東 海 大 學 應 用 數 學 研 究 所
碩 士 論 文

等位函數在計算流體力學之應用

On the Level Set Method and Its Application to Fluids Simulation

研 究 生：鄭 淑 燕

指 導 教 授：李 天 佑 博 士

中 華 民 國 九 十 三 年 六 月

中文摘要

等位函數法是用來處理不可壓縮二相流界面問題的數值方法，而等位函數法把這個界面定義為一個平滑函數的零等位面。由於等位函數為一平滑函數，為了維持等位函數的特性，將兩流體交界面維持在一微小寬度，密度與黏滯係數也會隨著等位函數而改變。 本篇論文主要以等位函數來處理不可壓縮二相流的界面變化，在求解三維Navier-Stokes方程式的部分，以有限差分法來處理。 由於為二相流，則必須考慮到密度、黏滯係數及雷諾數的的給定方式。數值實驗包括三維水波盪漾問題、液滴落地及落水等問題。

關鍵字：不可壓流；等位函數

英文摘要

A numerical method using the level set method for solving incompressible two-phase flow with moving interface is discussed in this thesis. The interface is identified as the zero level set of a smooth function. We maintain the level set function as a smooth distance function allowing us to give the interface a thickness fixed in time. Density and viscosity both depend on the level set function being a distance function. In this thesis, we compute incompressible air-water flows using the level set method and solve the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations by the finite difference method. In addition, we consider the density and viscosity. We used a long rectangular lake and a water drop to fall into the ground or fall to the water on three-dimensional as model to observe a change in the interface.

Key Words : incompressible flow; level set

本 文 目 錄

圖目錄

1 序論

二種以上不相溶之流體交互運動，其交界面之變化、移動之問題，簡稱為自由液面問題。此類問題常見於大自然， 較大的現象如河川侵蝕、水壩洩洪，較小的如水滴掉落、物體落入水中等。如何模擬界面之變化、移動為相當重要的課題之一。 在追蹤自由液面的方法上，先前大部分皆是以追蹤物件的輪廓為主，而追蹤邊界輪廓的方法事先在邊界上用人工方式標記，當邊界輪廓移動時， 這些記號點也隨之移動，藉由記號點的紀錄，來追蹤移動邊界，因此更多的記號點將更精確的紀錄邊界的移動現象。

而在1988年由 Osher 與 Sethian 提出一套求解自由液面流場的方法，亦即等位函數法(Level Set Method)[7]。此方法不必專注於移動邊界本身，便能 輕易解決邊界合併或破碎等拓樸性質改變的問題。而此方法的優點只需設定初始曲線函數，則此曲線函數便會依照速度函數大小自動演化。

此後對等位函數法開始有了熱烈的討論。在 1995 年由 David Adalsteinsson 及 Janes A. Sethian，提出了兩個處理計算域邊界值的方法[4]。此兩種方法的差別在於，處理邊界的方法不同，一是直接在邊界上給定值，二是邊界的值是由內部延伸至邊界的。

1996 年 Y.C.Chang、T.Y.Hou、B.Merriman、及 S.Osher，在文章[8]中，以討論在計算不可壓流時，利用等位函數法補抓界面的變化。並且使用二階投影法去解運動方程式。

本文主要在研究將等位函數引入Navier-Stokes方程式中，處理二相流的界面問題。主旨在於將兩種介質用統一的Navier-Stokes equation求解，透過等位函數法處理在界面兩側各自的密度及黏滯係數。在第二章不可壓縮流之計算與模擬的部分，是以交錯網格為架構，以差分方程為基礎，用來探討二維Navier-Stokes方程式在交錯網格上如何處理離散化。三維類此。 在第三章等位函數法，將介紹等位函數法，並說明等位函數之數值離散方法。第四章自由曲面問題之計算模式，是在求解不可壓縮二相流的Navier-Stokes方程式中， 引用等位函數法處理界面兩側的密度、黏滯係數及雷諾數的變化。第五章實例探討，則由物理及數值分析的觀點來探討水波盪漾、液滴落地或落水， 及水柱等三維實例，以了解整個流場的變化及物理特性。第六章結論，則是針對實例探討的結果進行歸納及建議。

2 不可壓流之計算與模擬

2.1 統御方程式

二維流體之不可壓流場之統御方程[1]如下：

連續方程式為：

$$u_x + v_y = 0 \tag{1}$$

動量方程式為：

$$u_t + (u^2)_x + (uv)_y = \frac{-p_x}{\rho} + \frac{u_{xx} + u_{yy}}{Re} + g_x \tag{2}$$

$$v_t + (uv)_x + (v^2)_y = \frac{-p_y}{\rho} + \frac{v_{xx} + v_{yy}}{Re} + g_y \tag{3}$$

上式中，ρ 為密度，μ 為黏滯係數，p 為壓力，u、v 分別是 x、y 方向的速度，g_x、g_y 為重力，Re 為雷諾數(Reynolds number)。

雷諾數(Reynolds number)用以表示流體黏滯性對流體流動的影響，即流體運動慣性力(inertial force)與黏性力(viscous force)之比值，可以下列表示：

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

V為平均流速，L為特性長度。

由動量方程式(2)和(3)中，可以將方程式分成下列幾個部分：

- 傳導項：$(u^2)_x + (uv)_y$ 和 $(uv)_x + (v^2)_y$
  $\Rightarrow$ 代表流體的傳導速度

- 壓力項：p_x 和 p_y $\Rightarrow$ 代表壓力的微分項

- 擴散項：$u_{xx}+u_{yy}$ 和 $v_{xx}+v_{yy}$ $\Rightarrow$ 代表擴散速度

- 外力項：g_x 和 g_y $\Rightarrow$ 代表外力部分(重力)

2.2 幾何空間之離散

在不可壓縮流之計算與模擬過程中，隨著格點的配置方法不同，方程式離散化的處理步驟也會有所不同。 在此採用的方法為交錯網格方法。交錯網格的排列方式是把方程式中的速度項放置在網格線上， 壓力項放置在網格正中央。在使用交錯網格時，會搭配有限差分方法使用。

有限差方法先從一個一維函數 $u(x)$ 來思考，一次微分項可以表示成下列式子：

$$
\begin{aligned}
u_x(x) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x) \\
&= \lim_{h_x \to 0} \frac{u(x+h_x) - u(x)}{h_x}
\end{aligned}
$$

這一維函數 $u(x)$ 在均勻格點上隨著格點距離 hx、格點數 n_cell，可以用

$$
h_x(i) = |x_{i+1} - x_i|, \quad i = 1, \cdots, n\_cell
$$

來表示每一個格點的點距，如下圖所示： 在此用 u_i 表示 $u_(x_i)$，

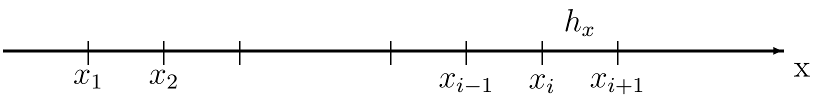

圖 1: 一維網格圖

以觀察 $u_{i-1}(x)$ 和 $u_{i+1}(x)$的泰勒展開式，

$$
u_{i+1} = u_i + h_x(u_x)_i + \frac{h_x^2}{2!}(u_{xx})_i + \frac{h_x^3}{3!}(u_{xxx})_i + \cdots, \tag{4}
$$

$$u_{i-1} \;=\; u_i - h_x(u_x)_i + \frac{h_x^2}{2!}(u_{xx})_i - \frac{h_x^3}{3!}(u_{xxx})_i + \cdots, \qquad (5)$$

由(4)及(5)兩式可以推出下列有限差分方程式

- 一階前進差分

$$(u_x)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_x} + \mathcal{O}(h_x)$$

- 一階後退差分

$$(u_x)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_x} + \mathcal{O}(h_x)$$

- 二階中央差分

$$(u_x)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h_x} + \mathcal{O}(h_x^2)$$

- 二階中央差分(二次微分)

$$(u_{xx})_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h_x^2} + \mathcal{O}(h_x^2)$$

在上式中 $\mathcal{O}(h_x)$ 和 (h_x^2) 是由泰勒展開式運算後所產生的誤差，隨著精準度的不同對題目計算結果的誤差會產生一定的影響。

如為交錯網格，如圖(1)在處理 $k \cdot \dfrac{du}{dx}$ 時，選擇的差分方式，當 k 是正數時就使用後退差分，當 k 是負數時就使用前進差分，如下所述：

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_i := \frac{(1+\epsilon)(u_i - u_{i-1}) + (1-\epsilon)(u_{i+1} - u_i)}{2\delta x} \quad \text{with} \;\; \epsilon := \mathrm{sign}(k)$$

此配合 k 為正負數的離散化方法稱為上風差分法，簡稱為上風法。在方程式離散過程中，採用比較折衷的方式來計算，混合上風法及中央差分法，方法如下：

$$\gamma \cdot \text{上風項} + (1-\gamma) \cdot \text{中央差分項} \qquad\qquad \gamma \in [0,1].$$

參數 γ 為選定值。

2.3 微分方程之離散

2.3.1 空間微分

有限差分法是交錯網格把每一個格點 (i,j) 的範圍定義在 $[(i-1)\delta x,\ i\delta x]\times[(j-1)\delta y,\ j\delta y]$，格點定義後， 再將每一點的壓力項 p 定義在格點中間，水平速度 u 定義在格點右邊的邊線中點上，垂直速度 v 定義在格點上方邊線的中點上。

連續方程式(1)被離散化在格點中心，其中 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 以有限差分法計算其格點中心之值，方法如下：

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{i,j} := \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{\delta x}, \qquad \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{i,j} := \frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{\delta y}$$

動量方程式(2)和(3)分別被離散化在格點的邊線中點上，其中 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$,和 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 以二階中央差分法求得。 對 x 動量方程式(2)：

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x}\right]_{i,j} &= \frac{1}{\delta x}\left(\left(\frac{u_{i,j}+u_{i+1,j}}{2}\right)^2-\left(\frac{u_{i-1,j}+u_{i,j}}{2}\right)^2\right)\\
&+ \gamma\frac{1}{\delta x}\left(\frac{|u_{i,j}+u_{i+1,j}|}{2}\frac{(u_{i,j}-u_{i+1,j})}{2}-\frac{|u_{i-1,j}+u_{i,j}|}{2}\frac{(u_{i-1,j}-u_{i,j})}{2}\right)\\
\left[\frac{\partial(uv)}{\partial y}\right]_{i,j} &= \frac{1}{\delta y}\left(\frac{(v_{i,j}+v_{i+1,j})}{2}\frac{(u_{i,j}+u_{i+1,j})}{2}-\frac{(v_{i,j-1}+v_{i+1,j-1})}{2}\frac{(u_{i,j-1}+u_{i,j})}{2}\right)\\
&+ \gamma\frac{1}{\delta y}\left(\frac{|v_{i,j}+v_{i+1,j}|}{2}\frac{(u_{i,j}-u_{i,j+1})}{2}-\frac{|v_{i,j-1}+v_{i+1,j-1}|}{2}\frac{(u_{i,j-1}-u_{i,j})}{2}\right)\\
\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{(\delta x)^2}\\
\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{i,j} &= \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{(\delta y)^2}\\
\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_{i,j} &= \frac{p_{i+1,j}-p_{i,j}}{\delta x}
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial(p_x/\rho)}{\partial x}\right]_{i,j} = \frac{(p_x/\rho)_{i+1,j}-(p_x/\rho)_{i,j}}{\delta x}$$

