

東 海 大 學

工業工程與經營資訊研究所

碩士論文

題目：整合供應商生產及採購者補貨  
供應鏈模式之研究

研究生：陳宗輝

指導教授：姚銘忠  
蔡禎騰  
彭 泉  
林水順

中華民國九十一年六月



**An Integrated Inventory Model with One Vendor  
and Multiple Buyers**

By

Tsung-Hui Chen

Advisor: Dr. Ming-Jong Yao

Dr. Jen-Teng Tsai

Dr. Chyuan Perng

Dr. Shui-Shun Lin

A Thesis

Submitted to the Institute of Industrial Engineering and

Enterprise Information at Tunghai University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master of Science

in

Industrial Engineering and Enterprise Information

June 2002

Taichung, Taiwan, Republic of China

## 致謝

時光飛逝、歲月如梭，在東海的日子又將告一個段落。回想起這兩年的研究所生活，收穫實在很多。首先要感謝指導老師姚銘忠犧牲了許多週末假期，教導我許多論文不解之處。更感謝蔡禎老師、彭泉老師以及林水順老師在專業知識、研究方法與生活上各方面的幫助。

此外，要感謝莊文傑老師於論文口試期間所給予的意見和指正，使得論文更加完善。另一方面，研究室的諸位同學與學弟們對我的鼓勵和支持也讓我銘記在心。謝謝英欽大哥、保佑、錦宗、維駿、博仁、志賢、永志宏、政憲、勝翔、宣彥、子麟、穎威、崇民在這些日子裡帶給我許多美好的回憶。而系上的助教素卿姊、雅慧姊、俊良兄、宏華姊等，感謝你們對我的照顧與協助。

最後，感謝我的雙親在我求學的生涯中，給予我最大的支持與鼓勵，讓我無後顧之憂的全力衝刺。

陳宗輝 謹誌於

東海大學工業工程與經營資訊所

中華民國九十一年六月

# 整合供應商生產及採購者補貨供應鏈模式之研究

學生：陳宗輝

指導教授：姚銘忠

蔡 禎

彭 泉

林水順

## 摘要

在現今供應鏈合作的環境中，成員之間多以策略結盟的方式進行合作，藉此來降低彼此各項作業的成本。同時在利益的考量上，不再只是單方面的針對供應商或採購者，而是必須考慮整個供應鏈成員的共同利益。本研究的問題背景為：單一供應商在購買原物料後，經過加工生產，製造成完成品，最後將完成品配送給多個採購者。本研究的決策變數分別為：供應商之生產週期數與採購者之補貨週期；即期望透過尋找最佳的供應商生產週期數以及採購者的補貨週期，降低整體供應鏈的平均總成本。在理論分析的探討中，我們首先推導出由供應商和所有採購者所組成的聯合總平均成本，接下來再針對聯合總平均成本曲線的最佳解結構特性進行探討(如片段凸性、接合點等)。其中我們證明得到聯合總平均成本函數對時間  $T$  具有片段凸性的性質。同時，針對在聯合總平均成本曲線的最佳解位置，即在其接合點及區域最低值的發生點，我們推導出其封閉解的公式。上述之理論分析的結果，將有助於提出一有效的搜尋演算法，以求取本模式的最佳解。論文中也將舉一範例與多個隨機實驗之數據來驗證並說明本研究中得的理論結果。

# An Integrated Inventory Model with One Vendor and Multiple Buyers

Student : Tzong-Hui Chen

Advisor : Ming-Jong Yao

Jen-Teng Tsai

Chyuan Perng

Shui-Shun Lin

Department of Industrial Engineering and Enterprise Information,  
Tunghai University.

## ABSTRACT

In this paper, we consider an integrated inventory model with one vendor and multiple buyers. In this 3-tier supply chain, this vendor purchases raw material, produces into finished items, and delivers finished items to multiple buyers. The focus of this study is to secure the optimal common cycle for the vendor's production and all the buyers' replenishment to minimize the average total cost. To approach this problem, we first derive the joint total average cost that occurs from the vendor and all buyers. Then, we analyze the optimality structure of the optimal joint total average cost curve with respect to the value of common cycle ( $T$ ). We show that the joint total average cost curve is piece-wise convex. The junction points on the optimal joint total average cost curve can be easily located by a closed-form formula. We propose an efficient search algorithm for securing the optimal solution of this problem. In order to improve the effectiveness of the search algorithm, we derive an upper and a lower bound on the value of common cycle. A numerical example demonstrate that our search algorithm secures the optimal solution in a very short run time.

# 目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
目 錄.....	iii
圖目錄.....	iv
表目錄.....	v
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景與目的.....	1
1.2 相關假設.....	3
1.3 符號標記.....	4
第二章 文獻探討.....	5
2.1 二階層供應鏈之批量模式.....	5
2.1.1 單一供應商與單一採購者之模式.....	5
2.1.2 單一供應商與多個採購者之模式.....	6
2.2 三階層供應鏈之批量模式.....	10
第三章 數學模式.....	12
3.1 成本分析.....	12
3.1.1 第 $i$ 位採購者單位時間的總成本.....	12
3.1.2 供應商之完成商品單位時間的總成本.....	13
3.1.3 供應商之原物料單位時間的總成本.....	14
3.1.4 聯合總成本.....	15
3.2 目標函數.....	17

第四章 理論分析.....	17
4.1 片段凸性.....	17
4.2 接合點.....	20
4.2.1 接合點位置的推導.....	21
4.2.2 接合點的理論性質探討.....	22
4.3 最佳解結構.....	23
第五章 有效之搜尋演算法.....	23
5.1 聯合總成本問題特性之分析.....	24
5.2 聯合總成本問題的寬鬆模式之特性.....	26
5.3 最佳解的上、下界限.....	28
5.4 最佳解的搜尋演算法.....	30
第六章 數值實驗.....	32
6.1 範例說明.....	32
6.2 隨機實驗.....	35
第七章 結論.....	38
參考文獻.....	38
附錄一.....	41
附錄二.....	42
附錄三.....	43
附錄四.....	45

## 圖目錄

圖 1-1	研究背景.....	2
圖 2-1	二階存貨/配送系統問題.....	9
圖 3-1	第 $i$ 個採購者之存貨水準.....	12
圖 3-2	供應商完成商品之存貨水準.....	13
圖 3-3	供應商原物料之存貨水準.....	15
圖 3-4	單一供應商、三個採購者及二個生產週期 .....	16
圖 4-1	接合點.....	20
圖 5-1	$\ddot{Q}(m,T)$ 函數曲線最低部分.....	25
圖 5-2	聯合總成本曲線.....	26
圖 5-3	寬鬆後聯合總成本曲線.....	27
圖 5-4	目標函數 $(m,T)$ 曲線與目標函數 $\tilde{A}_R(m,T)$ 曲線 .....	30
圖 5-5	最佳解搜尋演算法流程圖.....	31

## 表目錄

表 6-1	參數範圍.....	32
表 6-2	單一供應商與三個採購者.....	33
表 6-3	搜尋結果.....	35
表 6-4	單一供應商與 5 個、10 個採購者.....	36
表 6-5	單一供應商與 15 個、20 個採購者.....	36
表 6-6	單一供應商與 25 購者.....	37

# 第一章 緒論

## 1.1 研究背景與目的

存貨對企業來說，一直是一項龐大且昂貴的投資。好的存貨規則管理可以增進企業現金的流通以及投資的回收等。然而大多數的企業(如零售商、批發商、製造商等)，對於存貨管理的技術缺乏整體性的認知，無法對公司內部以及整個供應鏈做出有效的存貨管理，導致顧客服務水準降低、大量資金積壓等問題。因此，如何制定出一套有效的存貨規則，將是現代企業不可避免的課題。

本研究是以整個供應鏈的角度，來觀看供應商和採購者彼此之間的存貨問題。透過供應商和採購者的共同合作，整合、協調出適合整個供應鏈的存貨規則，進而達到降低雙方所產生的總成本。

而本論文的研究問題背景為：由單一供應商來購買原物料，經過加工生產製造成完成品，最後再將完成品配送給多個採購者。期望透過尋找最佳的供應商生產週期數以及採購者的補貨週期來降低彼此的總成本。

以下以圖一表示之：

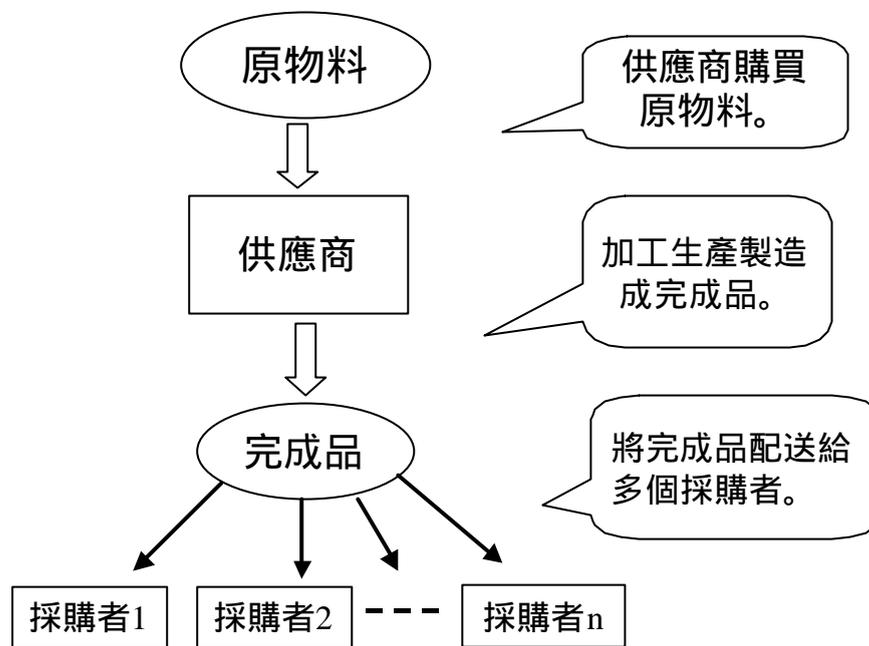


圖 1-1 研究背景

供應商所需處理的問題包括有：

1. 決定將完成品配送給所有採購者的補貨週期  
( $T$  : common cycle time)。
2. 決定組成原物料補貨週期中所包含生產週期的個數( $m$ )。

## 1.2 相關假設：

1. 供應商以共同週期的時間將完成產品運送給多個採購者。
2. 原物料的補貨週期是由供應商的多個生產週期所組成。
3. 供應商不允許原物料缺貨。
4. 供應商與採購者計畫減少彼此的總成本。
5. 供應商與採購者之間補貨決策的參數資料是可以彼此流通的。
6. 所有的採購者不允許缺貨。
7. 所有的採購者願意接受供應商所提出的補貨決策，來達到聯合總成本的最佳化。

### 1.3 符號標記：

$a_r$ ：供應商原物料單位訂購成本。

$h_r$ ：供應商原物料單位時間之存貨持有成本。

$TC_r(m, T)$ ：供應商原物料單位時間總成本。

$P$ ：供應商生產速率，為一已知常數。

$m$ ：供應商原物料補貨週期中，生產週期之倍數。

$S$ ：供應商之生產設置成本。

$u$ ：供應商生產一完成品，所需原物料之使用率。

$h_f$ ：供應商完成品單位時間之存貨持有成本。

$TC_f(T)$ ：供應商完成品單位時間之總成本。

$D_i$ ：採購者  $i$  的產品需求率，為一已知常數。

$T$ ：共同週期時間。

$a_i$ ：採購者  $i$  的產品訂購成本。

$h_i$ ：採購者  $i$  單位時間產品之存貨持有成本。

$TC_i(T)$ ：採購者  $i$  單位時間產品之總成本。

$\tilde{A}(T)$ ：供應商與所有採購者所組成之聯合總成本。

## 第二章 文獻探討

在現今競爭激烈的市場環境中，由於顧客的服務需求趨向多元化、各類產品的生命週期縮短、企業的全球化以及組織協同合作的趨勢，使得企業的經營管理策略，不能夠再單方面只著重企業內部的流程再造或營運績效而已。而必須是以產品從原物料到製作成完成品的整個運作流程之利益來做考量，也就是說必須以所有合作企業的整體觀點來考慮收益及成本，進而提升整個供應鏈的競爭力。而在這整個供應鏈的運作過程中，是由許多上、下游成員共同合作而成，而成員數量的多寡及運作方式也就決定了整個供應鏈的大小及反應速度。如何針對多階層的供應鏈，發展其適當的合作協調機制將是本研究所要探討的。

