

# 第一章 緒論

## 第一節 研究動機

選擇權自國外的櫃台市場興起，直到芝加哥期貨交易所於 1973 年掛牌後，選擇權買權才正式在交易所交易，之後在美國股票交易所、太平洋股票交易所、費城股票交易所紛紛開始掛出股票選擇權上市交易，直到 1977 年又開始出現了賣權掛牌，選擇權的交易量才快速成長，到 1980 年後選擇權的交易標的物從股票擴展到其他金融資產、實質商品；其中包括外匯、利率、股價指數及期貨選擇權等等。由此可見選擇權的發展速度在國際金融市場上是不可小覷的。

近年來，台灣的金融市場快速變遷，不斷推出新型金融商品，其中最受國人注意的，即是台灣期貨交易所在 2001 年 12 月 24 日推出的「台灣證券交易所股價指數選擇權」又稱「台指選擇權」<sup>1</sup>；台指選擇權會受國人注目主要的原因是台指選擇權為短線最佳獲利工具之一，由於它是短線操作成本低且以小額權利金可賺取大額的利潤等等之因素，使得投資人在作避險或短期獲利時，常會使用的投資工具。根據台灣期交所資料，台灣加權股價指數選擇權自上市以來，成交量日益增加，從每天日平均交易量為 1293 口，到目前每天日平均交易量至上萬口，足見國內投資人對選擇權市場的參與程度有顯著增加的趨勢。

在選擇權訂價模型中，自 1973 年 Black and Scholes 發表了著名的選擇權訂價模型，後來的學者更是以此模型為其研究的範本，由此可知，Black and Scholes 模型在選擇權訂價上是非常重要的。然而，選擇權市場不斷的發展，使得選擇權交

---

<sup>1</sup> 詳細台指選擇權內容，請參照附錄一

易的標的物從開始的個股，擴張至其他商品，所以，單純的 Black and Scholes 模型已經無法正確估計其他不同交易標的物之選擇權。也就是說，Black and Scholes 模型的假設已經不符合目前市場，如：利率和波動固定或無交易成本....等等。後來的學者則針對這些不合理的假設進行研究，新的模型則陸續發表，例如：Meron( 1973 )假設利率為隨機變動的模型。Hull and White( 1987 ) Heston( 1993 )假設波動為隨機過程的模型。也有考慮股價的變動過程，可能有突然的且不可預測的跳動，例如：Bates ( 1996 ) 及 Scott ( 1997 ) 等隨機跳躍模型。

在 Black and Scholes 模型中，影響選擇權定價有五個變數函數，包括了標的資產的現貨價格、契約所訂的履約價格、契約到期的時間長短、標的資產價格的波動程度及現行的無風險利率水準，本研究將探討的則是波動性變化對選擇權訂價的影響，本研究將針對台指選擇權進行分析，結合傳統的 Black and Scholes 模型和 Hull and White 模型搭配 GARCH 模型、EGARCH 模型及 Long Memory GARCH 模型（簡稱 FIGARCH）來進行研究，以提供投資人作為判斷台指選擇權價格的依據。

## 第二節 研究目的

雖然後來有許多學者針對 Black and Scholes 模型的假設提出不同的模型和方法，但終究還是依據著 Black and Scholes 模型，所以在本研究中，也是以 Black and Scholes 模型為研究主題，進而與 Hull and White 模型做比較，只不過在一般研究中波動參數的估計是以單變量 GARCH 模型為主要估計方法，本研究中將以

一般的 GARCH 模型、EGARCH 模型和 FIGARCH 模型作為波動參數的估計，配合著 Black and Scholes 模型和 Hull and White 模型，來探討台指選擇權的訂價，因此本研究的目的可分為以下幾點：

1. 運用 GARCH 模型、EGARCH 模型、FIGARCH 模型三種不同波動參數估計方法，來估計選擇權的波動性。
2. 以台灣加權股價指數選擇權為研究的標的，分別在遠月、近月、價內外不同程度，運用 Black and Scholes 模型和 Hull and White 模型，計算出訂價，再和市場價格作比較，觀察是否會有誤差過大的問題產生，找出最佳的訂價方法。
3. 分析模型之誤差，並找出影響理論價格和市場價格偏誤的主要因素且分析投資人的行為所造成的影響。