對 y 動量方程式(3)：

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x}\right]_{i,j} &= \frac{1}{\delta x}\left(\frac{(u_{i,j}+u_{i,j+1})}{2}\frac{(v_{i,j}+v_{i+1,j})}{2}-\frac{(u_{i-1,j}+u_{i-1,j+1})}{2}\frac{(v_{i-1,j}+v_{i,j})}{2}\right)\\
&+ \gamma\frac{1}{\delta x}\left(\frac{|u_{i,j}+u_{i,j+1}|}{2}\frac{(v_{i,j}-v_{i+1,j})}{2}-\frac{|u_{i-1,j}+u_{i-1,j+1}|}{2}\frac{(v_{i-1,j}-v_{i,j})}{2}\right)\\
\left[\frac{\partial(v^2)}{\partial y}\right]_{i,j} &= \frac{1}{\delta y}\left(\left(\frac{v_{i,j}+v_{i,j+1}}{2}\right)^2-\left(\frac{v_{i,j-1}+v_{i,j}}{2}\right)^2\right)\\
&+ \gamma\frac{1}{\delta y}\left(\frac{|v_{i,j}+v_{i,j+1}|}{2}\frac{(v_{i,j}-v_{i,j+1})}{2}-\frac{|v_{i,j-1}+v_{i,j}|}{2}\frac{(v_{i,j-1}-v_{i,j})}{2}\right)\\
\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]_{i,j} &= \frac{v_{i+1,j}-2v_{i,j}+v_{i-1,j}}{(\delta x)^2}\\
\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]_{i,j} &= \frac{v_{i,j+1}-2v_{i,j}+v_{i,j-1}}{(\delta y)^2}\\
\left[\frac{\partial p}{\partial y}\right]_{i,j} &= \frac{p_{i,j+1}-p_{i,j}}{\delta y}\\
\left[\frac{\partial(p_y/\rho)}{\partial y}\right]_{i,j} &= \frac{(p_y/\rho)_{i+1,j}-(p_y/\rho)_{i,j}}{\delta y}
\end{aligned}$$

2.3.2 時間微分

時間上的離散化如 $\frac{\delta u}{\delta t}$ 和 $\frac{\delta v}{\delta t}$，首先將所有的時間 $([0,\ t_{end}])$ 細分成 n 段相等的時間 $[n\delta t,\ (n+1)\delta t]$，$n = 0,\cdots,\frac{t_{end}}{\delta t}-1$ ，接著使用一階差分將 $\frac{\delta u}{\delta t}$ 和 $\frac{\delta v}{\delta t}$ 表示如下：

$$\left[\frac{\delta u}{\delta t}\right]^{n+1} := \frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t},\qquad \left[\frac{\delta v}{\delta t}\right]^{n+1} := \frac{v^{n+1}-v^n}{\delta t} \tag{6}$$

2.4 離散系統之代數解法

2.4.1 離散過程

利用有限差分方法將動量方程式(2)和(3)離散化[1] ，經由初始值 u 和 v 的給定，則可以對 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ 做時間上的離散，導出方程式：

$$
\begin{aligned}
u^{(n+1)} &= u^{(n)} + \delta t\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial(u^2)}{\partial x}-\frac{\partial(uv)}{\partial y}+g_x\right]-\delta t\cdot\frac{p_x}{\rho} \\
v^{(n+1)} &= v^{(n)} + \delta t\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial(uv)}{\partial x}-\frac{\partial(v^2)}{\partial y}+g_y\right]-\delta t\cdot\frac{p_y}{\rho}
\end{aligned}
$$

定義F和G，並且定義F和G屬於時間第 n 步，壓力 p 定義在時間的第 n+1 步，如下：

$$
\begin{aligned}
F^{(n)} &= u^{(n)} + \delta t\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial(u^2)}{\partial x}-\frac{\partial(uv)}{\partial y}+g_x\right] \\
G^{(n)} &= v^{(n)} + \delta t\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial(uv)}{\partial x}-\frac{\partial(v^2)}{\partial y}+g_y\right]
\end{aligned}
$$

則可將F和G代回原式

$$u^{(n+1)} = F^{(n)} - \delta t\cdot\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x}\cdot\frac{1}{\rho} \tag{7}$$

$$v^{(n+1)} = G^{(n)} - \delta t\cdot\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y}\cdot\frac{1}{\rho} \tag{8}$$

將(7)及(8)兩式分別對 x、y 做偏微分後相加，並且將連續方程式(1)的關係式代入，則可得到以下式子：

$$0 = \frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial x}+\frac{\partial v^{(n+1)}}{\partial y}$$

[1]離散過程參考自[1]

$$= \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial y} - \delta t \cdot \frac{\partial(\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x} \cdot \frac{1}{\rho})}{\partial x} - \delta t \cdot \frac{\partial(\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y} \cdot \frac{1}{\rho})}{\partial y}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial(\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial x} \cdot \frac{1}{\rho})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial p^{(n+1)}}{\partial y} \cdot \frac{1}{\rho})}{\partial y} = \frac{1}{\delta t}\left(\frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial G^{(n)}}{\partial y}\right) \quad (9)$$

利用式子(9)算出在時間第 n+1 步的壓力 p 後，再代回(7)及(8)式子，計算出新的速度向量 u、v。

2.5 時步選擇

為了避免數值解產生震盪現象並確保數值模型的穩定性，δx、δy 和 δt 必須滿足穩定條件如下：

$$\frac{2\delta t}{Re} < (\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2})^{-1}, \quad |u_{max}|\delta t < \delta x, \quad |v_{max}|\delta t < \delta y. \tag{10}$$

$|u_{max}|$ 和 $|v_{max}|$ 代表的是整個速度 u、v 中絕對值的最大項。δt 控制方法如下：

$$\delta t := \tau \min\left(\frac{Re}{2}(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2})^{-1}, \quad \frac{\delta x}{u_{max}}, \quad \frac{\delta y}{v_{max}}\right)$$

其中$\tau \in [0,\ 1]$ 為安定因子。

2.6 本章演算法總結

1) 給定 $t := 0, n := 0$

2) 給定 u, v, p 的初始值

3) 當 $t < t_{end}$

4) 　　選擇 δt

5) 　　設定 u 和 v 的邊界條件

6) 　　計算 $F^{(n)}$ 和 $G^{(n)}$ 之值

7) 　　計算 $p_{xx} + p_{yy}$ 之值

8) 　　　　當 $it < it_{max}$ 且 $\| r^{it} \| > tol$

9) 　　　　當 $it < it_{max}$ 且 $p_{new} - p_{old} > tol$

10) 　　　　利用迭代法解出 p 之值

11) 　　　　計算壓力方程式中的 $\| r^{it} \|$

12) 　　$it := it + 1$

13) 　　計算 $u^{(n+1)}$ 和 $v^{(n+1)}$ 之值

14) 　　$t := t + \delta t$

15) 　　$n := n + 1$

3 等位函數法

等位函數法(Level Set Method) 是以曲線演化技術為主，以解微分方程為基礎，不同於以往相關研究的質點追蹤法。 不在意移動邊界本身，只需注意移動曲面和曲面方程式之間的關聯性，進而追蹤觀察。 當利用等位函數法追蹤邊界變化時，最主要的優點是只需要最初設定初始曲線， 曲線便會依照速度函數的大小自動變化，因此使用上並不複雜。

等位函數法(Level Set Method) 最早是由S. J. Osher 和 J. A. Sethian 於1988年所提出的，它是一種研究曲面變化的方法。圖(2)為二維平面圖形， 圖(3)中，Z軸為等位函數，與原二維平面形成三維立體座標系統，這就是等位函數法的主要論點。亦可將原來追蹤邊界的問題由N 維空間轉換到N+1維空間來處理。

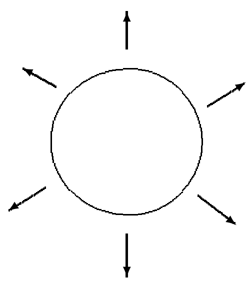

圖 2: 圓$x^2 + y^2 = 1$的二維平面圖

欲追蹤的邊界輪廓以等位函數 來表示。當 ϕ=0 時，則所形成的輪廓， 如圖(3)所表示的，稱為零等位集(Zero Level Set)。而等零位集合即是我們欲追蹤的邊界輪廓，所以我們可以對等位函數

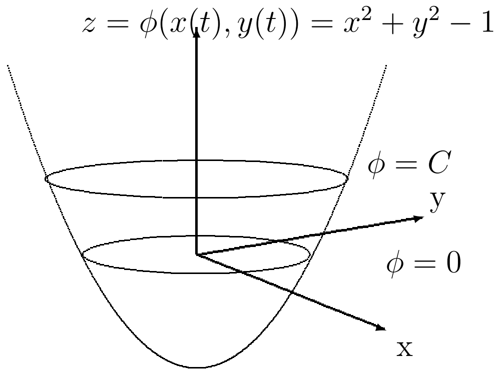

圖 3: 圓的等位函數圖

作各種數值運算， 最後只要將其值設為0，所解出的(x,y)座標即為移動後所要求得的邊界輪廓。

為了確定界面的位置，定義 ϕ 為某空間點到界面方向的垂直距離。 ϕ之正負號取決於所在之流體。在分界面上$\phi = 0$，通過數學證明可得出 滿足以下的運動方程式[2]。

$$\phi_t + (\vec{U} \cdot \bigtriangledown)\phi = 0 \tag{11}$$

[2]參考自書[2]及書[3]

3.1 隱函數與等位集

在一維空間中，將數線用點 $x = -1$ 和 $x = 1$ 分成三個部分 $(-\infty, -1)$，$(-1, 1)$ 和 $(1, \infty)$， 則可定義 $\Omega^+ = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ 為外部部份， $\Omega^- = (-1, 1)$ 為內部部份，$\partial\Omega = -1, 1$ 為界面部分。例如，$\phi(x) = x^2 - 1$ 的零等位，用 $\phi(x) = 0$ 代表所以的點集合。 也就是 $\partial\Omega = \{-1, 1\} = \{x|\phi(x) = 0\}$ 。如圖(4)。 在這個例子中，隱函數 $\phi(x)$ 定義在二維空間，則其代表界面的等位函數會定在一維空間。

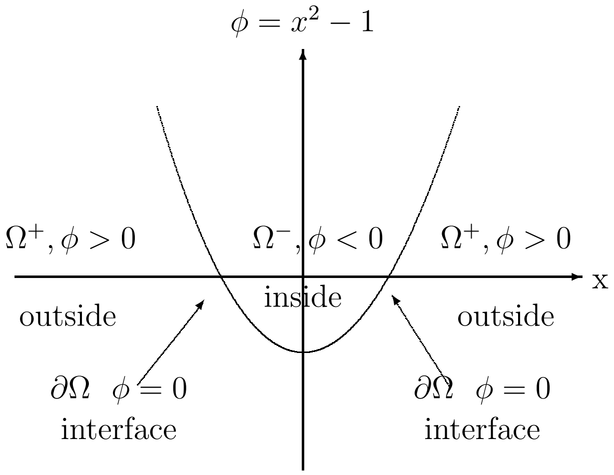

圖 4: $\phi(x) = x^2 - 1$ 的 Ω^+、Ω^- 的區域及邊界 $\partial\Omega$

當代表界面的等位集是一個曲線時，則它會將空間分成兩個子空間。用一個例子來說明， 隱函數 $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 - 1$，$\vec{x} = (x, y)$，$\phi(\vec{x}) = 0$ 為一個單位圓。則可定義單位圓的輪廓 $\partial\Omega = \{\vec{x}|\ |\vec{x}| = 1\}$ 為界面， 單位圓的內部區域為 $\Omega^- = \{\vec{x}|\ |\vec{x}| < 1\}$，