### 2.1 二階層供應鏈之批量模式：

#### 2.1.1 單一供應商與單一採購者之模式：

在二階層數量折扣的研究中，從 1980 開始有許多研究學者針對銷售者來發展數量折扣計劃，為的是降低操作成本。最早期由 Crowther 在 1964 年即針對了銷售者的觀點，發展了數量折扣模式，但是並未提供此模式的解決方法。而 Monahan(1984)則根據銷售者的依量生產方式(lot-for-lot)，在無限產能的條件之下發展了 all-units 的數量折扣計劃。Monahan 的研究中針對主要的顧客提供數量折扣，藉此促使顧客們增加其訂購量，透過此方式可以補償及減少顧客所多出的訂購成本。

Lee and Rosenblatt(1986)以 Monahan(1984)的依量生產模式為主要架構，推論出了在許多案例之下都可以得到區域最佳解。而此模式

也同時得到理想的採購者訂購批量，以及銷售者的銷售批量等。而 Rosenblatt and Lee(1985)也使用和 Lee and Rosenblatt(1986)同樣的利潤函數，以銷售者提供一連續性的數量折扣計劃模式，與 All-units 的數量折扣計劃模式作一比較。Goyal(1987a,b)也針對 Lee and Rosenblatt(1986)的演算法進行改善與修正。而 Banerjee(1986a)、Joglekar(1988)以及 Drezner and Wesolowsky(1989)等多位學者皆以 Moanhan(1984)的研究為基礎，提出了許多不同的模式。

### 2.1.2 單一供應商與多個採購者之模式：

#### (1) 單一產品：

近來有很多學者對單賣方單買方的整合存貨模式有相當深入的研究，而關於單供應商多買方的整合存貨模型之研究仍不多見。Lu (1995)提出一整合型模型，其假設前題為需求率及生產率均為已知且確定的情況下，不得超過買方採購成本預算上限；並在同一生產批量中允許多次配送；且每次配送數量均等之條件下，欲求供應商平均年總成本之最小值。在 Lu(1995)所提的模型中，生產批量之週期( $T$ )與每一個買方的配送次數( $k_i$ )都是未知。已知生產速率大於買方需求率，且每一位買方所需產品的生產時間亦不相同，如此欲求得該模式的最佳解變得相當困難。Lu 提出一遞迴啟發式解法(iterative heuristic)，但無法保證求得全域最佳解(global optimum)。

Viswanathan and Piplani(1998)所提之共同補貨週期模型。在此模型中單一供應商提供某一種產品給  $m$  個買方，供應商與買方彼此約定下單週期為每日、每週、雙週、每月、每雙月、每季等共同補貨週期( $\tau_0$ )。供應商採用此協調策略的目的在於結合訂單以利於訂單處理

及節省配銷成本，而為了吸引各買方採用此策略，供應商則提供價格折扣以當作誘因彌補買方因配合供應商所引發的成本上升並提供相當於 EOQ 的成本之某一比例的節省。Viswanathan and Piplani (1998) 的目的係以供應商的角度考量彌補各買方的成本上升與滿足其成本節省誘因的要求下，決定 CRE、價格折扣、及各買方的補貨週期等決策變數，以尋求供應商最低的平均總成本。

Chen, Federgruen and Zheng(2001)也針對二階層供應鏈提出了數量折扣的模式，其研究是以單一供應商配送單一產品給多個零售商，再由零售商將產品銷售給消費者。模式中假設零售商的需求是連續且固定的，並以集中式系統發展出最佳策略，促使整個供應鏈系統的利益最大化。Chen, Federgruen and Zheng(2001)的研究同時也對非集中式的系統探討如何使得整個供應鏈的利潤最佳化。發現除了透過週期性的索價及固定費用之外，還必須以非傳統的價格折扣方案來達成，此價格折扣方案主要是由零售商的三個要素所組成：

- a. 全年的銷售量。
- b. 訂購數量。
- c. 訂購頻率。

Chen, Federgruen and Zheng(2001)同時討論到要達到協同合作的目標，通常是以分散式系統的決策規則較佳。分散式系統的主要方法是供應商以整個批發計劃來索價，同時由供應商本身來訂定對各個零售商的補貨規則，每個零售商再根據供應商的補貨規則來訂定其產品零售價格。

## (2) 多種產品：

### (2.1) 聯合補貨問題：

在聯合補貨問題之研究中，Weng(1995)針對了以單一供應商以及單個或多個同性質的採購者之聯合補貨模式下，探討聯合決策規則所造成的影響。而聯合決策規則的特性是由單位售價、訂購數量以及供應商酬金等組合而成。在初期的研究中，作者皆假設操作成本(如訂購成本、存貨成本等)為一函數，需求則視為固定常數。而在第二階段的研究中，則假設需求是隨著價格而遞減的函數，操作成本則視作固定常數。在這兩階段的研究皆指出：在一供應鏈合作的協調機制當中，要使得供應商和採購者的目標最佳化，數量折扣是必須且有效的。在 Weng(1995)的研究分析中，於供應商和採購者合作的供應鏈環境之下，最佳 all-unit 數量折扣規則和 incremental 數量折扣規則是相同的。

### (2.2) 單一倉儲與多個零售商之問題：

兩階存貨問題(Two-Echelon Inventory Problem; TEIP)是在協調供應鏈上游之生產/供應廠商與下游之配銷體系中，決定各種存貨批量之大小與補貨排程的問題。在此中心衛星體系中，配銷系統的存貨運作有效與否，密切關係著供應鏈的整體效率。

本問題常見的決策環境為一個集中倉儲及  $N$  個不同地點的區域零售商 (one-warehouse, multiple retailers)，而其中決策者最關心的是：從供應商將產品配送到零售商，最終到消費者手中，此配銷流程中各種產品配送批量之大小與配送的頻率。

在 Yao and Lee(2001)的研究中，其假設消費者在每一個零售商  $i$  的固定需求率為  $d_i$ ， $i=0, 1, 2, \dots, N$ ，其中  $i=0$  為集中倉儲的指標，

故  $d_0 = \sum_{i=1}^N d_i$ 。本存貨配銷問題的數學模式建立的基礎，乃參照經濟訂購批量(Economic order quantity; EOQ)模式；故假設計畫的時程為無限期，而且不允許產品有短缺(shortage)或延遲達交(back order)的情形。兩階存貨問題的決策環境，如圖一所示：

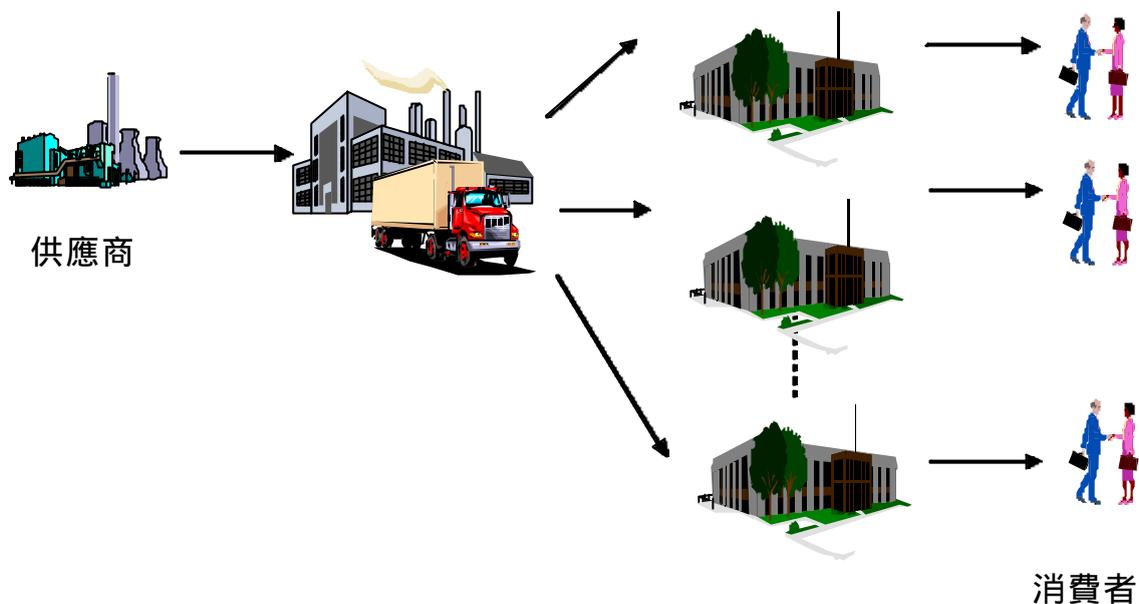


圖 2-1 二階存貨/配送系統問題

設定每一個零售商  $i$  的配送週期以  $T_i$  表示，且令  $T_i$  是一個正整數  $k_i$  乘上一個計畫基期  $B$ ；即  $T_i = k_i B$ 。根據零售商所開立的訂單，會在集中倉儲產生需求，然後倉儲再向其上游的供應商訂購。如 EOQ 模式所假設，訂單的配送為立即補貨(instantaneous replenishment)。因此，在這條供應鏈上的集中倉儲及每一個零售商都會有兩種成本：

- a. 零售商向集中倉儲訂購，及集中倉儲向供應商訂購，所發生的訂購成本  $a_i$ ，
- b. 如 Clark 和 Scarf (1960)所定義，在連續時間下的線性存貨持

有成本  $h_i$ 。

在傳統兩階存貨問題的數學模式中，其目標函數乃將其平均總成本(Total average Cost;  $TAC$ )降至最低。而平均總成本函數通常包含上述的兩個成本項目：訂購成本及存貨持有成本。在早期的文獻如：Eppen 和 Schrage (1981)、及 Federgruen 和 Zipkin (1984a)的論文，其限制倉儲僅扮演集中訂購以及轉運的角色，故倉儲中不允許擁有存貨。依據上述的問題敘述及假設，傳統兩階存貨問題的數學模式可敘述如下：

傳統兩階存貨問題(TEIP)

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=0}^N \left( \frac{a_i}{k_i B} + \frac{h_i}{2} d_i k_i B \right)$$

$$\text{Subject to} \quad k_0 = 1$$

$$k_i \geq 1, k_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, N$$

傳統的 TEIP 模式的決策變數為  $(\{k_i\}, B)$ ；故傳統兩階存貨問題在決定各零售商的最佳補貨頻率  $\{k_i\}$  及最佳計畫週期  $B$ 。

依據 Yao and Lee(2001)的研究計畫之觀察，如將倉儲中不允許擁有存貨的限制鬆綁，則有下列運作之優勢：

- a. 倉儲將能更動態地配置存貨給供應商，而不只有在期初時僅一次地分配存貨給零售商。
- b. 動態配置的策略使得在期末時的存貨配送更平衡，能進而提高消費者服務水準。

## 2.2 三階層供應鏈之批量模式：

以上的供應連協調機制都是屬於二階層的模式，即成員只包含供應商以及採購者。而 Munson and Rosenblatt(2001)則以三階層的模式

來考慮供應連協調機制，也就是將以往只考慮供應商與採購者的二階層的模式加入了製造商的部份。其研究是以賣方利益最大化為目標函數，但是前提是不得使得買方的利益有所變化。

Munson and Rosenblatt(2001)同時也假設了其模式中的所有參數皆為已知，而採購者是以經濟訂購批量(EOQ)的方式來下訂單，但是製造商有能力來引導採購者改變其訂購量。若訂購量大於原先採購者的經濟訂購批量，所多出的操作成本可以透過數量折扣完全來抵銷。製造商則根據採購者的訂購波浪模式(lumpy pattern)來決定最佳的生產批量，最後供應商也同樣是根據製造商的訂購波浪模式來決定最佳的批量規則。

以上這些研究大部分都專注於：供應商與採購者彼此之間合作模式、降低聯合總成本的探討，而並沒有提供最佳解的結構資訊，以及有效的最佳解搜尋方法。因此本研究即針對整合性的供應鏈模式，探討供應商與採購者所產生的聯合總成本：分析其最佳解的結構資訊，以及提供最佳解上下界限，並根據這些資訊推導出一套有效的搜尋演算法。研究中最後並針對此搜尋演算法，在單一供應商與多種不同數目的採購者之模式下，針對不同的生產效能來進行數值實驗，探討分析其結果在管理上有何意義，以作為企業決策的參考。

