

# 第 1 章

---

## 簡介

---

1921 年，Euler[18]最早討論一被定義為(2.1)的函數；之後，在 1958 年 de Bruijn[19]探究出  $W$ -函數圖形。許多數學方程式，可以利用  $W$ -函數[6]來求出近似解；此外， $W$ -函數被運用在其他的領域[15,20]。

要計算  $W$ -函數可以透過數學軟體 Maple 內建的 Lambert  $W$ -函數或是 Mathematica 中的 ProductLog 函數，即可得到其近似解，但是目前只局限於純量型式；至於矩陣型的 Lambert  $W$ -函數問題，卻不知如何計算？此即為本文所要探討的重點。

在自然界中處處都包含著時滯現象，如生態的成長[5]、機械的操縱控制[2]、金融產品的價格等等皆是與時滯有關；當我們對這些事件產生感興趣的時候，便以數學方程式寫成時滯系統，並想如何進一步去控制這個系統。因此，時滯系統是否穩定[1,2,3,14]是相當重要的。一般常用 Lyapunov 方法來判斷系統是否穩定；在2003 年，由參考資料[4]提出一個新的穩定性判斷方法。這個方法的概念是找出一穩定性與時滯系統等價的非時滯系統，藉由判斷非時滯系統的穩定性，即可得知時滯系統是否穩定。這樣一來，要判斷時滯系統的穩定性就變得較為簡單，但前提是等價系統必須要找的到。至於要如何找出穩定性等價的系統，我們可以運用Lambert  $W$ -函數以及數值方法[7,12,13]來計算。

## 第 2 章

---

### 數學預備知識

---

#### 2.1 Lambert $W$ -函數及其性質

Lambert  $W$ -函數是

$$f(W) = We^W, \quad W \in \mathbb{C}$$

的反函數，即對於所有的複數  $x$ ，可以得到

$$W(x)e^{W(x)} = x, \quad W, x \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

換句話說，就是在(2.1)中給定一個  $x$ ，用Lambert  $W$ -函數就能反算出  $W(x)$  的值。由(2.1)移項可得  $W(x) = xe^{-W(x)}$ ，經由重覆迭代之後，即

$$W(x) = xe^{-xe^{-xe^{\dots}}},$$

則  $W(x)$  可用級數表示成

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{n-2}}{(n-1)!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \dots,$$

其中  $|x| < \frac{1}{e}$ 。

於此，我們的重點擺在若  $W, x$  皆為實數，討論  $x$  必須滿足什麼條件， $W(x)$  才會存在？以及  $W(x)$  是否唯一？

藉由下面  $W(x)$  的圖形我們可以清楚知道，

1. 當  $x \geq 0$  或  $x = -e^{-1}$  時， $W(x)$  有一個值；
2.  $x$  在  $(-e^{-1}, 0)$  的範圍裡， $W(x)$  會有兩個值；
3.  $x < -e^{-1}$ ，此時  $W(x)$  的值則不存在。

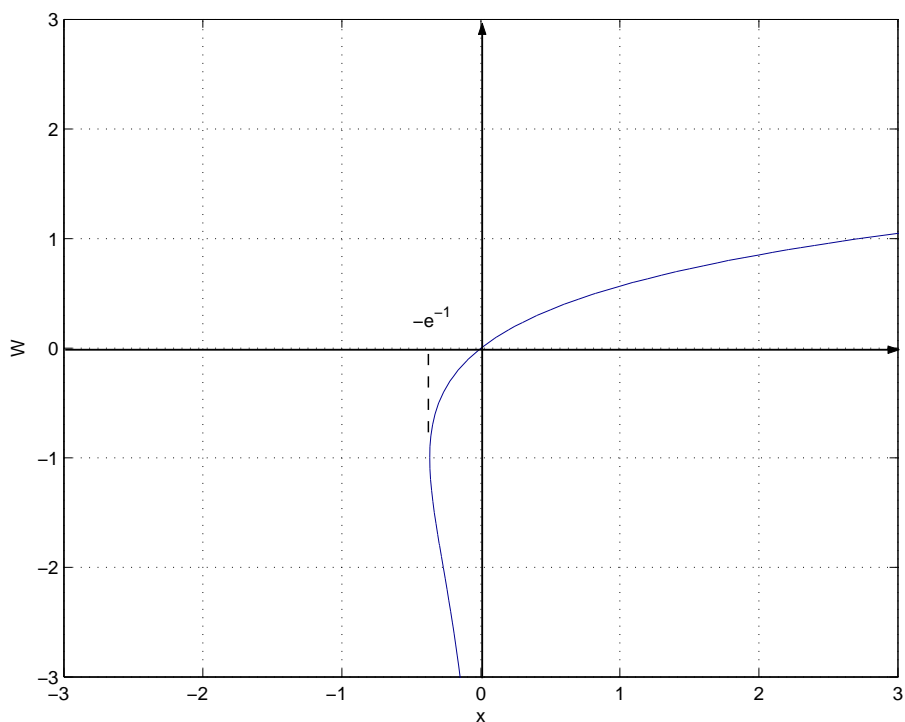


圖 2.1:  $W, x$  為實數的  $W(x)$  圖形

## 2.2 矩陣型指數及其性質

對於任意的方陣  $Q$  可以得到

$$e^Q = I_n + Q + \frac{Q^2}{2!} + \frac{Q^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n}{n!},$$

以下定理敘述矩陣型指數的幾種性質：

**定理 2.1** 矩陣型指數滿足以下性質：

1.  $e^O = I_n$ ，其中  $O$  為零矩陣；
2.  $Q \cdot e^Q = e^Q \cdot Q$ ，其中  $Q$  為任意方陣；
3. 如果方陣  $M, N$  是可交換(commutative)，即  $MN = NM$ ，則可得到

$$e^{M+N} = e^M \cdot e^N ;$$

4. 對於任意方陣  $Q$ ， $e^Q$  是可逆，且

$$(e^Q)^{-1} = e^{-Q}.$$

## 2.3 時滯系統穩定性之相關定理

討論一微分方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0 \quad (2.2)$$

$$x_{t_0}(\tau) = \phi(t + \tau), \quad \forall \tau \in (-T, 0] \quad (2.3)$$

其中  $x_t(\tau)$ ， $t \geq t_0$  表示限制  $x(\cdot)$  是從區間  $[t - T, t]$  轉移到  $[-T, 0]$  區間。也就是說， $x_t(\tau) = x(t + \tau)$ ， $\forall \tau \in [-T, 0]$  和  $\phi \in C_{n,T} = C([-T, 0], \mathbb{R}^n)$  是定義在由  $[-T, 0]$  區間對應到  $\mathbb{R}^n$  空間上的連續向量函數所形成之 Banach 空間，為一具有均勻收斂的拓撲。空間  $C_{n,T}$  中之元素  $\phi$  之範數定為

$$\|\phi\|_* = \sup_{\tau \in [-T, 0]} \|\phi(\tau)\|_*$$

一般常用 Lyapunov 的方法來判斷系統是否穩定，有兩種不同的做法：一種是時滯系統的狀態是定義成與時間相關的軌跡線段

$$x_t : [-T_N, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

這稱為 Lyapunov-Krankskii 方法；另一種則是以 Lyapunov 函數和使用一種特別的判斷程序，其允許不包含微分項有時滯的 Lyapunov 函數，稱為 Lyapunov-Razumikhin 方法。若對時滯系統的穩定分析有興趣，可參考 Kharitonov 的論文[3]。假設  $x(t) = \psi(t, \phi)$  是(2.2)的解，藉由下列定理討論系統之穩定性。

**定義 2.1** 若  $\psi(t_0, \phi) = x_e$ ，而且對於所有的  $t > t_0$  使得

$$\psi(t, \phi) = x_e,$$

則  $x_e$  稱為(2.2)的平衡狀態(equilibrium state)。

**定義 2.2** 若對於任意  $t_0 > 0$  和  $\epsilon > 0$ ，存在一  $\delta(t_0, \epsilon) > 0$  使得

$$\max_{t_0 \leq t < \infty} \|x(t)\| \leq \epsilon \text{ 其中 } \|\phi\|_* \leq \delta$$

則平衡狀態  $x_e = 0$  稱為簡單穩定(simply stable)或是 Lyapunov 穩定。

**定義 2.3** 若對於任意  $\epsilon > 0$ ，存在一  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  使得

$$\max_{t_0 \leq t < \infty} \|x(t)\| \leq \epsilon \text{ 其中 } \|\phi\|_* \leq \delta$$

則平衡狀態  $x_e = 0$  稱為均勻穩定(uniformly stable)。

**定義 2.4** 若

1. 系統是穩定；
2. 所有滿足  $\|\phi\|_* \leq \delta$  的解，也滿足  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

則稱平衡狀況  $x_e = 0$  是漸進穩定(asymptotically stable)。

定義 2.5 若

1. 系統是穩定；

2. 對於任意  $\phi(\tau)$ ， $\tau$  在  $[-\hat{T}, 0]$  區間，所有的解滿足  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

則稱平衡狀況  $x_e = 0$  是廣泛漸進穩定 (asymptotically stable in the large)。

如果我們使用 Lyapunov-Kransoskii 方法，其相關定理敘述如下：

**定理 2.2** (Lyapunov-Kransoskii 定理) 設  $f : R_+ \times C_{n,T} \rightarrow R^n$  表示將  $C_{n,T}$  之有界子集對應到  $R^n$  之有界子集上的函數，以及  $\alpha, \beta, \gamma : R_+ \rightarrow R_+$  是連續非遞減函數，其中

$$\alpha(r), \beta(r), \gamma(r) > 0 ; r \neq 0$$

$$\alpha(0) = 0, \beta(0) = 0$$

若存在一連續函數  $V : R \times C_{n,T} \rightarrow R$  使得

$$\alpha(\|\phi(0)\|) \leq V(t, x) \leq \beta(\|\phi\|_*), t \in R, x \in R^n$$

$$V(\dot{t}, \phi) \leq -r(\|\phi(0)\|)$$

則(2.2)之解是均勻穩定。另外

1. 若  $\alpha(r) \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ ，則解是均勻有界。

