數與生產週期的安排，進而求得在單一產品設施中，生產 L 種不同產品的生產製程，能達到單位時間內的總生產成本為最小。

透過第一節的符號定義，第二節的模式假設與第三節的目標函數分析，我們將決策情境轉化為數學模式，以幫助決策者面對考慮生產良率的製程時，如何安排檢測次數與生產週期，作為分析產品的平均總生產成本的一種考量方法。

因此，在考慮生產良率的製程下，如何透過檢測次數與生產週期的安排，以求得在單一產品設施中，生產 L 種不同產品的生產製程，能夠達到單位時間內的總生產成本為最小的數學決策模式，該模式之後皆以問題(P)表示：

$$(P) \quad \begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i + n_i v_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i} \right) \\ & \text{subject to} \quad n_i \in N^+ ; i = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

本篇研究中的問題(P)，是一組合最佳化的非線性整數規劃問題。因此，可行解的數量會相當龐大且分佈很離散。當問題的規模隨著產品數目 L 開

始增加時，可行解的數量將呈指數成長。由於傳統的方法，難以應用在求取離散型最佳解問題。因此，本研究計畫將針對問題(P)，提出理論分析，進行深入探討，而設計出一個有效率的搜尋方法，來搜尋最佳解。

於是在第四章，將針對問題(P)的理論性質，進行相關討論與分析，以協助在第五章，設計出一套有效率的搜尋演算法。能夠給予以理論性質上的支持與證明。透過該套搜尋演算法，的確可以有效地找到問題(P)的最佳解。

第四章 理論性質分析

進入第五章的演算法之前，本章先對目標函數的理論性質加以分析證明，俾作為第五章，使用演算法求最佳解所需之相關理論，預作建構。

開始進入理論分析之前，我們發現目標函數可以分解成兩部分：一部份含有決策變數 n_i ，另一部份則不含 n_i 。

由於 n_i 為決策變數，所以分析目標函數時，嘗試先以數據代入只含 n_i 的部分而畫出其圖形，透過對圖形的觀察，找出圖形上所透露出目標函數所具有的性質。這些性質，對進行後續理論分析與求取最佳解的過程，會有相當大的幫助。因此，在後面章節中，將對目標函數含 n_i 的部分進行圖形觀察，再將觀察所得性質予以證明，確定在不同數據下的目標函數，都會擁有相同的性質，以確保在第五章求取最佳解時，透過理論性質的幫助與演算法的設計，能求得全面最佳解，而不是局部最佳解。

4.1 $TC_i(n_i, T)$ 圖形的觀察

進行目標函數分析之前，由於本研究所考量的決策變數為生產週期 T 與產品檢測次數 n_i ，因此，先將目標函數分解成含有 n_i 與不含 n_i 的兩個部分，以幫助爾後分析目標函數。目標函數 $TC(\bar{n}, T)$ 為：

$$\begin{aligned} TC(\bar{n}, T) &= \sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i + n_i v_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} \right) + \sum_{i=1}^L \left(\frac{n_i v_i}{T} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i} \right) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$\text{where } \bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_L) \quad , \quad n_i \in N^+ \quad , \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

為了方便分析 $TC(\bar{n}, T)$ ，令

$$TC_i(n_i, T) = \frac{n_i v_i}{T} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i} \quad (4.1.2)$$

$$\text{where } n_i \in N^+ \quad , \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

因此，目標函數變為如下所示：

$$TC(\bar{n}, T) = \sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} \right) + \sum_{i=1}^L TC_i(n_i, T)$$

where $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_L)$, $n_i \in N^+$, $i = 1, 2, \dots, L$.

將目標函數拆成含有 n_i 與不含 n_i 兩部分之後，嘗試透過將數據代入成本項 $TC_i(n_i, T)$ 中，觀察所得之函數圖，以歸納出其特殊性質。當以一組參數代入產品 i 與檢測次數 n_i 有關的成本項 $TC_i(n_i, T)$ 後，所代入的相關參數與獲得的圖形，分別如下表 4.1.1 與圖 4.1.1 所示：

表 4.1.1 各項參數數據

A_i	v_i	r_i	α_i	D_i	ρ_i	h_i	π_i	n_i
0.15	0.08	0.06	0.01	35	0.18	0.875	0.15	5

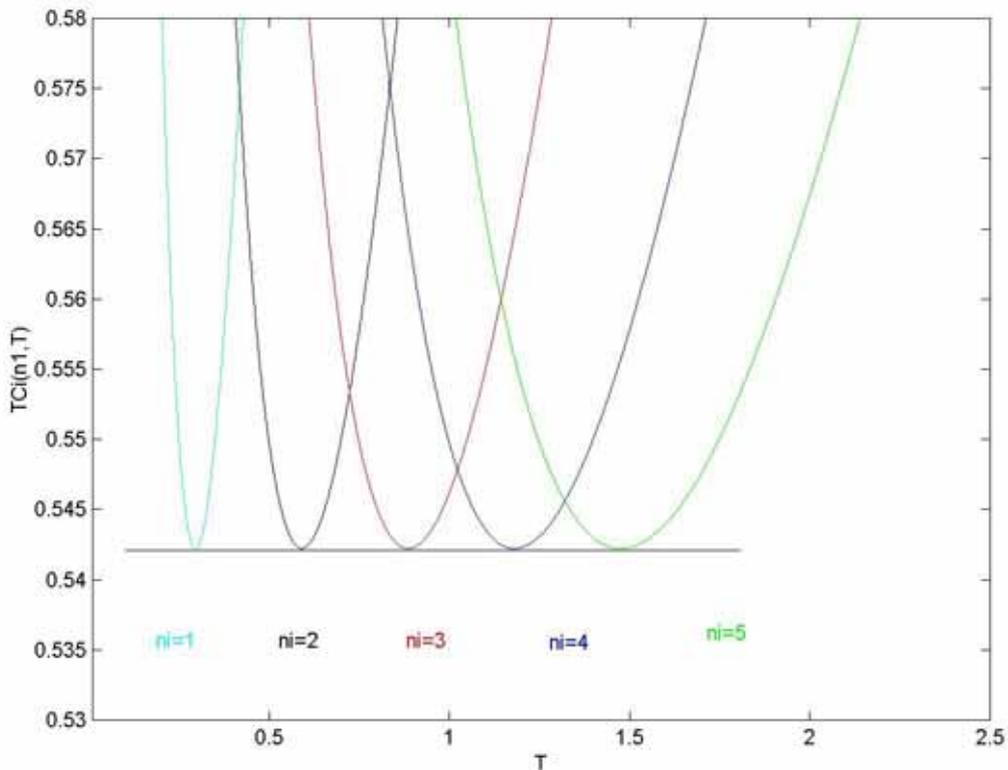


圖 4.1.1 $TC_i(n_i, T)$ 圖形

觀察圖 4.1.1 發現，每兩兩緊鄰的 $TC_i(n_i, T)$ 與 $TC_i(n_i + 1, T)$ 的圖形會有一個交點。另在兩個緊鄰接合點間的曲線，為一凹型連續曲線且存有一局部最小值，是 $TC_i(n_i, T)$ 的最小值。因此，透過這些特性，我們可以把 $TC_i(n_i, T)$ 的最好平均成本曲線(the best average cost curve)給畫出來，如圖 4.1.2 所示：

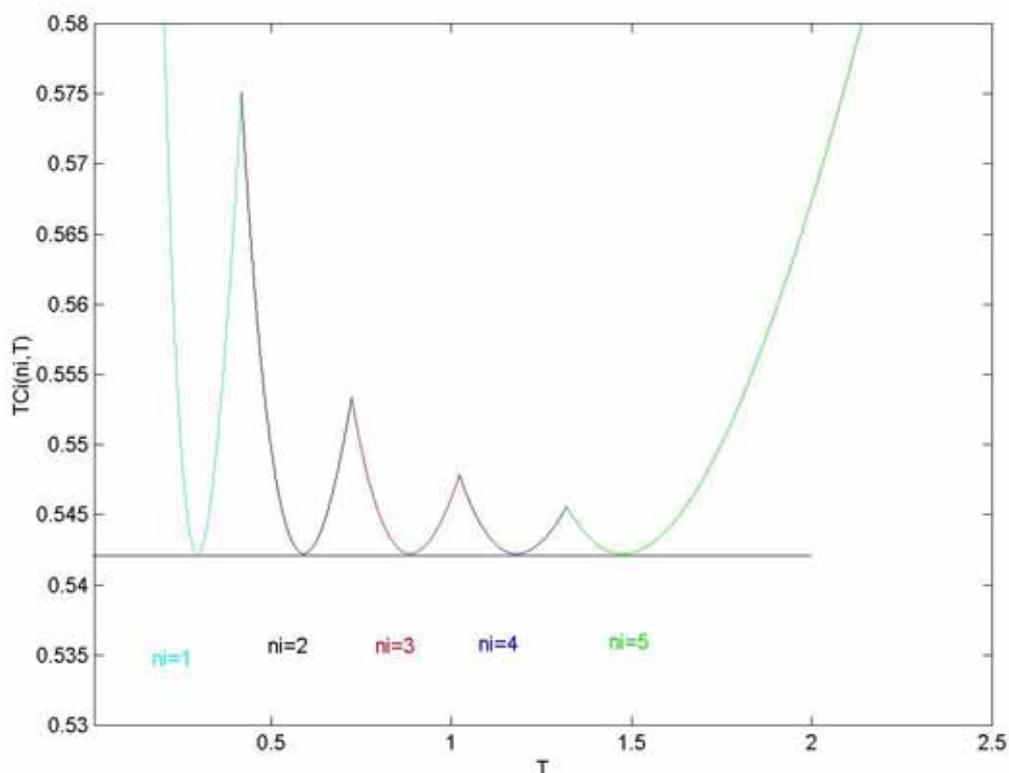


圖 4.1.2 $TC_i(n_i, T)$ 的最好平均成本曲線 $TC_i(T)$

4.2 接合點(junction point)