### 第三章 數學模式

本研究所考慮的成本中，包括了單一供應商與多個採購者，以下將分別介紹供應商與多個採購者所造成的成本項目，同時並說明本研究所要解決的目標函數。

#### 3.1 成本分析：

本研究成本項目：

1. 供應商的原物料訂購成本及原物料的存貨成本。
2. 供應商的生產設置成本及完成商品的存貨成本。
3. 採購者的完成商品之存貨成本。

以下將以數學公式逐一推導上述的三個成本項目。

##### 3.1.1 第 $i$ 位採購者單位時間的總成本： $TC_i(T)$

在消費者的總成本中，我們所考慮的是：「在單位時間內完成商品的存貨成本」。而完成商品的存貨成本是針對在一個週期時間( $T$ )內而言。其推導過程如下：

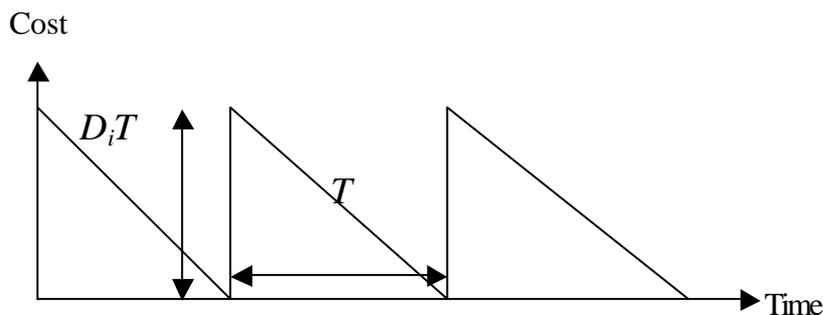


圖 3-1 第  $i$  個採購者之存貨水準

$TC_i(T)=(1/T)(\text{訂購成本}+\text{存貨成本})$

$$TC_i(T) = \frac{1}{T} \left[ a_i + h_i \frac{1}{2} T D_i T \right]$$

$$TC_i(T) = \frac{a_i}{T} + \frac{T}{2} [h_i D_i] \quad (1)$$

### 3.1.2 供應商之完成商品單位時間的總成本： $TC_f(T)$

在供應商的完成商品總成本中，我們所考慮的是：「在單位時間內完成商品的生產設置成本及存貨成本」。而完成商品的生產設置成本及存貨成本是針對在一個週期時間( $T$ )內而言。其推導過程如下：

$TC_f(T)=(1/T)(\text{訂購成本}+\text{存貨成本})$

$$TC_f(T) = \frac{1}{T} \left[ S + h_f \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 T^2}{2p} \right]$$

$$TC_f(T) = \frac{S}{T} + \left( \frac{Th_f}{2p} \right) \sum_{i=1}^n D_i^2 \quad (2)$$

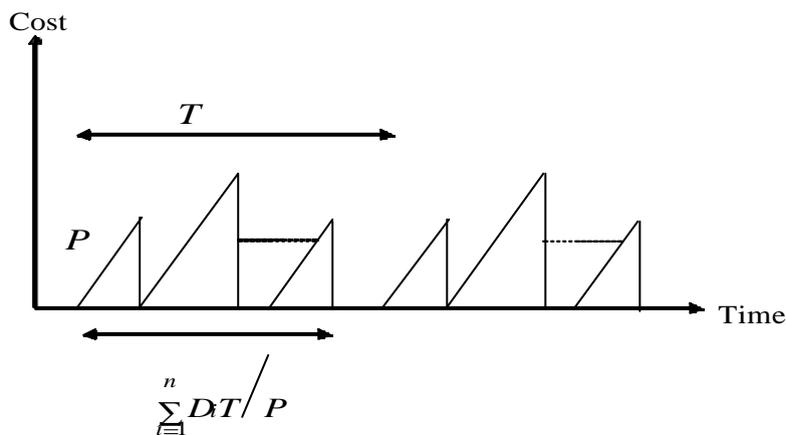


圖 3-2 供應商完成商品之存貨水準

### 3.1.3 供應商之原物料單位時間的總成本： $TC_r(m,T)$

在供應商的原物料總成本中，我們所考慮的是：「在單位時間內的原物料訂購成本以及存貨成本」。而原物料的訂購成本及存貨成本是針對在一個週期時間( $mT$ )內而言。其推導過程如下：

$TC_r(m,T)=(1/mT)(\text{訂購成本}+\text{存貨成本})$

$$TC_r(m,T) = \frac{1}{mT} \left( a_r + h_r \left[ \frac{m}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n D_i T}{p} \right] \left[ u \sum_{i=1}^n D_i T \right] + \sum_{j=1}^{m-1} j \left[ u \sum_{i=1}^n D_i T^2 \right] \right] \right)$$

$$TC_r(m,T) = \frac{1}{mT} \left[ a_r + \frac{muh_r}{2p} \left[ \sum_{i=1}^n D_i T \right]^2 + \frac{m(m-1)uh_r}{2} \sum_{i=1}^n D_i T^2 \right]$$

$$TC_r(m,T) = \frac{a_r}{mT} + \frac{T}{2} \left( \frac{uh_r}{p} \left[ \sum_{i=1}^n D_i \right]^2 + (m-1)uh_r \sum_{i=1}^n D_i \right) \quad (3)$$

其中訂購成本為  $a_r$ ，而存貨成本是在一個週期時間( $mT$ )內，由  $m$  個三角形與  $m$  個矩形所組成(如 Fig1 所示)。

其值為：

原物料單位時間存貨成本( $h_r$ )\*[ $m$  個三角形面積 +  $m$  個矩形面積]。

$$\text{即 } h_r \left( \frac{m}{2} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n D_i T}{p} \right] \left[ u \sum_{i=1}^n D_i T \right] + \sum_{j=1}^{m-1} j \left[ u \sum_{i=1}^n D_i T^2 \right] \right)$$

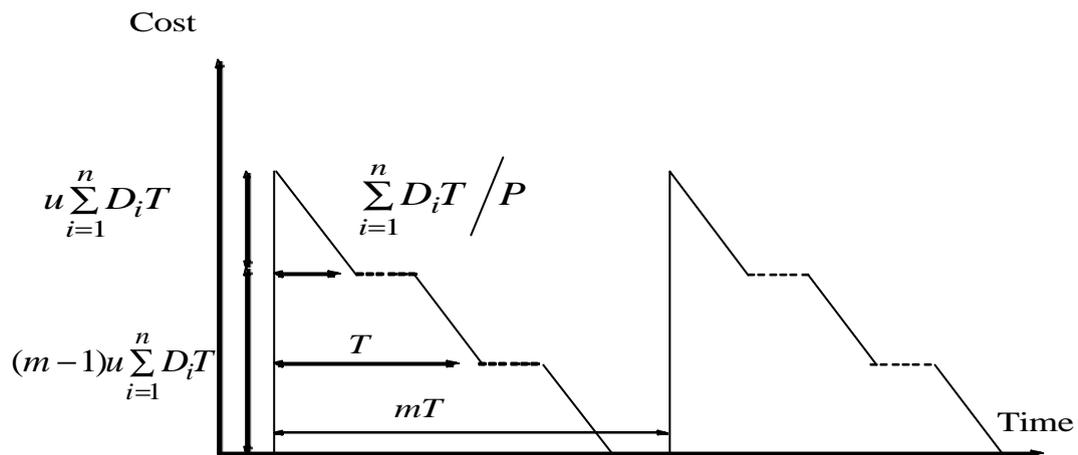


圖 3-3 供應商原物料之存貨水準

### 3.1.4 聯合總成本 (T) :

在聯合總成本中我們所考慮的項目包括了供應商原物料的總成本、供應商完成商品的總成本以及所有採購者之總成本等。

$$\Gamma(m, T) = TC_f(T) + TC_r(m, T) + \sum_{i=1}^n TC_i(T) \quad (4)$$

單一 Vendor , 三個 Buyers 及二個生產週期圖例(n=3 , m=2) :

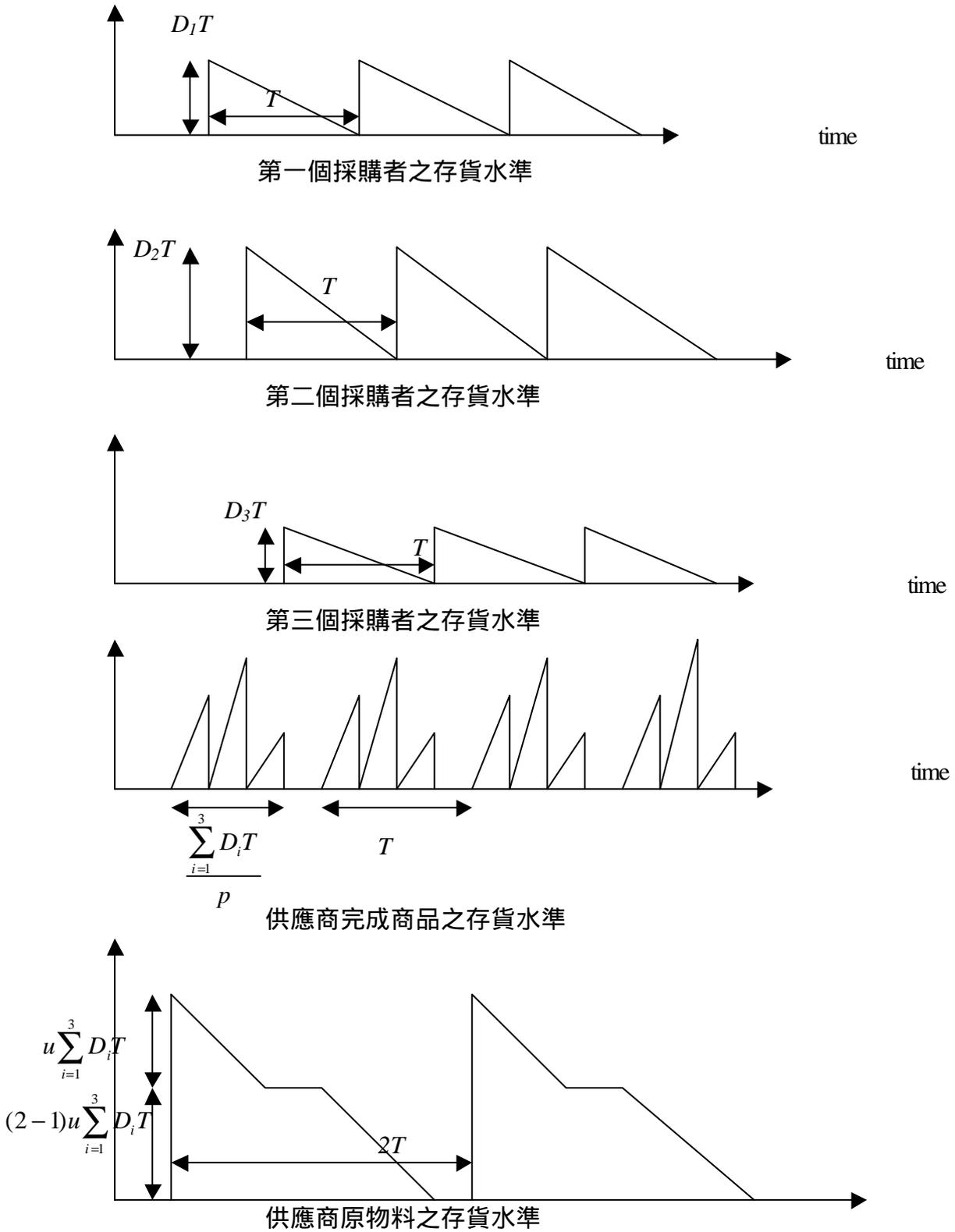


圖 3-4 單一供應商、三個採購者及二個生產週期 (n=3 , m=2)

### 3.2 目標函數：

在本研究中，我們期望使得供應商以及所有採購者所產生的聯合總成本為最小，目標函數如下所示：

$$\text{Min: } \Gamma(m, T) = TC_f(T) + TC_r(m, T) + \sum_{i=1}^n TC_i(T) \quad (5)$$

$$\Gamma(m, T) = \frac{1}{T} \left[ S + \frac{a_r}{m} + \sum_{i=1}^n a_i \right] + \frac{T}{2} \left[ (m-1)uh_r \sum_{i=1}^n D_i + \frac{1}{p} \left[ uh_r \left( \sum_{i=1}^n D_i \right)^2 + h_f \sum_{i=1}^n D_i^2 \right] + \sum_{i=1}^n h_i D_i \right] \quad (6)$$

