第一章　緒 論

1.1 羅吉斯迴歸模型

本篇論文是以羅吉斯迴歸(logistic regression)模型為主要基本架構，進而延伸出本文的相關研究問題。在描述羅吉斯模型之前，首先說明其運用時機。當資料為名目(nominal)尺度之類別資料，其反應變數為離散型(discrete)，且其分類只有兩類或少數幾類時，羅吉斯迴歸模型即為一最適用於此類資料的分析方法。

羅吉斯迴歸在統計分析中的使用已行之有年。然而直到 Truett 等人於 1967 年將此模型應用於心臟病資料的研究後，其對於二元(dichotomous)資料強大的解釋能力及實用性才漸為人們所重視。時至今日，羅吉斯迴歸已成為分析類別資料的標準方法之一。

當然在實務上對於離散型的二元資料其分析方法有許多種。Cox 於 1970 年指出以羅吉斯分配分析類別變數的兩項理由：

(1) 依數學觀點而言，它是一種極賦彈性且容易使用的函數。

(2) 它對於生物科學之資料具有極佳的解釋能力。

在羅吉斯分配下，當給定一自變數(X)時，應變數(Y)的條件期望值為

$$E(Y\mid x)=\frac{\exp(\beta_0+\beta_1 x)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 x)}$$

為一單變量之羅吉斯迴歸模型。

舉例說明：某醫師欲探討白血病(leukemia)患者的存活(survival)機率與病患體內白血球細胞數間的關係，該醫師記錄病例中患者之白血球細胞數，並調查各病患發病後特定時期內之病況。若將病患存活記為「1」，死亡則記為「0」，此時的應變數為

$$Y=\begin{cases}1, & \text{病患存活}\\ 0, & \text{病患死亡}\end{cases}$$

令$\pi(x)$為病患「存活」的機率，亦即$\pi(x)=\Pr(Y=1\mid x)$。則反應機率可表示為

$$\pi(x)=E(Y\mid x)=\frac{\exp(\beta_0+\beta_1 x)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1 x)} \qquad (1.1.1)$$

即為一單變量之羅吉斯迴歸模型。

羅吉斯迴歸模型在統計分析的運用上已漸普遍，在二元化的類別資料中，以醫學方面的使用較為廣泛。

1.2 問題緣起

近年來對於二元化應變數的研究，大多僅限於當應變數為伯努利(Bernoulli)分配時，求其參數估計值及對迴歸係數作檢定，對於應變數為二項(binomial)分配之情況則少有討論。

Agresti 於 1990 年所著的「Categorical Data Analysis」一書中曾提及：若一特定自變數$\underline{x_i} = (x_{i0}, \ldots, x_{ik})'$具有多個觀測點(observation)時，可計算其總觀察數n_i及事件「成功」的總次數y_i。在此$\{Y_i \mid i = 1, \ldots, \mathrm{I}\}$為獨立的二項隨機變數，且令$x_{i0} = 1$，則(1.1.1)式可推廣如下

$$\pi(\underline{x_i}) = \frac{\exp(\sum_{j=0}^{k} \beta_j x_{ij})}{1 + \exp(\sum_{j=0}^{k} \beta_j x_{ij})} \tag{1.2.1}$$

舉例說明：某醫師欲探討食道癌(esophageal cancer)的病發機率與患者身體狀況間的關係，可將食道癌患者依身體各狀況分成若干組，記錄各分組中食道癌病發的人數。此時的應變數為

$$Y_i = \begin{cases} y_i \quad , & \textit{病發人數} \\ n_i - y_i \, , & \textit{未病發人數} \end{cases}$$

則我們可對身體各狀況的檢測值，即自變數$\underline{x_i}$，探討其中有哪些因子(factor)對食道癌的病發有顯著的影響，並可對病發機率是否為特定機率π_0做進一步的討論。

本論文的研究重點即在當應變數為二項隨機變數，且自變數為兩個(k=2)時，如何求其參數估計值及對迴歸係數作檢定，並探討如何檢定機率$\pi(\underline{x})$是否為π_0的相關問題。我們可將(1.2.1)式改寫為

$$\pi(\underline{x}) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} \qquad (1.2.2)$$

本論文的研究方法可推廣至多個(k>2)自變數。

1.3 文獻探討

本篇論文的相關文獻有：

1. Agresti (1990)所著的「Categorical Data Analysis」書中提出利用概似函數(likelihood function)求參數之最大概似估計值。作者認為：因為$\{Y_i \mid i = 1, \ldots, \mathrm{I}\}$為獨立的二項隨機變數，其概似函數為

$$L(\beta_0, \beta_1, \beta_2 \mid y_1, \ldots, y_I) = C \prod_{i=1}^{I} [\pi(\underline{x_i})]^{y_i} [1 - \pi(\underline{x_i})]^{n_i - y_i}$$

其中$\pi(\underline{x_i})$滿足(1.2.1)式，且C為與參數β_j無關之常數。取對數並分別對β_j偏微可得

$$\frac{\partial \log(L)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{I} y_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{I} n_i x_{ij} \left(\frac{\exp(\sum_{j=0}^{2} \beta_j x_{ij})}{1 + \exp(\sum_{j=0}^{2} \beta_j x_{ij})} \right), \quad j = 0, 1, 2$$

則其概似方程式(likelihood equation)**為**

$$\sum_{i=1}^{I} y_i x_{ij} - \sum_{i=1}^{I} n_i x_{ij} \left(\frac{\exp(\sum_{j=0}^{2} \beta_j x_{ij})}{1+\exp(\sum_{j=0}^{2} \beta_j x_{ij})} \right) = 0, \quad j = 0, 1, 2$$