由前一節圖 4.1.1 與圖 4.1.2 之觀察，發現每兩兩緊鄰的 $TC_i(n_i, T)$ 與 $TC_i(n_i + 1, T)$ 的圖形，必有一交點。像這種由兩兩緊鄰的 $TC_i(n_i, T)$ 與 $TC_i(n_i + 1, T)$ 圖形的交點，稱之為接合點(junction point)。

當 $TC_i(n_i, T) = TC_i(n_i + 1, T)$ 時，經過簡化可以得到

$$T(n_i) = \sqrt{\frac{2n_i(n_i + 1)v_i}{\alpha_i \pi_i D_i^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (4.2.1)$$

令此一接合點為 $w_i(n_i)$ ，則得到接合點之時間封閉解(closed form)為：

$$w_i(n_i(T)) = \sqrt{\frac{2n_i(n_i+1)v_i}{\alpha_i\pi_iD_i^2}}$$

，其中 $n_i \in N^+, i=1, 2, \dots, L$ 。

因此，我們得到 **Lemma 4.2.1**。只要知道接合點的時間點，就能透過該時間點 $w_i(n_i(T))$ ，得到檢測次數 n_i 的值。 ■

Lemma 4.2.1. 若在一給定的生產週期 T 下，則產品 i 最佳檢測次數 n_i 為：

$$n_i^*(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T \leq 2\sqrt{\frac{v_i}{\alpha_i\pi_iD_i^2}} \\ m, & \sqrt{\frac{2m(m-1)v_i}{\alpha_i\pi_iD_i^2}} \leq T \leq \sqrt{\frac{2m(m+1)v_i}{\alpha_i\pi_iD_i^2}}, \quad m \geq 2 \end{cases}$$

Proof: 當生產週期 T 落在兩接合點 $w_i(m)$ 與 $w_i(m+1)$ 之間時，依(4.2.1)式，即

$$\sqrt{\frac{2m(m-1)v_i}{\alpha_i\pi_iD_i^2}} \leq T \leq \sqrt{\frac{2m(m+1)v_i}{\alpha_i\pi_iD_i^2}}$$

，因此，產品 i 的最佳檢測次數 n_i 即為 m 。 ■

Theorem 4.2.1. 令 $n_i^{(L)}$ 與 $n_i^{(R)}$ 分別表示產品 i 在 $TC_i(n_i, T)$ 圖形上，位於接合點 $w_i(n_i)$ 左右兩邊的檢測次數，則產品 i 在接合點 $w_i(n_i)$ 右邊的檢測次數 $n_i^{(R)} = n_i^{(L)} + 1$ 。

Proof: 令 $T_1, T_2 > 0$ 且 $T_1 < T_2$ ，以產品 i 而言，若 T_1, T_2 落於某一接合點 $w_i(n_i)$ 左右兩側，即 $T_1 < w_i(n_i(T)) < T_2$ 。又由 **Lemma 4.2.1** 得知， T_1 與 T_2 所相對之檢測次數分別為 n_i 與 $n_i + 1$ 。因此，在接合點右邊的檢測次數等於接合點左邊的檢測次數加一。換言之，對於所有的 $i=1, 2, \dots, L$ 。產品 i 的檢測次數 $n_i^{(R)} = n_i^{(L)} + 1$ 。 ■

4. 3 片段凹性(piece-wise convex)

前一節已經對接合點下了定義。本節將透過其性質，跟產品 i 有關的最好平均成本曲線給畫出來，其定義如下：

$$\underline{TC}_i(T) = \left\{ TC_i(n_i(T'), T') \mid T' \in R^+, n_i(T') \in N^+ \right\} \quad (4.3.1)$$

，其中 $n_i(T')$ 滿足 **Lemma 4.2.1**。

，或可表示為：

$$\underline{TC}_i(T) = \begin{cases} TC_i(1, T) & , 0 < T \leq T(1) \\ TC_i(2, T) & , T(1) < T \leq T(2) \\ \vdots & \\ TC_i(n_i, T) & , T(n_i - 1) < T \leq T(n_i) \\ \vdots & \end{cases} \quad (4.3.2)$$

，表示 $\underline{TC}_i(T)$ 為產品 i 在不同的時間點下，所對應出來的片段凹性連續函數曲線，如圖 4.1.2，證明如 **Lemma 4.3.1**。

Lemma 4.3.1. $\underline{TC}_i(T)$ 是一條與生產週期 T 有關的片段凹性連續函數曲線 (piece-wise convex continuous function curve)。且對每一檢測次數 n_i ， $\underline{TC}_i(T)$ 的局部極小值發生在

$$w_i(n_i) = \frac{n_i}{D_i} \sqrt{\frac{2v_i}{\alpha_i \pi_i}} \quad (4.3.3)$$

，且其局部極小值為 $\sqrt{2v_i \alpha_i \pi_i D_i^2}$ 。

Proof: 令 $T(n_i - 1) \leq T \leq T(n_i)$ ，即 $\sqrt{\frac{2n_i(n_i - 1)v_i}{\alpha_i \pi_i D_i^2}} \leq T \leq \sqrt{\frac{2n_i(n_i + 1)v_i}{\alpha_i \pi_i D_i^2}}$

依(4.3.2)式， $\underline{TC}_i(T) = TC_i(n_i, T)$ ， $i = 1, 2, \dots, L$ 。

依(4.1.2)式， $TC_i(n_i, T) = \frac{n_i v_i}{T} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i}$, $i = 1, 2, \dots, L$ 。

分別對 $TC_i(n_i, T)$ 進行一階偏微分與二階偏微分，得到如下的式子：

$$\begin{aligned}\frac{\partial TC_i(n_i, T)}{\partial T} &= \frac{-(n_i v_i)}{T^2} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2}{2n_i} \\ \frac{\partial^2 TC_i(n_i, T)}{\partial T^2} &= \frac{2n_i v_i}{T^3} > 0, \quad \forall n_i, v_i, T > 0\end{aligned}$$

由於二階偏導數值大於零，故給定 n_i 下 $TC_i(n_i, T)$ 之曲線恆為開口朝上且為凹性曲線。

又令一階偏導數等於零時，可以求出 $TC_i(n_i, T)$ 的局部極小值發生在

$$w_i(n_i) = \frac{n_i}{D_i} \sqrt{\frac{2v_i}{\alpha_i \pi_i}}$$

且其相對應的局部極小值為

$$\begin{aligned}TC_i(n_i, w_i(n_i)) &= n_i v_i \frac{D_i}{n_i \sqrt{\frac{2v_i}{\alpha_i \pi_i}}} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2}{2n_i} \frac{n_i}{D_i} \sqrt{\frac{2v_i}{\alpha_i \pi_i}} \\ &= \sqrt{2v_i \alpha_i \pi_i D_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, L.\end{aligned}\tag{4.3.4}$$

因此，每一 $TC_i(n_i, T)$ 是 T 的凹性連續函數曲線，且其局部極小值與檢測次數 n_i 無關，此由(4.3.4)式得知。再由(4.3.2)式知， $\underline{TC}_i(T)$ 是由凹性連續函數 $TC_i(n_i, T)$ 所定義而成。因此， $\underline{TC}_i(T)$ 是 T 的片段凹性連續函數曲線 (piece-wise convex continuous function curve)。且每一片函數 $TC_i(n_i, T)$ 在給定的 n_i 下，都有一局部極小值 $\sqrt{2v_i \alpha_i \pi_i D_i^2}$ ，發生在(4.3.3)式。 ■