### 第三節 本文架構

本文的架構將分為五大章，各章內容如下：

#### 第一章 緒論

分別為三節，主要是介紹研究動機、研究目的和本文架構。

#### 第二章 文獻回顧

主要是要介紹國內外相關文獻，包括對於 Black and Scholes 模型和 Hull and White 模型的研究，還有波動估計的相關文獻。

#### 第三章 研究方法

主要是介紹 Black and Scholes 模型和 Hull and White 模型的推導，和在波動

參數估計上使用方法,也就是單變量 GARCH 模型和 Long Memory GARCH 模型的推衍過程。

#### 第四章 實證分析

本章主要以台指選擇權為研究對象,運用 Black and Scholes 模型和 Hull and White 模型,配合波動參數估計方法,作實證分析比較、分析誤差來源及投資人的行為分析。

#### 第五章 結論與建議

最後一章則是對我們實證結果作個總結,對於以後有興趣的研究者提出一些建議。

## 第二章 文獻回顧

### 第一節 國內外相關文獻

#### (一) 國外文獻

近期幾年來，愈來愈多學者作了許多有關選擇權評價的研究，一般而言，選擇權的評價方式又可以分為二大類：第一類：數值解法，例如：蒙地卡羅模擬法、樹狀圖法。在文獻上最早將蒙地卡羅模擬用於選擇權評價之文章為 Boyle(1977)，其方法主要透過模擬產生標的資產變動的隨機過程，透過多次重複模擬標的資產的價格路徑，並在風險中立的假設下，導出選擇權的價格，但此種方法適用於歐式選擇權上且其計算效率性較差。樹狀圖法以 Cox, Ross and Rubinstein(1979)二元樹模型（又稱 CRR model）為主，主要是以離散時間的方式去描述標的資產之價格行為，且在無套利機會下，導出風險中立的評價模型；特別注意的是，在此模型中，假設標的資產報酬的波動性為常數。

第二類：為公式解法，例如：Fischer Black and Myron Scholes (1973)提出的 B-S 模型，此模型是利用無風險套利原則下，應用物理學的熱傳導理論中推出一條可在股票選擇權訂價上的數學式，此模型考量大部份會影響選擇權的因素。然而，由於 B-S 模型的假設多，又不符合市場的變化；於是在 1987 年 Hull and White 發表了 Hull and White 隨機波動模型，可知波動性和股價的關係會影響選擇權的定價，如在波動性和股價呈現正相關時，在價內時，B-S 模型理論定價高於 Hull and White 隨機波動模型理論定價，在價外則呈現相反關係；而波動性和股價出現負相關時，在價內時，B-S 模型理論定價會低於 Hull and White 隨機波動模型

理論定價，在價外時就呈現相反關係；波動性和股價無關時，在價平時，B-S 模型理論定價則高於 Hull and White 隨機波動模型訂價。

在實証文獻方面：James B. WIGGINS(1987)認為在 B-S 模型理論定價之下，從實証可知對長到期日的指數選擇權而言，在 B-S 模型定價在價外範圍時相較於價內範圍時會有高估的情形出現。Corrado and Su(1998)以 Hull and White 隨機波動模型對 S&P 500 選擇權進行實証，發現隨機波動模型顯著優於固定波動模型。

Nandi(1998)主要利用隨機波動模型，討論 S&P 500 指數報酬率和波動性的相關性程度，認為若此兩者有相關性存在時，對價外且樣本區外之評價和樣本區內評價的績效皆可以改善。

## (二) 國內文獻

選擇權是近期新興衍生性金融商品，而在國內股價指數選擇權是在 2001 年才成立的，故在早期的國內相關文獻大多是以認購權為主要的研究題材，如陳香君(2001) 以台灣認購權證為研究對象，探討 Hull & White ( 1987 ) 隨機波動選擇權評價模型與 Black & Scholes ( 1973 ) (簡稱 B-S 模型)選擇權評價模型訂價績效之比較，及錯價原因之分析。結果發現隱含波動與隨機波動模型之組合，可獲得最佳之訂價模型。進一步比較隱含波動性與時間序列波動性之估計方法發現，不論是以 B-S 模型亦或隨機波動模型，由隱含波動性方法所預測之訂價誤差最小。在時間序列方法中，歷史波動性與 B-S 模型組合之訂價誤差最大，市價偏離理論價格最嚴重；而 GARCH 與 B-S 模型之組合或與隨機波動模型之組合和 EGARCH