此概似方程式為非線性方程組，故作者提出以牛頓-賴福森(Newton-Raphson)**方法求解最大概似估計值的近似值。**

2. Dobson (1990)**所著的「**Introduction to Generalized Linear Model**」書中利用中央極限定理求得應變數的近似分配。作者認為：若** $\{Y_i \mid i = 1, \dots, \mathrm{I}\}$ **為獨立的二項隨機變數**

$$Y_i \quad Bin(n_i , \pi_i)$$

$$E(Y_i) = n_i \pi_i \qquad Var(Y_i) = n_i \pi_i (1 - \pi_i)$$

則在大樣本的情況下，可用常態分配逼近之

$$Y_i \quad N\left(n_i \pi_i , n_i \pi_i (1 - \pi_i) \right) \tag{1.3.1}$$

今考慮事件「成功」的比例 $(Y_i = y_i)$

$$p_i = \frac{y_i}{n_i}$$

則由(1.3.1)式可知，P_i之近似分配亦為常態

$$P_i \quad N(\pi_i, \frac{\pi_i(1-\pi_i)}{n_i})$$

3. 陳慎健(1998)碩士論文「反應變數具二項分佈之羅吉斯複迴歸模型之檢定」中，針對$H_0 : \beta_2 = 0$之檢定提出三種檢定式：概度比檢定、一致最強力不偏檢定及華德檢定。作者認為可對羅吉斯模型進行轉換。首先令事件「成功」的比例$(Y_i = y_i)$為

$$p_i = \frac{y_i}{n_i} \tag{1.3.2}$$

且定義P_i 為 p_i相對應之隨機變數。並由(1.2.2)式可知

$$\log\left(\frac{\pi(\underline{x}_i)}{1-\pi(\underline{x}_i)}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2}$$

由此得到想法，可令

$$w_i = \log(\frac{p_i}{1-p_i})$$

且定義W_i為w_i相對應之隨機變數。則在大樣本之下，可證明W_i具有下列二項結果：

(1) $E(W_i) \cong \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2}$

(2) $Var(W_i) \cong \dfrac{1}{n_i \pi(\underline{x_i})[1-\pi(\underline{x_i})]}$

針對此轉換後之模型，作者提出可利用加權最小平方法估計迴歸係數β_0**、**β_1**及**β_2**。**

4. **郭文達(2000)碩士論文「應變數具二項分佈之羅吉斯複迴歸模型之反應機率檢定」中，針對**$H_0 : \pi(\underline{x}) = \pi_0$**之檢定提出三種檢定式：概度比檢定、一致最強力不偏檢定及華德檢定。其中作者認為對於反應機率之檢定問題**

$$H_0 : \pi(\underline{x}) = \pi_0 \quad \text{vs.} \quad H_a : \pi(\underline{x}) \neq \pi_0 \qquad (1.3.3)$$

若對π_0**取** logit**，則可令**

$$\theta_0 = \log(\frac{\pi_0}{1-\pi_0})$$

因此(1.3.3)**式的假設檢定可轉換成**

$$H_0 : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_a : \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \neq \theta_0 \qquad (1.3.4)$$

並進一步令

$$\theta = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} - \theta_0$$

則(1.3.4)式又可轉換成

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{vs.} \quad H_a : \theta \neq 0 \tag{1.3.5}$$

其中(1.3.3)式、(1.3.4)式及(1.3.5)式均為等價的檢定假設。

1.4 研究問題之建立

根據前述的假設可知，若$\{Y_i \mid i = 1, \ldots, \mathrm{I}\}$為獨立的二項隨機變數，其機率密度函數為

$$\Pr(Y_i = y_i) = \binom{n_i}{y_i} [\pi(\underline{x_i})]^{y_i} [1 - \pi(\underline{x_i})]^{n_i - y_i}$$

其中反應機率為

$$\pi(\underline{x_i}) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2})}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2})} \tag{1.4.1}$$

由上節知在大樣本下，模型轉換後之W_i具有下列二項結果：

(1) $E(W_i) \cong \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2}$

(2) $Var(W_i) \cong \dfrac{1}{n_i \pi(\underline{x}_i)[1-\pi(\underline{x}_i)]}$

然此轉換後的新變數W_i之變異數為其平均數的函數，這將使得迴歸模型的參數估計變得不穩定(unstable)。

本研究即針對此一變異不穩的情形，在加權最小平方法之外，應用變異穩定(variance stabilizing)轉換的概念(參見 Rao 1973)，找出解決此問題的方法。

1.5 本文結構

針對本研究之兩種假設檢定問題：(1)迴歸係數之檢定 (2)反應機率之檢定，本文提出變異穩定轉換的檢定方法。

在第二章中，我們介紹變異穩定的定義，並將此概念應用到羅吉斯迴歸模型中。第三節和第四節則分別針對迴歸係數及反應機率之檢定推導其檢定式。

我們在第三章中將以電腦模擬的方式比較各個檢定式之檢定力

(power)，探討在相同條件下各檢定式之優劣。

在第四章中，我們將變異穩定轉換之檢定法應用於一實例，並將檢定結果與陳慎健(1998)及郭文達(2000)論文之結果加以比較。

最後，我們將結論、建議及後續研究等寫於第五章。

第二章　變異穩定轉換

2.1 變異穩定的定義

變異穩定(variance stabilizing)轉換的概念始於 Fisher (1921)。令 $\{T_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ 表示一統計量之數列(sequence)，且其為樣本大小 n 的函數。設在大樣本之下，T_n 的分配近似常態

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

其中 θ 為 T_n 之平均數。令 $g(\cdot)$ 為一可二次微分之函數，且已知 $g'(\theta) \neq 0$，則利用泰勒展開式(Taylor expansion)可證明 $g(T_n)$ 之極限分配亦為常態(Rao 1973)

$$\sqrt{n}[g(T_n) - g(\theta)] \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2[g'(\theta)]^2)$$