Theorem 4.3.1. $TC(\bar{n}, T)$ 是 T 的片段凹性連續函數曲線 (piece-wise convex continuous function curve) 。

Proof.

$$\begin{aligned} TC(\bar{n}, T) &= \sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i + n_i v_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^L \left(\frac{n_i v_i}{T} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i} \right) + \sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^L TC_i(n_i, T) + \sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} \right) \end{aligned}$$

，其中 $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_L)$ ， $n_i \in N^+$ ， $i = 1, 2, \dots, L$ 。

令

$$\begin{aligned} \underline{TC}(T) &= \sum_{i=1}^L \underline{TC}_i(T) + \sum_{i=1}^L \frac{A_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^L \underline{TC}_i(T) + \sum_{i=1}^L TC_i(T) \end{aligned}$$

where $TC_i(T) = \frac{A_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2}$, $i = 1, 2, \dots, L$ 。

$$(1) \quad \underline{TC}_i(T) = \frac{A_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2}, i = 1, 2, \dots, L$$

對 $\underline{TC}_i(T)$ 分別求一階導數及二階導數得：

$$\frac{d}{dT} \underline{TC}_i(T) = -\frac{A_i}{T^2} + \frac{h_i D_i (1 - \rho_i)}{2}, i = 1, 2, \dots, L$$

$$\frac{d^2}{dT^2} \underline{TC}_i(T) = \frac{2A_i}{T^3} > 0, \forall A_i, T > 0 \quad (4.3.5)$$

由(4.3.5)式知，二階導數恆大於零。因此，每一 $\underline{TC}_i(T)$ 為 T 的凹性連續函數曲線。

(2) 由 **Lemma 4.3.1** 知， $\underline{TC}_i(T)$ 為 T 的片段凹性連續函數曲線。因此， $\underline{TC}_i(T) + TC_i(T)$ 為 T 的片段凹性連續函數曲線。而片段凹性連續函數之和為片段凹性連續函數。因此， $\underline{TC}(T) = \sum_{i=1}^L \underline{TC}_i(T) + \sum_{i=1}^L TC_i(T)$ 為片段凹性連續函數。我們稱 $\underline{TC}(T)$ 為目標函數 $TC(\bar{n}, T)$ 的最好平均總成本

函數(the best average total cost function)。



Theorem 4.3.2. 產品 i 之 $\underline{TC}_i(T)$ 之每一接合點，都會承接到 $\underline{TC}(T)$ 的曲線上，成為其接合點。

Proof. 假設 w 是產品 j 之 $\underline{TC}_j(T)$ 之接合點所對應的時間點，但不是其他 $L-1$ 項產品之最好平均總成本函數曲線之接合點。

由於 w 是產品 j 之 $\underline{TC}_j(T)$ 之接合點所對應的時間點。因此， w 為一連續不可微分的尖點。而

$$\begin{aligned}\underline{TC}(T) &= \sum_{i=1}^L \underline{TC}_i(T) + \sum_{i=1}^L \underline{TC}_i(T) \\ &= \sum_{i=1}^L \underline{TC}_i(T) + \underline{TC}_j(T) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^L \underline{TC}_i(T)\end{aligned}$$

因此， w 在 $\underline{TC}(T)$ 曲線上，依然為一連續不可微分的尖點。所以，產品 i 之 $\underline{TC}_i(T)$ 之每一接合點，都會承接到 $\underline{TC}(T)$ 的曲線上，而成為其接合點。 ■

在本章中透過分析探討所得到的理論性質，將在第五章搜尋最佳解時，提供有力的協助，以確定所得的解為最佳解。而在有了這些理論性質的支持後，將於下一章中，著手進行演算法設計，以求得本篇研究問題 (P) 的最佳解。

第五章 演算法設計

在第四章中，我們已經證明目標函數 $\underline{TC}(T)$ 是一條片段凹性函數曲線，且得到一些片段凹性函數的性質，如每一段凹性函數有局部最小值，透過接合點可得到相對應的檢測次數。由於這些性質皆與週期 T 有關，因此，搜尋最佳解時，決定沿時間軸 T 進行搜尋。但在搜尋的過程中，必須定義出 T 的上下界。所以，接下來的 5.1 節與 5.2 節，我們將訂定搜尋的上下界，5.3 節則開始規劃演算法流程與畫出相關流程圖，以協助程式編碼。

5.1 演算法的下界

為了在時間軸 T 上進行搜尋，我們需要訂定搜尋時的範圍。換言之，需訂定上界(upper bound)與下界(lower bound)。且訂定上下界後，可以確保下界之下，目標函數不會有局部最小值產生，且上界之上，目標函數不會有局部最小值產生。因此，目標函數之全域最佳值一定發生在上下界之間，後續求取上下界的過程中，將分別予以證明此一主張。

由於本研究中的問題(P)是一以生產週期 T 與檢測次數 n_i 做為決策變數，以達到最小生產成本的問題，因此，推導下界時，我們採用共同週期法(common cycle approach)，令 $n_i = 1$ ， $i = 1, 2, \dots, L$ 。如此一來，每個產品 i 會享有相同的檢測次數，而透過相同檢測次數所得到的生產週期 T_{cc} ，將會是搜尋過程中的下界。

Lemma 5.1.1. 目標函數 $\underline{TC}(\bar{n}, T)$ 之最好平均總成本曲線 $\underline{TC}(T)$ ，用共同週期法求解， $\underline{TC}(T)$ 的局部極小值會發生在

$$T_{cc} = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^L (A_i + v_i)}{\sum_{i=1}^L (h_i D_i (1 - \rho_i) + \alpha_i \pi_i D_i^2)}} \quad (5.1.1)$$

且其相對應的局部極小值為

$$\underline{TC}(T_{cc}) = \sqrt{2\left(\sum_{i=1}^L A_i + v_i\right)\left(\sum_{i=1}^L h_i D_i (1 - \rho_i) + \alpha_i \pi_i D_i^2\right)} + \sum_{i=1}^L r_i \alpha_i D_i \quad (5.1.2)$$

Proof: 先前已定義過目標函數 $\underline{TC}(T)$ ，如下所示：

$$\begin{aligned} \underline{TC}(T) &= \sum_{i=1}^L \underline{TC}_i(T) + \sum_{i=1}^L TC_i(T) \\ &= \sum_{i=1}^L \left(\frac{n_i v_i}{T} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2n_i} \right) + \sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} \right) \end{aligned}$$

且在共同週期法下，令 $n_i = 1$ ， $i = 1, 2, \dots, L$ 。目標函數 $\underline{TC}(\bar{n}, T)$ 之最好平均總成本曲線 $\underline{TC}(T)$ ，將變為如下所示：

$$\underline{TC}(T) = \sum_{i=1}^L \left(\frac{v_i}{T} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 T}{2} \right) + \sum_{i=1}^L \left(\frac{A_i}{T} + r_i \alpha_i D_i + \frac{h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} \right)$$

分別對 $\underline{TC}(T)$ 進行一階微分與二階微分，得到如下的式子：

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{TC}(T)}{dT} &= -\frac{\sum_{i=1}^L (A_i + v_i)}{T^2} + \frac{\sum_{i=1}^L (h_i D_i (1 - \rho_i))}{2} + \frac{\sum_{i=1}^L (\alpha_i \pi_i D_i^2)}{2} \\ \frac{d^2 \underline{TC}(T)}{dT^2} &= \frac{2 \sum_{i=1}^L (A_i + v_i)}{T^3} > 0 \quad \forall A_i, v_i, T > 0, \quad i = 1, 2, \dots, L. \end{aligned}$$

由於二階導數大於零，所以，令一階導數等於零時，可以求出當 $n_1 = n_2 = \dots = n_L = 1$ 時， $\underline{TC}(T)$ 的局部極小值發生在

$$T_{cc} = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^L (A_i + v_i)}{\sum_{i=1}^L (h_i D_i (1 - \rho_i) + \alpha_i \pi_i D_i^2)}}$$

且其相對應的局部極小值為：

$$\underline{TC}(T_{cc}) = \sqrt{2\left(\sum_{i=1}^L A_i + v_i\right)\left(\sum_{i=1}^L h_i D_i (1 - \rho_i) + \sum_{i=1}^L \alpha_i \pi_i D_i^2\right)} + \sum_{i=1}^L r_i \alpha_i D_i \quad \blacksquare$$

在 *Theorem 5.1.2* 中將證明，在下界 T_{cc} 之下， $\underline{TC}(T)$ 不會有局部極小值存在。所以， T_{cc} 將會是搜尋過程中，時間軸 T 的下界。