2. 若  $\gamma(r) > 0, r > 0$ ，則解  $x = 0$  是均勻漸近穩定。

如果我們使用的是 Lyapunov-Razunmikhin 方法，其相關定理敘述如下：

**定理 2.3** (Lyapunov-Razumikhin 定理) 設  $f : R_+ \times C_{n,T} \rightarrow R^n$  表示將  $C_{n,T}$  之有界子集對應到  $R^n$  之有界子集上的函數，以及  $\alpha, \beta, \gamma : R_+ \rightarrow R_+$  是連續非遞減函數，其中

$$\alpha(r), \beta(r), \gamma(r) > 0 ; r \neq 0$$

$$\alpha(0) = 0, \beta(0) = 0$$

若存在一連續函數  $V : R \times C_{n,T} \rightarrow R$  使得

$$\alpha(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \beta(\|x\|), t \in R, x \in R^n$$

$$V(\dot{t}, \phi) \leq -r(\|x\|)$$

$$V(t + \tau, x(t + \tau)) \leq \delta(V(t, x(t)))$$

則(2.2)之解是均勻穩定。另外 其中  $\delta(s)$  是連續函數，使得  $\delta(s) > s, s > 0$ 。

則解  $x = 0$  是均勻漸近穩定。

對於時滯系統

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - h)$$

$$x(\sigma) = \phi(\sigma), -h \leq \sigma \leq 0$$

我們定義一個廣義狀態函數  $z(t) = x(t) + Q * x(t)$ ，其中  $Q * x(t)$  表示時間延遲的影響。然後令 Lyapunov 函數為

$$\begin{aligned} v(x_t, h) &= z' P z \\ &= (x + Q * x)' P (x + Q * x) \\ &= x' P x + x' P Q * x + Q' x' P x + Q' * x' Q * x \\ &= x' P x + x' P \int_0^h Q(\sigma) x(t - \sigma) d\sigma + \left[ \int_0^h x'(t - \sigma) Q(\sigma) d\sigma \right] P x \\ &\quad + \int_0^h \int_0^h x'(t - \eta) Q'(\eta) P Q(\sigma) x(t - \sigma) d\eta d\sigma \end{aligned}$$

其中  $P$  是 Hermitian 矩陣。

**引理 2.1** 令一常數函數

$$v(x_t, h) = (x(t) + Q * x(t))' P (x(t) + Q * x(t))$$

其中  $n \times n$  矩陣  $Q(t)$  在  $[0, h]$  區間連續、可微， $P$  是 Hermitian 矩陣，且  $x_t(\sigma) \equiv x(t + \sigma)$ ， $\sigma \in [-h, 0]$ 。若滿足

$$P(A + Q(0)) + (A + Q(0))' P + R = 0 \quad (2.4)$$

$$\dot{Q} = (A + Q(0))Q(\sigma) \quad , \quad 0 \leq \sigma \leq h \quad (2.5)$$

其中  $Q(h) = B$ ， $R$  是正定，則

$$\dot{v}(x_t, h) = \frac{d}{dt} v(x_t, h) < 0 \quad .$$

系統會是漸進穩定。



# 第 3 章

---

## 矩陣型 Lambert $W$ -函數

---

### 3.1 矩陣型 Lambert $W$ -函數之計算

第2章已經介紹過實數型的 Lambert  $W$ -函數，接下來這一章要來討論矩陣型的 Lambert  $W$ -函數該如何計算。考慮

$$e^Q \cdot Q = B, \quad B, Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad (3.1)$$

我們定義此方程式之解為矩陣型的 Lambert  $W$ -函數以  $\mathbf{W}$  表示，即

$$Q = \mathbf{W}(B), \quad (3.2)$$

但是我們發現數學軟體 Maple 或 Mathematica 都無法計算出矩陣型 Lambert  $W$ -函數，那麼該如何計算此種函數之值呢？對於一般矩陣是不易得到一般的表示式，然而對於一些特殊矩陣，我們還是可以找到函數  $\mathbf{W}$  之  $Q$  的表示法。例如  $Q, B$  皆為對角矩陣，即令  $Q = (q_i), B = (b_i)$ ，其中  $i = 1, 2, \dots, n$ ，則可推得常數型 Lambert  $W$ -函數之形式

$$e^{q_i} \cdot q_i = b_i,$$

再透過 Lambert  $W$ -函數來討論  $q_i = W(b_i)$  的值是否存在，並由這些  $q_i$  組成我們所求的  $Q$  矩陣。

倘若  $Q, B$  不全為對角矩陣時，我們考慮由較為簡單的 2 乘 2 矩陣著手，討論  $Q, B$  矩陣之間的關係。假設  $B$  為對角矩陣，那麼  $Q$  是否可能為上三角矩陣？我們假設已知

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix},$$

若  $q_{11} \neq q_{22}$ ，代入(3.1)得到

$$\begin{bmatrix} e^{q_{11}}q_{11} & q_{12}\left(\frac{q_{11}e^{q_{11}} - q_{22}e^{q_{22}}}{q_{11} - q_{22}}\right) \\ 0 & e^{q_{22}}q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix},$$

則由上三角的位置可以發現，若  $q_{12} \neq 0$ ，則

$$q_{12}\left(\frac{q_{11}e^{q_{11}} - q_{22}e^{q_{22}}}{q_{11} - q_{22}}\right) = 0$$

是不可能成立的。但是當  $q_{11} = q_{22}$  時，將假設的  $Q, B$  矩陣代入(3.1)會得到

$$\begin{bmatrix} e^{q_{11}}q_{11} & e^{q_{11}} \cdot q_{12}(1 + q_{11}) \\ 0 & e^{q_{11}}q_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix},$$

即  $q_{11}$  必須等於  $-1$  或  $q_{12}$  為  $0$ ， $e^Q \cdot Q$  上三角位置才會等於  $0$ 。也就是說，若  $B$  為對角矩陣，那麼只有在  $q_{11} = q_{22} = -1$  的情形下  $Q$  才可能是上三角矩陣，即

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & q_{12} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad q_{12} \in \mathbb{R}$$

而且

$$B = \begin{bmatrix} -e^{-1} & 0 \\ 0 & -e^{-1} \end{bmatrix}.$$

## 3.2 $e^{A+Q} \cdot Q = B$ 之解

現在我們考慮將(3.1)推廣為

$$e^{A+Q} \cdot Q = B, \quad A, B, Q \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad (3.3)$$

那要如何計算出式中的  $Q$  矩陣？當  $n = 1$ ，我們假設  $A = a, B = b, Q = q$ ，其中  $a, b, q$  都是實數，則代入(3.3)

$$e^{(a+q)} \cdot q = b,$$

經過移項之後可得

$$e^q \cdot q = b \cdot e^{-a}, \quad (3.4)$$

即  $q = W(be^{-a})$ ，所以我們可以透過 Lambert  $W$ -函數來求出我們所要的  $Q$ 。根據2.1節對於  $W(x)$  的性質所整理之結果得知

1. 當  $b > 0$ ，即  $b \cdot e^{-a} \geq 0$  時， $q$  只有一個值；
2. 當  $b < 0$ ， $a - \log |b| > 1$  時，則  $q$  會有兩個值；
3. 當  $b < 0$ ， $a - \log |b| = 1$  時， $q$  只有一個值；
4. 若  $b < 0$ ， $a - \log |b| < 1$  時，則  $q$  不存在。

現在(3.3)式中的  $A, B, Q$  都是  $n$  階方陣，此時我們發現若要將(3.3)式推導成(3.4)之形式：

$$e^Q \cdot Q = e^{-A} \cdot B,$$

即需要滿足定理2.1中的第 3 性質，即  $e^{A+Q} = e^A \cdot e^Q$  才行；此時  $Q$  的解便是計算矩陣型 Lambert  $W$ -函數。

在上一節，我們知道當(3.3)中的  $A, Q$  矩陣是可交換時，雖能推導出型如(3.4)之方程

$$e^Q \cdot Q = e^{-A} \cdot B,$$

但是數學軟體無法計算出矩陣型 Lambert  $W$ -函數  $Q = \mathbf{W}(e^{-A} \cdot B)$ 。然而，對於一些特殊情況，我們還是可以算出  $Q$  矩陣。例如若  $A, B, Q$  皆為對角矩陣，

即  $AQ = QA$ ，且  $A = \text{diag}(a_i), B = \text{diag}(b_i), Q = \text{diag}(q_i), i = 1, 2, \dots, n$ ，則可推得(3.4)之形式

$$e^{q_i} \cdot q_i = e^{-a_i} \cdot b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

再透過Lambert  $W$ -函數來討論  $q_i = W(e^{-a_i} \cdot b_i)$  的值是否存在，並由這些  $q_i$  組成我們所求的  $Q$  矩陣。

倘若  $A, Q$  矩陣並非是可交換，那麼要如何利用Lambert  $W$ -函數解出滿足(3.3)的  $Q$  矩陣？我們考慮較為簡單的 2 乘 2 矩陣著手，並且  $A, Q, B$  不全為對角矩陣，分成下列兩種特別的情形進行討論。