與 B-S 模型之組合間並無顯著差異。

楊玉菁(2001)也對目前台灣認購權證市場的現況作了整理及比較。此篇選擇歷史波動性及隱含波動性二種價格波動估計搭配 Black - Scholes 模型、二項式模型、Leland 模型及 Boyle&Vorst 四種評價模型，共估測八種理論價格來和市價比較並計算各權證理論價格和市價之絕對誤差。研究結果發現各權證之隱含波動性明顯高於歷史波動性，且以前一天隱含波動性所計算出來的模型理論價格和市價並無差異；但以歷史波動性所計算出來的模型理論價格和市價有顯著的差異。在四種模型比較研究中，就歷史波動性而言，以 Boyle&Vorst 此模型的理論價格和權證市價的訂價絕對誤差百分比最小，而就隱含波動性而言，則以 B - S 模型最佳。價內外比、距離到期日期間、標的股票價格波動性都會影響訂價誤差，但認購權證市場成交量則無系統性的影響。

陳浚宏(2003)以台灣股價指數選擇權為標的，採用 B-S 模式、Hull & White (1987) 模式及 Heston (1993) 模式等三種模型分別配合歷史波動性與 GJR GARCH 波動性，對台灣股價指數選擇權進行實證研究，衡量及比較理論價格之誤差，並進行誤差原因的分析。結果發現，遠月份台股指數選擇權之平均絕對誤差(MAE)與均方根誤差(RMSE)，其最小誤差絕大多數出現在 Heston (1993)模型配合歷史波動性之模式上。近月份台股指數選擇權在深度價內、價內與價平等價位，所有的模型配合各種波動性均高估了市場的價格；至於價外與深度價外選擇權，平均而言各種模式的理論價格高估了市場價格。而對近月份台股指數選擇權，B-S 模型配合歷史波動性為最佳模式，Heston (1993)模型配合 GJR GARCH

波動性為最差之模式；遠月份台股指數選擇權，Heston (1993)模型配合歷史波動性為最佳之模式。Hull & White (1987)模型配合 GJR GARCH 波動性為最差之模式。GJR GARCH 波動性模型並未優於歷史波動性模型、隨機波動性模型並未優於 B-S 模型。

關旭東(2004) 用 Hull-White(1987)模型搭配隱含波動度及 GJR-GARCH 波動度，並以台灣加權指數選擇權為實證標的，探討使用隨機波動度模型是否較使用 Black & Scholes 模型更能得到精確的價格。結果發現，近月契約時，價內程度愈高時，使用 Hull-White 模型搭配 GJR-GARCH 效果最佳。價外程度愈高時，則是以 Black-Scholes 模型搭配隱含波動度為最佳，且近月契約的理論價格偏離市價之情形較遠月契約嚴重。誤差來源分析方面，權利期間的長度、現貨市場報酬之波動度、價內外程度、股價報酬率以及成交量等因子，在不同的模型搭配不同波動度時，對誤差程度分別都有不同的影響。

李季芳(2004)主要探討台灣股價指數選擇權之價格特性並檢視考慮標的資產報酬率的高階動差及考慮隨時間改變的波動性之後，Edgeworth 二元樹演算法與 Edgeworth GARCH 演算法在評價上的適用性，以 Black 和 Scholes 模型為比較基礎，結果發現，台灣加權股價指數的報酬率分配顯著不服從常態分配，而且其波動性呈現隨時間改變之特性。因此，考慮報酬率分配高階動差的 NGARCH 模型有助於刻劃股價指數的行為。評價績效方面，對台指選擇權而言，B-S 模型的評價績效與 Edgeworth 二元樹演算法的評價績效在統計上並無差異。標的資產以台指期貨替代的 Edgeworth 二元樹演算法對台指買權之評價績效優於以台指現