單位圓的外部區域為 $\Omega^+ = \{\vec{x}|\ |\vec{x}| > 1\}$。區域的表示圖，如圖(5)。

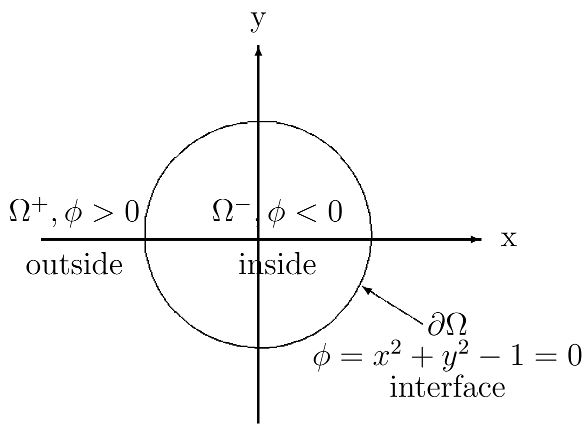

圖 5: 曲線$\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 - 1$ 的等位集

當代表界面的等位集是一個曲面時，則它也會將空間分成兩個子空間。同樣用例子來說明， 隱函數 $\phi(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$，$\vec{x} = (x, y, z)$，$\phi(\vec{x}) = 0$ 為一個單位球。則可定義單位球的輪廓 $\partial\Omega = \{\vec{x}|\ |\vec{x}| = 1\}$ 為界面，而 單位球的內部區域為 $\Omega^- = \{\vec{x}|\ |\vec{x}| < 1\}$， 單位球的外部區域為 $\Omega^+ = \{\vec{x}|\ |\vec{x}| > 1\}$。

因此，在一般性情況下，隱函數 $\phi(\vec{x})\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ，則其等位線(界面)的維度為 $n - 1$ 維。

3.2 賦向距離函數

在上一節，已定義隱函數在內部區域Ω^- 時 $\phi(\vec{x}) \leq 0$，在外部區域Ω^+ 時 $\phi(\vec{x}) > 0$，以及在邊界上$\partial\Omega$ 時 $\phi(\vec{x}) = 0$。 在這一節主要是介紹賦向函數與隱函數之間的關係。賦向函數為隱函數的一個子集合，賦向函數除了與隱函數一樣在外部區域取正，在內部區域取負，及在邊界上取零值之外。 另外，再多加一個條件 $|\nabla\phi(\vec{x})| = 1$ 。

3.2.1 距離函數

首先，定義距離函數 $d(\vec{x})$

$$d(\vec{x}) = \min(|\vec{x} - \vec{x}_I|) \qquad \forall \vec{x}_I \in \partial\Omega \tag{12}$$

當在邊界上 $\vec{x} \in \partial\Omega$ 時，則 $d(\vec{x}) = 0$。以一般性來討論，如果 $\vec{x} \in \partial\Omega$，則 $d(\vec{x}) = 0$。

3.2.2 賦向距離

隱函數 ϕ 為一距離函數，對於所有的 $\vec{x}$，$|\phi(\vec{x})| = d(\vec{x})$ 。因此，

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \vec{x} \in \partial\Omega \\ d(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \Omega^+ \\ -d(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \Omega^- \end{cases}$$

此外，賦向函數也具備下列的性質

$$|\nabla\phi| = 1 \tag{13}$$

3.3 Hamilton-Jacobi Equations

3.3.1 傳導項

令 $\vec{V}(\vec{x})$ 為界面 $\phi(\vec{x}) = 0$ 上的速度。利用解微分方程式(ODE)，求 $\vec{V}(\vec{x})$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{V}(\vec{x}) \tag{14}$$

所有的 $\vec{x}$ 在界面上，也就是說，$\phi(\vec{x}) = 0$。 則式子(14)稱為界面運動方程式的Lagrangian formulation。

3.3.2 上風法

利用離散方法計算每一個格點下一個時間步的 ϕ 值

當 $u_i > 0$

$$D^- = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\triangle x} \tag{15}$$

當 $u_i < 0$

$$D^+ = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\triangle x} \tag{16}$$

3.3.3 界面之運動方程

令 $\phi(t = 0, x)$，其中 $x \in \mathbb{R}^N$ 被定義為

$$\phi(t = 0, x) = \pm d \tag{17}$$

其中 d 為一距離函數，由 x 到 $\Gamma(t=0)=\{x|\phi(t=0,x)=0\}$.
以下為方程式的推導：

$$\phi(t,x(t))=0 \tag{18}$$

(1) $x(t=0)$ 表示 $\Gamma(t=0)$ 上的點。

(2) $x_t\cdot\vec{n}=\vec{V}(x(t))$

由連鎖律

$$\begin{aligned}
0 &= \phi(t,x(t)) \\
0 &= \phi_t+\nabla\phi(t,x(t))\cdot x^{'}(t) \\
&= \phi_t+\nabla\phi\cdot x^{'}(t) \\
&= \phi_t+\nabla\phi\cdot\vec{V} \\
&= \phi_t+\nabla\phi\cdot(V_n(\vec{N})+V_t(\vec{T})) \\
&= \phi_t+\nabla\phi\cdot V_n\vec{N} \\
&= \phi_t+|\nabla\phi|\cdot V_n
\end{aligned}$$

其中： $\vec{N}\cdot\nabla\phi=\dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\cdot\nabla\phi=\dfrac{|\nabla\phi|^2}{|\nabla\phi|}=|\nabla\phi|$

$$\begin{aligned}
\phi_t+(\overrightarrow{U}\cdot\bigtriangledown)\phi &= 0 \\
\frac{\phi_{n+1}-\phi_n}{\Delta t} &= -(u\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}) \\
\phi_{n+1} &= \phi_n-\Delta t(u\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y})
\end{aligned}$$

3.4 重距離化

在此速度場的定義為 $\vec{V} = a\vec{N}$ 或 $V_n = a$，其中 a 為一常數。等位函數方程式的表示法為

$$\phi_t + a|\nabla\phi| = 0 \tag{19}$$

其中 a 有正負號個別的意義。當 $a > 0$，則表示界面朝垂直(法線)方向移動，而當 $a < 0$ 則表示界面朝反垂直(法線)方向移動。當 $a = 0$ ，則等位函數方程式變成 $\phi_t = 0$，則 ϕ 在任何時間下皆為常數。

當 ϕ 為賦向函數及距離函數時，則方程式(19)會變成 $\phi_t = -a$，ϕ 的值決定於 a 的正負符號。

用數值方法解 $|\nabla\phi| = f(\vec{x})$，$f$ 為代表影像強度的變化函數。通常$f(\vec{x}) = 1$， 則ϕ 的解為一賦向距離函數。而在式子(19)的等號右邊增加 $f(\vec{x})$ 這一項，則得到

$$\phi_t + |\nabla\phi| = f(\vec{x}) \tag{20}$$

其演進過程達到穩定狀態下停止。當ϕ 的值停止改變，也就是 $\phi_t = 0$ 時，則表示達到穩定狀態($steady\ state$)。 此時式子(20)會變為 $|\nabla\phi| = f(\vec{x})$。 式子(20)以垂直(法線)方向輸送，而輸送的方向由 ϕ 之值小的到 ϕ 值大的。

重距離化方程式為

$$\phi_t + S(\phi_0)(|\nabla\phi| - 1) = 0 \tag{21}$$

其中 $S(\phi_0)$ 為一賦向函數，在 Ω^+ 時其值為1，在 Ω^-時其值為-1，而在界面上時其值為0， 因此當 ϕ 穩定時其值會保持為0。

在方程式(21)，其中 $S(\phi_0)|\nabla\phi|$ 這一項由數值分析說明，其朝垂直方向移動。 其數值近似

$$\phi_t + S(\phi_0)(|\nabla\phi| - 1) = 0$$

$$\phi_t = S(\phi_0)(1 - |\nabla\phi|)$$

$S(\phi_0)$ 是一個賦向函數

$$S(\phi_0) = \begin{cases} 1 & \Omega^+ \\ 0 & interface \\ -1 & \Omega^- \end{cases}$$

$$S(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + (\triangle x)^2}} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \phi_{n+1} &= \phi_n + \triangle t\, [\ \ S(\phi)(1 - |\nabla\phi|)\ \ ] \\ &= \phi_n + \triangle t\, [\ \ S(\phi) - S(\phi)|\nabla\phi|\ \ ] \end{aligned}$$

其中

$$|\nabla\phi| = \sqrt{(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2dx})^2 + (\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2dx})^2}$$

4 自由曲面問題之計算模式

在利用等位函數 ϕ 來追蹤水與空氣的交界面時，則必須注意界面上所產生的變化， 例如界面上的密度ρ、黏滯係數μ、及雷諾數Re等。

4.1 密度、黏滯係數及雷諾數

- 密度及黏滯係數

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi > 0 \\ \dfrac{\rho_a}{\rho_w} & \text{if } \phi < 0 \\ \dfrac{\rho_a + \rho_w}{2\rho_w} & \text{if } \phi = 0 \end{cases}$$

$$\mu = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi > 0 \\ \dfrac{\mu_a}{\mu_w} & \text{if } \phi < 0 \\ \dfrac{\mu_a + \mu_w}{2\mu_w} & \text{if } \phi = 0 \end{cases}$$

在流體界面處易發生數值不穩定現象，以$\rho_a/\rho_w \ll 1$ 時之情況為嚴重。 因此以下列式子來解決此一問題。

$$\begin{aligned} \rho(\phi) &= H(\phi) + (\rho_a/\rho_w)(1 - H(\phi)) \\ \mu(\phi) &= H(\phi) + (\mu_a/\mu_w)(1 - H(\phi)) \end{aligned}$$

其中$H(\phi)$ 為一維平滑化之 Heaviside function ，

$$H(\phi)=\begin{cases}0 & \text{if } \phi < -\varepsilon\\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{\phi}{\varepsilon}+\frac{1}{\pi}\sin(\frac{\pi\phi}{\varepsilon})\right) & \text{if } |\phi| \leq \varepsilon\\ 1 & \text{if } \phi > \varepsilon\end{cases}$$

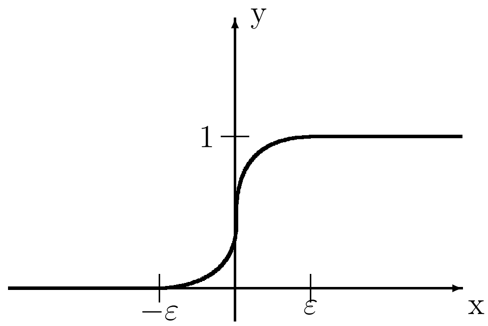

圖 6: Smoothed Heaviside function

因此密度及黏滯係數可改寫為

$$\rho(\phi)=\begin{cases}1 & \text{if } \phi > \varepsilon\\ \frac{\rho_a}{\rho_w} & \text{if } \phi < -\varepsilon\\ H(\phi)+(1-H(\phi))\cdot\frac{\rho_a}{\rho_w} & \text{if } |\phi| \leq \varepsilon\end{cases}$$

$$\mu(\phi)=\begin{cases}1 & \text{if } \phi > \varepsilon\\ \frac{\mu_a}{\mu_w} & \text{if } \phi < -\varepsilon\\ H(\phi)+(1-H(\phi))\cdot\frac{\mu_a}{\mu_w} & \text{if } |\phi| \leq \varepsilon\end{cases}$$

式子中的 ε 選取經驗為 1.5~3.0 倍的最小格點長度。

- 雷諾數Re的定義為

$$Re=\frac{\rho LU}{\mu}$$

足標“a”表示空氣，足標“w”表示水，則空氣及水的雷諾數分別為

$$Re_w = \frac{\rho_w LU}{\mu_w}, \quad Re_a = \frac{\rho_a LU}{\mu_a}$$

將兩者流體之雷諾數一般化

$$\begin{aligned} Re_a &= \frac{\rho_a LU}{\mu_a} \\ &= \frac{\frac{\rho_a}{\rho_w} \times \rho_w LU}{\frac{\mu_a}{\mu_w} \times \mu_w} = \frac{\frac{\rho_a}{\rho_w}}{\frac{\mu_a}{\mu_w}} \times \frac{\rho_w LU}{\mu_w} \\ &= \frac{\frac{\rho_a}{\rho_w}}{\frac{\mu_a}{\mu_w}} \times Re_w \end{aligned}$$