**情形一：** 假設  $A, B$  為對角矩陣，那麼  $Q$  是否可能為上三角矩陣？

由下面的引理，我們可以瞭解若  $Q$  是上三角矩陣，則  $A, B, Q$  之間的關係必須滿足那些條件。

**引理 3.1** 假設已知

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22}$  使得

$$e^{q_{11}} \cdot q_{11} = b_{11} \cdot e^{-a_{11}}, \quad e^{q_{22}} \cdot q_{22} = b_{22} \cdot e^{-a_{22}}$$

$q_{11}, q_{22}$  有解；若  $q_{11}, q_{22}$  滿足

1.  $a_{11} + q_{11} < a_{22}$  且  $q_{22}$  滿足  $\frac{e^{a_{11}+q_{11}} - e^{a_{22}+q_{22}}}{a_{11} + q_{11} - a_{22} - q_{22}} \cdot q_{22} + e^{a_{11}+q_{11}} = 0$ ，或
2.  $q_{22} = -1$

則  $Q$  為下列上三角矩陣

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix}, \quad q_{12} \in \mathbb{R}.$$

證明：我們將引理3.1中的  $A, B, Q$  代入(3.3)：

1. 若  $a_{11} + q_{11} \neq a_{22} + q_{22}$ ，則

$$e^{A+Q} \cdot Q = \begin{bmatrix} e^{a_{11}+q_{11}} \cdot q_{11} & \left( e^{a_{11}+q_{11}} - \frac{(e^{a_{11}+q_{11}} - e^{a_{22}+q_{22}}) \cdot q_{22}}{a_{22} + q_{22} - a_{11} - q_{11}} \right) \cdot q_{12} \\ 0 & e^{a_{22}+q_{22}} \cdot q_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$e^{a_{11}+q_{11}} \cdot q_{11} = b_{11}, \quad e^{a_{22}+q_{22}} \cdot q_{22} = b_{22}$$

移項之後得到

$$e^{q_{11}} \cdot q_{11} = b_{11}e^{-a_{11}}, \quad e^{q_{22}} \cdot q_{22} = b_{22}e^{-a_{22}}$$

先利用Lambert  $W$ -函數判斷求出  $q_{11}$  及  $q_{22}$  是否存在；若  $q_{11}, q_{22}$  其中一個無解，即表示  $Q$  不存在。另外

$$\left( e^{a_{11}+q_{11}} - \frac{(e^{a_{11}+q_{11}} - e^{a_{22}+q_{22}}) \cdot q_{22}}{a_{22} + q_{22} - a_{11} - q_{11}} \right) \cdot q_{12} = 0$$

成立，即  $q_{12} = 0$  或

$$e^{a_{11}+q_{11}} - \frac{(e^{a_{11}+q_{11}} - e^{a_{22}+q_{22}}) \cdot q_{22}}{a_{22} + q_{22} - a_{11} - q_{11}} = 0.$$

令

$$f(q_{22}) = \frac{(e^{a_{11}+q_{11}} - e^{a_{22}+q_{22}}) \cdot q_{22}}{(a_{11} + q_{11}) - (a_{22} + q_{22})} + e^{a_{11}+q_{11}},$$

我們發現若  $q_{22} \geq 0$ ，則對於所有的  $q_{22}$ ， $f(q_{22}) > 0$ ；接著對  $f(q_{22})$  微分得到

$$f'(q_{22}) = \frac{[e^{a_{11}+q_{11}} - (1 + q_{22})e^{a_{22}+q_{22}}](a_{11} + q_{11} - a_{22}) + e^{a_{22}+q_{22}} \cdot q_{22}^2}{[(a_{11} + q_{11}) - (a_{22} + q_{22})]^2},$$

且

$$\lim_{q_{22} \rightarrow -\infty} f(q_{22}) = 0.$$

因此，當  $a_{11} + q_{11} \geq a_{22}$ ，對於所有的  $q_{22}$ ， $f(q_{22})$  的值皆大於零；也就是說， $f(q_{22}) \neq 0$ 。於是，在  $a_{11} + q_{11} < a_{22}$  的條件之下， $q_{22}$  才會有解，且只有一解。

2. 若  $a_{11} + q_{11} = a_{22} + q_{22}$ ，令  $a_{11} + q_{11} = a_{22} + q_{22} = m$ ，代入(3.3)得到

$$e^{A+Q} \cdot Q = \begin{bmatrix} e^m \cdot q_{11} & (e^m + e^m \cdot q_{22}) \cdot q_{12} \\ 0 & e^m \cdot q_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$(e^m + e^m \cdot q_{22}) \cdot q_{12} = 0$$

所以

$$e^m(1 + q_{22}) \cdot q_{12} = 0$$

可得到  $q_{22} = -1$  故得證。 ■

反之，若引理3.1的條件不成立，則  $Q$  必為對角矩陣。由引理3.1條件 2 得知若  $q_{22} = -1$ ，代入假設的條件  $e^{a_{22}+q_{22}} \cdot q_{22} = b_{22}$ ，則可得到

$$a_{22} = 1 + \ln(-b_{22}).$$

另外

$$b_{11} = q_{11} \cdot e^{a_{11}+q_{11}} = q_{11} \cdot e^{a_{22}-1} = q_{11} (e^{a_{22}-1} \cdot (-1)) (-1) = q_{11}(-b_{22})$$

所以  $q_{11} = -\frac{b_{11}}{b_{22}}$ 。再代入另一假設條件  $a_{11} + q_{11} = a_{22} + q_{22}$ ，則

$$a_{11} = a_{22} - 1 - q_{11} = 1 + \ln(-b_{22}) - 1 - \left(-\frac{b_{11}}{b_{22}}\right) = \ln(-b_{22}) + \frac{b_{11}}{b_{22}}$$

因此，滿足引理3.1條件 2 之  $A, B, Q$  矩陣之型式為

$$A = \begin{bmatrix} \ln(-b_{22}) + \frac{b_{11}}{b_{22}} & 0 \\ 0 & 1 + \ln(-b_{22}) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -\frac{b_{11}}{b_{22}} & q_{12} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**情形二**：若  $A$  為上三角矩陣， $B$  為對角矩陣，則  $Q$  是否可能為上三角矩陣？

由下面的引理，我們可以瞭解  $A, B, Q$  之間的關係必須滿足那些條件，則  $Q$  是上三角矩陣。

**引理 3.2** 假設已知

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix},$$

其中  $a_{12} \neq 0$  且  $a_{11}, a_{22}, b_{11}, b_{22}$  使得

$$e^{q_{11}} \cdot q_{11} = b_{11}e^{-a_{11}}, e^{q_{22}} \cdot q_{22} = b_{22}e^{-a_{22}}$$

$q_{11}, q_{22}$  有解，若  $q_{11}, q_{22}$  滿足下列條例之一：

1.  $a_{11} + q_{11} \geq a_{22}$ ，

2.  $q_{22} \neq -1$ ；

則  $Q$  為下列上三角矩陣

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix},$$

其中條件1,2對應之  $q_{12}$  分別為

1.  $q_{12} = -\frac{a_{12}(e^{a_{11}+q_{11}} - e^{a_{22}+q_{22}})}{a_{11} + q_{11} - a_{22} - q_{22}} \cdot q_{22} \left( e^{a_{11}+q_{11}} + \frac{e^{a_{11}+q_{11}} - e^{a_{22}+q_{22}}}{a_{11} + q_{11} - a_{22} - q_{22}} \cdot q_{22} \right)^{-1}$

2.  $q_{12} = \frac{a_{12}}{1 + q_{22}}$

**證明**：我們將引理3.2中的  $A, B, Q$  代入(3.3)：

1. 若  $a_{11} + q_{11} \neq a_{22} + q_{22}$ ，則

$$e^{A+Q} \cdot Q = \begin{bmatrix} e^{a_{11}+q_{11}} q_{11} & q_{12} e^{a_{11}+q_{11}} + \frac{(-a_{12} e^{a_{22}+q_{22}} + a_{12} e^{a_{11}+q_{11}} - q_{12} e^{a_{22}+q_{22}} + q_{12} e^{a_{11}+q_{11}}) \cdot q_{22}}{-a_{22} - q_{22} + a_{11} + q_{11}} \\ 0 & e^{a_{22}+q_{22}} \cdot q_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$q_{12} \cdot e^{a_{11}+q_{11}} + \frac{(-a_{12} e^{a_{22}+q_{22}} + a_{12} e^{a_{11}+q_{11}} - q_{12} e^{a_{22}+q_{22}} + q_{12} e^{a_{11}+q_{11}})}{-a_{22} - q_{22} + a_{11} + q_{11}} \cdot q_{22} = 0$$

整理得到

$$q_{12} \left( e^{a_{11}+q_{11}} + \frac{e^{a_{11}+q_{11}} - e^{a_{22}+q_{22}}}{a_{11} + q_{11} - a_{22} - q_{22}} \cdot q_{22} \right) = -\frac{a_{12}(e^{a_{11}+q_{11}} - e^{a_{22}+q_{22}})}{a_{11} + q_{11} - a_{22} - q_{22}} \cdot q_{22}$$

則由引理3.1得知，若  $a_{12} \neq 0$ ，則當  $a_{11} + q_{11} \geq a_{22}$ ，那麼  $q_{12} \neq 0$ 。