由於  $(m, T)$  對於  $(m, T)$  的理論性質之探討佔了相當重要的部份，因此我們在此先定義：

$$\Phi(m, T) = \frac{a_r}{mT} + \frac{T}{2} muh_r \sum_{i=1}^n D_i, \quad m \in N^+ \quad (7)$$

$$(\text{註:}) TC_r(m, T) = \Phi(m, T) + \frac{T}{2} \left( \frac{uh_r}{p} \left( \sum_{i=1}^n D_i \right)^2 - uh_r \sum_{i=1}^n D_i \right)$$

## 第四章 理論分析：

### 4.1 片段凸性：

我們以相同的時間區間  $T$  來看，針對不同的  $m$  可以得到不同的聯合總成本曲線。從圖七我們可以清楚地知道，對應不同的  $m$  之聯合總成本的曲線，會產生不同的交點。我們把所有聯合總成本曲線

$(m, T)$  的最低部份命名為  $\Gamma^*(T)$ ，即  $\Gamma^*(T) = \min_{m \in N^+} \{\Gamma(m, T)\}$ 。其曲線

型式就如同許多凹型曲線連續組合而成，我們將此性質以下列

Proposition 1 敘述之。但是為了證明 Proposition 1，我們必須先探討

$$\text{Lemma 1, 因此先令 } \Phi^*(T) = \min_{m \in N^+} \{\Phi(m, T)\} \quad (8)$$

**Lemma 1 :**  $\Phi^*(T)$  對  $T$  是一個片段凸性的函數。

Proof :

在聯合總成本函數裡，

$$\Gamma(m, T) = \frac{S + \sum_{i=1}^n a_i}{T} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{uh_r}{p} \left( \sum_{i=1}^n D_i \right)^2 - uhr \left( \sum_{i=1}^n D_i \right) + \frac{h_f}{p} \left( \sum_{i=1}^n D_i^2 \right) \right] + \Phi(m, T) \quad (9)$$

$$\text{其中 } \Phi(m, T) = \frac{a_r}{mT} + \frac{T}{2} muh_r \sum_{i=1}^n D_i, \quad m \in N^+.$$

我們先針對函數  $\Phi(m, T)$  分別作一階導數和二階導數，得到：

$$\frac{\partial^2 \Phi(m, T)}{\partial T^2} = \frac{a_r}{mT^3} > 0 \quad (10)$$

表示當  $T > 0$  時，對一特定之  $m$  值，函數  $\Phi(m, T)$  為開口向上的凹型曲

線(convex curve)，有極小值在  $T = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2a_r}{uh_r \sum_{i=1}^n D_i}}$  位置產生。

假設  $\bar{m}$  是在一特定時間  $T$  之區間中，為函數  $\Phi(m, T)$  的最佳  $m$  值。我們令

$\bar{m} = \text{argmin } \Phi(m, T)$ 。而當給定任一  $m$  值， $\Phi(m, T)$  對  $T$  而言是一個連續可微分的函數。因為  $\Phi^*(T) = \min_{m \in N^+} \{\Phi(m, T)\}$ ，所以  $\bar{m}$  一定

是個連續、平順的鄰近區段，也就是說  $\bar{m}$  是時間  $T$  的間隔區段。

因此我們可以知道  $\Phi^*(T)$  是由許多不同的  $m$  之  $\Phi(m, T)$  函數所組成，因

此  $\Gamma^*(T)$  為一個對  $T$  具有片段凸性的函數。

在此我們運用 Lemma 1 來證明 Proposition 1。

**Proposition 1 :**  $\Gamma^*(T) = \min_{m \in N^+} \{\Gamma(m, T)\}$  對  $T$  為一片段凸性的函數。

Proof :

在聯合總成本函數裡，我們不考慮  $(m, T)$  的部份，同時令

$$q(T) = \frac{S + \sum_{i=1}^n a_i}{T} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{u h_r}{p} \left( \sum_{i=1}^n D_i \right)^2 - u h r \left( \sum_{i=1}^n D_i \right) + \frac{h_f}{p} \left( \sum_{i=1}^n D_i^2 \right) \right] \text{---(11)}$$

再針對  $q(T)$  分別作一階與二階的導數，得到  $\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} > 0, \forall T > 0$ ，因此我

們可以知道  $q(T)$  為一個開口向上的凹型曲線函數。

透過 Lemma 1 我們可以知道  $\Phi^*(T)$  具有片段凸性的特性，而凹型曲線函數加上片段凸性函數還是為具有片段凸性的函數。因為

$\Gamma^*(T)$  是  $q(T)$  與  $\Phi^*(T)$  之和，所以  $\Gamma^*(T) = \min_{m \in N^+} \{\Gamma(m, T)\}$  則同樣也

是對  $T$  為一片段凸性的函數。

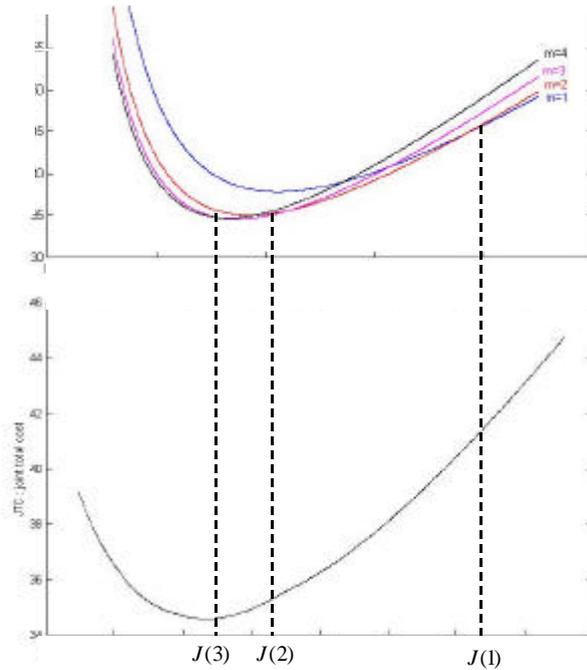


圖 4-1 接合點

#### 4.2 接合點：

在前一節中我們已經證明了  $\Gamma^*(T)$  是具有片段凸性的函數。而在本節中我們將介紹在  $\Gamma^*(T)$  函數曲線上的接合點(Junction Point)；先定義接合點是在片段凸性函數中，於特定時間  $T$  上之兩個連續曲線的交點。在本節中我們將會證明  $\Gamma^*(T)$  函數曲線上的接合點會等於  $\Phi^*(T)$  函數曲線上的接合點(見 Proposition 2)，根據 4.1 節可知  $\Phi^*(T)$  是一具有片段凸性的函數，所以我們將先透過  $\Phi^*(T)$  函數上接合點位置的推導(即求出  $\Gamma^*(T)$  接合點的位置)，再來證明  $\Gamma^*(T)$  函數曲線將會繼承  $\Phi^*(T)$  上所有接合點的特性。

### 4.2.1 接合點位置的推導：

$\Phi^*(T)$  的接合點之推導可以透過鄰近的兩個  $\Phi(m, T)$  函數來求得接合點之位置。首先令兩鄰近函數  $\Phi(m, T)$  之差為  $\Delta(m, T)$ ：

$$\Delta(m, T) = \Phi(m+1, T) - \Phi(m, T) = -\frac{a_r}{m(m+1)T} + \frac{uh_r \sum_{i=1}^n D_i}{2} T \quad (12)$$

我們注意到  $\Delta(m, T)$  為生產週期  $m$  與  $m+1$  的成本之差，且  $\Delta(m, T)$  是隨著時間  $T$  增加而遞增的函數。我們假設有一搜尋演算法從一上界往時間  $T$  遞減的方向開始進行搜尋，同時計算出  $\Delta(m, T)$  的值會由正值轉變成零，再由零轉變成負值。我們令  $w$  為  $\Delta(m, T)$  之值為零的時間點， $m$  為  $T > w$  之前的最佳生產週期數。這表示了在時間  $T$  到達  $w$  之前， $m$  都是最佳的生產週期數。而當時間  $T$  小於  $w$  時，則是以  $m+1$  為期最佳的生產週期數。

其中值得注意的是： $w$  是兩個鄰近的凹型曲線  $\Phi(m, T)$  與  $\Phi(m+1, T)$  之交點，也就是接合點。而更重要的是接合點提供了在那個時間位置上，所應該要選擇的生產週期數之資訊。透過上述公式的轉換我們可以得到接合點的公式。

令  $\Delta(m, T) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{a_r}{m(m+1)T} &= \frac{uh_r \sum_{i=1}^n D_i}{2} T \\ T^2 &= \frac{2a_r}{m(m+1)uh_r \sum_{i=1}^n D_i} \\ J(m) &= \sqrt{\frac{2a_r}{m(m+1)uh_r \sum_{i=1}^n D_i}} \end{aligned} \quad (13)$$

綜合上述  $J(m=i)$  代表是第  $i$  個接合點，其中  $i \in N^+$ 。當時間  $T > J(m=i)$  時，我們應選擇的生產週期數量為  $m=i$ ，否則則選擇  $m=i+1$  來促使  $\Phi^*(T)$  函數的值為最小。而接合點在時間  $T$  上是彼此有順序的，由時間從長至短來看，其順序依序為  $J(m)$ 、 $J(m+1)$ 、 $J(m+2)$ ...等。其中  $J(m)$  代表的  $m$  和  $m+1$  交點。例如  $J(1)$  代表  $m=1$  與  $m=2$  的交點。

#### 4.2.2 接合點的理論性質探討：

本節之理論性質，對於最佳解的結構之研究，有非常重要的影響，其特性將在下一節中繼續討論，在此我們先加以證明。

**Proposition 2：**  $\Gamma^*(T)$  曲線將會繼承  $\Phi^*(T)$  所有接合點的特性。

Proof：

由於  $\Gamma^*(T) = F(T) + \Phi^*(T)$  是可以分割的，所以  $\Gamma^*(T)$  會繼承所有接合點的特性。換句話說，Proposition 2 說明了在  $\Phi^*(T)$  的片段凸性曲線上所出現之接合點  $J(m)$ ，也同樣會出現在  $\Gamma^*(T)$  的片段凸性曲線上而成為接合點。

以下將再介紹接合點的另一特性，以作為搜尋演算法的基礎。

**Lemma 2：** 假設  $m^{(L)}$  和  $m^{(R)}$  分別是  $\Phi^*(T)$  函數上接合點左右兩方最佳的生產週期數量，則  $m^{(L)} = m^{(R)} + 1$ 。

Proof：

透過前公式(13)可以得到：

$$J(v) < \dots < J(m) < \dots < J(2) < J(1) \quad (14)$$

其中  $v$  是  $m$  的上界。

我們以  $m^*(T)$  代表在給定時間  $T$  值的  $\Phi^*(T)$  函數中，所得到的最佳生產週期數量。由於上述不等式(14)和  $\Phi(m, T)$  是凹型曲線的特性，

因此可以知道當  $T \in [J(1), \infty)$  時，則  $m^*(T) = 1$ 。而當  $T \in [J(m+1), m)$  時，則  $m^*(T) = m+1$ ，所以我們可以清楚地知道  $m^{(L)} = m^{(R)} + 1$ 。

### 4.3 最佳解結構：

於 4.2 節中所提到接合點的特性給了我們以下的提示。

**Theorem 1：** 假設  $m^{(L)}$  和  $m^{(R)}$  分別是  $\Gamma^*(T)$  函數上接合點左右兩方最佳的生產週期數量，則  $m^{(L)} = m^{(R)} + 1$ 。

Proof：

透過前 Proposition 2 與 Lemma 2 即可以得證。

我們先定義  $T_m$  是  $\Gamma^*(T)$  函數曲線中，對應於生產週期數  $m$  的局部最小值之時間位置，其求法見附錄一。根據 4.1 節和 4.2 節的敘述，我們知道  $\Gamma^*(T)$  函數的最佳解的位置會落在接合點以及  $\Gamma^*(T)$  曲線的局部最低端點上。因此我們首先要找出接合點的時間位置，再判斷  $\Gamma^*(T)$  的局部最低端點之時間位置  $T_m$  是否位於接合點  $J(m-1)$  與  $J(m)$  之間。若有，則比較  $\Gamma(m, J(m))$  與  $\Gamma(m, T_m)$  之值，取成本值較小者為最佳解。