貨為標的資產進行評價之 Edgeworth 二元樹演算法。Edgeworth GARCH 選擇權演算法之評價績效並不顯著優於 BS 模型。

## 第二節 波動參數估計之文獻

### 一、自我迴歸條件異質變異數模型 (ARCH model)

在傳統的經濟模式中，都會假設變異數在一段期間都是維持不變的，但是此假設通常是不符合實際狀況，基於許多實證上顯示許多有關報酬率的財務資料會有異質變異數的情形，為了一般化此不合理的假設，Engle 在 1982 年時，引入一種新的隨機過程稱為自我相關條件異質變異數 (ARCH)，且允許條件變異數受過去  $p$  期之誤差平方項的影響，故變異數會隨著時間而改變，此種分析模式稱為 ARCH ( $p$ ) 模式。若在以往實證研究所採用的傳統迴歸模型下，且  $y$  為一簡單線性函數，如下：

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t$$

$\varepsilon_t$  假設為白噪音 (white noise)，且變異數為固定。而 Engle (1982) 發現隨機誤差值的變異數並不穩定且會受到過去資訊影響，因此提出 ARCH 模型，在其設定的模型中加入條件變異數會受過去  $p$  期誤差項平方的影響，模型表示如下：

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t \quad y_t | \Omega_{t-1} : N(x_t \beta, h_t)$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t \beta \quad \varepsilon_t | \Omega_{t-1} : N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2$$

$y_t$  : 為 ARCH(p)時間序列模型資料

$\Omega_{t-1}$  : 至 t-1 期為止所有可利用的資訊集合

$x_t\beta$  :  $y_t$  的平均數，為落後期的內生變數與外生變數的線性組合  $i=1, \dots, p$  的條件變異數，受過去  $p$  期干擾項的影響

$p$  : ARCH 模型階數

在 ARCH 模型中，要使條件及非條件變異數恆為正值，所以我們必須要加上一個限制，也就是  $\alpha_i \geq 0$  ,  $i=0,1,2,\dots,p$ 。

在 ARCH 模型中，由於條件變異數  $h_t$  為前幾期誤差項平方之函數，當前期誤差項平方發生大幅度波動時，當期誤差項平方也會受到其影響，也就是會發生同方向的大幅度波動，反之亦然。此結果和許多實證研究結果相符，如 Mandelbrot(1963)在金融市場中所觀察普遍存在的預測誤差變異數叢聚現象相符。

但 ARCH 模型也有以下缺點：(1) 無法處理非對稱性報酬，亦是模型只有考慮大小，並未考慮方向。(2) 描述資產報酬波動性需要較多的參數，即配適模型需要較高的階數。(3) 參數不易估計，為了確保變異數不可為負，故要求  $\alpha_i \geq 0$ ，導致參數過多，估計不易。(4) 無法描述條件變異數具振動現象，對於模型參數基本假設  $\alpha_i \geq 0$  為非負條件，此限制使條件變異數為正，而不具有振動現象。(5) 最後會有過度預測的現象出現。

## 二、一般化自我迴歸條件異質變異數模型 (GARCH)

Engle(1982)發展出 ARCH 模型後，許多學者就開始研究此模型，結果發現 ARCH 模型中的落後期可能過長，且要求每一個參數皆為正值不易達成，然而，Bollerslev(1986)實證發現股價報酬率的機率分配具有厚尾 ( Fat-Tail ) 的特性，為了符合實證資料具有厚尾特性，Bollerslev 考慮落後期的條件變異數，並將此納入 ARCH 模型中發展成為一般化自我條件迴歸條件異質變異數模型( GARCH )，GARCH 模型表示條件變異數是過去變異數以及過去殘差項的線性組合，故又稱 Linear GARCH。