2. 若  $a_{11} + q_{11} = a_{22} + q_{22}$ ，令  $a_{11} + q_{11} = a_{22} + q_{22} = m$ ，代入(3.3)得到

$$e^{A+Q} \cdot Q = \begin{bmatrix} e^m \cdot q_{11} & q_{12}(1 + q_{22})e^m + e^m \cdot a_{12} \\ 0 & e^m \cdot q_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$q_{12}(1 + q_{22})e^m + e^m \cdot a_{12} = 0,$$

所以

$$q_{12}(1 + q_{22})e^m = -e^m \cdot a_{12}.$$

若  $a_{12} \neq 0$ ，則  $q_{22} \neq -1$ 。

■

有了上面的結果之後，現在我們更進一步要探討下列兩種情形：

1. 若  $A$  為對角矩陣， $B$  為對角矩陣，則  $Q$  是否可能為一般矩陣？



2. 若  $A$  為上三角矩陣， $B$  為對角矩陣，則  $Q$  是否可能為一般矩陣？

**情形三：**若  $A, B$  為對角矩陣，則  $Q$  是否可能為一般矩陣？

假設已知  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ ，我們令  $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$ ，  
代入(3.3)左邊之展開式子以矩陣  $E$  來表示，即

$$E = e^{A+Q} \cdot Q = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2+k)} \left[ \frac{1}{2} q_{11}(m_1 - m_2 + k) + q_{12}q_{21} \right] \\ &\quad - \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)} \left[ \frac{1}{2} q_{11}(m_1 - m_2 - k) + q_{12}q_{21} \right] \\ E_{12} &= \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2+k)} \left[ \frac{1}{2} q_{12}(m_1 - m_2 + k) + q_{12}q_{22} \right] \\ &\quad - \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)} \left[ \frac{1}{2} q_{12}(m_1 - m_2 - k) + q_{12}q_{22} \right] \\ E_{21} &= \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2+k)} \left[ \frac{1}{2} q_{21}[k - (m_1 - m_2)] + q_{21}q_{11} \right] \\ &\quad + \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)} \left[ \frac{1}{2} q_{21}[k + (m_1 - m_2)] - q_{21}q_{11} \right] \\ E_{22} &= \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2+k)} \left[ \frac{1}{2} q_{22}[k - (m_1 - m_2)] + q_{12}q_{21} \right] \\ &\quad + \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)} \left[ \frac{1}{2} q_{22}[k + (m_1 - m_2)] - q_{12}q_{21} \right] \end{aligned}$$

由於在矩陣  $E$  上三角的位置就必須等於 0。即

$$\begin{aligned} E_{12} &= \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2+k)} \left[ \frac{1}{2} q_{12}(m_1 - m_2 + k) + q_{12}q_{22} \right] \\ &\quad - \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)} \left[ \frac{1}{2} q_{12}(m_1 - m_2 - k) + q_{12}q_{22} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中  $m_1 = a_{11} + q_{11}$ ,  $m_2 = a_{22} + q_{22}$  且  $k = [(m_1 - m_2)^2 + 4q_{12}q_{21}]^{\frac{1}{2}}$ 。若  $q_{12} \neq 0$ ，兩邊約去  $\frac{q_{12}}{k}$  移項可得

$$e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2+k)} \left[ \frac{1}{2}(m_1 - m_2 + k) + q_{22} \right] = e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)} \left[ \frac{1}{2}(m_1 - m_2 - k) + q_{22} \right]$$

兩邊同除以  $e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)}$ ，移項之後便可推得

$$e^k = \frac{\frac{1}{2}(m_1 - m_2 - k) + q_{22}}{\frac{1}{2}(m_1 - m_2 + k) + q_{22}} = \frac{(m_1 - m_2 + 2q_{22}) - k}{(m_1 - m_2 + 2q_{22}) + k}, \quad k \neq 0.$$

在此可以發現，無論  $k > 0$  或  $k < 0$ ，上式等號皆不成立！同樣的，矩陣  $E$  下三角的位置也等於 0，即

$$\begin{aligned} E_{21} &= \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2+k)} \left[ \frac{1}{2}q_{21}[k - (m_1 - m_2)] + q_{21}q_{11} \right] \\ &+ \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)} \left[ \frac{1}{2}q_{21}[k + (m_1 - m_2)] - q_{21}q_{11} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

整理可得

$$e^k = \frac{\frac{1}{2}[-(m_1 - m_2) - k] - q_{11}}{\frac{1}{2}[-(m_1 - m_2) + k] + q_{11}} = \frac{[-(m_1 - m_2) + 2q_{11}] - k}{[-(m_1 - m_2) + 2q_{11}] + k}, \quad k \neq 0.$$

同樣發現無論  $k > 0$  或  $k < 0$ ，上式等號皆不成立！因此情形三的  $Q$  不是一般的矩陣； $Q$  除了對角矩陣之外，在滿足情形一的條件下，亦可為上三角矩陣。

情形四：若  $A$  為上三角矩陣， $B$  為對角矩陣，則  $Q$  是否可能為一般矩陣？

假設已知  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ ，重覆情形三的步驟，代入(3.3)可得

$$\begin{aligned} E_{12} &= \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2+k)} \left[ \frac{1}{2}q_{12}(m_1 - m_2 + k) + m_3q_{22} \right] \\ &- \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)} \left[ \frac{1}{2}q_{12}(m_1 - m_2 - k) + m_3q_{22} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

其中  $m_1 = a_{11} + q_{11}$ ,  $m_2 = a_{22} + q_{22}$ ,  $m_3 = a_{12} + q_{12}$  且  $k = [(m_1 - m_2)^2 + 4q_{12}q_{21}]^{\frac{1}{2}}$ 。

整理可得

$$e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2+k)} \left[ \frac{1}{2}q_{12}(m_1 - m_2 + k) + m_3q_{22} \right] = e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)} \left[ \frac{1}{2}q_{12}(m_1 - m_2 - k) + m_3q_{22} \right]$$

兩邊同除以  $e^{\frac{1}{2}(m_1+m_2-k)}$ ，移項之後便可推得

$$e^k = \frac{[\frac{1}{2}(m_1 - m_2)q_{12} + m_3q_{22}] - k}{[\frac{1}{2}(m_1 - m_2)q_{12} + m_3q_{22}] + k} \quad k \neq 0.$$

相同的，可以發現無論  $k > 0$  或  $k < 0$ ，上式等號皆不成立！因此  $Q$  不是一般的矩陣，除對角情形之外，在滿足情形二的條件下， $Q$  可為上三角矩陣。

由此可知，倘若以 Lyapunov 的方法檢驗系統是否為局部穩定，那麼所找到的廣義狀態函數  $z(t) = x(t) + Q * x(t)$  並不一定是唯一的；即所找到的 Lyapunov 函數也不一定是唯一的。但穩定性是唯一的。

### 3.3 模擬退火法求數值解

經由上一節我們討論，在幾種簡單情況之下，我們可以先判斷出滿足(3.3)的  $Q$  矩陣是否存在，並且可以很容易的算出  $Q$  矩陣；至於一般的情形，就必須利用數值方法來計算。

我們先假設(3.3)中的  $A, B, Q$  皆為 2 階方陣，

$$Q = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad e^{A+Q} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix},$$

並且令

$$f(Q) = e^{A+Q} \cdot Q - B$$

即

$$\begin{aligned} f(Q) &= \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_1x_1 + M_2x_3 - b_{11} & M_1x_2 + M_2x_4 - b_{12} \\ M_3x_1 + M_4x_3 - b_{21} & M_3x_2 + M_4x_4 - b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因此可以得到下面的聯立方程組

$$f_1 = M_1x_1 + M_2x_3 - b_{11} = 0$$

$$f_2 = M_1x_2 + M_2x_4 - b_{12} = 0$$

$$f_3 = M_3x_1 + M_4x_3 - b_{21} = 0$$

$$f_4 = M_3x_2 + M_4x_4 - b_{22} = 0$$

最後假設

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2,$$

我們發現若上述聯立方程組有解，即  $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$  之極小值為零，因此變成了解最佳化問題。

對於解最佳化問題，大部份的數值方法只能找出局部最小值(local minimum)；至於整體最小值(global minimum)，只能沒有效率的盲目找尋。況且初始值如何選取的問題，是令人非常困擾的；例如，兩個不同的初始值不一定保證會收斂到兩個不同的局部極小值。在這一節裡，我們選擇能找出  $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$  之整體最小值的**模擬退火法**(Simulated Annealing 簡稱為SA)。

退火(annealing)主要是指將材料曝露於高溫一段很長時間後，然後再慢慢冷卻的熱處理過程。實施退火的目的主要包括：(1)釋放應力；(2)增加材料延展性和韌性；以及(3)產生特殊顯微結構。通常退火過程包括三個步驟：(1)加熱到想要的溫度；(2)保持或浸漬在此溫度；和(3)冷卻過程，通常是到室溫。

模擬退火法是在1983年由 Kirkpatrick[8-10] 等人將退火過程中使物質達到能量最低狀態的概念，引入最佳化問題之中；並且採用Metropolis[7] 接受準則，使得演算法能找到整體最佳解。

模擬退火法的原理是熱處理中降溫控制的物理現象，當物體溫度加熱至熔點，物體就會開始熔化，此時物體內部的分子結構排列最為零亂，能量也越來越高。冷卻時，如果溫度慢慢降低到結晶溫度，那分子的排列就會恢復成到有規則的結晶狀態，這時能量會達到最低狀態。模擬退火法是模擬方式，可以應用於解最佳化問題，其對應關係如下：