Theorem 5.1.2. $\underline{TC}(T)$ 為目標函數 $TC(\bar{n}, T)$ 之最好平均總成本函數。若 $T < T_{cc}$ 時，則 $\underline{TC}(T)$ 不可能會是 \underline{TC} 全域最小值。

Proof. 由 *Theorem 4.3.1* 知， $\underline{TC}(T)$ 為片段凹性連續函數。因此， $\underline{TC}(T)$ 的全域最小值，必是其中一片函數的局部極小值。

不僅 $\underline{TC}(T)$ 的全域極小值，跟目標函數 $TC(\bar{n}, T)$ 的全域極小值相同，且 $\underline{TC}(T)$ 的局部極小值，必跟目標函數 $TC(\bar{n}, T)$ 的局部極小值相同。因此，我們求 $TC(\bar{n}, T)$ 的局部極小值。

分別對 $TC(\bar{n}, T)$ 進行一階偏微分與二階偏微分，得到如下的式子：

$$\begin{aligned}\frac{\partial TC(\bar{n}, T)}{\partial T} &= -\frac{\sum_{i=1}^L (A_i + n_i v_i)}{T^2} + \frac{\sum_{i=1}^L (h_i D_i (1 - \rho_i))}{2} + \sum_{i=1}^L \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2}{2n_i} \\ \frac{\partial^2 TC(\bar{n}, T)}{\partial T^2} &= \frac{2\sum_{i=1}^L (A_i + n_i v_i)}{T^3} > 0 \quad \forall A_i, n_i, v_i, T > 0\end{aligned}$$

由於二階偏導數值大於零，所以，令一階偏導數等於零時，可以求出 $TC(\bar{n}, T)$ 的局部極小值發生在

$$\tilde{T} = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^L (A_i + n_i v_i)}{\sum_{i=1}^L (h_i D_i (1 - \rho_i)) + \sum_{i=1}^L \left(\frac{\alpha_i \pi_i D_i^2}{n_i}\right)}} \quad (5.1.3)$$

所以，

$$T_{cc} = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^L(A_i + v_i)}{\sum_{i=1}^L(h_i D_i(1 - \rho_i) + \alpha_i \pi_i D_i^2)}} \leq \tilde{T} = \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^L(A_i + n_i v_i)}{\sum_{i=1}^L(h_i D_i(1 - \rho_i)) + \sum_{i=1}^L\left(\frac{\alpha_i \pi_i D_i^2}{n_i}\right)}} \quad (5.1.4)$$

, $\forall A_i, n_i, v_i, h_i, D_i, \rho_i, \alpha_i, \pi_i, i=1,2,\dots,L$ 。

由於 $TC(\bar{n}, T)$ 之局部極小值會發生在 \tilde{T} ，且由式(5.1.4)得知，凡比下界 T_{cc} 小之 T ， $TC(\bar{n}, T)$ 將不會有局部極小值發生，即對於所有的 $T < T_{cc}$ ， $TC(\bar{n}, T)$ 不可能是局部極小值。因此，我們可以確定，在下界 T_{cc} 之下， $TC(\bar{n}, T)$ 不會發生全域極小值。故 T_{cc} 可以作為搜尋演算法的起點。換言之， T_{cc} 即為搜尋演算法沿時間軸 T 搜尋時的下界。有了下界，我們將於下一節，訂定演算法搜尋時的上界，作為搜尋演算法的終點，避免浪費過多的搜尋時間。■

5.2 演算法的上界

在 5.1 節中，我們已確定演算法搜尋範圍的下界。並且也以證明，在下界 T_{cc} 之下，目標函數不會有比任何局部最小值更小的函數值出現。同理，本節訂定搜尋時的上界時，除了訂定上界的位置外，還需確定在上界之上，不會有比任何局部最小值小的函數值出現。因此，沿著時間軸 T 進行搜尋時，可以在上下界所界定的範圍搜尋，以減少演算法搜尋時所需花費的時間。

在透過 **Theorem 5.2.1** 得到搜尋上界前，先定義在搜尋範圍內，搜尋最佳解時的更新動作。令 T^* 與 F^* 為目前手邊最好的局部最小值與相對應的最佳檢測次數集合，其中 $F^*(T) = \{n_1^*(T), n_2^*(T), \dots, n_L^*(T)\}$ 。當得到一個新的局部最小值 \tilde{T} 時，首先確定 \tilde{T} 所相對應的成本值 $TC(F(\tilde{T}), \tilde{T})$ ，是否小於目前手邊最好的最佳解 $TC(F(T^*), T^*)$ ，若 $TC(F(\tilde{T}), \tilde{T}) < TC(F(T^*), T^*)$ ，則將手邊的最佳解更新為 $T^* = \tilde{T}$ 且 $F^* = F(\tilde{T})$ ，此外，也需將目前手上的上界值作更新，以縮短沿時間軸 T 作搜尋所需的時間，因此，可以由 **Theorem 5.2.1** 得到搜尋上界。

Theorem 5.2.1. 若 $TC(T)$ 之局部極小值發生在 \bar{T} ，則搜尋演算法上界 β 如下：

$$\beta = \frac{X + \sqrt{X^2 - 2 \sum_{i=1}^L h_i D_i (1 - \rho_i) \sum_{i=1}^L A_i}}{\sum_{i=1}^L h_i D_i (1 - \rho_i)} \quad (5.2.1)$$

，其中 $X = \frac{\bar{T}}{2} \sum_{i=1}^L h_i D_i (1 - \rho_i) + \frac{\sum_{i=1}^L A_i}{\bar{T}} + \sum_{i=1}^L \phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T})$ ，而 $\phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T})$ 之定義如下：

$$\phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T}) = \begin{cases} \frac{v_i}{\bar{T}} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 \bar{T}}{2} - \sqrt{2 \alpha_i v_i \pi_i D_i^2} & , n_i(\bar{T}) = 1 \\ \sqrt{\alpha_i v_i \pi_i D_i^2} \left(\frac{2(n_i(\bar{T}) + 1) \sqrt{2 n_i(\bar{T})(n_i(\bar{T}) + 1) v_i}}{2 n_i(\bar{T})(n_i(\bar{T}) + 1)} - \sqrt{2} \right) & , n_i(\bar{T}) > 1 \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Proof: 在訂定上界前，先分析目標函數 $TC(\bar{n}, T)$ ，發現其中的成本項裡，會

隨著週期 T 增加的成本項，為單位時間內的存貨持有成本 $\frac{\sum_{i=1}^L h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2}$ ；

而會隨著週期 T 減少的成本，為單位時間內的設置成本 $\frac{\sum_{i=1}^L A_i}{T}$ 。又且目標函數中的 $TC_i(n_i, T)$ 成本項，隨著週期 T 改變，其成本改變的幅度會侷限在一範圍內。因此，我們擬透過這三項成本項，隨週期 T 改變時的增量與減量進行分析，以推求上界。

一、對 $TC_i(n_i, T)$ 的改變幅度進行分析而在分析前先定義 $\phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T})$ ， $\phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T})$ 為產品 i 對於所有的 $T > \bar{T}$ ， $TC_i(n_i, T)$ 的值由 \bar{T} 到 T 的最大改變量。

(1) 當 $n_i^*(\bar{T}) = 1$ 時，

產品 i 對於所有的 $T > \bar{T}$ ， $TC_i(n_i, T)$ 值由 \bar{T} 到 T 的最大改變量 $\phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T}) = TC_i(n_i^*(\bar{T}), \bar{T}) - TC_i(n_i^*(T), T)$ ，且由 **Lemma 4.3.1** 得 $TC_i(n_i^*(T), T)$ 的局部極小值為 $\sqrt{2v_i\alpha_i\pi_iD_i^2}$ 。因此，透過簡單的化簡後，當 $n_i^*(\bar{T}) = 1$ 時，產品 i 對於所有的 $T > \bar{T}$ ， $\phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T})$ 值如下所示：

$$\begin{aligned} & \phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T}) \\ &= TC_i(n_i^*(\bar{T}), \bar{T}) - TC_i(n_i^*(T), T) \\ &= \frac{v_i}{\bar{T}} + \frac{\alpha_i\pi_iD_i^2\bar{T}^2}{2} - \sqrt{2v_i\alpha_i\pi_iD_i^2} \end{aligned}$$

由於 $TC_i(n_i, T)$ 為一凹性函數曲線，因此，發生局部極小值的 \bar{T} ，所相對應的成本值 $TC_i(n_i^*(\bar{T}), \bar{T})$ ，會有如下的性質：

$$\begin{aligned} & TC_i(n_i^*(\bar{T}), \bar{T}) \\ & \leq \max\{TC_i(n_i^*(\bar{T}), w_i(n_i^*(\bar{T}))), TC_i(n_i^*(\bar{T}), w_i(n_i^*(\bar{T}) + 1))\} \end{aligned}$$

$$\text{且 } TC_i(n_i^*(\bar{T}), \bar{T}) \leq TC_i(n_i^*(\bar{T}), w_i(n_i^*(\bar{T})))。$$