今假設 T_n 之變異數為 $\sigma^2(\theta)$，若欲找到一函數 $g(\cdot)$，使得 $g(T_n)$ 之變異數與平均數 θ 無關。我們可令

$$\sigma^2(\theta)[g'(\theta)]^2 = C$$

其中 C 為與參數 θ 無關之常數。將上式求解後可得

$$g(\theta)=C\int\frac{1}{\sqrt{\sigma^2(\theta)}}d\theta$$

則在大樣本之下，此轉換後之統計量$g(T_n)$亦為常態分配，且其變異數將與θ無關(independent)。

2.2 模型轉換

我們可將前述之變異穩定轉換方法，應用於羅吉斯迴歸模型中。由 1.3 節可知，當應變數$\{Y_i \mid i=1,\ldots,\mathrm{I}\}$為二項隨機變數，且為大樣本的情況下，我們可令

$$w_i=\log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) \tag{2.2.1}$$

則W_i之分配近似常態，且

$$E(W_i)\cong\beta_0+\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}$$

$$Var(W_i)\cong\frac{1}{n_i\pi(\underline{x_i})[1-\pi(\underline{x_i})]}$$

一般而言，若隨機變數W的期望值及變異數分別為

$$E(W)\cong\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2\equiv\eta$$

$$Var(W)=\frac{1}{nPQ}\equiv\frac{\phi(\eta)}{n}$$

其中

$$\phi(\eta)=\frac{1}{P(\eta)Q(\eta)}=\frac{[1+\exp(\eta)]^2}{\exp(\eta)}$$

$$P(\eta)=\frac{\exp(\eta)}{1+\exp(\eta)}$$

此為應用變異穩定轉換的一個最佳時機。我們可構造一個新的隨機變數Z**，雖然**Z**的期望值含有**η**，但其變異數卻與**η**無關。令**

$$Z=\varphi(W)$$

則可得

$$E(Z)\cong\varphi[E(W)]=\varphi(\eta)$$

且

$$\begin{aligned}Var(Z)&\cong Var(W)\left(\frac{\partial\varphi(W)}{\partial W}\right)^2\Bigg|_{W=\eta}\\&=\frac{\phi(\eta)}{n}[\varphi'(\eta)]^2\end{aligned}$$

由 Rao (1973)**之方法，我們可得一函數**

$$\begin{aligned}\varphi(\eta) &= \int \frac{1}{\sqrt{\phi(\eta)}}\,d\eta \\ &= \int \frac{\exp(\frac{\eta}{2})}{1+\exp(\eta)}\,d\eta \\ &= 2\tan^{-1}[\exp(\frac{\eta}{2})] + C\end{aligned}$$

故可令新變數為

$$z_i \equiv \varphi(w_i) = 2\tan^{-1}[\exp(\frac{w_i}{2})] \qquad (2.2.2)$$

由(1.3.2)**及**(2.2.1)**式可知**

$$\begin{aligned}z_i &= 2\tan^{-1}\{\exp[\frac{1}{2}\log(\frac{p_i}{1-p_i})]\} \\ &= 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{y_i}{n_i - y_i}}\right)\end{aligned}$$

且可預期Z_i**之期望值為**

$$\begin{aligned}E(Z_i) &\cong 2\tan^{-1}[\exp(\frac{\eta_i}{2})] \\ &\cong 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right)\end{aligned}$$

並由(2.2.2)式可得 Z_i 之變異數

$$Var(Z_i) \cong Var(W_i)\left(\frac{\partial\varphi(W_i)}{\partial W_i}\right)^2\Bigg|_{W_i=\eta_i}$$

$$\cong \frac{1}{n_i}\times\frac{[1+\exp(\eta_i)]^2}{\exp(\eta_i)}\times\left(\frac{\partial}{\partial W_i}2\tan^{-1}[\exp(\frac{W_i}{2})]\right)^2\Bigg|_{W_i=\eta_i}$$

$$=\frac{1}{n_i}$$

則在大樣本之下，可知 Z_i 之近似分配

$$Z_i \quad N\left(2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right), \frac{1}{n_i}\right)$$

其機率密度函數為

$$f_Z(z_i)=\sqrt{\frac{n_i}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{n_i}{2}\left[z_i-2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right)\right]^2\right\} \qquad (2.2.3)$$

2.3 迴歸係數之檢定

在此我們所關心的假設檢定為

$$H_0:\beta_2=0 \quad \text{vs.} \quad H_a:\beta_2\neq 0$$

針對此檢定問題，可導出其概度比檢定式。

我們由(2.2.3)式可知，當未對參數作限制下，其概似函數為

$$L(\beta_0,\beta_1,\beta_2 \mid \underline{z_i}) = \prod_{i=1}^{I}\sqrt{\frac{n_i}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{n_i}{2}\left[z_i - 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right)\right]^2\right\}$$

取對數可得對數概似函數

$$l(\beta_0,\beta_1,\beta_2 \mid \underline{z_i}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\log\left(\frac{n_i}{2\pi}\right) - \sum_{i=1}^{I}\frac{n_i}{2}\left\{z_i - 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right)\right\}^2$$

分別對β_j偏微可得

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{I} n_i x_{ij}\left\{z_i - 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}}{1+\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right)$$

則其概似方程式為

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{I} n_i\left\{z_i - 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}}{1+\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right) = 0\\
&\sum_{i=1}^{I} n_i x_{i1}\left\{z_i - 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}}{1+\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right) = 0\\
&\sum_{i=1}^{I} n_i x_{i2}\left\{z_i - 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}}{1+\exp(\sum_{j=0}^{2}\beta_j x_{ij})}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (2.3.1)$$

令$\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$及$\hat{\beta}_2$為(2.3.1)式的解，且定義

$$Q(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)=\sum_{i=1}^{I} n_i\left\{z_i-2\tan^{-1}[\exp(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2}\hat{\beta}_j x_{ij})]\right\}^2 \qquad (2.3.2)$$

同理，當$H_0:\beta_2=0$時，其概似方程式為

$$\sum_{i=1}^{I} n_i\left\{z_i-2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{1}\beta_j x_{ij})}\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{1}\beta_j x_{ij})}}{1+\exp(\sum_{j=0}^{1}\beta_j x_{ij})}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{I} n_i x_{i1}\left\{z_i-2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{1}\beta_j x_{ij})}\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{\exp(\sum_{j=0}^{1}\beta_j x_{ij})}}{1+\exp(\sum_{j=0}^{1}\beta_j x_{ij})}\right)=0$$

令$\tilde{\beta}_0$及$\tilde{\beta}_1$為此概似方程式的解，且定義

$$Q'(\tilde{\beta}_0,\tilde{\beta}_1)=\sum_{i=1}^{I} n_i\left\{z_i-2\tan^{-1}[\exp(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{1}\tilde{\beta}_j x_{ij})]\right\}^2$$

針對本假設檢定$H_0:\beta_2=0$，可令其概度比為

$$\lambda=\frac{L(\tilde{\beta}_0,\tilde{\beta}_1)}{L(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)}$$