## 第五章 有效之搜尋演算法

有了最佳解的結構資訊之後，我們面臨到另一個問題就是：在找尋最佳解時，不知道應該從何處找起，以及何處停止等。我們參考了 Wildeman, Frenk 和 Dekker(1997)的方法，可以有效地得到最佳解的上、下界限，減少了許多搜尋最佳解的時間。

由於聯合總成本問題  $\Gamma^*(T)$  的最佳解不易尋找，我們期望透過

將其限制寬鬆後，即將  $m=1, 2, \dots, n$  改為  $m \geq 1$ ，使其成為 convex programming problem，再運用 Wildeman, Frenk 和 Dekker(1997)的方法來找出聯合總成本問題  $\Gamma^*(T)$  最佳解之上、下界限。最後以所得到的最佳解結構資訊為基礎，透過有效的搜尋演算法來求得最佳解。

在本節中我們將介紹聯合總成本問題的特性、如何將其限制寬鬆，以及寬鬆之後的問題性質為何。最後再說明如何求出最佳解的上、下界限與搜尋演算法。

### 5.1 聯合總成本問題特性之分析：

我們知道  $\Phi(m, T) = \frac{a_r}{mT} + \frac{T}{2} (m u h_r \sum_{i=1}^n D_i)$ ， $m \in N^+$ ，則聯合總成本問題的目標函數可以改寫成：

$$\Gamma(m, T) = \frac{S + \sum_{i=1}^n a_i}{T} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{u h_r}{p} (\sum_{i=1}^n D_i)^2 - u h_r (\sum_{i=1}^n D_i) \right] + \frac{T h_f}{2p} (\sum_{i=1}^n D_i^2) + \Phi(m, T) \quad (15)$$

而  $\Phi(m, T)$  在  $(0, \infty)$  之間具有以下的特性：

1.  $\Phi(m, T)$  是一個凹型曲線。(請參見 Lemma 1)

2.  $\Phi(m, T)$  在時間  $T = \frac{x^*}{m}$  上有最小值，

$$\text{其中 } x^* = \sqrt{\frac{2ar}{u h_r \sum_{i=1}^n D_i}} \quad (16)$$

3.  $\Phi(m, T)$  在  $(0, \frac{x^*}{m})$  之間是完全遞減，在  $(\frac{x^*}{m}, \infty)$  之間是完全遞增。

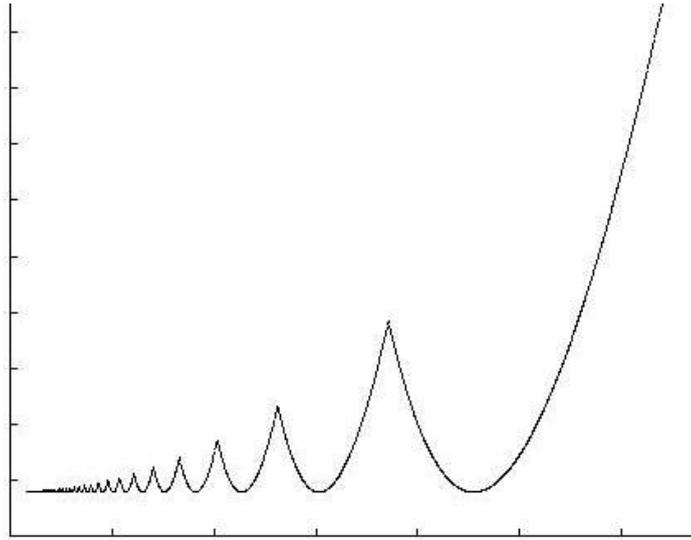


圖 5-1  $\ddot{O}(m,T)$  函數曲線最低部分，對  $m=1,2,\dots,n$

由於在求最佳解的上、下界限時，必須給定與時間點  $T$  所相對應的生產週期數  $m$  之值，我們透過 Lemma 3 來證明其求法。

最佳之  $m$  值：

**Lemma 3**：當  $T > 0$  時，給定一任意時間值  $T$ ，其所相對應的生產週期數  $m$  值為：

$$m(T) = \left\lceil -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8a_r}{T^2 u h_r \sum_{i=1}^n D_i}} \right\rceil \quad (17)$$

因此聯合總成本問題中的  $\Phi(m,T)$  也可以改寫成

$$\Phi(m(T), T) = \frac{ar}{mT} + \frac{T}{2} (m u h_r \sum_{i=1}^n D_i), \quad m \in N^+ \quad (18)$$

Proof：見附錄二。

## 5.2 聯合總成本問題的寬鬆模式之特性：

本節之所以要探討聯合總成本問題的寬鬆模式，是因為寬鬆模式的特性與最佳解上、下界限的求法相關，故在此必須加以說明。

由於聯合總成本中，供應商的生產週期之個數  $m$  為自然數，所以造成聯合總成本問題的成本函數曲線具有離散不連續、且具有許多區域最佳解(local minima)等性質(如圖 8 所示)。這些特性使得聯合總成本問題成為 global-optimisation problem，其最佳值不易尋找，我們期望透過將其限制寬鬆後( $m=1,2,\dots,n$  改為  $m-1$ )，使其成為 convex programming problem(如圖 9 所示)，再運用 Wildeman,Frenk 和 Dekker(1997)的方法來找出最佳解之上、下界限。

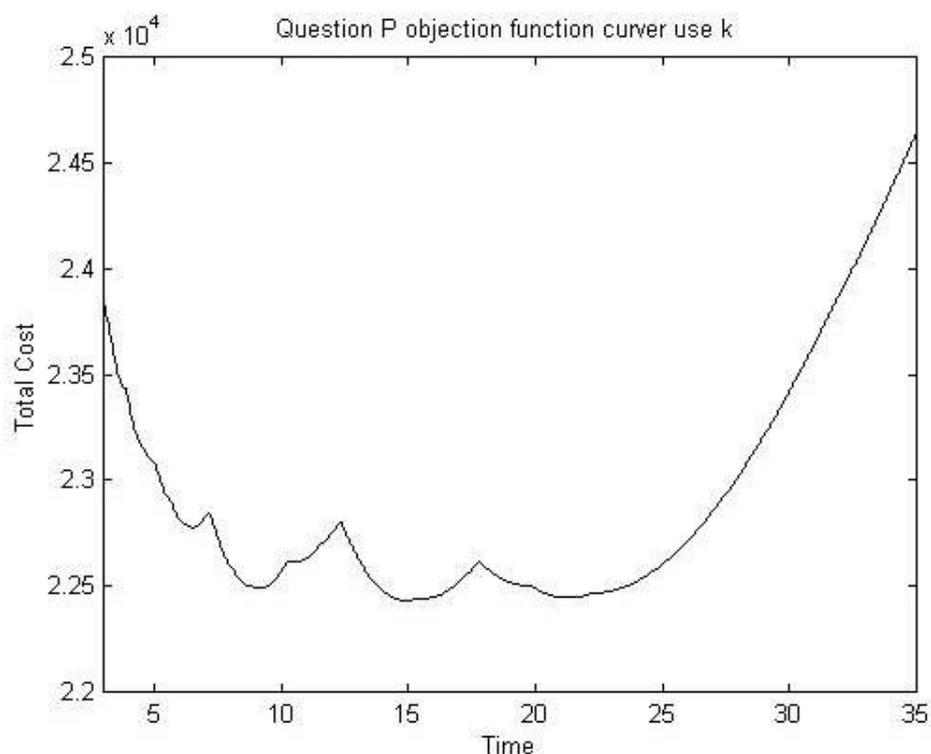


圖 5-2 聯合總成本曲線

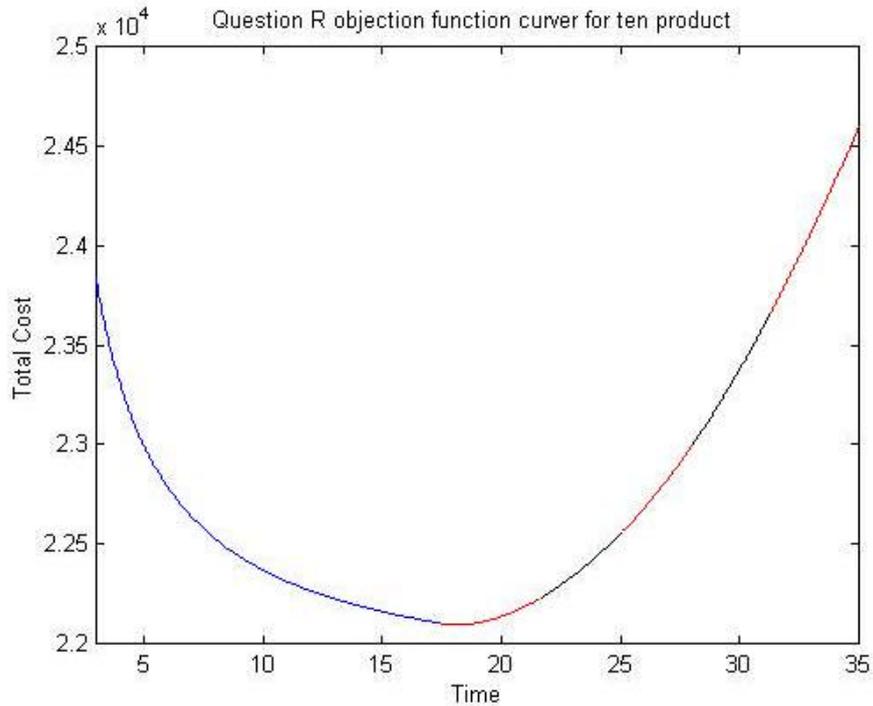


圖 5-3 寬鬆後聯合總成本曲線

聯合總成本問題在寬鬆之後，所得到的目標函數為：

$$\Gamma_R(m, T) = \frac{S + \sum_{i=1}^n a_i}{T} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{uh_r}{p} \left( \sum_{i=1}^n D_i \right)^2 - uhr \left( \sum_{i=1}^n D_i \right) \right] + \frac{Th_f}{2p} \left( \sum_{i=1}^n D_i^2 \right) + g(T) \quad (19)$$

其中  $g(T) = \inf \{ \Phi(m, T) : m \geq 1 \}$ 。

因為  $\Phi(m, T)$  在  $(0, x^*)$  之間是完全遞減，而在  $(x^*, \infty)$  之間是完全遞增，因此可以得到：

$$g(T) = \begin{cases} \Phi(x^*) & \text{if } T \leq x^* \\ \Phi(T) & \text{if } T > x^* \end{cases} \quad (20)$$

上式是以函數  $\Phi(m, T)$  的所有曲線中之最底部來看，當時間  $T$  小於等於  $m=1$  所對應的  $x^*$  時，曲線底部的值皆是常數，其值為  $\Phi(x^*)$ ，既

$\sqrt{2a_r u h_r \sum_{i=1}^n D_i}$ 。而當時間  $T$  大於等於在  $m=1$  所對應的  $x^*$  時，函數  $\ddot{O}(m, T)$

則成為函數  $\Phi(T)$ ，因為此時  $m=1$ 。

將函數  $g(T)$  作一次微分得到：

$$\frac{d}{dT} g(T) = \begin{cases} 0 & \text{if } T < x^* \\ -\frac{a_r}{T^2} + \frac{u h_r \sum_{i=1}^n D_i}{2} & \text{if } T > x^* \end{cases} \quad (21)$$

因為  $g(T)$  的導數是非負且連續的，同時在  $(0, \infty)$  之間為遞增狀態。由此可知  $g(T)$  在  $(0, \infty)$  之間是一個凹型曲線，且具有遞增及連續可微分的特性。而函數

$$T \rightarrow \frac{S + \sum_{i=1}^n a_i}{T} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{u h_r}{p} \left( \sum_{i=1}^n D_i \right)^2 - u h r \left( \sum_{i=1}^n D_i \right) \right] + \frac{T h_f}{2p} \left( \sum_{i=1}^n D_i \right)^2 \quad (22)$$

在  $(0, \infty)$  之間也具有相同的特性，因此原問題寬鬆之後的目標函數在  $(0, \infty)$  之間也同樣是一個凹型曲線，且具有連續可微分的特性。