(2) 當 $n_i^*(\bar{T}) > 1$ 時，

產品 i 對於所有的 $T > \bar{T}$ ， $TC_i(n_i, T)$ 值由 \bar{T} 到 T 的最大改變量 $\phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T}) = TC_i(n_i^*(T), T) - TC_i(n_i^*(\bar{T}), \bar{T})$ ，且由 **Lemma 4.3.1** 得， $TC_i(n_i^*(T), T)$ 的局部極小值為 $\sqrt{2v_i\alpha_i\pi_iD_i^2}$ 。因此，透過簡單的化簡後，當 $n_i^*(\bar{T}) > 1$ 時，產品 i 對於所有的 $T > \bar{T}$ ， $\phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T})$ 值如下所示：

$$\begin{aligned} & \phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T}) \\ &= TC_i(n_i^*(T), T) - TC_i(n_i^*(\bar{T}), \bar{T}) \\ &= \frac{(2n_i(\bar{T}) + 1)\sqrt{2n_i(\bar{T})(n_i(\bar{T}) + 1)v_i}\sqrt{\alpha_i\pi_iD_i^2}}{2n_i(\bar{T})(n_i(\bar{T}) + 1)} - \sqrt{2v_i\alpha_i\pi_iD_i^2} \quad (5.2.3) \\ &= \sqrt{\alpha_i\pi_iD_i^2} \left(\frac{(2n_i(\bar{T}) + 1)\sqrt{2n_i(\bar{T})(n_i(\bar{T}) + 1)v_i}}{2n_i(\bar{T})(n_i(\bar{T}) + 1)} - \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

所以，產品 i 對於所有的 $T > \bar{T}$ ， $\phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T})$ 值如下所示：

$$\phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T}) = \begin{cases} \frac{v_i}{\bar{T}} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 \bar{T}}{2} - \sqrt{2\alpha_i v_i \pi_i D_i^2} & , n_i(\bar{T}) = 1 \\ \sqrt{\alpha_i v_i \pi_i D_i^2} \left(\frac{2(n_i(\bar{T}) + 1) \sqrt{2n_i(\bar{T})(n_i(\bar{T}) + 1)v_i}}{2n_i(\bar{T})(n_i(\bar{T}) + 1)} - \sqrt{2} \right) & , n_i(\bar{T}) > 1 \end{cases}$$

因此，對於所有的 $T > \bar{T}$ ，目標函數裡 $\sum_{i=1}^L TC_i(n_i, T)$ 的改變幅度為

$$\sum_{i=1}^L \phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T})。$$

二、在目標函數的成本項中，單位時間內的存貨持有成本會隨著時間增加而增加。因此，對於所有 $T > \bar{T}$ ，單位時間內的存貨持有成本增量為

$$\frac{\sum_{i=1}^L h_i T D_i (1 - \rho_i)}{2} - \frac{\sum_{i=1}^L h_i \bar{T} D_i (1 - \rho_i)}{2}$$

三、在目標函數的成本項中，單位時間內的設置成本會隨時間減少而減少，因此，對於所有 $T > \bar{T}$ ，單位時間內的設置成本減量為

$$\frac{\sum_{i=1}^L A_i}{\bar{T}} - \frac{\sum_{i=1}^L A_i}{T}$$

當時間軸 T 超越上界 β 後，如果單位時間內存貨持有成本的增量，大於單位時間內設置成本的減量與 $TC_i(n_i, T)$ 最大改變量的和，則表示可以停止繼續往後搜尋，因為目標函數的成本值會一直增加，再也不會有更好的局部最小值產生，所以，當下式成立時， β 會是搜尋的上界。

$$\frac{\sum_{i=1}^L h_i \beta D_i (1 - \rho_i)}{2} - \frac{\sum_{i=1}^L h_i \bar{T} D_i (1 - \rho_i)}{2} \geq \frac{\sum_{i=1}^L A_i}{\bar{T}} - \frac{\sum_{i=1}^L A_i}{T} + \sum_{i=1}^L \phi_i(n_i(\bar{T}), \bar{T})$$

透過簡單的移項與化簡後，得到搜尋上界 β 值為：

$$\beta = \frac{X + \sqrt{X^2 - 2 \sum_{i=1}^L h_i D_i (1 - \rho_i) \sum_{i=1}^L A_i}}{\sum_{i=1}^L h_i D_i (1 - \rho_i)}$$

$$, \text{ 其中 } X = \frac{\tilde{T}}{2} \sum_{i=1}^L h_i D_i (1 - \rho_i) + \frac{\sum_{i=1}^L A_i}{\tilde{T}} + \sum_{i=1}^L \phi_i(n_i(\tilde{T}), \tilde{T})$$

且 $\phi_i(n_i(\tilde{T}), \tilde{T})$ 的定義如下：

$$\phi_i(n_i(\tilde{T}), \tilde{T}) = \begin{cases} \frac{v_i}{\tilde{T}} + \frac{\alpha_i \pi_i D_i^2 \tilde{T}}{2} - \sqrt{2 \alpha_i v_i \pi_i D_i^2} & , n_i(\tilde{T}) = 1 \\ \sqrt{\alpha_i v_i \pi_i D_i^2} \left(\frac{2(n_i(\tilde{T}) + 1) \sqrt{2 n_i(\tilde{T})(n_i(\tilde{T}) + 1) v_i}}{2 n_i(\tilde{T})(n_i(\tilde{T}) + 1)} - \sqrt{2} \right) & , n_i(\tilde{T}) > 1 \end{cases}$$

有了搜尋的上、下界後，我們在沿著時間軸 T 進行搜尋時，只需在搜尋的上、下界內搜尋，以減短不必要的搜尋時間，此外，當我們獲得一組新的局部最小值時，將之前在手邊的最小值更新完後，上界的值也會跟著更新，因此，會使得搜尋距離縮短，而達到加快搜尋速度。

5.3 設計搜尋演算法

有了搜尋的上下界後，我們將於本節，把沿著時間軸 T 搜尋的搜尋演算法流程予以定義。

搜尋演算法的步驟如下：

Step.1 利用 **Lemma 5.1.1** 求出搜尋時的下界 T_{cc}

Step.2 透過 **Lemma 4.2.1**，可以得到 T_{cc} 與其相對應的的檢測次數值的集合

$F(T_{cc})$ 。且透過 T_{cc} ，可由 **Theorem 5.2.1** 得到與其相對應的上界 β 。

Step.3將上界 β 值代入 **Lemma4.2.1** 得到與其相對應的的檢測次數值的集合

$$F(\beta) = \{n_1(\beta), n_2(\beta), \dots, n_L(\beta)\}。$$

Step.4透過 $F(\beta)$ ，得知各產品的接合點數目，並求出各產品接合點，再將全部的接合點予以排序，得到排序後的接合點

$$JP = [S_1, S_2, \dots, S_j, \dots, S_{n_1+n_2+\dots+n_L}]。$$

Step.5判斷 T_{cc} 落在排序後接合點的哪一區間中，若 T_{cc} 落在區間 $[S_j, S_{j+1}]$ 中，

$$\text{則 } F^* = F(S_j), \tilde{T}^* = \tilde{T}(F(S_j)), TC^* = TC(F(S_j), \tilde{T}(F(S_j)))。$$

Step.6移到由接合點排序形成的下一區間 $[S_{j+1}, S_{j+2}]$ ，得到 $F(S_{j+1})$ ，

$$\tilde{T}(F(S_{j+1})), \beta, TC(F(S_{j+1}), \tilde{T}(F(S_{j+1}))) \text{ 與 } \tilde{T}(F(S_{j+1}))。$$

如果 $TC(F(S_{j+1}), \tilde{T}(F(S_{j+1}))) < TC^*$ ， $TC^* = TC(F(S_{j+1}), \tilde{T}(F(S_{j+1})))$ ，且

$$\tilde{T}^* = \tilde{T}(F(S_{j+1})), F^* = F(S_{j+1})。$$

否則， $F^* = F^*$ ， $\tilde{T}^* = \tilde{T}^*$ ， $TC^* = TC^*$ 。

Step.7如果 $\tilde{T}(F(S_{j+1})) > \beta$ ， $F^* = F^*$ ， $\tilde{T}^* = \tilde{T}^*$ ， $TC^* = TC^*$ 。否則， $j=j+1$ ，