若λ小於某臨界值則拒絕$H_0:\beta_2=0$。亦即當給定一顯著水準α，若檢定統計量

$$
\begin{aligned}
K &= -2\log(\lambda) \\
&= -2\{\log[L(\tilde{\beta}_0,\tilde{\beta}_1)] - \log[L(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)]\} \\
&= Q'(\tilde{\beta}_0,\tilde{\beta}_1) - Q(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) \\
&\geq \chi^2_{(1-\alpha,1)}
\end{aligned}
$$

則拒絕$H_0:\beta_2=0$**的假設。其中**$\chi^2_{(1-\alpha,1)}$**為自由度** 1 **之卡方分配右尾** $100\alpha\%$**的臨界值。**

2.4 反應機率之檢定

在此我們所關心的假設檢定為

$$H_0:\pi(\underline{x})=\pi_0 \quad \text{vs.} \quad H_a:\pi(\underline{x})\neq\pi_0$$

其中π_0**為介於** 0 **到** 1 **的已知常數。我們可定義**

$$\theta_0=\log(\frac{\pi_0}{1-\pi_0})$$

則可得一等價之假設檢定

$$H_0:\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2=\theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_a:\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2\neq\theta_0$$

針對此檢定問題，可導出其概度比檢定式。

當對參數作限制下，其概似方程式與(2.3.1)式相同，故可援用上節之(2.3.2)式

$$Q(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)=\sum_{i=1}^{I} n_i\left\{z_i-2\tan^{-1}[\exp(\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2}\hat{\beta}_j x_{ij})]\right\}^2$$

另外，當 $H_0:\beta_0+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2=\theta_0$ 時，由(1.4.1)式可知

$$\pi(\underline{x_i})=\frac{\exp[\theta_0+\beta_1(x_{i1}-x_1)+\beta_2(x_{i2}-x_2)]}{1+\exp[\theta_0+\beta_1(x_{i1}-x_1)+\beta_2(x_{i2}-x_2)]}$$

其概似函數可表示為

$$L(\beta_1,\beta_2\mid \underline{z_i})=\prod_{i=1}^{I}\sqrt{\frac{n_i}{2\pi}}\exp\left\{-\frac{n_i}{2}\left[z_i-2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp[\theta_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_j(x_{ij}-x_j)]}\right)\right]^2\right\}$$

取對數並分別對 β_j 偏微可得

$$\frac{\partial\log(L)}{\partial\beta_j}=\sum_{i=1}^{I}n_i(x_{ij}-x_j)\left\{z_i-2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp[\theta_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_j(x_{ij}-x_j)]}\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{\exp[\theta_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_j(x_{ij}-x_j)]}}{1+\exp[\theta_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_j(x_{ij}-x_j)]}\right)$$

則其概似方程式為

$$\sum_{i=1}^{I}n_i(x_{ij}-x_1)\left\{z_i-2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp[\theta_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_j(x_{ij}-x_j)]}\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{\exp[\theta_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_j(x_{ij}-x_j)]}}{1+\exp[\theta_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_j(x_{ij}-x_j)]}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{I}n_i(x_{ij}-x_2)\left\{z_i-2\tan^{-1}\left(\sqrt{\exp[\theta_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_j(x_{ij}-x_j)]}\right)\right\}\left(\frac{\sqrt{\exp[\theta_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_j(x_{ij}-x_j)]}}{1+\exp[\theta_0+\sum_{j=1}^{2}\beta_j(x_{ij}-x_j)]}\right)=0$$

令$\tilde{\beta}_1^*$及$\tilde{\beta}_2^*$為此概似方程式的解，且定義

$$Q^*(\tilde{\beta}_1^*,\tilde{\beta}_2^*)=\sum_{i=1}^{I} n_i \left\{ z_i - 2\tan^{-1}\{\exp[\frac{1}{2}\theta_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\tilde{\beta}_j^*(x_{ij}-x_j)]\} \right\}^2$$

針對本假設檢定$H_0:\pi(\underline{x})=\pi_0$，可令其概度比為

$$\lambda^*=\frac{L(\tilde{\beta}_1^*,\tilde{\beta}_2^*)}{L(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)}$$

若λ^*小於某臨界值則拒絕$H_0:\pi(\underline{x})=\pi_0$。亦即當給定一顯著水準$\alpha$，若檢定統計量

$$\begin{aligned}
K^* &= -2\log(\lambda^*) \\
&= -2\{\log[L(\tilde{\beta}_1^*,\tilde{\beta}_2^*)] - \log[L(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)]\} \\
&= Q^*(\tilde{\beta}_1^*,\tilde{\beta}_2^*) - Q(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) \\
&\ge \chi^2_{(1-\alpha,1)}
\end{aligned}$$

則拒絕$H_0:\pi(\underline{x})=\pi_0$的假設。其中$\chi^2_{(1-\alpha,1)}$為自由度 1 之卡方分配右尾 $100\alpha\%$的臨界值。

第三章　檢定力比較

在第二章中，我們利用變異穩定轉換建議了兩個檢定式。針對同樣的檢定問題，陳慎健(1998)及郭文達(2000)亦提出了概度比檢定及華德(Wald)檢定。在本章中我們以電腦模擬檢定力的方式比較這三種檢定式，探討在樣本數相同的情況下，新檢定式是否具有較高之檢定力。

在不失一般性的情況下，我們令$\beta_0 = 0$且$\beta_1 = 1$，並設顯著水準$\alpha = 0.05$。為簡化模擬程序在此自變數(x_1, x_2)為二元類別變數，且對於每種配對皆取 1000 個樣本模擬檢定力，再重複 1000 次以求得檢定力之估計值及標準差(S.D.)。

3.1 迴歸係數

針對$H_0 : \beta_2 = 0 \quad \text{vs.} \quad H_a : \beta_2 \neq 0$之假設檢定，陳慎健(1998)提出之檢定式為

(1) 概度比檢定

$$D = -2[\log L(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1) - \log L(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)]$$

其中$(\tilde{\beta}_0,\tilde{\beta}_1)$及$(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)$分別為在$H_0$及$H_a$下之最大概似估計值。當$D>\chi^2_{(1-\alpha,1)}$時，則拒絕$H_0$，其中$\chi^2_{(1-\alpha,1)}$為自由度 1 之卡方分配右尾$100\alpha\%$的臨界值。