### 5.3 最佳解的上、下界限：

由於寬鬆之後的聯合總成本模式是一個連續的凹型曲線，因此我們可以透過求解寬鬆之後問題的最佳時間  $T$  值，來得到聯合總成本問題的上、下界限。

尋找聯合總成本問題的最佳解上、下界限之過程：

1. 由於寬鬆之後的聯合總成本問題是一個連續的凹型曲線，且

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Gamma_R(T) = \infty \text{ 且 } \lim_{T \rightarrow 0} \Gamma_R(T) = \infty, \text{ 表示存在了唯一最佳解}$$

$T^* \in (0, \infty)$ 。所以我們可以透過對寬鬆後的模式之時間  $T$  作一階導數，求解出聯合總成本問題的最佳時間  $T^*$  值。根據公式(20)的性質，所得到的  $T^*$  值如下所示(見附錄三)：

$$T^* = \begin{cases} \sqrt{\frac{2(S + \sum_{i=1}^n a_i)}{\sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{uh_r}{p} (\sum_{i=1}^n D_i)^2 - uh_r \sum_{i=1}^n D_i + \frac{h_f}{p} (\sum_{i=1}^n D_i^2)}} & \text{if } q'(x^*) \geq 0 \\ \sqrt{\frac{2(S + \sum_{i=1}^n a_i + a_r)}{\sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{uh_r}{p} (\sum_{i=1}^n D_i)^2 + \frac{h_f}{p} (\sum_{i=1}^n D_i^2)}} & \text{if } q'(x^*) < 0 \end{cases} \quad (23)$$

2. 將所得到的  $T^*$  值帶入聯合總成本問題中，求算出聯合總成本問題與  $T^*$  所相對應的目標函數值，令其為  $v(F_{\tilde{A}})$ 。

當我們得到  $T^*$ ，要將其帶入到聯合總成本問題裡時，其中所相對應的  $m$  值必須由公式(17)來得到。

3. 將  $v(F_{\tilde{A}})$  的值對應到寬鬆之後聯合總成本問題的目標函數上；既令公式(19)的值為  $v(F_{\tilde{A}})$  分別在  $T^*$  的左、右兩方尋找  $T_{low}$  與  $T_{up}$

4. 因為  $T_{low}$  小於  $x^*$ ，而根據  $g(T)$  的特性(見公式(20))，故在尋找的  $T_{low}$  時，總成本項目中的  $g(T)$  值為  $(x^*)$ 。求解  $T_{up}$  時，則總成本項目中的  $g(T)$  值為  $\Phi(T)$ 。

#### Lemma 4 :

令  $T_{low}$  是寬鬆之後聯合總成本問題中，目標函數值與  $v(F_{\tilde{A}})$  相等時所對應的  $T$  值中的最小值，而  $T_{up}$  為最大值。

$$\text{則 } T_{low} \leq T^* \leq T_{up}$$

Proof：見附錄四。

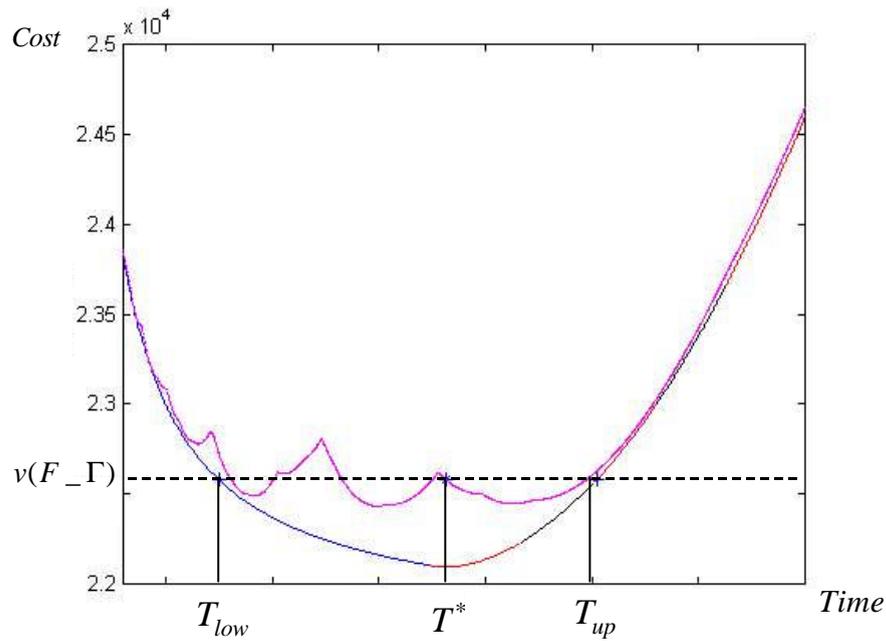


圖 5-4 目標函數  $(m, T)$  曲線與目標函數  $\tilde{A}_R(m, T)$  曲線

#### 5.4 最佳解的搜尋演算法：

1. 透過 5.3 節的步驟來找尋最佳解的上、下界限，既  $T_{low}$  與  $T_{up}$ 。
2. 由於接合點在時間上彼此是有順序的，我們可以從  $T_{up}$  開始尋找，直到  $T_{low}$  才停止。藉由 4.2 節的公式(13)，尋找並記錄接合點之成本值。
3. 透過附錄一的公式，檢查是否有凹型曲線的最低點位於接合點之間。若有，則到步驟 4。無，則到步驟 5。
4. 比較接合點與凹型曲線最低點的總成本值，紀錄總成本較小者，並到步驟 5。
5. 尋找下一個接合點，與其比較總成本值，紀錄總成本值較小者。
6. 判斷是否到達  $T_{low}$ ：若是，則到步驟 7。若無，則到步驟 3。
7. 完成搜尋步驟，並得到最佳解。

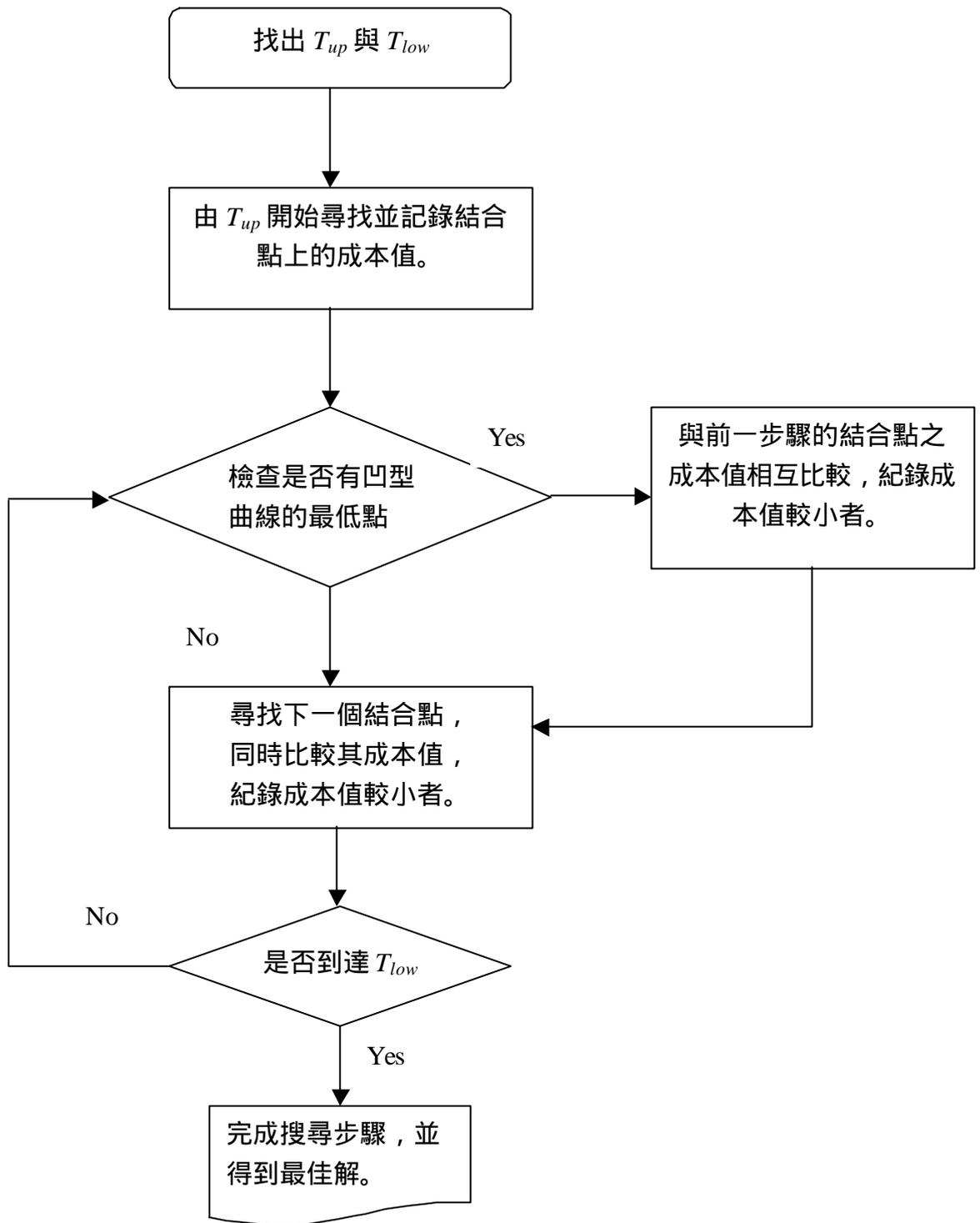


圖 5-5 最佳解搜尋演算法流程圖

## 第六章 數值實驗

在本節中，我們將以一範例來說明本研究中的搜尋演算法如何進行與完成，以及驗證所得到的理論結果。並將針對多個不同的供應鏈模式進行隨機實驗，分析所產生的數據結果，探討其在管理上的意義。例如分析在不同高低的生產效能水準之下，以及採購者數量在不同大小時，所求得之解之品質為何。同時我們也將探討電腦程式執行時間和採購者數量多寡之間的變化關係。而實驗中所需的數據參數，我們將從均勻分配中(uniform)來隨機產生，這些參數的產生必須在平均值以及所設定的範圍之內，即在 $[\text{mean} - \text{range} / 2, \text{mean} + \text{range} / 2]$ 之內，詳細資料如下所示：

表 6-1 參數範圍

	平均值	範圍	
採購者之產品訂購成本	800	1600	[0,1600]
採購者之產品存貨成本	0.05	0.1	[0,0.1]
採購者之產品需求率(全年)	1000	1000	[500,1500]
供應商之原物料訂購成本	600	1200	[0,1200]
供應商之原物料單位存貨成本	0.035	0.07	[0,0.07]
供應商之產品單位存貨成本	0.05	0.1	[0,0.1]
供應商之生產設置成本	500	1000	[0,1000]
供應商之單位生產率	根據採購者的需求而定		
供應商之原物料消耗率	0.9	0.6	[0.6,1.2]

而其中供應商的原物料存貨成本不能夠大於本身完成品的存貨成本，以及採購者的完成品之存貨成本等。由於在本節數值實驗中，我們將針對不同的生產效率來進行分析，所以生產率  $P$  則會依據採購者的需求總合而有所改變。

### 6.1 範例說明：

在本小節中，我們將以單一供應商與三個採購者的數據範例，

來說明本研究中所提出的搜尋演算法之進行方式。表 2 中所呈現的參數為此範例所需使用到的數據資料。

表 6-2 單一供應商與三個採購者

採購者			
參數	1	2	3
訂購成本： $a_i$	700	400	500
存貨成本： $h_i$	0.05	0.08	0.06
需求率(全年)： $D_i$	950	700	850
供應商			
原物料訂購成本： $a_r$	750		
原物料單位存貨成本： $h_r$	0.02		
產品單位存貨成本： $h_f$	0.07		
設置成本： $S$	300		
單位生產率： $P$	2700		
原物料消耗率： $u$	0.8		