GARCH(p,q)模型結構表示如下：

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} : N(0, h_t)$$

其中：

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}$$

$$= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t$$

上式中參數的限制條件為  $\alpha_0 > 0$ 、 $\alpha_i \geq 0$ ， $i = 1, 2, 3, 4, \dots, p$

其中：

$y_t$ ：符合 ARCH 模型時間序列資料

$$A(L) \equiv \alpha_1 L + \dots + \alpha_p L^p$$

$$B(L) \equiv \beta_1 L + \dots + \beta_q L^q$$

從上述模型可看出，GARCH 模型中的條件變異數除了受到 ARCH 模型中

所設的前  $p$  期殘差項平方影響外，還受到本身過去  $q$  期條件變異數的影響。

而 Bollerslev(1986)將原式改寫為：

$$h_t = \alpha_0(1-B(L))^{-1} + (1-B(L))^{-1}A(L)\varepsilon_t^2$$

$$= \alpha_0(1-\sum_{j=1}^q b_j)^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \varepsilon_t^2$$

其中：

$$\delta_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{i-j}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots, p, \quad n = \text{Min}\{q, i-1\}$$

$$= \sum_{j=1}^n \beta_j \delta_{i-j}, \quad i = p+1, \dots$$

由上式可知，GARCH(p,q)可轉化為 ARCH( $\infty$ )過程，且 GARCH 在參數估計方面比 ARCH 更加容易。所以，根據有限的 ARCH(p)過程，若

$A(L)(1-B(L))^{-1} < 1$ ，則  $A(L)+B(L) < 1$ ，GARCH(p,q)就滿足一般廣泛的穩定條件。因此 Bollerslev 就以 GARCH(p,q)的平穩條件提出以下的定理：

若 GARCH 過程具有  $E(\varepsilon_t) = 0$ ， $\text{Var}(\varepsilon_t) = \alpha_0[1-A(L)-B(L)]^{-1}$ ， $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ ， $t \neq s$ ，若且唯若  $A(L)+B(L) < 1$ ，則 GARCH(p,q)符合廣義平穩條件。

### 三、指數 GARCH 模型 (EGARCH)

EGARCH 模型是 GARCH 模型的延伸，為 Nelson(1991)所提出的模型，EGARCH 模型主要是針對美國股市報酬波動之不對稱性所作的研究。其模型設定如下：

$$y_t = x_t \lambda + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | \psi_{t-1} : N(0, h_t)$$

$$\log(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left\{ \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} + g_i \left[ \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{\sqrt{h_{t-i}}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \right\} + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(h_{t-j})$$

其中：

$$p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad \alpha_0 > 0$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, p$$

$$\beta_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, q$$

$\gamma_i$ ：反應波動不對稱性之參數

$g_i$ ：反應未預期變動之規模參數

$y_t$ ：報酬率

$x_t \lambda$ ：平均值

$\varepsilon_t$ ：殘差項

$h_t$ ：t 期股票報酬率的變異數

$\psi_{t-1}$ ：t-1 期的資訊集合

若  $\gamma_i > 0$ ，則正向未預期報酬所引起之波動大於負向未預期報酬所引起之波動。

EGARCH 模型主要是對 GARCH 模型無法處理非對稱性報酬及無法描述條件變異數具振動現象來做修正。此模型考慮到波動大小和波動方向，解決非對稱性結構問題，由於放鬆條件變異數模型參數不為負的假設，使得條件變異數具振動現象。

#### 四、長記憶式一般化自我迴歸條件異質變異數模型 (Long Memory GARCH)

在介紹 Long Memory GARCH 模型之前，本研究先要說明 FARIMA 模型，由於 FARIMA 模型通常可以直接用來捕捉有價證券報酬波動性的長記憶行為的模型，因為波動性的估計值會比較難以估計，在此情況下，GARCH 模型則提供了一個較可行的方法以方便估計波動性。而我們可知道二因子 GARCH 模型可以用來捕捉長期波動較高的持續性情況和短期的短暫波動情形。

如此可知，本研究將以 GARCH 模型來說明 Long Memory GARCH 模型，GARCH 模型定義如下式：

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)\sigma_t^2 \quad (1)$$

其中：

$\omega$  為截距項

$L$  為遞延期數的運算符號

$$\alpha(L) \equiv \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q$$

$$\beta(L) \equiv \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p$$

而  $\varepsilon^2$  為恆定過程，則  $[1 - \alpha(L) - \beta(L)]$  和  $[1 - \beta(L)]$  所有的根 (root) 皆限制位於單循環外；GARCH(p,q) 模型也可以寫成具有無限序列 (infinite-order) ARCH 模型，