- 物質之結晶排列 ↔ 可接受的變數組合
- 物質的能量 ↔ 目標函數值
- 最低能量的結晶排列 ↔ 最佳解
- 退火過程 ↔ 求整體最佳解的過程

在退火過程中，物質的能量狀態分佈是以 Boltzmann 分佈表示：

$$P(e) = \alpha \exp\left(\frac{-e}{T}\right), \quad (3.5)$$

這裡的  $e$  代表能量， $k$  是 Boltzmann 常數，而  $T$  表示溫度。當  $\alpha = \frac{1}{kT}$ ，則  $P(e)$  下方的面積為 1，可視為一機率密度函數(probability density function)。我們給定幾個  $KT$  值，畫出 Boltzmann 分佈圖：

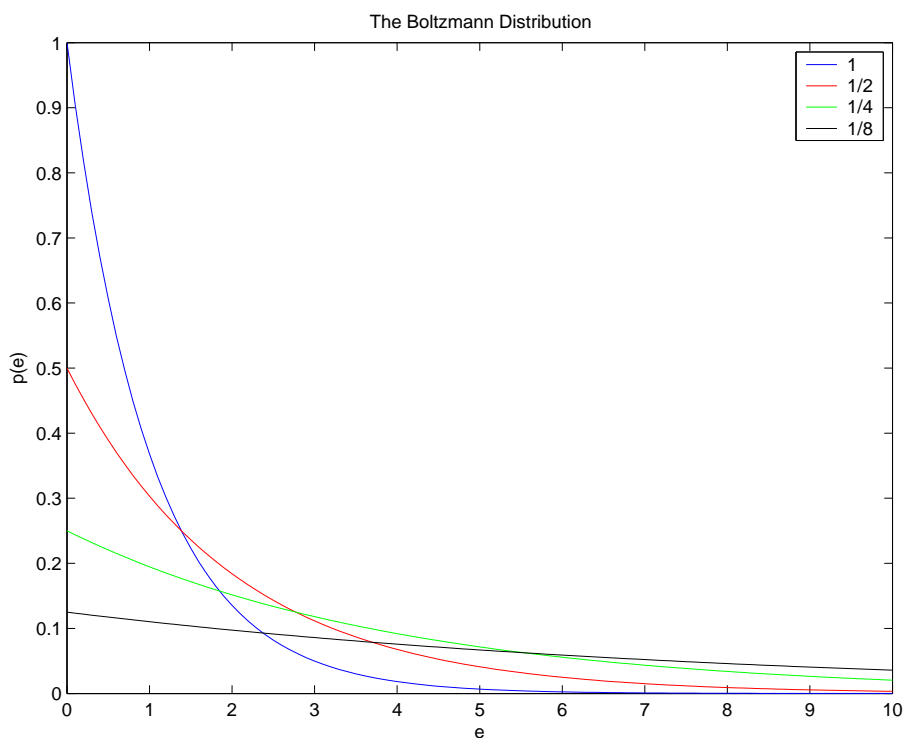


圖 3.1: 四個不同  $kT$  值的 Boltzmann 分佈圖

由分佈圖可發現，能量  $e$  越大或是溫度  $kT$  越小，則所對應的  $P(e)$  就越小。仔細觀察在能量差較大的情形下，在低溫時被接受機率會比在高溫狀態下還要大。原因要避免在高溫時，往能量更高的位置移動，而浪費搜尋的時間及成本。

模擬退火法之所以能找到整體最小值，主要是重覆使用 Metropolis 演算法。令  $T$  是可調整的溫度，我們在高溫下由初始值  $\mathbf{X}_0$  開始進行， $f(\mathbf{X})$  表示能量，令  $\Delta\mathbf{X}$  表示  $\mathbf{X}$  的變化量。然後令  $\Delta f$  表示目標函數隨著  $\Delta\mathbf{X}$  的變化量，即

$$\Delta f \triangleq f(\mathbf{X}^0 + \Delta\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}^0),$$

一般數值方法的迭代方式是若  $\Delta f < 0$ ，則取  $\mathbf{X}^1 = \mathbf{X}^0 + \Delta\mathbf{X}$ ；若  $\Delta f \geq 0$ ，則其  $\Delta\mathbf{X}$  將不被採用，這樣造成最後的結果只是初始值附近的局部極小值。

Metropolis 演算法是設計一種機率接受準則，當  $\Delta f \geq 0$  時，決定  $\Delta \mathbf{X}$  是否被採用，先計算兩個狀態的玻爾茲曼分佈機率之比值  $r$ ：

$$r = \frac{p(f(\mathbf{X}^0 + \Delta \mathbf{X}))}{p(f(\mathbf{X}^0))} = \frac{\frac{1}{kT} \exp\left(\frac{-f(\mathbf{X}^0 + \Delta \mathbf{X})}{kT}\right)}{\frac{1}{kT} \exp\left(\frac{-f(\mathbf{X}^0)}{kT}\right)} = \exp\left(\frac{-\Delta f}{kT}\right),$$

並選擇一均勻分佈在  $[0, 1]$  區間的任意數  $z$ 。如果  $r > z$ ，就令  $\mathbf{X}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{X}$ ；反之，便不選取。再由  $\mathbf{X}^1$  開始，重新取一個新的  $\Delta \mathbf{X}$ ，重覆同樣的步驟找出  $\mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3, \mathbf{X}^4, \dots$ 。所以Metropolis 接受準則可表示為：

$$P_r(\Delta f) = \begin{cases} 1, & \Delta f \leq 0 \\ \exp\left(\frac{-\Delta f}{kT}\right), & \Delta f > 0 \end{cases}$$

其中  $P_r$  為接受新狀態的機率。因此，這樣的迭代過程不會是一直往低處走，可避免迭代結果只落於初始值附近的局部最小值，如下圖所示：

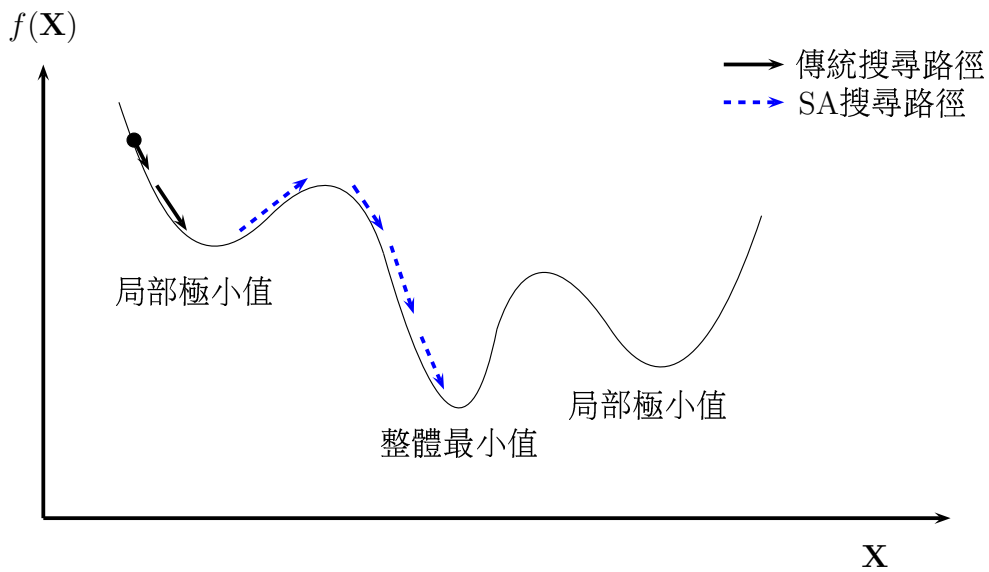


圖 3.2: SA 搜尋路徑示意圖

Metropolis 演算法的步驟如下：

1. 當初始溫度  $T$ ，狀態  $\mathbf{X}$ ，令  $\mathbf{X}^n = \mathbf{X}$ 。
2. 隨機選取一組新的狀態  $\mathbf{X}^*$ ，然後計算出

$$\Delta f \triangleq f(\mathbf{X}^*) - f(\mathbf{X}^n)$$

3. 若  $\Delta f \leq 0$ ，則  $\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^*$ ；反之，則在  $[0, 1]$  區間隨機產生一亂數  $z$ 。  
如果  $P_r(\Delta f) > z$ ，令  $\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^*$ ；否則便不選取， $\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}$ 。
4. 將上述步驟得到的  $\mathbf{X}^{n+1}$  當成  $\mathbf{X}$ ，返回退火過程。

在這裡我們簡略介紹模擬退火法，詳細的內容可參考[7-11]等文獻。模擬退火演算法之步驟如下：

1. 設定初始溫度  $T_s$  與結束溫度  $T_e$ ，並隨機產生一初始狀態  $\mathbf{X}$ 。
2. 以目前的溫度  $T$  及狀態  $\mathbf{X}$  為參數，代入 Metropolis 演算法，將得到的新狀態  $\mathbf{X}$ 。
3. 選擇以等差或等比的速度開始降溫。
4. 若  $T$  已經達到結束溫度  $T_e$ ，即  $T \leq T_e$ ，則執行下一步驟；反之，則繼續重覆2,3步驟。
5. 將最後狀態若  $\mathbf{X}$  作為收斂解輸出，並結束演算法。

在此需要留意一點，因為模擬退火法具有向上爬升的能力，所以最後狀態  $\mathbf{X}$  未必是停留在整體最小值的位置。因此，有兩個改進方式：一是設計一個集合，收集演算過程中所得到的  $\mathbf{X}$ ，再從中找出在整體最小值位置的狀態；或者加入一終止條件，若狀態已符合我們的要求，立即終止演算法，輸出  $\mathbf{X}$ 。