回到 Step 6。

5.4演算法流程圖

於上一節所提出的搜尋演算法，其流程圖如下圖 5.4.1 所示：

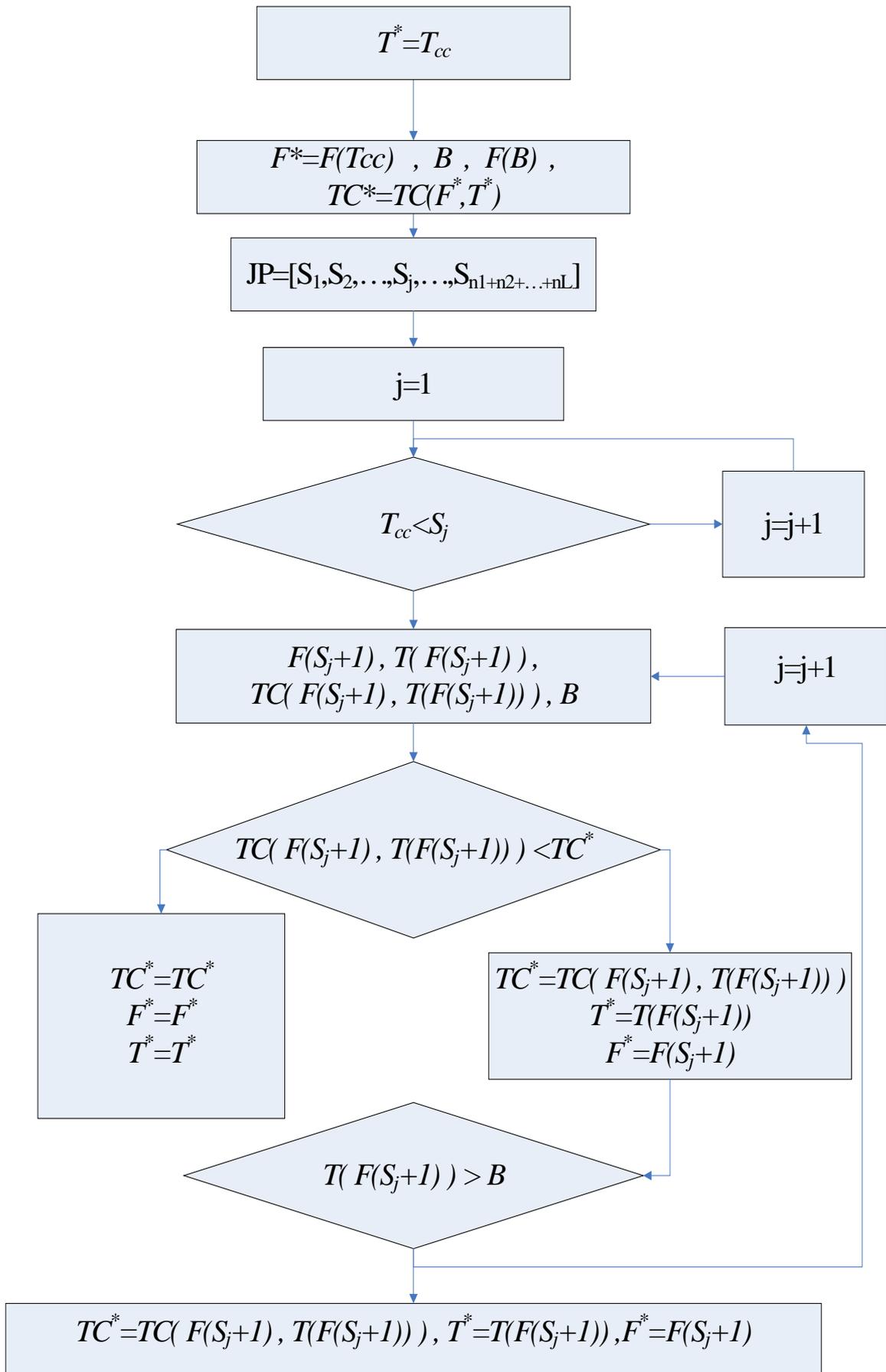


圖 5.4.1 演算法流程圖

第六章 數據驗證

在本章中，將使用於第五章所得到的搜尋演算法，對模式進行求解。而在求解前，將先對各項參數訂定其實驗數據範圍，再依各參數的實驗數據範圍，產生隨機數據，以產生隨機實驗的結果。因此，在 6.1 節中，我們先訂定各參數的實驗數據範圍。

而為了確定我們於第五章所設計的搜尋演算法，所求得的解具有一定的品質。因此，在 6.1 節末，我們加入 Lin and Gong(2002)所提出的啟發式演算法(Heuristic)。在進行方法比較前，先進行一組數據實驗，與搜尋演算法進行求解比較，之後於 6.2 節中，再透過隨機數據實驗，以驗證在隨機試驗下，搜尋演算法所得的解，在品質上較啟發式解法所得的解要更為優異。

6.1 數據實驗範圍

在本節中將訂定各項參數範圍，而各項參數的範圍，如下表 6.1.1 所示。

表 6.1.1 各項參數數據實驗範圍

設置成本 A_i	[40,200]
檢測成本 v_i	[40,80]
修復成本 r_i	[0.01,0.05]
不良率 α_i	[0.1,0.2]
需求率 D_i	[100,4000]
生產率 p_i	$p_i = D_i * U(1.1,1.3)$
存貨持有成本 h_i	[,0.15,0.2]
不良品成本 π_i	[0.12,0.16]

過去 Lin and Gong(2002)針對本模式，已提出一啟發式的演算法-疊代法。而在做求解上的比較前，先列出疊代法的步驟，而透過下例步驟，可得到疊代法對本模式所求得的最佳解，以作為搜尋演算法所得之最佳解的比較基準。

Step1. 令 $j=1$ ， $n_1^j = n_2^j = \dots = n_L^j = 1$ 。

Step2. 將 $n_1^j, n_2^j, \dots, n_L^j$ ，代入

$$T_1^{(j)} = \sqrt{\frac{2 \sum_{i=1}^L (A_i + n_i v_i)}{\sum_{i=1}^L (h_i D_i (1 - \rho_i)) + \sum_{i=1}^L \left(\frac{\alpha_i \pi_i D_i^2}{n_i} \right)}}。$$

Step3. 將 $T_1^{(j)}$ 代入 $(n_i^* - 1)n_i^* \leq \frac{T_1 D_i \alpha_i \pi_i}{2v_i} \leq (n_i^* + 1)n_i^*$ ，得到 n_i^{j+1} ， $i=1, 2, \dots, L$ 。

Step4. 如果 $n_i^j - n_i^{j+1} = 0$ ，跳到 Step6；否則，將 Step3 得到的 n_i^{j+1} ，代入 Step2 得到 $T_1^{(j+1)}$ 。

Step5. 如果 $|T_1^{(j)} - T_1^{(j+1)}| < \varepsilon$ ；跳到 Step6；否則， $j=j+1$ ，回到 Step3。

Step6. 得到最佳解的 T_1^* 與 n_i^* ， $i=1, 2, \dots, L$ 。

有了疊代法的步驟，將於 6.2 節中先以一組數據進行，疊代法與搜尋演算法在求解上的比較，之後再以隨機產生的參數數據，來進行這兩種演算法，在求解上品質的差異。

6.2 隨機數據實驗

在進行隨機數據實驗前，我們先以一組隨機產生的數據，如下表 6.2.1 所示，代入這兩種不同的解法，觀察這兩組解在品質上的差異。

表 6.2.1 各項參數的數據表

	A_i	v_i	r_i	k_i	p_i	D_i	ρ_i	h_i	w_i
產品 1	0.15	0.08	0.06	0.1	40	35	0.875	0.18	0.15
產品 2	0.13	0.07	0.05	0.12	40	38	0.95	0.19	0.13
產品 3	0.14	0.085	0.04	0.09	40	37	0.925	0.175	0.14

表 6.2.2 列出疊代演算法與搜尋演算法，在表 6.2.1 的數據下，所得的結果，如下：

表 6.2.2 兩種演算法所求出的最佳解

	最佳檢測次數 F^*			最佳生產週期	最小總成本
	產品 1	產品 2	產品 3		
疊代法	32	38	30	3.0231	9.3963
搜尋法	7	9	7	0.7512	7.9847

由表 6.2.2 得知，透過接合點方式進行搜尋的搜尋演算法，在表 6.2.1 的參數數據下，得到的成本值比疊代法所得到的成本值小，且所需檢測的次數亦較少。因此，我們嘗試透過隨機實驗，來分析比較這兩種不同演算法，在參數依照不同數據下設計時，所得到的解的差異與效率。