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega [1 - \beta(L)]^{-1} + \alpha(L) [1 - \beta(L)]^{-1} \varepsilon_t^2 \\ &\equiv \omega [1 - \beta(L)]^{-1} + \lambda(L) \varepsilon_t^2 \end{aligned} \quad (2)$$

相對的，(1) 式的 GARCH 模型也可以寫成 ARMA(m,q) 模型，表示如下：

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)] \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)] v_t \quad (3)$$

其中  $m \equiv \max\{p, q\}$ ，而  $v_t \equiv \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$  為期望值等於 0 的連續不相關變數，當遞延自我迴歸多項式： $1 - \alpha(L) - \beta(L)$ ，具有單根性質下，Engle 和 Bollerslev(1986) 的文獻中有提到，GARCH(p,q) 模型則推演為 IGARCH(p,q) 模型，模型表示如下：

$$\phi(L)(1-L) \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)] v_t \quad (4)$$

在(4)式中的  $\phi(L) \equiv [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1-L)^{-1}$ ，要推得 FIGARCH(p,q) 模型，只需要將(4)式中的一階差分用部份差分來替代。如何推得 FIGARCH(p,q) 模型，我們從 ARFIMA(k,d,1) 模式來說明之，間斷時間實值過程  $\{y_t\}$  的定義如下：

$$a(L)(1-L)^d y_t = b(L) \varepsilon_t \quad (5)$$

其中  $a(L)$  和  $b(L)$  為遞延多項式，序列 (order) 分別為  $k$  和  $1$ ， $\{\varepsilon_t\}$  則為期望值等於 0 且連續不相關的過程， $(1-L)^d$  為部份差分，其二項擴展式表達如(6)式，

$$\begin{aligned} (1-L)^d &= F(-d, 1, 1; L) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(k-d) \Gamma(k+1)^{-1} \Gamma(-d)^{-1} L^k \\ &\equiv \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k L^k \end{aligned} \quad (6)$$

$\Gamma(\cdot)$  為 Gamma 的函數。

在 ARFIMA 模型中，實際上解決短期和長期動態的問題，其短期動態行為透過 ARMA 模型的遞延多項式  $a(L)$  和  $b(L)$ ，長期動態行為特徵則以部份差分參

數  $d$  表示。如此可知，我們可利用 ARFIMA(k,d,1) 模型，得到 FIGARCH(p,d,q) 模型，其方程式定義如下：

$$\phi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t \quad (7)$$

當  $d=0$  時，則 (7) 式為 GARCH 模型，而  $d=1$  時，則 (7) 式為 IGARCH 模型，當  $0 < d < 1$  時，則 (7) 式為部份差分平方殘差  $(1-L)^d \varepsilon_t^2$  或符合恆定 ARMA(m,q) 模型，且  $\phi(L)$  和  $[1 - \beta(L)]$  的所有根 (root) 位於單循環外；我們將 (7) 式重新表示如 (8) 式：

$$[1 - \beta(L)]\sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(L) - \phi(L)(1-L)^d]\varepsilon_t^2 \quad (8)$$

(8) 式則是由 Baillie, Bollerslev, Mikkelsen(1996) 所提出的部份積分 GARCH 模型或稱為 FIGARCH(m,d,q) 模型。當  $0 < d < 1$  時， $\phi(L)$  和  $b(L)$  則可以捕捉短期波動性的動態，而部份差分參數  $d$  則為長期波動性的特徵。



## 第三章 研究方法

在國際金融市場快速變遷的腳步下，國內金融商品種類日益增加，使得投資人的選擇操作更具有多樣化及靈活性。所以，何時要進場作金融商品的買賣，應是投資人要關心的重點，在選擇權市場上，和投資人有直接的關係便是權利金的支付與收取；對選擇權買方而言，權利金是整個交易成本主要的部份，排除交易稅及手續費，權利金代表選擇權商品本身的價格。則買方需要付多少權利金方可取得未來報酬權利才算合理，而賣方需要收取多少權利金來彌補未來可能的支出義務才算公平，這就牽涉到買、賣權在合理價格上之計算工作。