在熱處理的過程中，初始溫度、結束溫度、降溫速度等參數是相當重要的；不同的材質，不同的熱處理目的，就會有不同的參數設定。但是在模擬退火法中，我們的函數相當於是一種虛擬的材料，所以在退火的過程中，並沒有辦法明確知道一開始該加熱到幾度？該以怎樣的速度降溫？需要降到幾度才能使物體回到穩定的狀況？我們依據參考文獻[11]，來設定退火過程所需要的幾個參數：初始溫度、結束溫度、降溫速度。首先將

$$Pr(\Delta f) = \exp\left(\frac{-\Delta f}{kT}\right).$$

中，能量差  $\Delta f$  由絕對的變化量改變成相對的變化量，以  $\Omega f$  表示

$$\Omega f = \frac{\Delta f}{\max(f) - \min(f)},$$

其中  $\max(f)$  為設計空間中最大之能量， $\min(f)$  為設計空間中最小之能量；若  $\max(f), \min(f)$  並不明確知道，可以改用一個估計值  $MAX(\Delta f)$  來表示。

為了加快演算速度，避免在初始溫度  $T_s$  時，搜尋方向往能量更高的位置移動，而浪費計算成本，所以[11]建議初溫時的接受機率  $P_r(\Delta f)$  為 0.5，則

$$0.5 = \exp\left(\frac{-\Omega f}{kT}\right),$$

若  $\Omega f = 1$ ，則

$$T_s = \frac{-1}{\ln(0.5)} \doteq 1.443,$$

也就是說，在  $T_s = 1.443$  度時，由最低位能跳到最高位能只有 0.5 的接受機率。

當溫度降低靠近結束溫度  $T_e$  時，我們不希望向上爬升的接受機會太高；藉由改變  $\frac{\Omega f}{T_e}$  之值，比較  $\exp\left(\frac{-\Omega f}{kT_e}\right)$  的變化可發現，當  $\frac{\Omega f}{T_e} = 7$  時， $\exp\left(\frac{-\Omega f}{kT_e}\right) = 0.09\%$ 。因此，若選擇的結束溫度滿足

$$T_e = \frac{\Omega f}{7},$$

且讓溫度靠近  $T_e$  時，就算  $\Omega f$  增加量為 0.01% 也不願接受，則可結束溫度可設為

$$T_e = \frac{\Omega f}{7} = \frac{0.0001}{7} \doteq 0.000014286.$$

至於降溫速度，通常分成等比和等差下降兩種。可是隨著不同的最佳化問題，何種方式較為適合是難以決定的；然而只要降溫速度夠緩慢，搜尋結果才會比較驅近於最佳化問題的整體最佳解。設初始溫度  $T_s = 1.443$ 、結束溫度  $T_e = 0.000014286$ ，再配合不同的初始狀態、降溫速度，進行退火程序。若選擇等比速度降溫，例如公比 0.9，即

$$T_s \times 0.9^n = T_e$$

則可算出所需迭代次數

$$n = \frac{\log T_e - \log T_s}{\log 0.9} = \frac{\log 1.443 - \log 0.000014286}{\log 0.9} = 109.3669.$$

如此可推算出降溫速度與對應的迭代次數，如下表所示：

表 3.1: 降溫速度與對應的迭代次數表

降溫速度	0.99	0.98	0.9	0.8	0.7	0.6
迭代次數	1147	571	110	52	32	23

**例題 1** 利用模擬退火法求非線性系統

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0,$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

之近似解。我們先將系統化成最佳化問題的形式，令

$$F(x_1, x_2, x_3) = [f_1(x_1, x_2, x_3)]^2 + [f_2(x_1, x_2, x_3)]^2 + [f_3(x_1, x_2, x_3)]^2,$$

已知此非線性系統的解為  $(0.5, 0, -\frac{\pi}{6})$ 。我們取初始狀態  $(-2, 5, 1)$ ，以六種不同的等比速度降溫進行退火程序，所得測試結果如下：

表 3.2: 六種不同降溫速度之模擬結果

降溫速度	最後迭代結果	最佳解狀態	$F$ 之最小值	誤差
0.99	(0.4977, -0.1996, -0.5288)	(0.4977, -0.1996, -0.5288)	$1.8610e - 006$	0.2758
0.98	(0.4970, -0.1996, -0.5288)	(0.4979, -0.1995, -0.5288)	$1.1858e - 006$	0.2757
0.9	(0.4998, -0.1997, -0.5290)	(0.4986, -0.1996, -0.5289)	$2.1036e - 006$	0.2758
0.8	(0.5004, -0.0002, -0.5237)	(0.5005, 0.0001, -0.5236)	$3.5262e - 006$	$7.0430e - 004$
0.7	(0.5111, -0.1918, -0.5312)	(0.4957, -0.2004, -0.5281)	$4.5635e - 004$	0.2769
0.6	(0.2447, 0.1934, -0.5234)	(0.5090, 0.0012, -0.5293)	0.0141	0.0148

$$\text{誤差} = \frac{\|(0.5, 0, -\frac{\pi}{6}) - \text{最佳解狀態}\|_2}{\|(0.5, 0, -\frac{\pi}{6})\|_2}.$$

會選擇模擬退火法的原因是在於它不需要有良好的初始值才能收斂，這就比較只能求局部最佳解的方法方便許多；而且是以機率為基礎的搜尋演算法。也就是說，不用擔心所設定的初始值會不會落在局部最佳解，也不用考慮連續及可微的問題。但是模擬退火法有一個缺點，就是要設定的參數過多，且這些參數都會影響到模擬的結果。

我們發現溫度下降速度越快，即迭代次數越少，相對的搜尋範圍也較小；此時若初始值與整體最佳解相距甚遠，那麼就有可能得到未搜尋到整體最佳解的模擬結果。倘若迭代次數過多，初始值又恰好在整體最佳解附近，那麼也有可能造成所得結果會偏離整體最佳解的位置。

當然，我們也可以將模擬退火法當成是求出牛頓法或其他數值方法的良好初始值，再以收斂速度較快的牛頓法來計算。

至於不屬於上述幾種特殊情形，我們可用模擬退火法解出滿足  $e^{A+Q}$  的  $Q$  矩陣，將於下一章的例題中再做介紹。

# 第 4 章

---

## 時滯系統穩定性分析

---

單一時滯系統

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) \quad (4.1)$$

$$x(\sigma) = \phi(\sigma), \quad -h \leq \sigma \leq 0, \quad (4.2)$$

利用 Lyapunov 方法來判斷時滯系統是否為漸進穩定，定義一個表示能量的廣義狀態函數：

$$z(t) = x(t) + Q * x(t)$$

其中

$$Q * x(t) \equiv \int_{-h}^0 Q(-\sigma)x(t+\sigma)d\sigma = \int_{t-h}^t Q(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

對  $z(t)$  微分可得

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{x}(t) \frac{d}{dt} Q * x(t) \\ &= Ax(t) + Bx(t-h) + Q(t-\sigma)x(\sigma)|_{t-h}^t + \int_{t-h}^t \dot{Q}(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma \\ &= Ax(t) + Bx(t-h) + Q(0)x(t) - Q(h)x(t-h) \\ &\quad + \int_{t-h}^t \dot{Q}(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma \end{aligned}$$

由引理2.1中的(2.5)

$$\dot{Q}(t) = [A + Q(0)]Q(t)$$

和  $Q(h) = B$ ， $\dot{z}(t)$  可以再化簡

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= [A + Q(0)]x(t) + \int_{t-h}^t \dot{Q}(t-\sigma)x(\sigma)d\sigma \\ &= [A + Q(0)]x(t) + \int_{t-h}^t [A + Q(0)]Q(t)x(\sigma)d\sigma \\ &= [A + Q(0)]x(t) + [A + Q(0)] \int_{t-h}^t Q(t)x(\sigma)d\sigma \\ &= [A + Q(0)][x(t) + Q * x(t)] \\ &= [A + Q(0)]z(t) \end{aligned}$$

而且初始狀態定義成

$$\begin{aligned} z(t_0) = z_0 &= x(t_0) + Q(t_0) * x_{t_0} \\ &= \phi(0) + \int_0^h Q(\sigma)\phi(-\sigma)d\sigma \end{aligned}$$

因此，我們可以得到一個新的系統：

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= [A + Q(0)]z(t) \\ z_0 &= \phi(0) + \int_0^h Q(\sigma)\phi(-\sigma)d\sigma \end{aligned}$$

與所定義一個廣義狀態函數  $z(t) = x(t) + Q * x(t)$ ，我們可以發現當  $t \rightarrow \infty$ ， $x(t) \rightarrow 0$  則  $z(t) \rightarrow 0$ ；且當  $t \rightarrow \infty$ ， $z(t) \rightarrow 0$ ， $D(x_t) = 0$  是漸進穩定，則  $x(t) \rightarrow 0$ 。下面我們就由參考資料[4]，介紹等價系統的穩定性。

## 4.1 等價穩定性討論

這一節我們要試著證明等價穩定性是正確的。Hopfield 類神經網路系統:

$$\dot{x}(t) + E\dot{x}(t-T) = Ax(t) + Bx(t-T), \quad x(\tau) = \phi(-\tau), \quad T \leq \tau \leq 0 \quad (4.3)$$

其中  $T$  代表延遲時間，我們可以利用特徵函數

$$p(s) = \det (SI - A + (SE - B)e^{-sT}) \quad (4.4)$$

來分析此線性系統的穩定性；若系統(2.2)是穩定若且唯若所有  $p(s)$  的根都落在複數空間的左半平面。由於  $p(s)$  是包含  $e^{-sT}$  的超越數多項式(*transcendental polynomial*)，所以很難直接用來判斷系統的穩定性。雖然有許多定理可以判斷系統(2.2)的穩定性，但那些都只是充分條件而已。因此，我們將提出一個穩定性的充分且必要條件，並且用來討論具多重時滯之線性類神經網路(Linear Neural Network 簡稱 LNN)系統。