上一段已先以一組數據實驗，來驗證搜尋演算法與啟發式演算法的優異，而本段即將以隨機產生的數據，代入這兩種不同的演算法，以進行對這兩種不同的演算法進行比較。

並且針對每個不同的變數，分成四個水準，並且在每個水準內，產生500筆在範圍內的隨機參數資料，來進行隨機實驗。

而這兩種演算法，在不同參數的範圍設定下，目標函數值間的差異，如表 6.2.3 到表 6.2.10 所示。且其中所謂的最大誤差與平均誤差，乃是指，將疊代演算法所得的解減去搜尋演算法的解，再除以搜尋演算法的解，所得的百分數，即為兩搜尋演算法之誤差。而最大與平均乃是指在一個水準內，誤差的最大值與誤差的平均值。

表 6.2.3 針對產品數 5,10,15,20 進行分析

n	最大誤差	平均誤差
5	49.86%	9.1%
10	27.14%	10.01%
15	21.77%	9.19%
20	18.24%	11.28%

表 6.2.4 產品數為 5 時，針對設置成本進行分析

A_i	最大誤差	平均誤差
40~80	35.57%	7.01%
80~120	29.77%	8.23%
120~160	41.46%	31.74%
160~200	31.24%	23.32%

表 6.2.5 產品數為 5 時，針對設置成本進行分析

v_i	最大誤差	平均誤差
40~50	33.67%	19.06%
50~60	25.13%	10.3%
60~70	45.25%	17.87%
70~80	11.73%	7.01%

表 6.2.6 產品數為 5 時，針對修復成本進行分析

r_i	最大誤差	平均誤差
0.01~0.02	24.2%	8.59%
0.02~0.03	27.52%	9.09%
0.03~0.04	22.47%	7.87%
0.04~0.05	25.56%	7.5%

表 6.2.7 產品數為 5 時，針對不良率進行分析

α_i	最大誤差	平均誤差
0.01~0.0125	31.25%	11.75%
0.0125~0.015	27.12%	9.84%
0.015~0.0175	21%	6.8%
0.0175~0.02	14.51%	7.36%

表 6.2.8 產品數為 5 時，針對需求率進行分析

D_i	最大誤差	平均誤差
100~1075	27.58%	14.57%
1075~2050	29.9%	16.1%
2050~3025	21.33%	14.64%
3025~4000	13.24%	10.18%

表 6.2.9 產品數為 5 時，針對存貨持有成本進行分析

h_i	最大誤差	平均誤差
0.15~0.1625	27.76%	22.05%
0.1625~0.175	28.67%	24.51%
0.175~0.1875	23.14%	18.67%
0.1875~0.2	67.28%	36.78%

表 6.2.10 產品數為 5 時，針對不良品成本進行分析

π_i	最大誤差	平均誤差
0.12~0.13	27.13%	8.39%
0.13~0.14	38.63%	25.85%
0.14~0.15	44.41%	29.31%
0.15~0.16	24.35%	7.93%

第七章 結論

7.1 研究貢獻

本文針對某個單一製造設施，重複生產數項產品族的生產，並且考慮其為需檢驗的不完美製程，來分析最佳生產週期與檢測策略之問題。我們除了考量生產整備成本與存貨持有成本之外，同時為了減少製程中，可能產出的不良品數，因此，訂定在每個生產週期間，實施檢測的次數，使得加上不良品檢驗成本和不良品所衍生的機會成本後，所得到的平均總成本能達到最低。

由於本篇所考慮的數學模式，在過去曾由 Lin and Gong(2002)針對該模式，提出一啟發式解法(Heuristic)。但是，由於啟發式解法所得的解，無法保證得到一最佳解。因此，本研究針對模式進行理論性質探討，且於第四章得到相關理論性質；依照得到的理論性質，本研究在第五章中設計一搜尋演算法。而為了能夠有效的搜尋，本研究並推導搜尋的上、下界，以縮短搜尋範圍並節省演算求解的時間。在第六章中，本研究以隨機數據實驗，驗證搜尋演算法所得解的品質。

透過數據實驗的支持，發現本研究所提出的演算法，在求解的精確度上，的確比過去 Lin and Gong(2002)所提出的啟發式演算法更為精準。證明了本研究所提出的搜尋演算法所得到的解，的確較 Lin and Gong(2002)所提出的啟發式演算法所得解的品質要更好。

7.2 未來發展

在本篇研究中，假設製造過程為一不完美製造過程，以衡量最佳生產週期與檢驗策略之問題。由於在本研究中，已假設生產率為一固定且已知的參數。然而，實際上，生產率往往會隨著因機台的故障或延遲，而造成生產率的起伏。因此，為了更貼近現實情況，在未來研究的擴展上，我們可加入生產率是會變動的因素，換言之，生產率亦為模式中，需要進行決策的決策變數。而加入此項條件後，模式則變為：如何在一不完美製造過程中，透過決定生產率大小，最佳生產週期與檢測策略以達到總生產成本為最小之問題，以做為本研究未來之後續研究方向。

附錄 A

A.1 產品*i*修復期望成本

Porteus(1986)提出，當 $\alpha_i \rightarrow 0$ 時， $1 - \exp\left(\frac{Q_i}{n_i} \ln(\beta_i)\right) \approx \frac{\alpha_i Q_i}{n_i}$, $\beta_i = 1 - \alpha_i$ 。

(由馬克勞林展開式可得趨近值)。因此，產品 *i* 生產一個批量 Q_i 時，修復的期望成本為

$$\sum_{j=1}^{n_i} r_i (1 - \beta_i^{\frac{Q_i}{n_i}}) \approx \sum_{j=1}^{n_i} r_i \frac{\alpha_i Q_i}{n_i} = r_i \alpha_i TD_i, \quad Q_i = TD_i. \quad (\text{A.1})$$

A.2 產品*i*不良品機會成本

Porteus(1986)提出，當生產批量為 n 與生產批量為 $n-1$ 時，這兩個批量間的期望不良品數目差，其關係式如下：

$$e_n - e_{n-1} = q(n - e_{n-1}) \quad (\text{A.2})$$

其中 e_n 表示產品的生產批量為 n ，且生產週期為 T 時，產品的期望不良品數； q 表示製程由控制狀態轉變為失控狀態的機率； $n - e_{n-1}$ 表示在生產批量為 n 時，生產到第 $n-1$ 個產品，製程中依然保持在控制狀態加工的產品數目； $q(n - e_{n-1})$ 則表示再繼續生產第 n 個產品時，製程會將 $n - e_{n-1}$ 個產品，由控制狀態轉變為失控狀態的不良品期望數目。

且 Porteus(1986)提出，當生產批量為 n 時，在這一生產批量中，所生產出的期望不良品數 e_n 為：

$$\begin{aligned} e_n &= qn + qe_{n-1} \\ &= qn \sum_{i=0}^{n-1} q^{-i} - q \sum_{i=0}^{n-1} i q^{-i} \\ &= qn \frac{(1 - q^{-n})}{q} - q \frac{q^{-1}(1 + (n-1)q^{-n} - nq^{-n-1})}{q^2} \\ &= n - \frac{q(1 - q^{-n})}{q} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

所以，當生產批量為 Q_i ，製程由控制狀態轉變為失控狀態的機率為 α_i ，且 $\beta_i = 1 - \alpha_i$ ，將其代入式(3)得到不良品的期望個數 $E[N_i|Q_i]$ 為

$$E[N_i|Q_i] = Q_i - \frac{\beta_i(1 - \beta_i^{Q_i})}{\alpha_i} = Q_i - \frac{\beta_i(1 - e^{Q_i \ln(\beta_i)})}{\alpha_i} \quad (\text{A.4})$$

Porteus(1986)提出，當 $\alpha_i \rightarrow 0$ 時，

$$\begin{aligned} E[N_i|Q_i] \\ \approx \frac{\alpha_i Q_i^2}{2n_i}, \beta_i = 1 - \alpha_i \end{aligned}$$