(2) 華德檢定

$$T=\frac{\hat{\beta}_2}{\sqrt{v_{33}}}$$

若$|T|>Z_{(1-\alpha/2)}$時，則拒絕H_0，其中$Z_{(1-\alpha/2)}$為標準常態分配右尾$100\alpha\%$的臨界值。其中v_{33}為$\underline{\hat{\beta}}$之共變異矩陣$\hat{\Sigma}(\underline{\hat{\beta}})=\mathbf{B}(\underline{\hat{\beta}})^{-1}$第 3 列第 3 行之元素，且

$$\mathbf{B}(\underline{\hat{\beta}})=\begin{bmatrix}\sum n_i p_i(1-p_i) & \sum x_{i1}n_i p_i(1-p_i) & \sum x_{i2}n_i p_i(1-p_i)\\ \sum x_{i1}n_i p_i(1-p_i) & \sum x_{i1}^2 n_i p_i(1-p_i) & \sum x_{i1}x_{i2}n_i p_i(1-p_i)\\ \sum x_{i2}n_i p_i(1-p_i) & \sum x_{i1}x_{i2}n_i p_i(1-p_i) & \sum x_{i2}^2 n_i p_i(1-p_i)\end{bmatrix}\quad(3.1.1)$$

當 n=50 及 n=75 時，針對$H_0:\beta_2=0$ vs. $H_a:\beta_2>0$之假設檢定，我們將三種檢定式之檢定力模擬結果列於表 3.1(a)及 3.1(b)。經比較各個檢定式之檢定力，我們可以發現：變異穩定轉換檢定式之檢定力雖略遜於概度比檢定；然相對於華德檢定，其檢定力則明顯較高。

表 3.1 (a) $H_0:\beta_2=0$ 對 $H_a:\beta_2>0$ 之檢定力

一樣本數 n=50一

	LRT		Wald		VST	
β_2	**Power**	**S.D.**	**Power**	**S.D.**	**Power**	**S.D.**
0.1	0.0990	0.0096	0.0905	0.0092	0.0994	0.0096
0.2	0.1697	0.0116	0.1570	0.0113	0.1700	0.0117
0.3	0.2640	0.0139	0.2473	0.0136	0.2638	0.0138
0.4	0.3762	0.0149	0.3569	0.0148	0.3754	0.0149
0.5	0.4990	0.0159	0.4788	0.0159	0.4976	0.0159
0.6	0.6190	0.0155	0.5990	0.0157	0.6170	0.0156
0.7	0.7261	0.0146	0.7078	0.0149	0.7240	0.0146
0.8	0.8144	0.0124	0.7986	0.0130	0.8126	0.0125
0.9	0.8817	0.0101	0.8684	0.0107	0.8802	0.0102
1.0	0.9278	0.0083	0.9171	0.0088	0.9268	0.0082

註：(1) LRT：概度比檢定。

(2) Wald：華德檢定。

(3) VST：變異穩定轉換檢定。

表 3.1 (b) $H_0:\beta_2=0$ 對 $H_a:\beta_2>0$ 之檢定力

一樣本數 n=75一

	LRT		Wald		VST	
β_2	**Power**	**S.D.**	**Power**	**S.D.**	**Power**	**S.D.**
0.1	0.1087	0.0095	0.1051	0.0093	0.1083	0.0095
0.2	0.2034	0.0128	0.1969	0.0126	0.2028	0.0128
0.3	0.3333	0.0148	0.3235	0.0147	0.3326	0.0147
0.4	0.4836	0.0157	0.4707	0.0157	0.4828	0.0157
0.5	0.6368	0.0151	0.6232	0.0151	0.6361	0.0151
0.6	0.7668	0.0132	0.7546	0.0134	0.7662	0.0133
0.7	0.8637	0.0109	0.8547	0.0112	0.8631	0.0109
0.8	0.9281	0.0083	0.9222	0.0087	0.9277	0.0084
0.9	0.9648	0.0058	0.9614	0.0060	0.9645	0.0058
1.0	0.9844	0.0039	0.9826	0.0041	0.9842	0.0039

註：(1) LRT：概度比檢定。
(2) Wald：華德檢定。
(3) VST：變異穩定轉換檢定。

3.2 反應機率

對於$H_0:\pi(\underline{x})=\pi_0$ vs. $H_a:\pi(\underline{x})\neq\pi_0$之假設檢定，郭文達(2000)提出之檢定式為

(1) 概度比檢定

$$D^*=-2[\log L(\tilde{\beta}_1^*,\tilde{\beta}_2^*)-\log L(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)]$$

其中$(\tilde{\beta}_1^*,\tilde{\beta}_2^*)$及$(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)$分別為在$H_0$及$H_a$下之最大概似估計值。當$D^*>\chi^2_{(1-\alpha,1)}$時，則拒絕$H_0$，其中$\chi^2_{(1-\alpha,1)}$為自由度 1 之卡方分配右尾$100\alpha\%$的臨界值。

(2) 華德檢定

$$T^*=\frac{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\hat{\beta}_2x_2-\theta_0}{\sqrt{v_{11}+x_1^2v_{22}+x_2^2v_{33}+2x_1v_{12}+2x_2v_{13}+2x_1x_2v_{23}}}$$

若$|T^*|>Z_{(1-\alpha/2)}$時，則拒絕H_0，其中$Z_{(1-\alpha/2)}$為標準常態分配右尾$100\alpha\%$的臨界值。其中v_{ij}為$\hat{\underline{\beta}}$之共變異矩陣$\hat{\Sigma}(\hat{\underline{\beta}})=\mathbf{B}(\hat{\underline{\beta}})^{-1}$第 i 列第 j 行之元素，且$\mathbf{B}(\hat{\underline{\beta}})$如(3.1.1)式之定義。

當 n=50 及 n=75 時，針對$H_0:\pi(\underline{x})=0.5$ vs. $H_a:\pi(\underline{x})>0.5$之假設檢定，在此為檢定$(x_1,x_2)=(1,1)$時之$\pi(\underline{x})$是否大於 0.5，我們將三種檢定式之檢定力模擬結果列於表 3.2(a)及 3.2(b)。經比較各個檢定式