#### 4.1.1 等價系統的穩定性(Equivalent System for stability)

變數  $z(t)$  定義為

$$Z(t) \triangleq x(t) + Ex(t - T) + Q(t) * x(t) \quad (4.5)$$

其中  $*$  是褶積分運算子，亦即

$$Q(t) * x(t) = \int_{t-T}^t Q(t - \tau)x(\tau)d\tau = \int_{-T}^0 Q(-\tau)x(t + \tau)d\tau \quad (4.6)$$

那麼對  $Z(t)$  微分可得到

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \dot{x}(t) + E\dot{x}(t - T) + \frac{d}{dt}Q(t) * x(t) \\ &= \dot{x}(t) + E\dot{x}(t - T) + Q(t - \tau)x(\tau)|_{t-T}^t + \int_{t-T}^t \dot{Q}(t - \tau)x(\tau)d\tau \end{aligned}$$

將(4.3)代入上式得到

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= Ax(t) + Bx(t - T) + Q(0)x(t) - Q(T)x(t - T) + \int_{t-T}^t \dot{Q}(t - \tau)x(\tau)d\tau \\ &= [A + Q(0)]x(t) + [B - Q(T)]x(t - T) + \int_{t-T}^t \dot{Q}(t - \tau)x(\tau)dt \quad (4.7) \end{aligned}$$



選擇  $Q(t)$  為下列矩陣微分方程之解

$$\begin{aligned}\dot{Q}(t) &= [A + Q(0)]Q(t) \\ Q(T) &= B - [A + Q(0)]E\end{aligned}\quad (4.8)$$

則(4.7)就變成

$$\begin{aligned}\dot{Z}(t) &= [A + Q(0)] \left\{ x(t) + Ex(t-T) + \int_{t-T}^t Q(t-\tau)x(\tau)d\tau \right\} \\ &= [A + Q(0)] \{ x(t) + Ex(t-T) + Q(t) * x(t) \} \\ &= [A + Q(0)]Z(t)\end{aligned}$$

且  $z(t)$  的初始值依定義為

$$\begin{aligned}Z(0) &= x(0) + Ex(-T) + Q(0) * x(0) \\ &= x(0) + Ex(-T) + \int_{-T}^0 Q(-\tau)x(\tau)d\tau \\ &= \phi(0) + E\phi(T) + \int_{-T}^0 Q(-\tau)\phi(-\tau)d\tau \\ &= \phi(0) + E\phi(T) + \int_0^T Q(\tau)\phi(\tau)d\tau \\ &\triangleq Z_0\end{aligned}$$

在這裡我們就得到一個穩定性與系統(4.3)等價的非時滯系統：

$$\dot{Z}(t) = [A + Q(0)]Z(t) \quad , \quad Z(0) = Z_0 \quad (4.9)$$

將(4.8)化成

$$e^{[A+Q(0)]T}Q(0) = B - [A + Q(0)]E \quad (4.10)$$

便可以直接從(4.8)能解出  $Q(0)$ 。我們由系統(4.9)可以得到

$$Z(t) = e^{[A+Q(0)]T} Z_0 \quad (4.11)$$

### 4.1.2 Lyapunov 函數

考慮函數  $V(\cdot)$ ，其定義為

$$V(x_t) = [x(t) + Ex(t-T) + Q(t) * x(t)]^T P [x(t) + Ex(t-T) + Q(t) * x(t)] \quad (4.12)$$

其中  $P$  是 Hermitian 且  $x_t$  代表  $x(t)$  在  $[t - \tau, t]$  區間，也就是說， $x_T(\tau) \triangleq x(t + \tau)$ ,  $\tau \in [-T, 0]$ 。則下面引理成立：

**引理 4.1** 假設  $A + Q(0)$  是穩定，且  $R$  是任意的對稱正定矩陣，使得滿足 Lyapunov 函數：

$$P[A + Q(0)] + [A + Q(0)]^T P + R = 0$$

的  $P$  是正定矩陣。則存在連續非遞減函數  $\alpha, \beta, \gamma : R_+ \rightarrow R_+$  使得

$$\alpha(\|\phi(0)\|) \leq V(\phi) \leq \beta(\|\phi\|_*)$$

$$\dot{V}(\phi) < -\gamma(\|\phi\|)$$

**證明：** 令 Lyapunov 函數

$$V(x_t) = Z(t)^T P Z(t),$$

由(4.11)我們可以得到

$$\|Z(t)\| \leq \|e^{A+Q(0)t}\| \cdot \|Z_0\| \leq \|Z_0\|.$$

且因為

$$Z_0 = \phi(0) + E\phi(T) + Q(0) * \phi(0) \quad (4.13)$$

則存在一個常數  $M$  使得

$$\|Z_0\| = M\|\phi(0)\|$$

即

$$\|Z(t)\| \leq M\|\phi(0)\| \quad (4.14)$$

換句話說，由(4.13)可得到

$$\|\phi(0)\| \leq \|Z_0\| \leq \|e^{-(A+Q(0))t}\| \|Z(t)\|$$

則

$$\lambda_{m(p)}\|Z(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq \lambda_{M(p)}\|Z(t)\|^2$$

對  $V(\cdot)$  微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x_t) &= \frac{d}{dt}(Z(t)^T P Z(t)) = \dot{Z}(t)^T P Z(t) + Z(t)^T P \dot{Z}(t) \\ &= Z(t)^T [(A + Q(0))^T P + P(A + Q(0))] Z(t) \\ &= -Z(t)^T R Z(t) = -\|R^{\frac{1}{2}} Z(t)\|^2 = -\|R\| \|Z(t)\|^2 \\ &\leq -\gamma (\|\phi(0)\|) \end{aligned}$$

且

$$\gamma(r) = \|R\| M^2 r^2$$

其中  $\gamma(r) > 0$ ,  $r > 0$ 。 ■

**定理 4.1** LNN系統

$$\dot{x}(t) + E\dot{x}(t - T) = Ax(t) + Bx(t - T), \quad x(t_0 + \tau) = \phi(-\tau), \quad \tau \in [-\tau, 0]$$

是漸近穩定若且唯若等價系統

$$\dot{Z}(t) = [A + Q(0)]Z(t), \quad Z(t_0) = \phi(0) + E\phi(\tau) + Q(0) * \phi(0)$$

也是漸近穩定，其中  $Q(0)$  滿足下列方程式：

$$e^{(A+Q(0))T}Q(0) + [A + Q(0)]E = B \quad (4.15)$$

**證明：** (充分條件) 假設等價系統是穩定，即

$$R_e \lambda_i(A + Q(0)) < 0 \quad \forall i$$

則對於任意對稱正定矩陣  $R$ ，存在一對稱正定矩陣  $P$  滿足 Lyapunov 函數：

$$P(A + Q(0)) + (A + Q(0))^T P + R = 0$$

定義 LNN 系統的 Lyapunov 函數為

$$V(x_t) = Z(t)^T P Z(t)$$

則利用引理4.1若存在連續非遞減函數  $\alpha, \beta, \gamma : R_+ \rightarrow R_+$ ，使得

$$\alpha(\|\phi(0)\|) < V(x_t) < \beta(\|\phi\|_*), \quad x \in R^n$$

$$\dot{V}(\phi) < -\gamma(\|\phi(0)\|)$$

且當  $\gamma(r) > 0, r > 0$ 。

因此，依據 Lyapunov-Kransovskii 定理，可判斷出 LNN 系統是漸近穩定。

(必要條件) 假設 LNN 系統是漸近穩定，則所以特徵多項式為

$$p(s) = \det (SI - A + (SE - B)e^{-sT})$$

的根都落在複數平面的左半邊。將(4.15)代入上述的  $P(s)$  就可得到

$$\begin{aligned} p(s) &= \det (SI - A - Q(0) + Q(0) + SEe^{-sT} - Be^{-sT}) \\ &= \det (SI - A - Q(0) + Q(0) + SEe^{-sT} - e^{A+Q(0)T}Q(0)e^{-sT} - (A + Q(0))Ee^{-sT}) \\ &= \det \{(SI - A - Q(0)) + (SI - A - Q(0))Ee^{-sT} + (I - e^{-(SI-A-Q(0))T})Q(0)\} \end{aligned}$$

將指數項展開成 power series，即

$$\begin{aligned} p(s) &= \det \left\{ F(I + Ee^{-sT}) + (I - I + FT - \frac{F^2T^2}{2!} + \frac{F^3T^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{F^nT^n}{n!} + \dots)Q(0) \right\} \\ &= \det \left\{ F(I + Ee^{-sT}) + F(I - \frac{FT}{2!} + \frac{F^2T^2}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{F^{n-1}T^{n-1}}{n!} + \dots)TQ(0) \right\} \\ &= \det F \cdot \det \left\{ I + Ee^{-sT} + (I - \frac{FT}{2!} + \frac{F^2T^2}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{F^{n-1}T^{n-1}}{n!} + \dots)Q(0)T \right\} \end{aligned}$$

其中  $F \triangleq SI - A - Q(0)$ 。又因為

$$I - \frac{FT}{2!} + \frac{F^2T^2}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{F^{n-1}T^{n-1}}{n!} + \dots$$

收斂到複數平面上之解析函數，則  $A + Q(0)$  之奇異值必落在  $p(s)$  之頻譜內。由於  $p(s)$  之根落在開左半平面，知等價系統之所有奇異值也必如此。因此，等價系統必穩定。 ■