因此 $$Re_a = \frac{\rho(\phi)}{\mu(\phi)} \times Re_w$$

隨著界面條件的改變，則統御方程式(Navier-Stokes Equation)可寫成

$$u_x + v_y = 0 \tag{23}$$

$$u_t + (u^2)_x + (uv)_y = \frac{-P_x}{\rho(\phi)} + \frac{\mu(\phi)}{\rho(\phi)} \cdot \frac{u_{xx} + u_{yy}}{Re} + g_x \tag{24}$$

$$v_t + (uv)_x + (v^2)_y = \frac{-P_y}{\rho(\phi)} + \frac{\mu(\phi)}{\rho(\phi)} \cdot \frac{v_{xx} + v_{yy}}{Re} + g_y \tag{25}$$

4.2 演算法總結

1) 給定 $t := 0, n := 0$

2) 給定 u, v, p 的初始值

3) 給定 ϕ 的初始值ϕ_0

4) 當 $t < t_{end}$

5) 選擇 δt

6) 計算 $\rho(\phi)$、$\mu(\phi)$ 及 Re

7) 設定 u 和 v 的邊界條件

8) 計算 $F^{(n)}$ 和 $G^{(n)}$ 之值

9) 計算 $\frac{\partial(p_x/\rho)}{\partial x} + \frac{\partial(p_y/\rho)}{\partial y}$ 之值

10) 當 $it < it_{max}$ 且 $\| r^{it} \| > tol$

11) 當 $it < it_{max}$ 且 $p_{new} - p_{old} > tol$

12) 利用迭代法解出 p 之值

13) 計算壓力方程式中的 $\| r^{it} \|$

14) $it := it + 1$

15) 計算 $u^{(n+1)}$ 和 $v^{(n+1)}$ 之值

16) 重距離化計算新的 ϕ

17) $t := t + \delta t$

18) $n := n + 1$

5 數值模擬實例探討

5.1 水波盪漾流場

在此以一矩形水槽來觀察其液面的變化，給定水槽長寬高，計算域在無因次化後長為1.0單位長度，寬為1.0單位長度，高為1.0單位長度， 流體靜水深以0.5為基準，設定液面在水槽四個角的高度，西南角的高度為0.4，東南角的高度為0.6，西北角的高度為0.4，東北角的高度為0.6。 在計算上網格取$10 \times 10 \times 10$，固定時距為0.02，空氣與水的密度比為0.001，空氣與水的黏滯係數比為0.01，雷諾數為1000，福祿數[3]為0.8。 在離散方法上，利用SOR方法迭代，線性迭代次數為80次。在處理界面平滑化方面，Heaviside function 式子中的 ε 選取 規則為 1.5∼3.0 倍的最小格點長度。在此計算模擬程式中，以 2.0 倍為主。計算模擬的結果可由圖(8)∼圖(12)看出速度(U、V、W)，壓力P，及divergence的收斂及穩定性都很不錯。

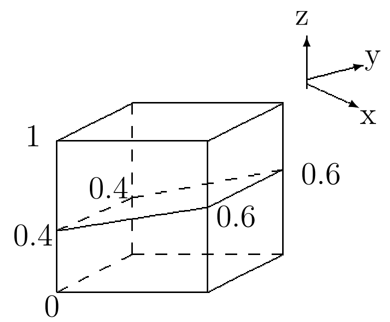

圖 7: 水槽中液面高度的示意圖

[3]福祿數Fr(Froude number)以表示重力對流體之影響， 即流體運動慣性力與重力之比值，可以 $Fr = \dfrac{V}{\sqrt{gL}}$ 表示，式子中 g 為重力加速度，L 為特性長度。

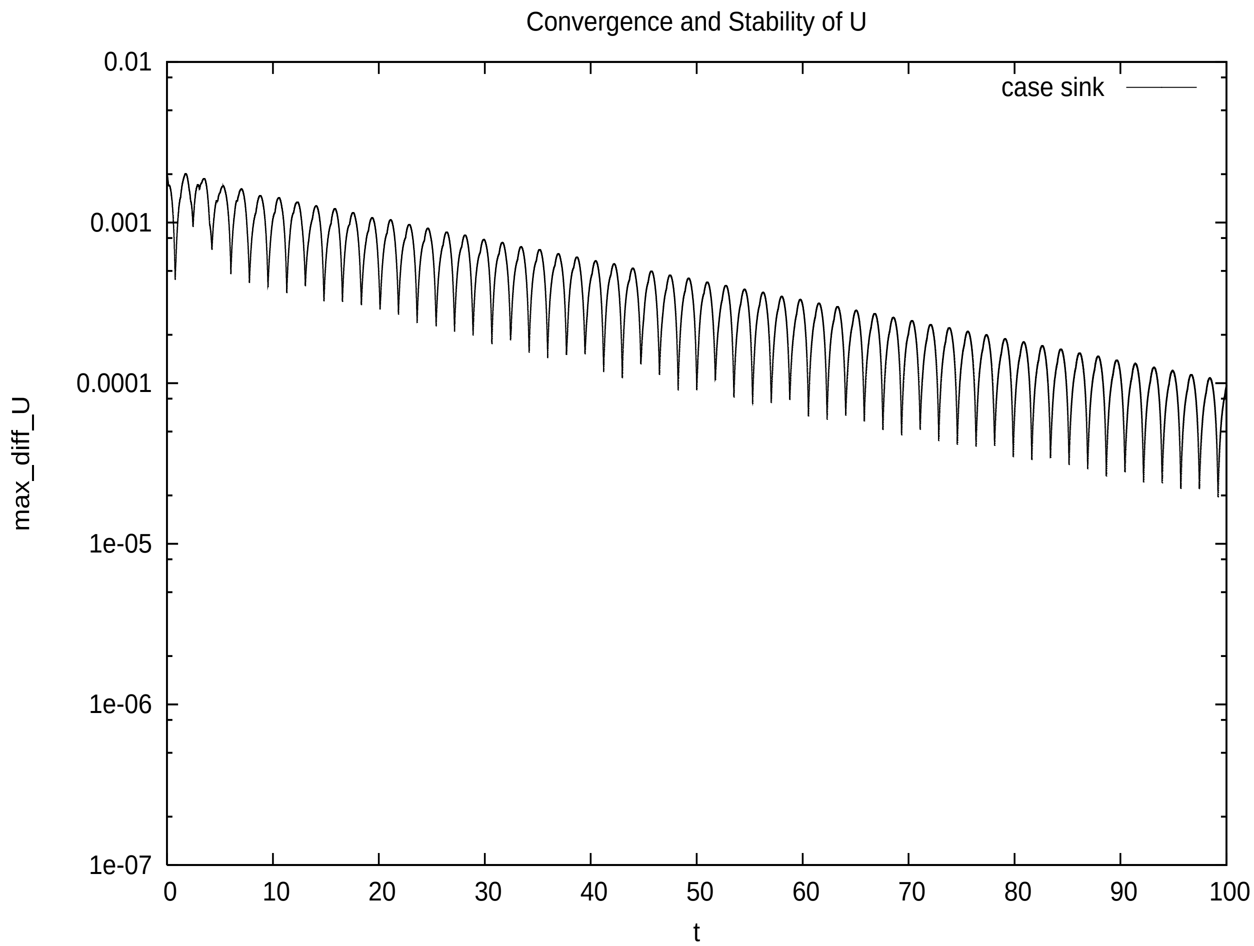
Convergence and Stability of U
case sink
max_diff_U
t
0.01
0.001
0.0001
1e-05
1e-06
1e-07
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

圖 8: U 的收斂及穩定性

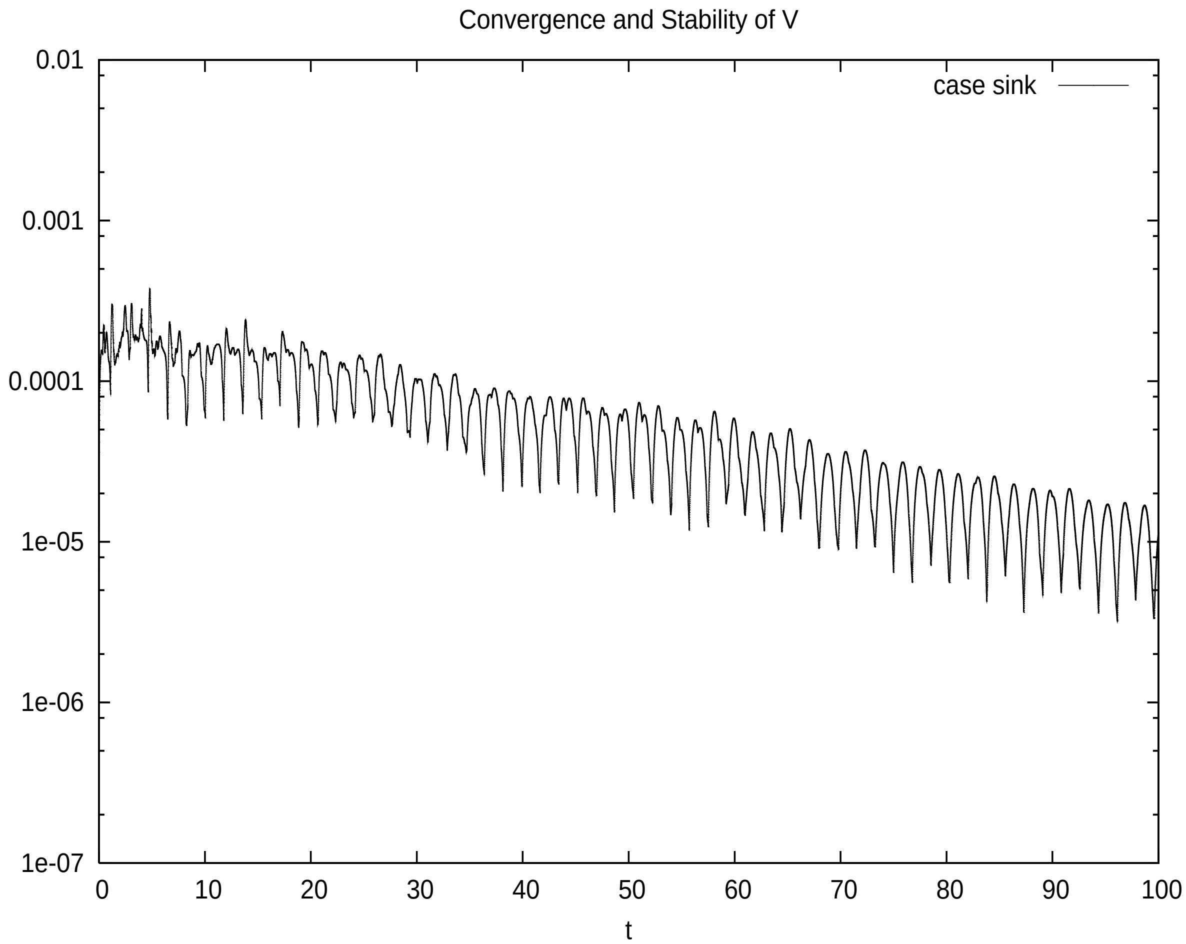
Convergence and Stability of V
case sink
max_diff_V
t
0.01
0.001
0.0001
1e-05
1e-06
1e-07
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