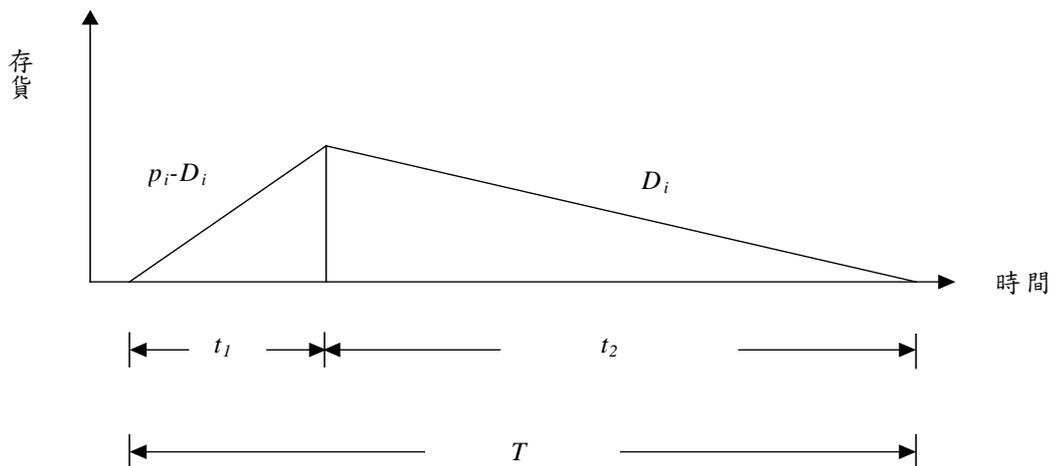
，且 $Q_i = T_i D_i$ 。所以，

$$E[N_i|Q_i] = \frac{\alpha_i (T_i D_i)^2}{2n_i} \quad (\text{A.5})$$

下面舉出一個小例子，當產品 i 生產一批量 5 個產品，且製程由控制狀態轉變為失控狀態的機率為 0.1 時，也就是， $Q_i = 5$ ， $\alpha_i = 0.1$ ，產品 i 的期望不良品數目 $E[N_5|5] = 5 - \frac{0.9(1 - 0.9^5)}{0.1} = 5 - \frac{0.9(1 - e^{5 \ln(0.9)})}{0.1} = 1.31441$ 個。表示當生產批量為 5 個，製程由控制狀態轉變為失控狀態的機率為 0.1 時，則產品 i 在生產這 5 個產品裡，會產生不良品的期望個數為 1.31441 個。

A.3 產品 i 的存貨持有成本計算過程

產品 i 在一生產週期 T 內的時間與存貨關係如下圖：



$$\text{由於 } (p_i - D_i)t_1 = D_i t_2, \quad (\text{A.6})$$

$$\text{且 } t_1 + t_2 = T. \quad (\text{A.7})$$

所以，由式(6)與式(7)，經過簡單的化簡後得

$$t_1 = \frac{D_i}{p_i} T = \rho_i T$$

$$t_2 = \left(1 - \frac{D_i}{p_i}\right) T = (1 - \rho_i) T$$

因此，在生產週期 T 內，產品 i 的最大存貨水準為 $D_i(1 - \rho_i)T$ 。

且在生產週期 T 內，產品 i 的平均存貨持有水準為上圖的面積，它等於

$$\frac{1}{2} \times T \times D_i(1 - \rho_i)T = \frac{D_i(1 - \rho_i)T^2}{2}$$

所以，在生產週期 T 內，產品 i 的平均存貨持有成本為：

(每單位存貨持有成本) \times (平均存貨持有水準)

$$= h_i \times \frac{D_i(1 - \rho_i)T^2}{2} = \frac{h_i D_i(1 - \rho_i)T^2}{2}。$$

參考文獻

- [1] Ben-Daya, M., “The economic production lot-sizing problem with imperfect production process and imperfect maintenance”, *International Journal of Production Economics*, 76, (2002), 257-264.
- [2] Berg, M., Posner M.J.M., Zhao, H., “Production-inventory systems with unreliable machines”, *Operations Research*, 42, (1997), 111-118.
- [3] Cheng, T.C.E., “EPQ with process and quality assurance considerations”, *Journal of the Operational Research Society*, 42, (1991), 713-720.
- [4] Cheng, T.C.E., “An economic order quantity model with demand-dependent unit production cost and imperfect production process”, *IIE Transactions*, 23, (1991), 23-28.
- [5] Chung, K.J., “Bounds for production lot sizing with machine breakdowns”, *Computers and Industrial Engineering*, 32, (1997), 139-144.
- [6] Chung, K.J., Hou, K.L., “An optimal production run time with imperfect production process and allowable shortages”, *Computers and Operations Research*, 30, (2003), 483-490.
- [7] Das, T.K., Sarkar, S., “Optimal preventive maintenance in a production inventory system”, *IIE Transactions*, 31, (1999), 537-551.
- [8] Federgruen, A., So, K.C., “Optimal maintenance policies for single-server queuing system subject to breakdowns”, *Operations Research*, (38), 1990, 330-343.
- [9] Goyal, S.K., “An integrated inventory model for a single product system”, *Journal of Operational Research Society*, 28, (1997), 539-545.
- [10] Groenevelt, H., Pintelon, L., Seidmann, A., “A production lot sizing with machine breakdowns”, *Management Science*, 38, (1992), 104-123.
- [11] Groenevelt, H., Pintelon, L., Seidmann, A., “Production batching with machine breakdowns and safety stocks”, *Operations Research*, 40, (1992), 959-971.
- [12] Harris, F.W., “How many parts to make at once”, *Operations Research*, 38, (1990), 947-950.
- [13] Hall, R., *Zero Inventories*, Dow Jones-Irwin, Homewood, IL(1983).
- [14] Johnson, L.A., and Montgomery, D., *Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control*, New York: Wiley(1974).

- [15] Kim, C.H., Hong, Y., “A extended EMQ model for a failure prone machine with general lifetime distribution”, *International Journal of Production Economics*, 49, (1997), 215-223.
- [16] Khouja, M., Mehrez, A., “Economic production lot size model with variable production rate and imperfect quality”, *Journal of the Operational Research Society*, 45, (1994), 1405-1417.
- [17] Lee H. and Rosenblatt M., “ Simultaneous determination of production cycle and inspection schedules in a production system”, *Management Science*, 33, (1987), 1125-1136.
- [18] Lee, H.L., Rosenblatt, M.J., “A production and maintenance planning model with restoration cost dependent on detection delay”, *IIE Transactions*, 21, (1989), 368-375.
- [19] Lee, J.S., and Park, K.S., “Joint determination of production cycle and inspection intervals in a deteriorating production”, *Journal of the Operational Research Society*, 42, (1991), 775-783.
- [20] Lin, T.M., Tseng, S.T., Liou, M.J., “Optimal inspection schedule in the imperfect production system under general shift distribution”, *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, 8, (2), (1991), 73-81.
- [21] Liou, M.J., Tseng, S.T., Lin, T.M., “The effects of inspection errors to the imperfect EMQ model”, *IIE Transactions*, 26, (1994), 42-51.
- [22] Lin, C.S., “Integrated production-inventory models with imperfect production processes and a limited capacity for raw materials”, *Mathematical and Computer Modeling*, 29, (1999), 81-89.
- [23] Liu, B., Cao, J., “Analysis of a production-inventory system with machine breakdowns and shutdowns”, *Computers and Operations Research*, 26, (1999), 73-91.
- [24] Lin, G.C., and Gong, D.C., “Simultaneous determination of production cycle and inspection production-inventory system with variable production rates”, *Proceedings of The Fourth Asia-Pacific Industrial Engineering Management Systems Conference*, December.18-20, 2002, Taipei, Taiwan.
- [25] Lin, C.S., Chen, C.H., and Kroll, D.E., “Integrated production-inventory models for imperfect production processes under inspection schedules”, *Computers and Industrial Engineering*, 44, (2003) , 633-650.
- [26] Makis, V., Fung, J., “An EMQ model with inspections and random machine

- failures”, *Journal of the Operational Research Society*, 49, (1998), 66-76.
- [27]Makis, V., “Optimal lot sizing and inspection policy for an EMQ model with imperfect inspections”, *Naval Research Logistics*, 45, (1998), 165-186.
- [28]Nahmias, S., *Production and Operations Analysis* , McGraw Hill , Singapore, (1997).
- [29]Porteus, E.L., “Optimal lot sizing, process quality improvement and setup cost reduction”, *Operations Research*, 34, (1986), 137-144.
- [30]Rogers, J., “A computational approach to the economic lot scheduling problem”, *Management Science* , 4, (1958), 264-291.
- [31]Rosenblatt, M.J., Lee, H.L., “Economic production cycle with imperfect production process”, *IIE Transactions*, 18, (1986), 48-55.
- [32]Silver, E.A., Pyke, F.D., Peterson, R., *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, Wiley, New York, (1998).
- [33]Tagaras, G., “An integrated cost model for joint optimization of process control and maintenance”, *Journal of the Operational Research Society* , 39, (1988), 757-766.
- [34]Tseng, S.T., “Optimal preventive maintenance policy for deteriorating production systems”, *IIE Transactions*, 28, (1996), 687-694.
- [35]Wang, C.H., Sheu, S.H., “Simultaneous determination of the optimal production-inventory and product inspection policies for a deteriorating production system”, *Computers and Operations Research*, 28, (2001), 1093-1110.
- [36]Wang, C.H., Sheu, S.H., “Determining the optimal production-maintenance policy with inspection errors : using a Markov chain”, *Computers and Operations Research*, 30, (2003), 1-17.