整個搜尋演算法的進行過程說明如下：

1. 首先透過第 5.3 節的步驟，將所需的資料由表 2 代入求出最佳解的上、下界限，得到  $T_{low} = 3.591$ ， $T_{up} = 5.1277$  且  $T_R^* = 4.4639$ 。因此我們只尋找位於最佳解上下界限之內的接合點和區域最低值，比較其聯合總成本值，取最小者為最佳解。
2. 藉由第 4.2 節的公式(13)，從  $T_{up}$  開始尋找並記錄接合點，直到  $T_{low}$  才停止。我們得到第一個接合點的值為  $J(1)=4.3301$ ，由於第一個接合點的位置落在最佳解的搜尋上下界限， $[T_{low} = 3.591, T_{up} = 5.1277]$  之內，其所對應的聯合總成本值為  $\Gamma(m = 1, J(1)) = 1145.4$ 。
3. 接下來我們要判斷在  $[J(1) = 4.3301, \infty]$  之間是否有區域最低值存在。當  $m=1$  時，得到  $T_{m=1} = 4.6381$ ，是位在  $[J(1) = 4.3301, \infty]$  的範圍內，同時也位於最佳解的搜尋上下界

限 $[T_{low} = 3.591, T_{up} = 5.1277]$ 之間，其所對應的聯合總成本值為 $\Gamma(m = 1, T_{m=1}) = 1142.7$ 。由於 $\Gamma(m = 1, T_{m=1}) = 1142.7$ 的聯合總成本值比 $\Gamma(m = 1, J(1)) = 1145.4$ 小，所以我們將 $m=1$ 時的區域最低值之聯合總成本值記錄起來後，再繼續尋找下一個接合點。

4. 第二個接合點的值為 $J(2) = 2.5$ ，而由於第二個接合點的位置不落在最佳解的搜尋上下界限 $[T_{low} = 3.591, T_{up} = 5.1277]$ 之範圍內，所以我們不加以考慮。
5. 接下來我們要判斷在接合點 $J(1)$ 與 $J(2)$ 之間是否有區域最低值存在。而當 $m$ 等於2時的區域最低值位置 $T_{m=2} = 3.986$ ，位在 $[J(2) = 2.5, J(1) = 4.3301]$ 之間，也同樣位於最佳解的搜尋上下界限 $[T_{low} = 3.591, T_{up} = 5.1277]$ 內，其所對應的聯合總成本值為 $\Gamma(m = 2, T_{m=2}) = 1141.5$ 。由於 $\Gamma(m = 2, T_{m=2}) = 1141.5$ 的聯合總成本值比 $\Gamma(m = 1, T_{m=1}) = 1142.7$ 小，所以我們將 $m=2$ 時的區域最低值之聯合總成本值記錄起來後，再繼續尋找下一個接合點。
6. 第三個接合點的值為 $J(3) = 1.7678$ ，由於第三個接合點的位置不落在最佳解的搜尋上下界限 $[T_{low} = 3.591, T_{up} = 5.1277]$ 之範圍內，所以我們不加以考慮。
7. 接下來我們要判斷在接合點 $J(2)$ 與 $J(3)$ 之間是否有區域最低值存在。當 $m$ 等於3時的區域最低值位置 $T_{m=3} = 3.6298$ ，並不位在 $[J(3) = 1.7678, J(2) = 2.5]$ 之間，所以我們不加以考慮。
8. 由於接下來的接合點和區域最低值之位置，都不在最佳解的搜尋上下界限之內，所以搜尋

以上我們透過第 5.4 節最佳解搜尋演算法之步驟，求得了四組接合點與四組區域最低值。但是只有  $m$  等於 2 的區域最低值，落在最佳解的搜尋範圍之內，因此我們所得到的最佳解為：

$m = 2, T_{m=2} = 3.986$ ，最佳的聯合總成本值為  $\Gamma(m = 2, T_{m=2}) = 1141.5$ 。

也就是說最佳的生產週期數為 2，採購者最佳的補貨週期為 3.986 個單位時間，整個供應鏈所產生的聯合總成本為 1141.5。

表 6-3 搜尋結果

m	Junction point	JTC of Junction point	Local minimum	JTC of Local minimum
1	$J(1)=4.3301$	$(m=1, J(1)) = 1145.4$	$T_{m=1}=4.6381$	$(m=1, T_{m=1}) = 1142.7$
2	$J(2)=2.5$	$(m=2, J(2)) = 1268$	$T_{m=2}=3.986$	$(m=2, T_{m=2}) = 1141.5$
3	$J(3)=1.7678$	$(m=3, J(3)) = 1504.7$	$T_{m=3}=3.6298$	$(m=3, T_{m=3}) = 1184.6$
4	$J(4)=1.3693$	$(m=4, J(4)) = 1775.3$	$T_{m=4}=3.3757$	$(m=4, T_{m=4}) = 1236.8$
$T_{low} = 3.591$			$T_{up} = 5.1277$	

## 6.2 隨機實驗：

在 6.1 節中，我們以單一供應商與三個採購者的範例，來說明本研究提出的搜尋演算法之進行方式。而在 6.2 節中，我們將分別針對單一供應商與 5 個、10 個、15 個、20 個以及 25 個等不同採購者之供應鏈模式來進行探討。首先會針對各個供應鏈模式之不同的生產效能進行分析，對不同的生產效能分別各以 25 組的數據來進行實驗，我們將從均勻分配中(uniform)來隨機產生所有的參數，而這些參數的產生必須在所設定的範圍之內，即在  $[\text{mean} - \text{range} / 2, \text{mean} + \text{range} / 2]$  之內。透過這些參數來得到最佳解的成本平均值、成本值的下界、最佳解的成本平均誤差以及平均的電腦運算時間等資訊。我們

將針對這些資訊探討其在管理上的意義。例如在不同高低的生產效能水準之下，所得到的解之品質為何。而當採購者數目增加時，對最佳解的影響為何，以及電腦程式執行時間和採購者數量多寡之間的變化關係等。

表 6-4 單一供應商與 5 個、10 個採購者

$\frac{P}{\sum_{i=1}^n D_i}$	5 Buyers				10 Buyers			
	ATC	LB	$\frac{\Gamma(m,T) - LB}{LB}$	RT	ATC	LB	$\frac{\Gamma(m,T) - LB}{LB}$	RT
1.1	1469.939	1468.269	0.1380 %	0.1884	4267.275	4266.904	0.01041 %	0.2017
1.2	1437.98	1436.605	0.0946 %	0.2133	4378.536	4378.26	0.00609 %	0.2113
1.3	1432.197	1431.215	0.0680 %	0.2155	4413.212	4412.947	0.00548 %	0.2134
1.4	1405.053	1404.203	0.0591 %	0.2164	4332.746	4332.573	0.00346 %	0.2197
Average	1436.292	1435.073	0.09 %	0.2084	4347.942	4347.671	0.0075 %	0.2115

表 6-5 單一供應商與 15 個、20 個採購者

$\frac{P}{\sum_{i=1}^n D_i}$	15 Buyers				20 Buyers			
	ATC	LB	$\frac{\Gamma(m,T) - LB}{LB}$	RT	ATC	LB	$\frac{\Gamma(m,T) - LB}{LB}$	RT
1.1	5126.879	5126.381	0.00952 %	0.1996	6496.337	6495.396	0.01767 %	0.20428
1.2	4912.265	4911.91	0.00706 %	0.2151	6144.172	6143.272	0.0173 %	0.21687
1.3	5071.669	5071.392	0.00534 %	0.2168	6443.931	6443.144	0.01503 %	0.2204
1.4	4866.1	4865.896	0.00412 %	0.2175	6101.179	6100.424	0.01475 %	0.2216
Average	4994.228	4993.895	0.0075 %	0.2123	6296.405	6295.559	0.0162 %	0.2158

表 6-6 單一供應商與 25 個採購者

	25 Buyers			
$\frac{P}{\sum_{i=1}^n D_i}$	ATC	LB	$\frac{\Gamma(m,T)-LB}{LB}$	RT
1.1	5699.269	5698.808	0.0077 %	0.2290
1.2	5557.936	5557.524	0.00698 %	0.2410
1.3	5659.738	5659.38	0.0056 %	0.2425
1.4	5525.378	5525.052	0.00551	0.2457
Average	5610.58	5610.189	0.00193 %	0.2268

從以上的結果資料中我們發現到，在所有不同採購者數目的架構之下，電腦執行的平均最大運算時間為 0.2268 秒。雖然當採購者數目增加時，電腦執行的運算時間也跟著遞增，但是其增加的量非常微小。因此當採購者數目增加時，對整個搜尋演算法的求解速度並不會有太大的影響。

接下來要討論的是生產效能(utilization)和求解品質之間的關係。從分析的結果資料中可以知道，在所有的隨機實驗架構中，最大的平均誤差為 0.138 %。而當生產效能增加時，求解的誤差值(即  $\frac{\Gamma(m,T)-LB}{LB}$ ，其中 LB 為聯合總成本的下限值)也會跟著增加，不過誤差值所增加的量是非常微小的。

從以上的結果我們可以知道，本研究所提出的搜尋演算法在不同的隨機實驗架構之下，其求解的速度非常有效率，同時所得到的解與理想值之間的誤差皆很小，都在可以接受的範圍之內。此搜尋演算法也不會因為採購者的數目及生產效能的不同而造成太大的影響，因此本研究的搜尋演算法可以在極短的時間內得到一品質不錯的解。

## 第七章 結論

一個運作良好的供應鏈系統，其系統內部中各個成員之間的關係以及互動狀況必定是非常的緊密，才可藉此降低整個供應鏈所產生的成本。也因此供應鏈上、下游的整合與協調機制就成為了許多研究的重點。

本研究針對了由單一供應商與多個採購者所組成的三階層供應鏈系統，依次推導了各個供應鏈成員的成本項目，以及整個系統的聯合總成本。再根據聯合總成本函數來分析及證明其最佳解結構的相關特性(如片段凸性、接合點等)。於得到其最佳解的結構位置資訊之後，我們並依照其特性發展了一套有效的搜尋演算法。從第 6 節的隨機實驗結果中可以知道，此搜尋演算法在不同的採購者數目及生產效能之下，都可以迅速地得到一品質不錯的解。我們希望透過對此三階層的整合供應鏈系統架構之分析，以及對其聯合總成本的探討，期望可以提供給現今企業在運作協調上有用的資訊，以作為決策時的參考。未來，我們預計將此模式延伸至多個供應商的架構上，藉以更符合現今全球化競爭的環境。

## 參考文獻

- [1] Banerjee, A. “ On a quantity discount pricing model to increase vendor profits ” *Management science*, 32, (1986a), 1513-1517.
- [2] Banerjee, A. “ A joint economic-lot-size model for purchaser and vendor ” *Decision sciences*, 17, (1986b), 292-311.
- [3] Banerjee A. and S. Banerjee, “Coordinated, orderless inventory

- replenishment for a single supplier and multiple buyers through electronic data interchange”, *International Journal of Technology Management*, 12, (1992), 369-390.
- [4] Banerjee A. and S. Kim, “An integrated JIT inventory model”, *International Journal of Operations & Production Management* 7, (1992), 328-336.
- [5] Beamon. B.M. “Supply chain design and analysis : Model and methods” *International Journal of production economic*, 55, (1998), 281-294.
- [6] Billington P., “The classic economic production quantity model with setup cost as a function of capital expenditure”, *Decision Science* 18, (1987), 25-42.
- [7] Chakravarty, A.K. and G.E. Martin, “ Discount pricing policies for inventories subject to declining demand ” *Naval Research Logistics*, 36, (1989), 89-102.
- [8] Coates, E.R. “Manufacturing setup cost reduction”, *Computer and Industrial Engineering* 31, (1996), 111-114.
- [9] Das C. and S.K. Goyal, “Economic ordering policy for deterministic two-echelon distribution systems”, *Engineering Costs and Production Economics*, 21, (1991), 227-231
- [10] Data, M.A. and K.N. Srikanth, “ Pricing policies for quantity discount ” *Management science*, 33, (1987), 1247-1252.
- [11] Drezner, Z. and Wesolowsky, G.O. “ Multi-buyer discount pricing ” *European Journal of Operational Research*, 40, (1989), 38-42.]
- [12] Gottardi G. and E. Bolisani, “A critical perspective on information technology management: the case of electronic data interchange”, *International Journal of Technology Management* 12, (1996), 369-390.