圖 9: V 的收斂及穩定性

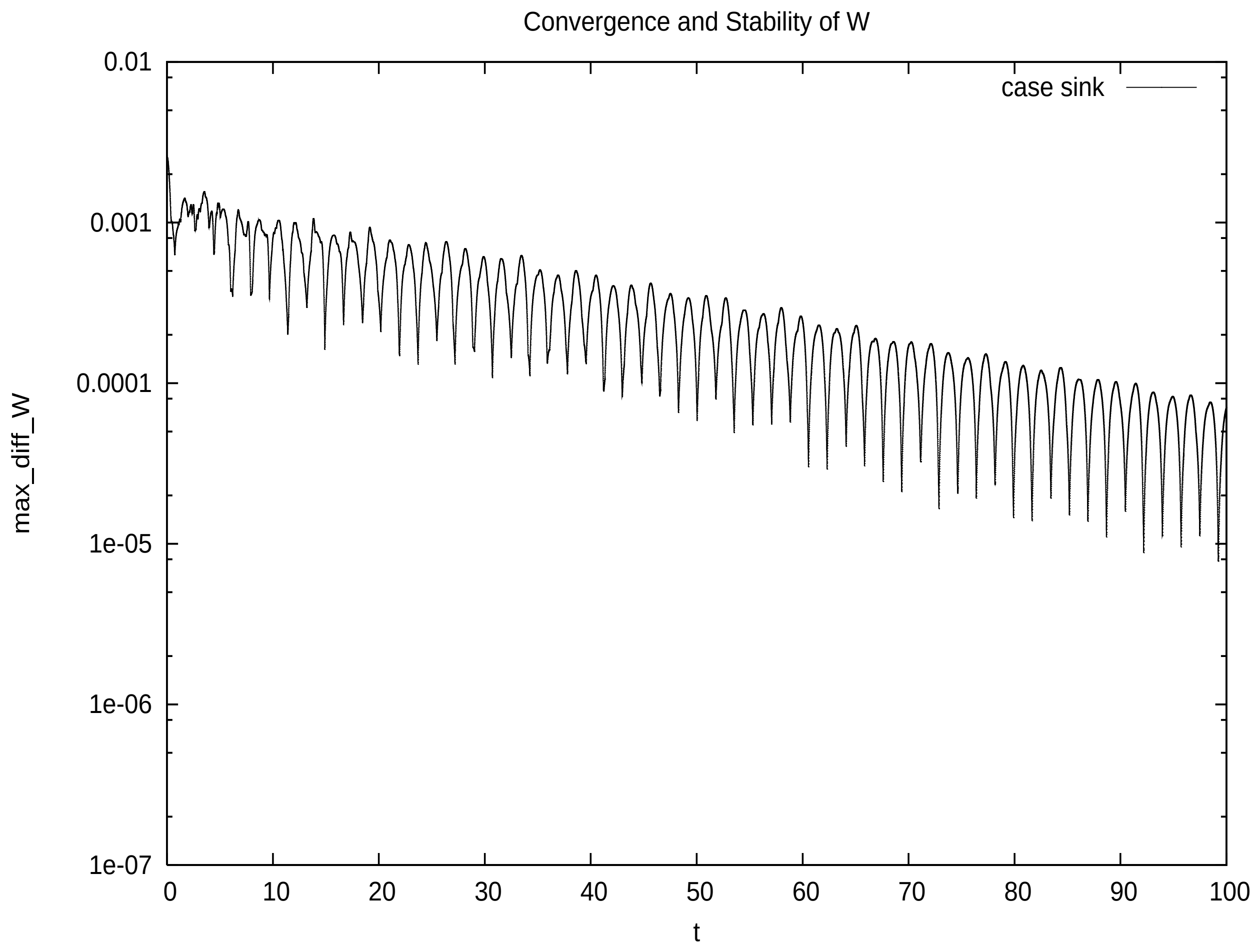

圖 10: W 的收斂及穩定性

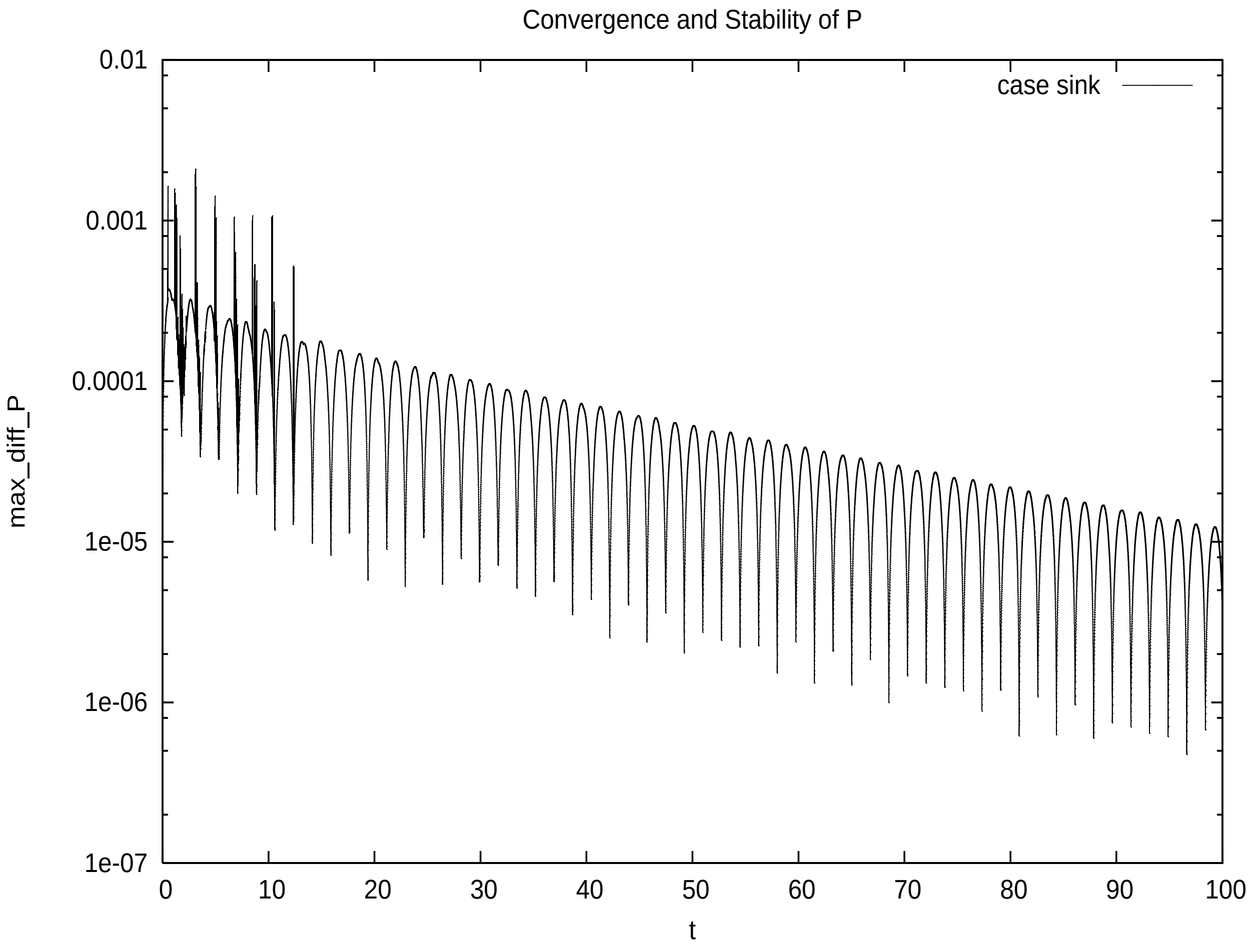

圖 11: P 的收斂及穩定性

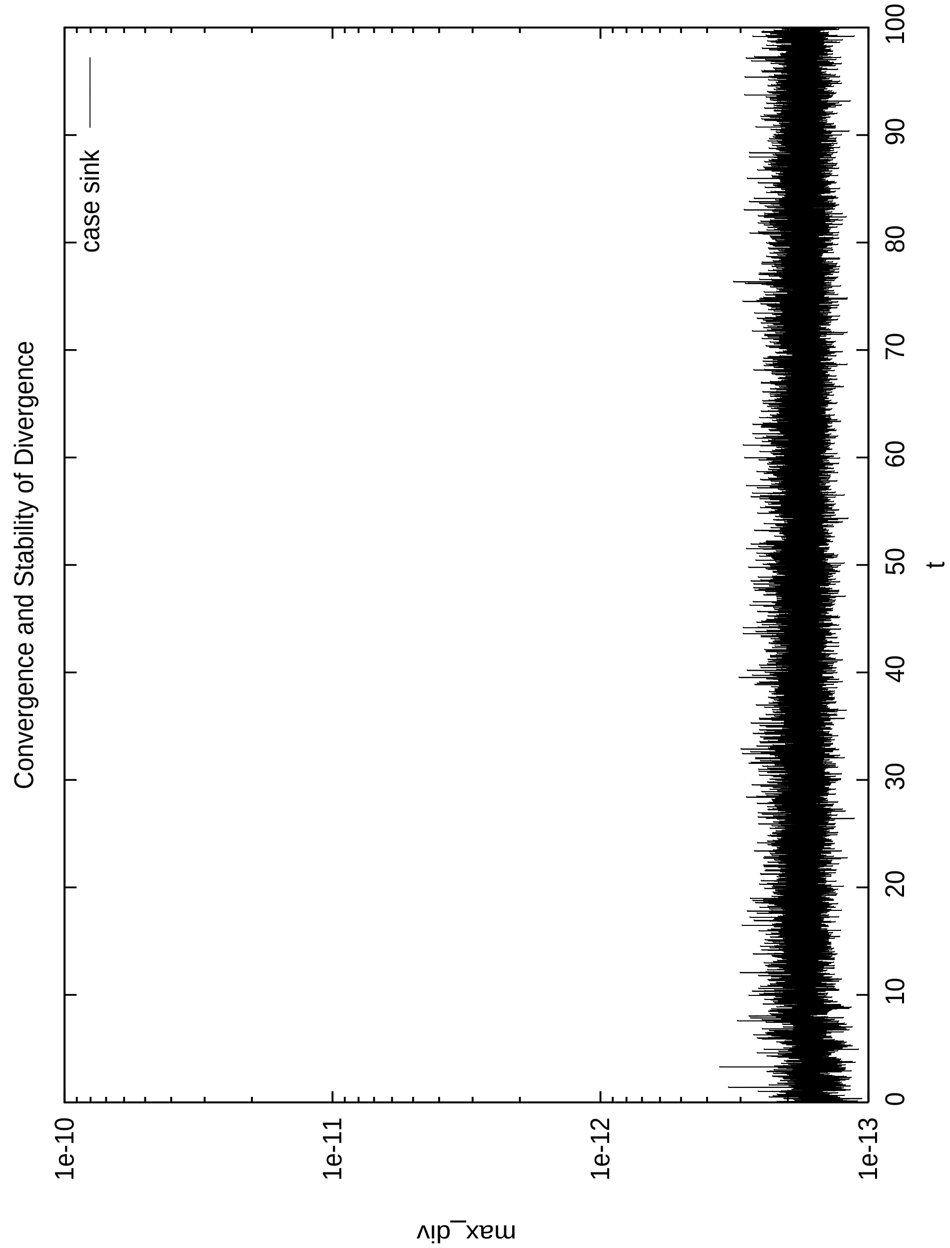

圖 12: div 的收斂及穩定性

5.2 水柱流場

計算域在無因次化後長為1.0單位長度，寬為1.0單位長度，高為1.0單位長度，在計算上網格數取 $40 \times 40 \times 40$。流體在於計算域內部，長位於 0.4~0.575 單位長度、寬位於 0.4~0.575 單位長度、高位於 0.725 單位長度的水柱。 在方程式的變數設定上，空氣與水的密度比為0.001，空氣與水的黏滯係數比為0.01，雷諾數為 1000，福祿數為 0.8。 在離散方法上，利用SOR方法迭代。