之檢定力，我們可以發現：變異穩定轉換檢定式之檢定力在三種檢定式中最高，概度比檢定次之，而華德檢定則較差。

表 3.2 (a) $H_0 : \pi(\underline{x}) = 0.5$ 對 $H_a : \pi(\underline{x}) > 0.5$ 之檢定力
－樣本數 n=50－

	LRT		**Wald**		**VST**	
$\pi(\underline{x})$	**Power**	**S.D.**	**Power**	**S.D.**	**Power**	**S.D.**
0.525	0.1038	0.0095	0.0969	0.0092	0.1085	0.0097
0.550	0.1949	0.0126	0.1853	0.0123	0.2014	0.0128
0.575	0.3228	0.0146	0.3112	0.0144	0.3305	0.0148
0.600	0.4811	0.0155	0.4681	0.0156	0.4887	0.0157
0.625	0.6461	0.0148	0.6343	0.0149	0.6520	0.0149
0.650	0.7905	0.0130	0.7813	0.0131	0.7941	0.0128
0.675	0.8954	0.0098	0.8895	0.0100	0.8972	0.0096
0.700	0.9576	0.0063	0.9543	0.0065	0.9584	0.0062
0.725	0.9863	0.0037	0.9849	0.0038	0.9867	0.0036
0.750	0.9967	0.0017	0.9963	0.0018	0.9969	0.0017

註：(1) LRT：概度比檢定。
(2) Wald：華德檢定。
(3) VST：變異穩定轉換檢定。

表 3.2 (b) $H_0 : \pi(\underline{x}) = 0.5$ **對** $H_a : \pi(\underline{x}) > 0.5$ **之檢定力**

ー樣本數 n=75**ー**

	LRT		**Wald**		**VST**	
$\pi(\underline{x})$	**Power**	**S.D.**	**Power**	**S.D.**	**Power**	**S.D.**
0.525	0.1226	0.0105	0.1163	0.0103	0.1253	0.0106
0.550	0.2477	0.0135	0.2389	0.0132	0.2515	0.0137
0.575	0.4250	0.0157	0.4154	0.0157	0.4294	0.0158
0.600	0.6240	0.0150	0.6154	0.0151	0.6277	0.0150
0.625	0.7971	0.0125	0.7912	0.0126	0.7996	0.0124
0.650	0.9132	0.0089	0.9100	0.0091	0.9145	0.0089
0.675	0.9717	0.0054	0.9703	0.0056	0.9722	0.0053
0.700	0.9933	0.0025	0.9929	0.0026	0.9935	0.0025
0.725	0.9989	0.0010	0.9989	0.0010	0.9990	0.0010
0.750	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003	0.9999	0.0003

註：(1) LRT**：概度比檢定。**

(2) Wald**：華德檢定。**

(3) VST**：變異穩定轉換檢定。**

第四章　實 例

本實例取自 Hosmer 和 Lemeshow (1989)合著之「Applied Logistic Regression」一書。使用的資料為 1986 年美國某醫院內科部所做的調查，其主要目的為針對新生嬰兒體重過輕(小於 2500 公克)的問題，研究其造成的因素。調查對象計有 189 名婦女，其中有 59 名婦女所生的嬰兒屬於體重過輕，其餘則為正常。

我們將原始資料整理後列於附錄表 A1。由於資料型態的關係，本研究僅討論三種可能的變因：(1)Race (2)Smoke (3)UI (Uterine Irritability)。其中因Race有三個類別，故以兩個虛擬變數(Race1,Race2)分別以(0,0)、(1,0)及(0,1)代表該三種分類。

針對迴歸係數之檢定問題，即$H_0:\beta_2=0$之檢定，利用牛頓-賴福森法求得之係數估計值列於附錄表 A2，其他之檢定統計量(K)及 p 值列於表 4.1。而對於反應機率之檢定問題，即$H_0:\pi(\underline{x})=\pi_0$之檢定，其檢定統計量($K^*$)及 p 值則列於表 4.2(a)~4.2(c)。

另外，我們亦將陳慎健(1998)及郭文達(2000)論文中對於本資料之概度比檢定結果列於附錄表 A3~A4(c)。經比較本論文及陳、郭二人之檢定結果後，我們可清楚的看到：針對本研究所提出之變異穩定轉

換的檢定法，其檢定結果與概度比檢定完全一致。

表 4.1　$H_0:\beta_2=0$ 對 $H_a:\beta_2\neq 0$ 之檢定結果
—變異穩定轉換—

x_1	x_2	K	p-value
Race(W)	**Smoke**	10.401	0.001*
Race(B)	**Smoke**	4.953	0.026*
Race(O)	**Smoke**	8.327	0.004*
Race(W)	**UI**	4.785	0.029*
Race(B)	**UI**	5.266	0.022*
Race(O)	**UI**	4.676	0.031*
Smoke	**Race(W)**	10.592	0.001*
Smoke	**Race(B)**	1.727	0.189
Smoke	**Race(O)**	5.088	0.024*
Smoke	**UI**	4.448	0.035*
UI	**Race(W)**	4.605	0.032*
UI	**Race(B)**	1.911	0.167
UI	**Race(O)**	1.439	0.230
UI	**Smoke**	4.360	0.037*

註：「*」表示小於顯著水準 0.05。

表 4.2 (a) $H_0: \pi(\underline{x}) = \pi_0$ 對 $H_a: \pi(\underline{x}) \neq \pi_0$ 之檢定結果

—變異穩定轉換—

Race1	Race2	Smoke	$\hat{\pi}$	π_0	K^*	p-value
0	**0**	**0**	0.134	**0.3**	11.073	0.001*
				0.2	2.191	0.139
				0.1	0.878	0.349
				0.05	7.663	0.006*
0	**0**	**1**	0.325	**0.5**	7.689	0.006*
				0.4	1.467	0.226
				0.3	0.178	0.673
				0.2	5.018	0.025*
1	**0**	**0**	0.318	**0.5**	3.193	0.074
				0.4	0.691	0.406
				0.3	0.036	0.850
				0.2	1.854	0.173
1	**0**	**1**	0.591	**0.8**	4.470	0.034*
				0.7	1.033	0.310
				0.6	0.006	0.939
				0.5	0.634	0.426
0	**1**	**0**	0.324	**0.5**	7.871	0.005*
				0.4	1.532	0.216
				0.3	0.165	0.685
				0.2	5.009	0.025*
0	**1**	**1**	0.598	**0.7**	1.210	0.271
				0.6	0.001	0.986
				0.5	1.028	0.311
				0.45	2.342	0.126