- [13] Goyal, S.K. “ An integrated inventory model for single supplier-single customer problem ” *International Journal of Production Research*, 15, (1976), 107-111.
- [14] Goyal, S.K. “ Comment on : a generalized quantity discount pricing model to increase supplier’ s profit ” *Management science*, 33, .(1987a), 1635-1636.
- [15] Goyal, S.K. “ Determination of a supplier’ s economic ordering policy ” *Journal of Operational Research Society*, 38, (1987b), 853-857.
- [16] Goyal, S.K. “ A joint economic-lot-size model for purchaser and vendor : a comment ” *Decision sciences*, 19, (1988), 236-241.
- [17] Hong J., J. Hayya and S. Kim, “JIT purchasing and setup reduction in a integrated inventory model”, *International Journal of Production Research* 30, (1992), 255-266.
- [18] Hwang, H. and K.H. Kim, “ Supplier’ s discount policy with a single price break point ” *Engineering Costs and Production Economic*, 10, (1986), 279-286.
- [19] Joglekar, P.N. “ Comment on a quantity discount pricing model to increase vendor profit ” *Management science*, 34, (1988), 1391-1398.
- [20] Kim, K.H. and Hwang, H. “ An incremental discount pricing schedule with multiple customers and single price break ” *European Journal of Operational Research*, 35, (1988), 71-79.
- [21] Lambert D. M., J. M. Stock and L. M. Ellram, *Fundamentals of Logistics Management*, McGraw-Hill, NY, 1998.
- [22] Lee, H.L. and Rosenblatt, M.J. “ A generalized quantity discount pricing model to increase supplier’ s profits ” *Management science*, 32, (1986), 1177-1185.

- [23] Monahan, J.P. “ A quantity discount pricing model to increase vendor profits ” *Management science*, 30, (1984),720-726.
- [24] Munson, C.L. and Rosenblatt, M.J. “ Coordinating a three-level supply chain with quantity discount ” *IIE Transaction*, 33, (2001),371-384.
- [25] Rosenblatt, M.J. and Lee, H.L. “ Improving profitability with quantity discounts under fixed demand ” *IIE Transaction*, 17, (1985),388-395.
- [26] Weng, Z.K. “ Channel coordination and quantity discounts ” *Management science*, 41, (1995),1509-1522.
- [27] Wildeman R.E., J.B.G. Frenk and R. Dekker, “An efficient optimal solution method for the joint replenishment problem”, *European Journal of Operational Research* , 99, (1997) ,433-444.

### 附錄一

$T_m$  求法如下所示。

$$\Gamma(m, T) = \frac{1}{T} \left[ S + \frac{a_r}{m} + \sum_{i=1}^n a_i \right] + \frac{T}{2} \left[ (m-1)uh_r \sum_{i=1}^n D_i + \frac{1}{p} \left[ uh_r \left( \sum_{i=1}^n D_i \right)^2 + h_f \sum_{i=1}^n D_i^2 \right] + \sum_{i=1}^n h_i D_i \right]$$

其中令  $H = \frac{1}{p} \left[ uh_r \left( \sum_{i=1}^n D_i \right)^2 + h_f \sum_{i=1}^n D_i^2 \right] - uh_r \sum_{i=1}^n D_i + \sum_{i=1}^n h_i D_i$

則  $\Gamma(m, T) = \frac{1}{T} \left[ S + \frac{a_r}{m} + \sum_{i=1}^n a_i \right] + \frac{T}{2} \left[ muh_r \sum_{i=1}^n D_i + H \right]$

$$\frac{\partial \Gamma(m, T)}{\partial T} = \frac{-1}{T^2} \left[ S + \frac{a_r}{m} + \sum_{i=1}^n a_i \right] + \frac{1}{2} \left[ muh_r \sum_{i=1}^n D_i + H \right]$$

$$\begin{aligned}
& \text{令 } \frac{\partial \Gamma(m, T)}{\partial T} = 0 \\
& \frac{1}{T^2} \left[ S + \frac{a_r}{m} + \sum_{i=1}^n a_i \right] = \frac{1}{2} \left[ muh_r \sum_{i=1}^n D_i + H \right] \\
& T^2 = \frac{2 \left[ S + \frac{a_r}{m} + \sum_{i=1}^n a_i \right]}{\left[ muh_r \sum_{i=1}^n D_i + H \right]} \\
& T_m = \sqrt{\frac{2 \left[ S + \frac{a_r}{m} + \sum_{i=1}^n a_i \right]}{\left[ muh_r \sum_{i=1}^n D_i + H \right]}} \quad (24)
\end{aligned}$$



在  $T > 0$ 、 $m \in N$  時，由圖 7 可以知道， $m$  的最佳解是位於  $J(m-1)$  與  $J(m)$  之間中的  $m$  值，既  $J(m) \leq T < J(m-1)$ 。於是我們可以運用公式(13)得到：

$$\sqrt{\frac{2a_r}{m(m+1)uh_r \sum_{i=1}^n D_i}} \leq T \quad (25)$$

$$\text{與 } T < \sqrt{\frac{2a_r}{m(m-1)h_r \sum_{i=1}^n D_i}} \quad (26)$$

$$\text{不等式(25)化簡為： } m^2 + m - \frac{2a_r}{T^2 uh_r \sum_{i=1}^n D_i} \geq 0$$

因為  $m$  必須是正的，所以得到：

$$m \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8a_r}{T^2 uh_r \sum_{i=1}^n D_i}} \quad (27)$$

同樣地不等式(26)也可以化簡為：

$$0 < m < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8a_r}{T^2 u h_r \sum_{i=1}^n D_i}} \quad (28)$$

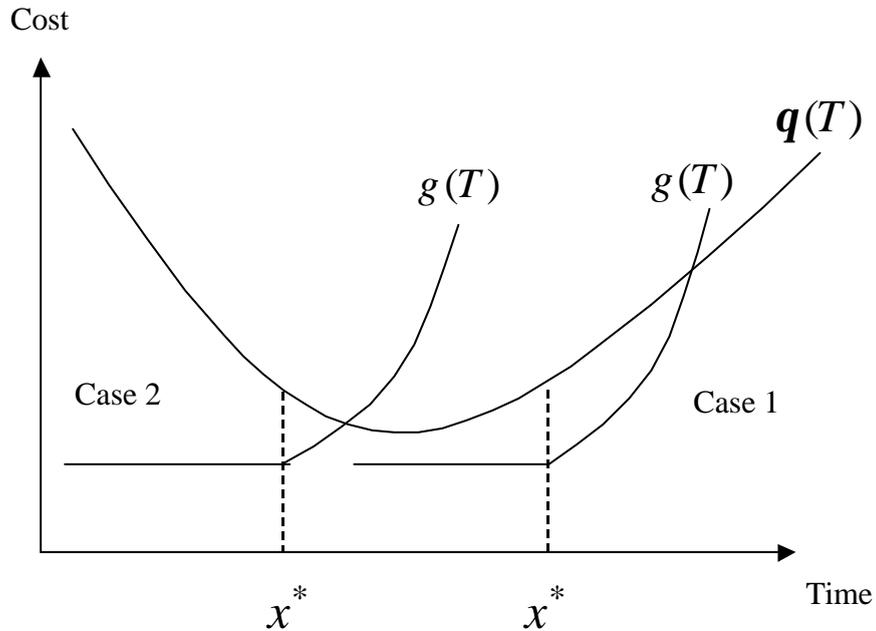
整合公式(27)與(28)得到：

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8a_r}{T^2 u h_r \sum_{i=1}^n D_i}} \leq m < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8a_r}{T^2 u h_r \sum_{i=1}^n D_i}} \quad (29)$$

公式(20)的兩個不等式之差恰為 1，表示有一整數在  $J(m)$  與  $J(m-1)$  兩者之間，或兩者皆為整數，而公式(29)只有左邊的不等式符合條件，故成為公式(13)。因此只要給定  $t$  值，我們可以藉由公式(13)求  $m$ 。而聯合總成本問題中的  $\Phi(m, T)$  也可以改寫成

$$\Phi(m(T), T) = \frac{ar}{mT} + \frac{T}{2} (m u h_r \sum_{i=1}^n D_i), \quad m \in N^+。$$

### 附錄三



我們令  $\Gamma_R^*(T) = \mathbf{q}(T) + g(T)$  ,  $m=1$ 。其中

$$\mathbf{q}(T) = \frac{S + \sum_{i=1}^n a_i}{T} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{uh_r}{p} (\sum_{i=1}^n D_i)^2 - uhr (\sum_{i=1}^n D_i) \frac{h_f}{p} (\sum_{i=1}^n D_i^2) \right] \text{---(30)}$$

Case1 當  $\mathbf{q}'(x^*) \geq 0$  時 :

對於時間  $T \geq x^*$  的情況之下，我們將  $\mathbf{q}(T)$  函數對  $T$  作一階導數，得到的值為大於等於 0 之正值，即  $\mathbf{q}'(T) \geq 0$ 。而把  $g(T)$  函數對  $T$  作一階導數，也同樣得到大於等於 0 之正值，即  $g'(T) \geq 0$ 。因此我們可以知道當  $T \geq x^*$  時， $\Gamma_R^*(T) > 0$ 。而  $\Gamma_R^*(T)$  函數對  $T$  作二階導數，得到的值大於 0，故  $\Gamma_R^*(T)$  是一個 convex 函數。

根據公式(20)的特性可以得到  $g(T) = (x^*)$ ，故

$$\Gamma_R(T) = \frac{S + \sum_{i=1}^n a_i}{T} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{uh_r}{p} (\sum_{i=1}^n D_i)^2 - uhr (\sum_{i=1}^n D_i) \right] + \frac{Th_f}{2p} (\sum_{i=1}^n D_i^2) + \sqrt{2a_r uh_r \sum_{i=1}^n D_i} \text{ (31)}$$

我們對  $\Gamma_R(T)$  作一階導數並令其為零，得到其最佳解為：

$$T_1^* = \sqrt{\frac{2(S + \sum_{i=1}^n a_i)}{\sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{uh_r}{p} (\sum_{i=1}^n D_i)^2 - uhr \sum_{i=1}^n D_i + \frac{h_f}{p} (\sum_{i=1}^n D_i^2)}} \text{ (32)}$$

Case2 當  $\mathbf{q}'(x^*) < 0$  時 :

對於時間  $T < x^*$  的情況之下，我們將  $\mathbf{q}(T)$  函數對  $T$  作一階導數，得到小於 0 之負值，即  $\mathbf{q}'(T) < 0$ 。而把  $g(T)$  函數對  $T$  作一階導數，其

值為 0，即  $g'(T)=0$ 。因此我們可以知道當  $T < x^*$  時， $\Gamma_R^*(T) < 0$ 。而  $\Gamma_R^*(T)$  函數對  $T$  作二階導數，得到的值大於 0，故  $\Gamma_R^*(T)$  是一個 convex 函數。

根據公式(20)的特性可以得到  $g(T) = (T)$ ，故

$$\Gamma_R(T) = \frac{S + \sum_{i=1}^n a_i}{T} + \frac{T}{2} \left[ \sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{uh_r}{p} (\sum_{i=1}^n D_i)^2 - uhr (\sum_{i=1}^n D_i) \right] + \frac{Th_f}{2p} (\sum_{i=1}^n D_i^2) + \frac{a_r}{T} + \frac{T}{2} uh_r \sum_{i=1}^n D_i \quad (33)$$

我們同樣對  $\Gamma_R(T)$  作一階導數並令其為零，得到其最佳解為：

$$T_2^* = \sqrt{\frac{2(S + \sum_{i=1}^n a_i + a_r)}{\sum_{i=1}^n h_i D_i + \frac{uh_r}{p} (\sum_{i=1}^n D_i)^2 + \frac{h_f}{p} (\sum_{i=1}^n D_i^2)}} \quad (34)$$

由 case1 和 case2 的結果我們得到整個  $\Gamma_R^*(T)$  其最佳解位置為：

$$T^* = \begin{cases} T_1^*, & \text{if } q'(x^*) \geq 0 \\ T_2^*, & \text{if } q'(x^*) < 0 \end{cases}$$

## 附錄四

因為寬鬆後問題的目標函數是 strictly convex，所以我們可以明確的知道：

$$T_{low} \leq T^* \leq T_{up}$$

因此對於所有  $T < T_{low}$  的  $T$  值，其對應於寬鬆後問題的目標函數值一定會大於  $v(F_-)$ 。由於寬鬆後問題是原問題的寬鬆模式，所以

$T < T_{low}$  的  $T$  值，其對應於原問題的目標函數值也會大於  $v(F_{-})$ 。因此  $T_{low}$  是原問題最佳解的下限。而原問題最佳解的上限之證明與上類似。