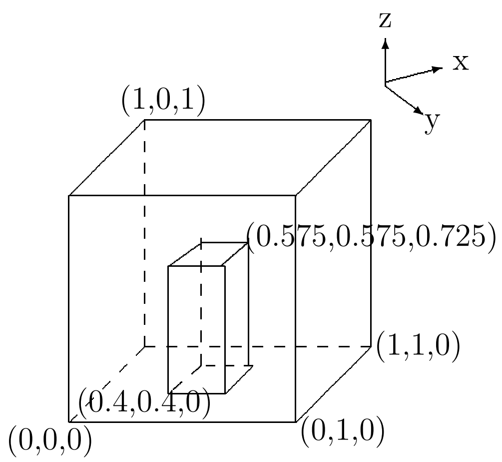

圖 13: 水柱流體長寬高度的示意圖

圖(16)~ 圖(22) 水柱流場的模擬圖。

5.3 水牆流場

計算域在無因次化後長為1.0單位長度，寬為1.0單位長度，高為1.0單位長度，計算上網格取$40 \times 40 \times 40$。流體在於計算域內部，長位於 0.4∼0.575 單位長度、寬位於 0∼1.0 單位長度、高位於 0∼0.75 單位長度的一面水牆。 在方程式的變數設定上，空氣與水的密度比為0.001，空氣與水的黏滯係數比為0.01，雷諾數為1000，福祿數為 0.8。 在離散方法上，利用SOR方法迭代。

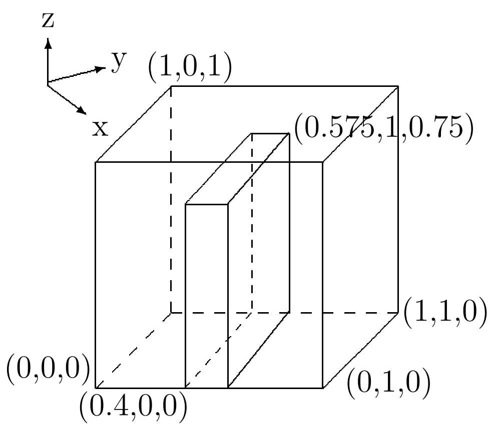

圖 14: 水牆流體長寬高度的示意圖

圖(23)∼ 圖(30) 為水牆流場的模擬圖。

5.4 方柱液滴落地流場

在計算上，設定計算域在無因次化後，長為 1.0 單位長度，寬為 1.0 單位長度，高為1.0單位長度 ，網格數取 $40\times40\times40$，固定時距為0.02， 方塊的長寬高一樣長，長位於 0.3625∼0.5875 單位長度、寬位於 0.3625∼0.5875 單位長度、高位於 0.4875∼0.7125 單位長度。 在方程式上的變數設定，如空氣與水的密度比為0.001，空氣與水的黏滯係數比為0.01，雷諾數為 1000，福祿數為 0.8。 在離散方法上，利用SOR方法迭代。

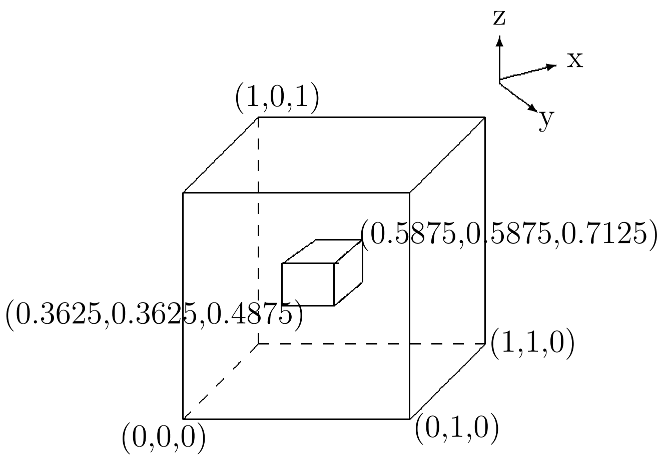

圖 15: 方柱流體長寬高度的示意圖

圖(31)∼ 圖(43) 為方形液滴落地的模擬圖。

5.5 球形液滴落地流場

當水滴受重力影響而掉落時，其水滴表面也會有所改變，因此利用等位函數法來模擬水滴的表面變化， 進而模擬當水滴掉到地面的情況。在計算上，設定計算域在無因次化後，長為1.0單位長度，寬為1.0單位長度，高為1.0單位長度 ，網格數取 $40 \times 40 \times 40$，固定時距為 0.02，水滴半徑為 0.2 單位長度位於高度 0.6 單位長度的位置。 在方程式上的變數設定，如空氣與水的密度比為0.001，空氣與水的黏滯係數比為0.01，雷諾數為 1000，福祿數為 0.8。 在離散方法上，利用SOR方法迭代。

圖(44)為時間 $t = 0.05$ 時的情況，水滴尚未有明顯的變化。時間 $t = 0.70$ 時如圖(45)， 為在水滴與地面接觸的前一時間步，水滴受重力影響， 水滴表面已有些許的變化。到了時間 $t = 0.80$ 時，水滴接觸到地面，水滴的形狀已有明顯的改變。圖(46)∼圖(49)水滴完全平置在地面上，化成一攤水。於水滴接觸地面時，位能轉變動能，將水向外推出，因此在圖(50) 時間 $t = 1.05$ 時，水在四周面向上激起，持續到時間 $t = 2.40$ 時，如圖(55)及圖(56)激起的水受到重力的影響也開始慢慢下降。 由於水碰撞至地面及牆面而產生破裂亦或融合導致整個流況相當複雜。

5.6 球形液滴落水流場

根據前一小節，將上述的情況在底部再增加一層水，以計算模擬水滴落入水中的情況。同樣的在計算上， 計算域在無因次化後長為1.0單位長度，寬為1.0單位長度，高為1.0單位長度，網格數取$40 \times 40 \times 40$， 固定時距為0.02，水滴半徑為0.2單位長度位於高度0.6單位長度的位置，在最底層有一層高為0.2單位長度的水。在變數設定上仍是 空氣與水的密度比為0.001，空氣與水的黏滯係數比為0.01，雷諾數為1000，福祿數為0.8。 在離散方法上，利用SOR方法迭代。

圖(57)為時間 $t = 0.05$ 時的情況，此時時間甚短，所以變化不大。圖(58)時間 $t = 0.55$ 時，水滴已與水面有小部份接觸到，水滴表面及水面也都改變。在圖(60)時間為 $t = 0.70$ 時，在水面已產生一個波形，到了時間 $t = 0.85$ 時圖(61)，水滴已陷入水中，也因為水滴的陷入造成水面產生一個很大的波如圖(62)，除此之外，水滴在陷入水中時也夾帶了一些空氣 導致如圖(63)在水面下有空氣出現。到了時間 $t = 1.80$ 時，空氣受浮力影響，浮出水面如圖(66)。

5.7 雙球液滴落水流場

本例假設有兩顆大小不同的水滴， 來計算模擬其落入水中，會對水面成怎樣的影響。同樣的在計算上， 計算域在無因次化後長為1.0單位長度，寬為1.0單位長度，高為1.0單位長度， 網格數取$40 \times 40 \times 40$， 固定時距為0.02，大顆的水滴半徑為0.1單位長度位於高度0.6單位長度的位置，小顆的水滴半徑為0.05位於高度為0.8單位長度的位置， 而在最底層有一層高為0.2單位長度的水。在方程式變數設定上仍是空氣與水的密度比為0.001，空氣與水的黏滯係數比為0.01，雷諾數為1000，福祿數為 0.8。 在離散方法上，利用SOR方法迭代。

圖(71) $\sim$ 圖(81) 為雙液滴落水的模擬圖。

6 結論

本篇論文針對理論模式研究發展，以等位函數法處理二相流界面的方法，應用在求解Navier-Stokes方程式上，最重要的是，界面兩側 密度、黏滯係數及雷諾數的處理方法。在這方面透過Heaviside function 將界面間斷的現象做平滑化工作，以解決在此界面兩側密度、黏滯係數及雷諾數的極大差異。 由數值模擬的結果可以驗證出等位函數在求解含自由液面之流場問題非常便利，設定好初始函數，則此函數會隨著速度函數而自動改變。 此外，線性迭代方法則以 SOR 為主。

在本論文的實例探討方面亦可以看得模擬的結果與大自然的物理現象相類似， 但仍有需加强的部分，如當界面透過平滑化後，已非真實情況，其在準確度方面定會受到影響， 因此如何選用更適當的平滑化方法而是下一步最重要的工作。除此之外，本篇論文在統御方程式將表面張力項忽略不計， 以致流體在與固體表面接觸時也有些許不準確，因此需再加以計算表面張力項。

參 考 文 獻

[1] Michael Griebel, Thomas Dornseifer, Tilman Neunhoeffer , *Numerical Simulation in Fluid Dynamics* , SIAM.Monographs on Mathematical Modeling and Computation(1997).

[2] J.A.Sethian , *Level Set Methods* , Cambridag University Press, 1996.

[3] Stanley Osher, Ronald Fedkiw, *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer-Verlag, New York, Inc.

[4] David Adalsteinsson and Janes A. Sethian, *A Fast Level Set Method for Propagating Interfaces* , Journal of Computational Physics 118,269-277(1995)

[5] F.J. Kelecy and R.H. Pletcher, *The Development of a Surface Capturing Apprach for Multidimensional Free Surface Flows in Closed Containers* , Journal of Computational Physics 138, 939-980(1997).

[6] Mark Sussman, Ann S. Almgren, Joho B. Bell, Phillip Colella, Louis H. Howell, and Michael L. Welcome, *An Adaptive Level Set Approach for Incompressible Two-Phase Flows* , Journal of Computational Physics 148,81-124(1999).

[7] Osher S. and Sethian, J.A, *Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations,* Journal of Computational Physics 79,12-49(1988).

[8] Y.C.Chang, T.Y.Hou, B.Merriman, and S.Osher, *A Level Set Formulation of Eulerian Interface Capturing Methods for Incompressible Fluid Flows* , Journal of Computational Physics 124,449-464(1996).

[9] Zdanski, M.A. Ortega, Nide G.C.R. Fico Jr., *Numerical Study of the Flow over Shallow Cavities* , Computers and Fluids 32 (2003) 953-974.

[10] 盧先榮 2003, 以奈維爾史托克方程式與等位函數法求解自由液面流場之研究 逢甲大學土木及水利工程研究所碩士論文.