註：「*」表示小於顯著水準 0.05。

表 4.2 (b) $H_0:\pi(\underline{x})=\pi_0$ 對 $H_a:\pi(\underline{x})\neq\pi_0$ 之檢定結果

—變異穩定轉換—

Race1	**Race2**	**UI**	$\hat{\pi}$	π_0	$\mathbf{K}^*$	**p-value**
0	**0**	**0**	0.213	**0.4**	15.244	0.001*
				0.3	3.666	0.056
				0.2	0.088	0.766
				0.1	9.314	0.002*
0	**0**	**1**	0.412	**0.6**	3.253	0.071
				0.5	0.721	0.396
				0.4	0.014	0.907
				0.3	1.327	0.249
1	**0**	**0**	0.396	**0.5**	1.114	0.291
				0.4	0.002	0.968
				0.3	1.060	0.303
				0.2	4.957	0.026*
1	**0**	**1**	0.630	**0.8**	2.374	0.123
				0.7	0.329	0.566
				0.6	0.053	0.817
				0.5	0.938	0.333
0	**1**	**0**	0.332	**0.5**	7.235	0.007*
				0.4	1.244	0.265
				0.3	0.291	0.590
				0.2	5.712	0.017*
0	**1**	**1**	0.563	**0.7**	1.887	0.170
				0.6	0.127	0.721
				0.5	0.354	0.552
				0.4	2.370	0.124

註：「*」表示小於顯著水準 0.05。

表 4.2 (c)　$H_0:\pi(\underline{x})=\pi_0$ **對** $H_a:\pi(\underline{x})\neq\pi_0$ **之檢定結果**

—變異穩定轉換—

Smoke	**UI**	$\hat{\pi}$	π_0	**K***	**p-value**
0	**0**	0.227	**0.4**	15.358	0.001*
			0.3	3.031	0.082
			0.2	0.465	0.496
			0.1	13.671	0.001*
0	**1**	0.422	**0.6**	2.998	0.083
			0.5	0.578	0.447
			0.4	0.048	0.826
			0.3	1.595	0.207
1	**0**	0.366	**0.5**	4.910	0.027*
			0.4	0.326	0.568
			0.3	1.330	0.249
			0.2	9.465	0.002*
1	**1**	0.590	**0.7**	1.256	0.262
			0.6	0.009	0.923
			0.5	0.742	0.389
			0.4	3.281	0.070

註：「***」表示小於顯著水準** 0.05。

第五章　結論與建議

5.1 結論

在本研究中，針對反應變數具二項分佈之羅吉斯複迴歸模型的兩個假設檢定，即迴歸係數與反應機率之檢定問題，我們應用變異穩定轉換的方法導出了兩個檢定式。並利用 Hosmer 及 Lemeshow (1989)「Applied Logistic Regression」一書中的實例討論之。

針對$H_0:\beta_2=0$ vs. $H_a:\beta_2>0$之假設檢定，在樣本數相同的情況下，經比較第三章之檢定力模擬結果，我們可以發現：變異穩定轉換檢定式之檢定力雖略遜於概度比檢定；然相對於華德檢定，其檢定力則明顯較高。

而對於$H_0:\pi(\underline{x})=\pi_0$ vs. $H_a:\pi(\underline{x})>\pi_0$之假設檢定，在樣本數相同的情況下，我們亦可得知：變異穩定轉換檢定式之檢定力在三種檢定式中最高，概度比檢定次之，而華德檢定則較差。

另外，我們亦將本研究之變異穩定轉換檢定式應用於一實例，經比較陳慎健(1998)及郭文達(2000)論文之概度比檢定結果後，我們可清楚的看到：針對本論文所提出之檢定式，其檢定結果與概度比檢定完全一致。

5.2 建議

由於本研究的兩個檢定問題之概似方程式為非線性方程組，故我們需以牛頓-賴福森法求其參數估計值。於逼近最大概似函數之迭代過程中我們遇到之主要困難在於$\underline{\beta}$的起始點選取不易，不適當的起始值將使概似函數無法收斂到最大值。因此我們建議使用最小平方估計值為起始值，若樣本數夠大，則通常可得一收斂之近似值。

相對於其他檢定式，本研究所提出之變異穩定轉換檢定式解決了期望值與變異數相依(dependent)的問題。在樣本數相同的情況下，新檢定式之檢定力優於華德檢定，唯其參數估計值計算不易，在使用上仍不若華德檢定方便。

5.3 後續研究

在本研究的基本架構下，與概度比檢定概念相類似的檢定方法尚有 Score 檢定。此檢定乃是針對在虛無假設成立的情況下，利用其概似函數斜率變化的趨勢，做某些和概度比檢定類似的轉換。

另外，除了迴歸係數及反應機率之檢定問題，我們亦可針對勝算比(odds ratio)的檢定問題加以討論。勝算比通常用於討論自變數與反應變數間的相關性，例如探討第四章中 Smoke 和 Race 兩變數是否與

「初生嬰兒體重過輕」的發生原因有直接相關等問題。鑑於勝算比在回顧性(retrospective)研究中的重要性，日後可針對此檢定問題進一步探討。

附 錄

表 A1 **Risk Factors Associated with Infant Birth Weight**

Race	Smoke	n	y
1	0	44	4
1	1	52	19
2	0	16	5
2	1	10	6
3	0	55	20
3	1	12	5
Race	**UI**	**n**	**y**
1	0	83	18
1	1	13	5
2	0	23	9
2	1	3	2
3	0	55	18
3	1	12	7
Smoke	**UI**	**n**	**y**
0	0	100	22
0	1	15	7
1	0	61	23
1	1	13	7

註：(1) Race：1=White, 2=Black, 3=Other.

(2) Smoke：1=Yes, 0=No.

(3) UI (Uterine Irritability)：1=Yes, 0=No.