所以判斷時滯系統是否為漸進穩定，如果可以求出  $Q(0)$ ，只要代入  $\dot{z}(t) = [A + Q(0)]z(t)$  檢驗是否穩定即可(不需要進一步算出  $P$  是否為正定)，即

$$Re\lambda([A + Q(0)]) < 0 \Rightarrow \text{系統是穩定的。}$$

## 4.2 文獻例題

下面的例題是出自於[2]，現在我們將採用等價系統的穩定性來判斷系統是否真為漸進穩定。

例題 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.66 & -0.699 \\ 0.93 & -0.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{bmatrix}.$$

我們由引理2.1中的(2.5)可得

$$e^{(A+Q(0)) \cdot h} \cdot Q(0) = B$$

此即為第 3 章最後所要討論的情形，因此我們將利用模擬退火法，求

出  $Q(0)$  矩陣。已知矩陣  $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1.66 & -0.697 \\ 0.93 & -0.330 \end{bmatrix}$ ，令  $Q =$

$$Q(0) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \text{ 而且 } e^{A+Q} = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}, \text{ 假設 } f(Q) = e^{A+Q} \cdot Q - B,$$

即

$$\begin{aligned} f(Q) &= \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_1x_1 + M_2x_3 - b_{11} & M_1x_2 + M_2x_4 - b_{12} \\ M_3x_1 + M_4x_3 - b_{21} & M_3x_2 + M_4x_4 - b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因此可以得到下面的聯立方程組

$$\begin{cases} f_1 = M_1x_1 + M_2x_3 - b_{11} = 0 \\ f_2 = M_1x_2 + M_2x_4 - b_{12} = 0 \\ f_3 = M_3x_1 + M_4x_3 - b_{21} = 0 \\ f_4 = M_3x_2 + M_4x_4 - b_{22} = 0 \end{cases}$$

再令

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (M_1x_1 + M_2x_3 - 1.66)^2 + (M_1x_2 + M_2x_4 + 0.697)^2 \\ + (M_3x_1 + M_4x_3 - 0.93)^2 + (M_3x_2 + M_4x_4 + 0.330)^2,$$

即化成最佳化問題之型式。我們同樣設初始溫度  $T_s = 1.443$ 、結束溫度  $T_e = 0.000014286$ ，取初始狀態  $(1, -2, 3, 0)$ ，以六種等比速度降溫，進行模擬退火法。測試結果如下：

表 4.1: 六種等比降溫速度之模擬結果

降溫速度	最後迭代結果	最佳解狀態	$F$ 之最小值
0.99	(2.0027, -0.0023, 0.0056, 0.9974)	(2.0030, 0.0031, 0.0035, 1.0054)	$7.9181e - 005$
0.98	(1.9992, 0.0143, 0.0039, 1.0068)	(1.9977, 0.0134, 0.0038, 1.0054)	$1.0200e - 004$
0.9	(1.9622, 0.0281, -0.0282, 1.0581)	(1.9583, 0.0404, -0.0174, 1.0345)	0.0065
0.8	(2.0050, -0.0057, 0.0086, 0.9903)	(2.0065, -0.0059, 0.0086, 0.9911)	$5.7199e - 004$
0.7	(1.9952, -0.0015, -0.0001, 1.0065)	(1.9980, -0.0039, -0.0013, 1.0087)	$1.0797e - 004$
0.6	(1.9527, 0.1060, 0.0146, 1.0083)	(2.0080, -0.0069, 0.0017, 1.0086)	$5.1391e - 004$



我們將上述最佳解狀態代入 Broyden 法當做初始值，找到了更好的最佳解  $(1.9994, 0.0035, 0.0025, 1.0047)$ ，其誤差可準確到  $10^{-4}$ 。所以得知  $Q(0)$  之近似解為

$$Q(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

則由等價系統的穩定性

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} &= ([A + Q(0)]) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= \left( \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

故得到

$$\lambda(A + Q(0)) = \{-1, -2\}$$

因此亦可證得此系統是漸進穩定。

# 第 5 章

---

## 結論

---

要利用定理4.1等價系統穩定性判斷時滯系統是否穩定性時，則必須要解決的問題便是如何解出  $Q(0)$ ，即矩陣型的 Lambert  $W$ -函數問題的擴張。當時滯系統是3.2節所介紹的幾種特殊情形，藉由本文討論的結果可判斷  $Q(0)$  矩陣是否存在，以及  $Q(0)$  解的個數，並且算出  $Q(0)$  矩陣；至於一般情形之下， $e^{A+Q(0)} \cdot Q(0)$  之數據過於繁雜，目前無法分析出解的一般式，因此利用解最佳化問題的數值方法，求得近似解。

由3.2節討論的結果知道  $Q(0)$  矩陣可能不存在，可能並不唯一。那麼  $Q(0)$  矩陣與系統穩定之間的關係便值得我們進一步去探討，例如：

1.  $Q(0)$  不存在，即找不到穩定性等價系統，這樣能否判定時滯系統就是不穩定？
2.  $Q(0)$  若不唯一，是否會有可能  $Re\lambda([A+Q(0)]) < 0$  和  $Re\lambda([A+Q(0)]) \geq 0$  的情形同時存在？那麼又該如何判斷系統的穩定性？

本文是以時滯時間  $h = 1$  的例子進行討論；倘若我們從  $h = 0$  開始，慢慢增加時滯時間，並算出每個時滯時間下滿足  $e^{[A+Q(0)] \cdot h} \cdot Q(0) = B$  的  $Q(0)$  矩

陣，則由  $Re\lambda([A + Q(0)]) > 0$  可觀察出系統維持穩定的最大時滯時間。

最後，本文雖然只討論 2 乘 2 矩陣對角和上三角的情形，倘若繼續分析出其他特殊情形，甚至一般情形下  $A, B, Q$  矩陣的關係，那時，對於任意  $A, B$  矩陣便能直接得知其對應  $Q(0)$  矩陣。另外，對於 3 乘 3 矩陣在對角或上三角等特殊情形下，我們發現其  $Q(0)$  的一般式是與 2 乘 2 矩陣時的  $Q(0)$  矩陣一般式是有關的！因此，當系統是  $n$  乘  $n$  矩陣時，我們也許可以利用數歸納法證明並找出在特殊情形下  $Q(0)$  矩陣的一般式。

---

## 參考文獻

---

- [1] *Yang Kuang: DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS With Applications in Population Dynamics. Academic Press, Boston, 1993.*
- [2] *M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi: Time-Delay System Analysis, Optimization and Applications. North-Holland, Amsterdam, 1987.*
- [3] *V. L. Kharitonov: Robust stability analysis of time delay systems : A survey. Annual Reviews in Control, 23 (1999) 185–196.*
- [4] 黃皇男：線性輸入/輸出時滯微分系統之近似，行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告，東海大學數學系，2003.
- [5] 何肇寶：動態系統及應用，全華，東海大學應用數學系，1997.
- [6] *Robert M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth: On the Lambert W Function. Advances in Computational Mathematics, volume 5, (1996) 329–359*
- [7] *Richard L. Burden and J. Douglas Faires: NUMERICAL ANALYSIS, 7th Edition. (2000) 278-286*

- [8] *N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, E. Teller:* Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *J. Chem. Phys.* **21** (1953) 1087-92
- [9] *S. Kirkpatrick, C. Gelatt Jr., and M. Vecchi:* Optimization by Simulated Annealing. *Technical Report RC9355, IBM Research Report, 1982.*
- [10] *S. Kirkpatrick, C. Gelatt Jr., and M. Vecchi:* Optimization by Simulated Annealing. *Science, Vol.220, No.4598, (1983) 498-516.*
- [11] *S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt Jr., and M. P. Vecchi:* Optimization by Simulated Annealing: Quantitative Study. *J. Statistical Physics, Vol.34, (1984) 975-986.*
- [12] 蘇鴻潤：模擬退火法之參數選擇，碩士論文，國立台灣工業技術學院機械工程技術研究所，1997.
- [13] 黃俊銘 編譯：數值方法—使用MATLAB程式語言，第二版，全華，2001.
- [14] *Magdi S. Mahmoud:* Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems. *Marcel Dekker, Inc, New York, 2000.*
- [15] *Sree Ram Valluri, Robert M. Corless, and David J. Jeffrey:* Some applications of the Lambert  $W$  function to physics. *Canadian Journal of Physics,* **78**, (2000) 823-831.

- [16] 林秋君：多重輸入時滯系統之Hankel範數計算，碩士論文，東海大學數學系研究所，2001.
- [17] *D. A. Barry, P. J. Culligan-hensley, and S. J. Barry: Real Values of the W-Function. ACM Transactions on Mathematical Software, Volume 21, Issue 2 (June 1995) 161 - 171*
- [18] *EULER, L. 1921. De Serie Lambertina Plurimisque Eius Inqignibus Proprietatibus. In Leonhardt Eulert Opera omnia: sub ausptciis Societatts Sctentiarum Naturalium Helvettcae, edenda curaverunt F. Rudio, A. Krazer, P. Stackel. Series Prima VI, pp. 350 ft.*
- [19] *DE BRUIJN, N.G. : Asymptottc Methods in Analysts. North-Holland, Amsterdam, (1958) 25-28.*
- [20] *D. A. Barry , S. J. Barry , P. J. Culligan-Hensley : Algorithm 743; WAPR: a Fortran routine for calculating real values of the W-function. ACM Transactions on Mathematical Software, v.21, n.2, (June 1995) 172-181*