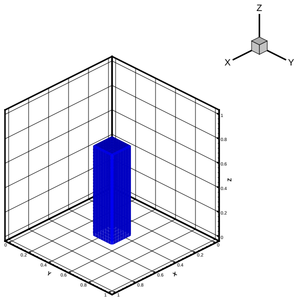

圖 16: t = 0.05 時水柱圖形

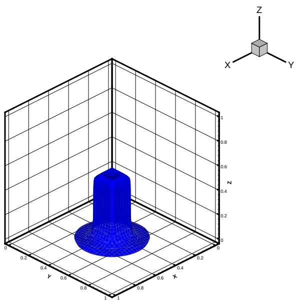

圖 17: t = 0.60 時水柱圖形

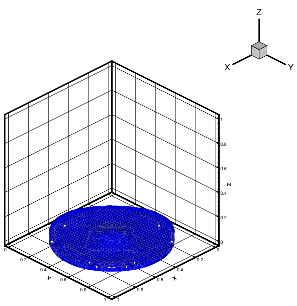

圖 18: t = 1.05 時水柱圖形

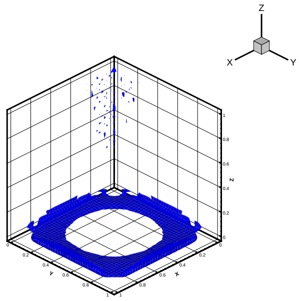

圖 19: t = 1.40 時水柱圖形

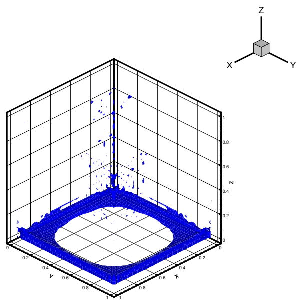

圖 20: t = 1.75 時水柱圖形

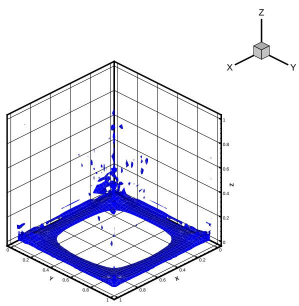

圖 21: t = 2.20 時水柱圖形

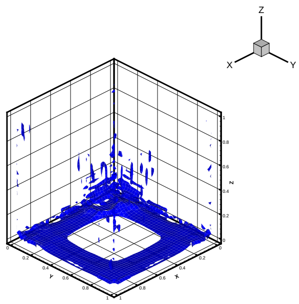

圖 22: t = 2.70 時水柱圖形

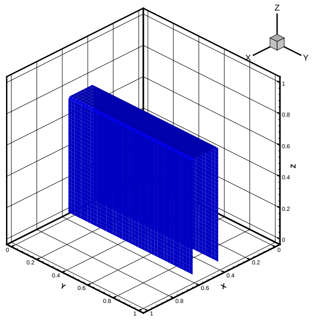

圖 23: t = 0.05 時水牆圖形

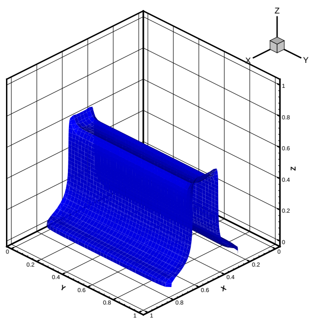

圖 24: t = 0.55 時水牆圖形

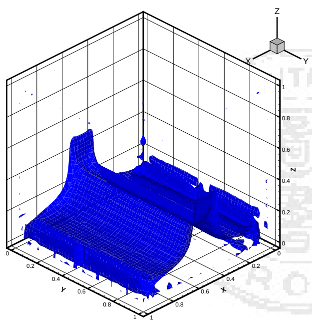

圖 25: t = 0.85 時水牆圖形

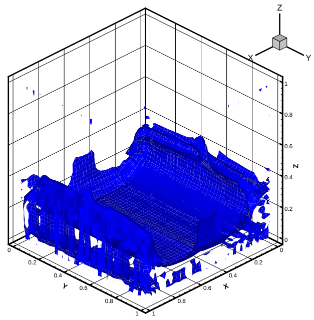

圖 26: t = 1.15 時水牆圖形

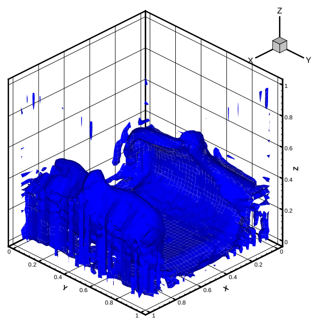

圖 27: t = 1.55 時水牆圖形

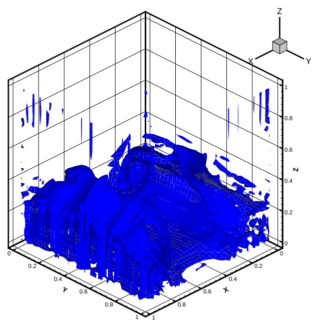

圖 28: t = 1.85 時水牆圖形

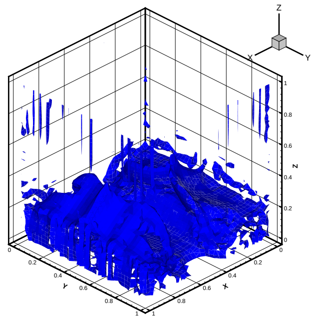

圖 29: t = 2.10 時水牆圖形

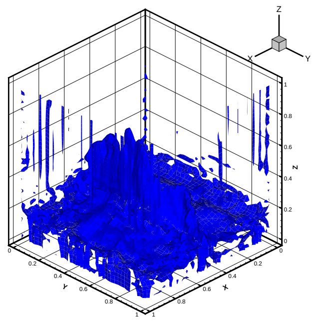

圖 30: t = 2.50 時水牆圖形

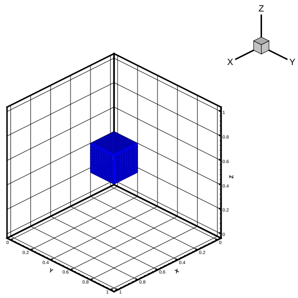

圖 31: t = 0.05 時的方柱液滴落地圖形

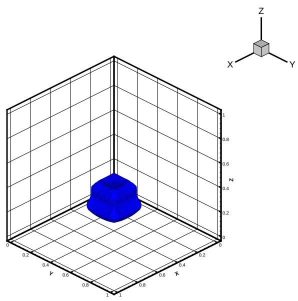

圖 32: t = 1.70 時的方柱液滴落地圖形

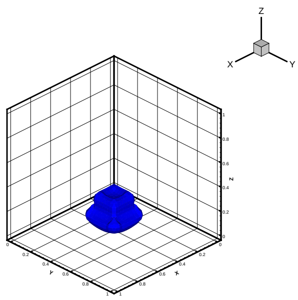

圖 33: t = 0.80 時的方柱液滴落地圖形

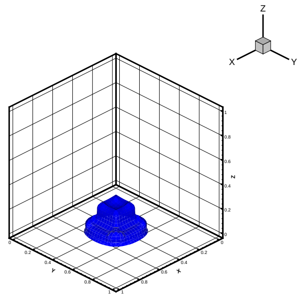

圖 34: t = 0.90 時的方柱液滴落地圖形

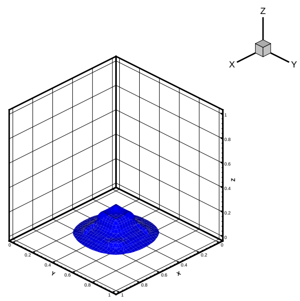

圖 35: t = 0.95 時的方柱液滴落地圖形

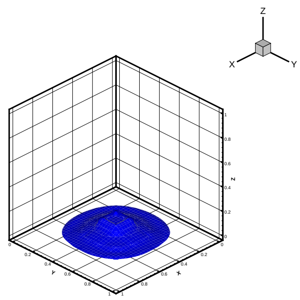

圖 36: t = 1.00 時的方柱液滴落地圖形

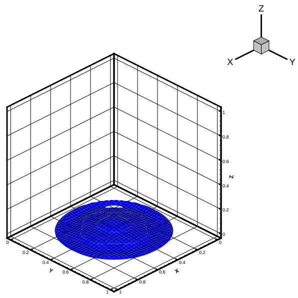

圖 37: t = 1.05 時的方柱液滴落地圖形

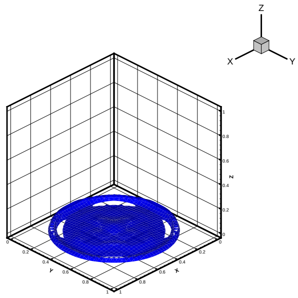

圖 38: t = 1.15 時的方柱液滴落地圖形

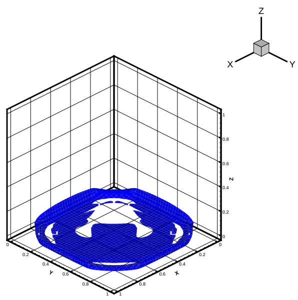

圖 39: t = 1.40 時的方柱液滴落地圖形

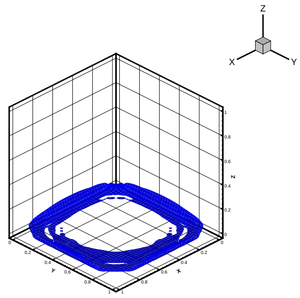

圖 40: t = 1.55 時的方柱液滴落地圖形

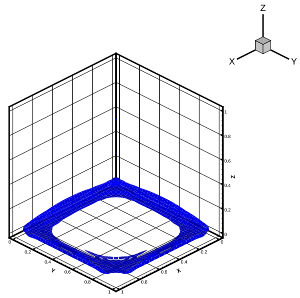

圖 41: t = 1.70 時的方柱液滴落地圖形

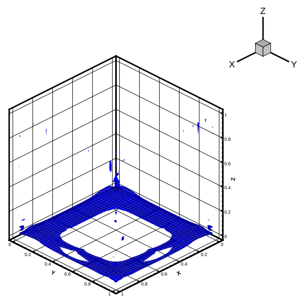

圖 42: t = 2.60 時的方柱液滴落地圖形

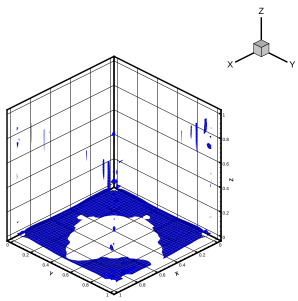

圖 43: t = 2.90 時的方柱液滴落地圖形

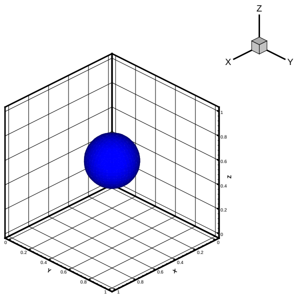

圖 44: t = 0.05 時的球形液滴落地圖形

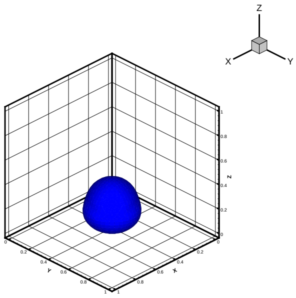

圖 45: t = 0.70 時的球形液滴落地圖形

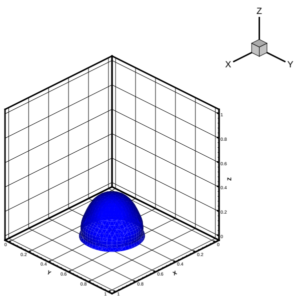

圖 46: t = 0.80 時的球形液滴落地圖形

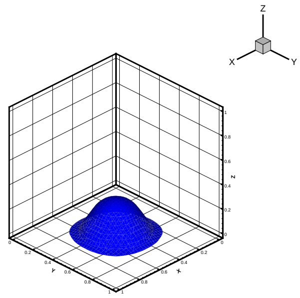

圖 47: t = 0.85 時的球形液滴落地圖形

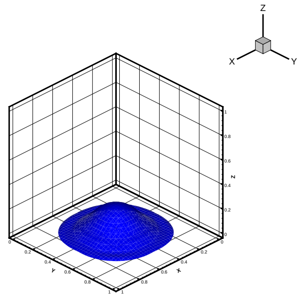

圖 48: t = 0.90 時的球形液滴落地圖形

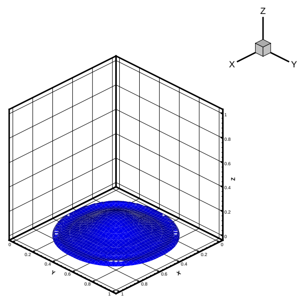