表 A2　**變異穩定轉換之係數估計**

－實例－

		$H_a:\beta_2 \neq 0$			$H_0:\beta_2 = 0$	
x_1	x_2	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\tilde{\beta}_0$	$\tilde{\beta}_1$
Race(W)	**Smoke**	-0.742	-1.119	1.130	-0.463	-0.785
Race(B)	**Smoke**	-1.179	0.585	0.714	-0.883	0.564
Race(O)	**Smoke**	-1.518	0.808	0.999	-1.000	0.481
Race(W)	**UI**	-0.618	-0.688	0.937	-0.464	-0.701
Race(B)	**UI**	-1.045	0.620	0.980	-0.884	0.574
Race(O)	**UI**	-1.090	0.396	0.920	-0.959	0.434
Smoke	**Race(W)**	-0.742	1.130	-1.119	-1.165	0.779
Smoke	**Race(B)**	-1.179	0.714	0.585	-1.089	0.704
Smoke	**Race(O)**	-1.518	0.999	0.808	-1.129	0.746
Smoke	**UI**	-1.227	0.679	0.913	-1.103	0.718
UI	**Race(W)**	-0.618	0.937	-0.688	-0.958	0.958
UI	**Race(B)**	-1.045	0.980	0.620	-0.951	0.953
UI	**Race(O)**	-1.090	0.920	0.396	-0.950	0.950
UI	**Smoke**	-1.227	0.913	0.679	-0.962	0.962

表 A3 $H_0:\beta_2=0$ **對** $H_a:\beta_2\neq 0$ **之概度比檢定**

－實例－

x_1	x_2	**D**	**p-value**
Race(W)	**Smoke**	9.880	0.002*
Race(B)	**Smoke**	4.948	0.026*
Race(O)	**Smoke**	8.095	0.004*
Race(W)	**UI**	4.844	0.028*
Race(B)	**UI**	5.363	0.021*
Race(O)	**UI**	4.745	0.029*
Smoke	**Race(W)**	9.827	0.002*
Smoke	**Race(B)**	1.734	0.188
Smoke	**Race(O)**	5.002	0.025*
Smoke	**UI**	4.594	0.032*
UI	**Race(W)**	4.582	0.032*
UI	**Race(B)**	1.940	0.164
UI	**Race(O)**	1.443	0.230
UI	**Smoke**	4.385	0.036*

註：(1) **「*****」表示小於顯著水準** 0.05**。**

(2) **節錄陳慎健**(1998)**之結果。**

表 A4 (a) $H_0 : \pi(\underline{x}) = \pi_0$ **對** $H_a : \pi(\underline{x}) \neq \pi_0$ **之概度比檢定**

－實例－

Race1	**Race2**	**Smoke**	$\hat{\pi}$	π_0	D^*	**p-value**
0	**0**	**0**	0.137	**0.3**	9.308	0.002*
				0.2	1.787	0.181
				0.1	0.962	0.327
				0.05	8.155	0.004*
0	**0**	**1**	0.326	**0.5**	7.564	0.006*
				0.4	1.427	0.232
				0.3	0.203	0.653
				0.2	5.513	0.019*
1	**0**	**0**	0.319	**0.5**	3.092	0.079
				0.4	0.655	0.419
				0.3	0.043	0.837
				0.2	1.952	0.162
1	**0**	**1**	0.589	**0.8**	4.679	0.031*
				0.7	1.083	0.298
				0.6	0.010	0.921
				0.5	0.597	0.440
0	**1**	**0**	0.325	**0.5**	7.867	0.005*
				0.4	1.525	0.217
				0.3	0.183	0.669
				0.2	5.512	0.019*
0	**1**	**1**	0.595	**0.7**	1.344	0.246
				0.6	0.003	0.957
				0.5	0.962	0.327
				0.45	2.240	0.134

註：(1)**「*****」表示小於顯著水準** 0.05**。**

(2) **節錄郭文達**(2000)**之結果。**

表 A4 (b)　$H_0 : \pi(\underline{x}) = \pi_0$ 對 $H_a : \pi(\underline{x}) \neq \pi_0$ 之概度比檢定

－實例－

Race1	Race2	UI	$\hat{\pi}$	π_0	D^*	p-value
0	**0**	**0**	0.213	**0.4**	14.498	0.001*
				0.3	3.557	0.059
				0.2	0.090	0.764
				0.1	10.324	0.001*
0	**0**	**1**	0.412	**0.6**	3.260	0.071
				0.5	0.715	0.398
				0.4	0.014	0.907
				0.3	1.331	0.249
1	**0**	**0**	0.396	**0.5**	1.106	0.293
				0.4	0.002	0.968
				0.3	1.075	0.300
				0.2	5.232	0.022*
1	**0**	**1**	0.630	**0.8**	2.380	0.123
				0.7	0.328	0.567
				0.6	0.053	0.818
				0.5	0.933	0.334
0	**1**	**0**	0.332	**0.5**	7.094	0.008*
				0.4	1.226	0.268
				0.3	0.292	0.589
				0.2	5.963	0.015*
0	**1**	**1**	0.563	**0.7**	1.899	0.168
				0.6	0.127	0.722
				0.5	0.352	0.553
				0.4	2.374	0.123

註：(1)「*」表示小於顯著水準 0.05。

(2) 節錄郭文達(2000)之結果。

表 A4 (c) $H_0:\pi(\underline{x})=\pi_0$ **對** $H_a:\pi(\underline{x})\neq\pi_0$ **之概度比檢定**
－實例－

Smoke	**UI**	$\hat{\pi}$	π_0	**D***	**p-value**
0	**0**	0.227	**0.4**	14.533	0.001*
			0.3	2.920	0.087
			0.2	0.470	0.493
			0.1	15.021	0.001*
0	**1**	0.422	**0.6**	3.055	0.080
			0.5	0.585	0.444
			0.4	0.049	0.825
			0.3	1.645	0.200
1	**0**	0.366	**0.5**	4.888	0.027*
			0.4	0.327	0.567
			0.3	1.360	0.244
			0.2	10.099	0.001*
1	**1**	0.590	**0.7**	1.296	0.255
			0.6	0.010	0.921
			0.5	0.749	0.387
			0.4	3.339	0.068

註：(1)「*」表示小於顯著水準 0.05。
(2) 節錄郭文達(2000)之結果。