圖 49: t = 0.95 時的球形液滴落地圖形

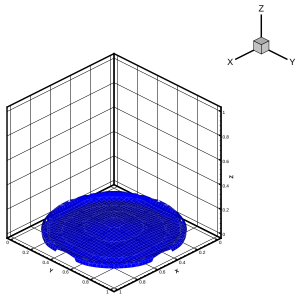

圖 50: t = 1.05 時的球形液滴落地圖形

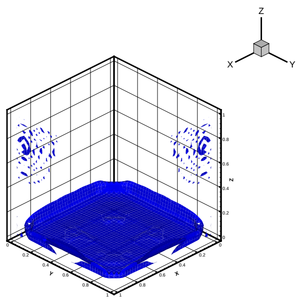

圖 51: t = 1.25 時的球形液滴落地圖形

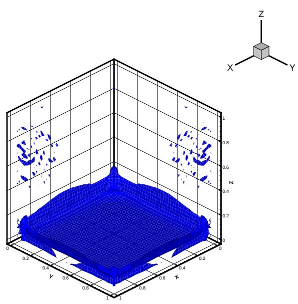

圖 52: t = 1.45 時的球形液滴落地圖形

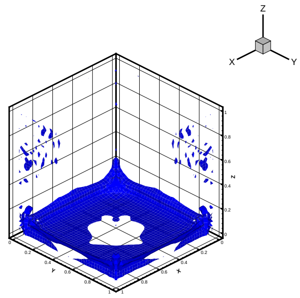

圖 53: t = 1.70 時的球形液滴落地圖形

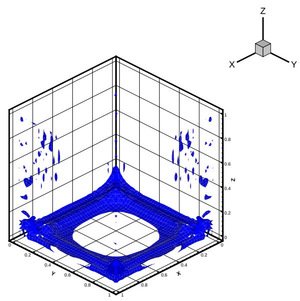

圖 54: t = 2.00 時的球形液滴落地圖形

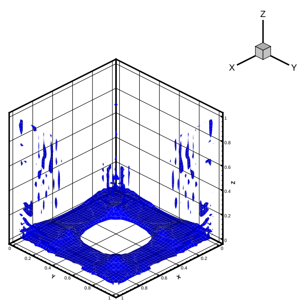

圖 55: t = 2.40 時的球形液滴落地圖形

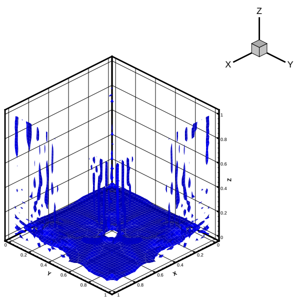

圖 56: t = 3.00 時的球形液滴落地圖
形

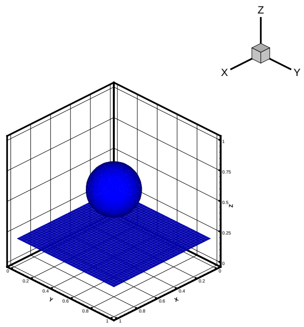

圖 57: t = 0.05 時的球形液滴落水圖形

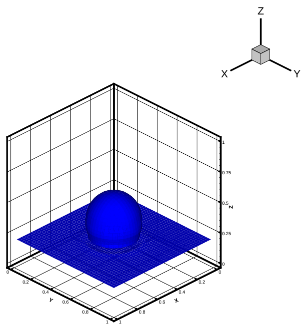

圖 58: t = 0.55 時的球形液滴落水圖形

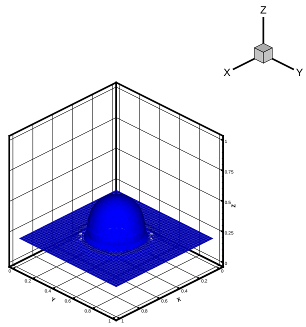

圖 59: t = 0.60 時的球形液滴落水圖形

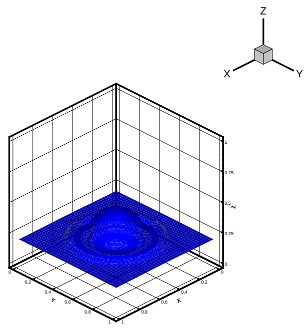

圖 60: t = 0.70 時的球形液滴落水圖形

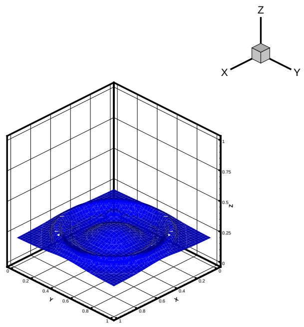

圖 61: t = 0.85 時的球形液滴落水圖形

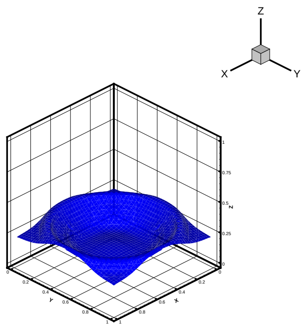

圖 62: t = 1.00 時的球形液滴落水圖形

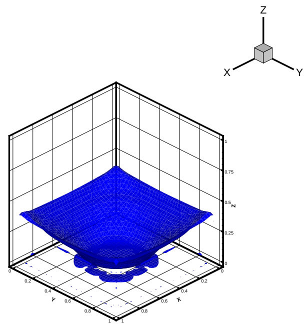

圖 63: t = 1.40 時的球形液滴落水圖形

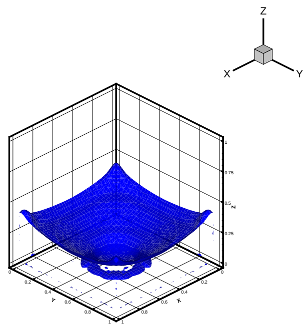

圖 64: t = 1.50 時的球形液滴落水圖形

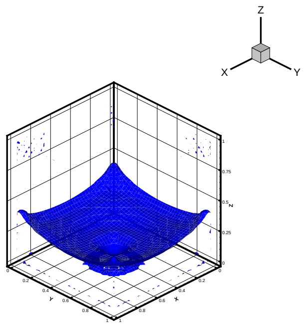

圖 65: t = 1.70 時的球形液滴落水圖形

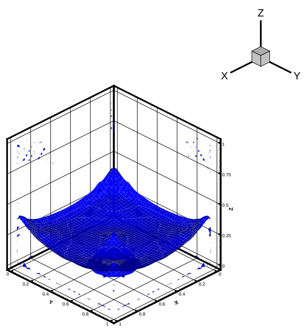

圖 66: t = 1.80 時的球形液滴落水圖形

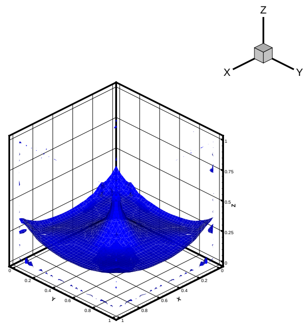

圖 67: t = 2.00 時的球形液滴落水圖形

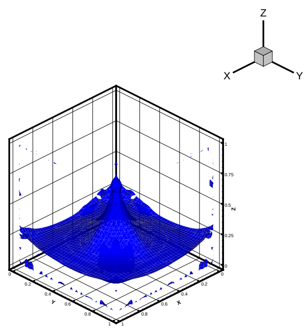

圖 68: t = 2.20 時的球形液滴落水圖形

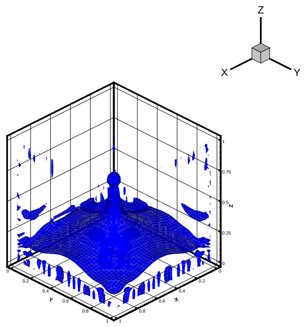

圖 69: t = 2.80 時的球形液滴落水圖形

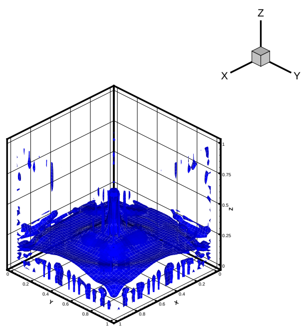

圖 70: t = 3.00 時的球形液滴落水圖形

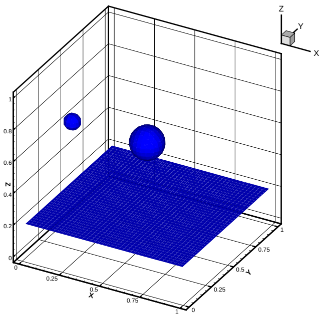

圖 71: t = 0.05 時的雙液滴落水圖形

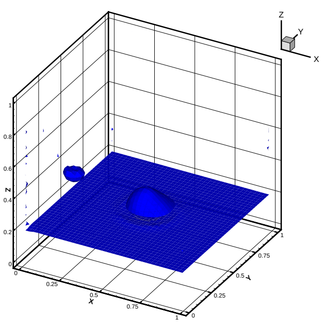

圖 72: t = 0.75 時的雙液滴落水圖形

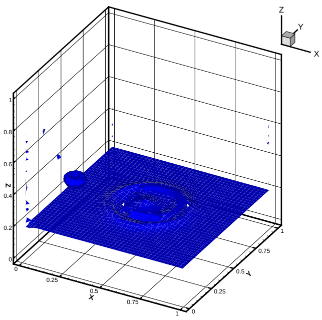

圖 73: t = 0.85 時的雙液滴落水圖形

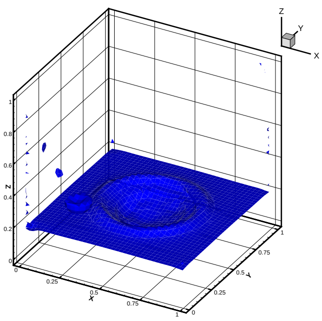

圖 74: t = 1.00 時的雙液滴落水圖形

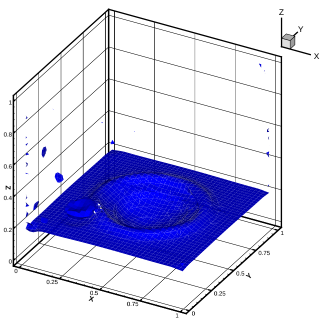

圖 75: t = 1.05 時的雙液滴落水圖形

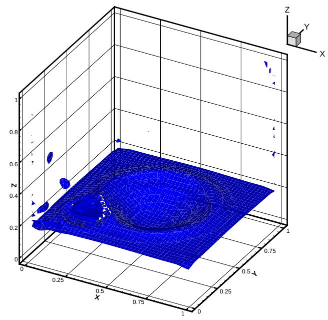

圖 76: t = 1.15 時的雙液滴落水圖形

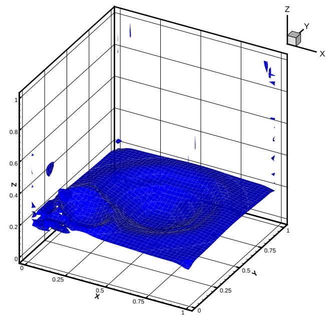

圖 77: t = 1.30 ，雙液滴落水

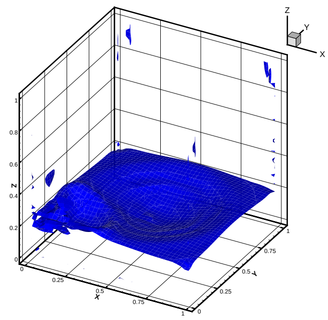

圖 78: t = 1.40 時的雙液滴落水

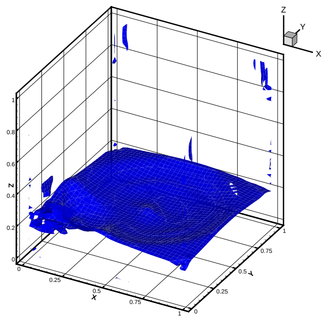

圖 79: t = 1.50 時的雙液滴落水

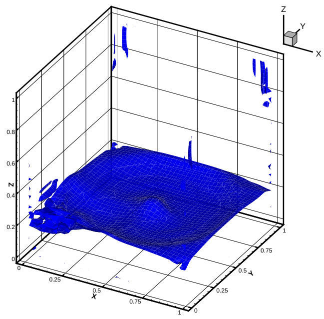

圖 80: t = 1.60 時的雙液滴落水

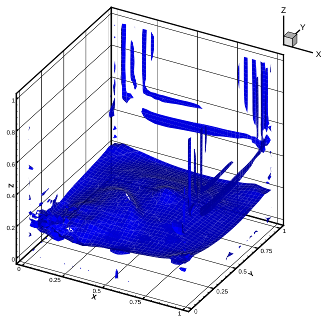

圖 81: t = 2.20 時的雙液滴落水