自 1973 年 Black & Scholes 提出選擇權定價模型後，更有學者陸續提出許多放寬條件的修正模型，如隨機波動性模型、隨機利率模型.....等等。在本章我們將介紹本研究須探討的相關模型。

### 第一節 理論模型

#### (一)、Black & Scholes Model

Black and Scholes Model 是目前選擇權理論評價的基礎，主要用來計算選擇權的價格，然而，在此選擇權模型有許多假設定，其假設如下：

1. 選擇權只能在到期日當天方可履約，為歐式選擇權。
2. 標的物價格變動為連續的隨機漫步過程 ( Random Walk Process )，且符合幾何布朗運動 ( Geometric Brownian Motion )。
3. 市場無交易成本、保證金、稅賦且允許賣空，也就是市場為一完美市場。

4. 沒有股利或其它現金流出。
5. 無風險利率為一固定常數。
6. 證券交易為連續的過程。
7. 證券可以分割，並不存在無風險套利機會。
8. 股票報酬率服從對數常態分配且標準差固定。

Black and Scholes 在模型上假設股價服從對數常態分配 (log-normal distribution), 且符合幾何布朗運動 (Geometric Brownian Motion), 所以股價隨機過程將寫成 (1) 式：

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (1)$$

其中

$S$  = 股價

$\mu$  = 股價的期望報酬率

$\sigma$  = 股價報酬率的變異數 (波動性)

$dz$  = Wiener process

而我們將利用折現因子來代入推導出 Black and Scholes 選擇權評價模型。

首先我們定義連續時間的折現因子 (discount factor), 其表示如下：

$$\frac{d\Lambda}{\Lambda} = -r dt - \frac{(\mu - r)}{\sigma} dz - \sigma_w dw; \quad \text{且 } E(dw dz) = 0 \quad (2)$$

在選擇權訂價中，每個折現因子中的股價和利率都給予相同的值，接下來我們將計算出折現因子，才可以算出選擇權的定價。為了方便說明計算出訂價的過程，

我們先設定一個隨機的差分方程：

$$\frac{dY}{Y} = \mu_Y dt + \sigma_Y dz \quad (3)$$

寫成：

$$d \ln Y = \frac{dY}{Y} - \frac{1}{2} \frac{1}{Y^2} dY^2 = \left( \mu_Y - \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \right) dt + \sigma_Y dz$$

對  $d \ln Y$  做積分，其範圍為 0 至 T，

$$\int_0^T d \ln Y = \left( \mu_Y - \frac{1}{2} \sigma_Y^2 \right) \int_0^T dt + \sigma_Y \int_0^T dz_t$$

$$\ln Y_T = \ln Y_0 + \left( \mu_Y - \frac{\sigma_Y^2}{2} \right) T + \sigma_Y (z_T - z_0) \quad (4)$$

而  $z_T - z_0$  符合一個常態分配，期望值為 0 和變異數為 T。因此， $\ln Y$  為條件常態，它的期望值為  $\ln Y_0 + (\mu_Y - \sigma_Y^2/2)T$ ，變異數為  $\sigma_Y^2 T$ 。利用 (4) 式的方式則可以推出 (1) 及 (2) 式：

$$\ln S_T = \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} \varepsilon \quad (5)$$

$$\ln \Lambda_T = \ln \Lambda_0 - \left( r + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \right) T - \frac{\mu - r}{\sigma} \sqrt{T} \varepsilon \quad (6)$$

其中隨機變數  $\varepsilon$  為標準常態分配，

$$\varepsilon = \frac{z_T - z_0}{\sqrt{T}} : N(0,1)$$

接著可算出股價和折現因子的聯合分配，

$$C_0 = \int_{S_T=X}^{\infty} \frac{\Lambda_T}{\Lambda_t} (S_T - X) df(\Lambda_T, S_T)$$

$$= \int_{S_T=X}^{\infty} \frac{\Lambda_T(\varepsilon)}{\Lambda_t} (S_T(\varepsilon) - X) df(\varepsilon) \quad (7)$$

經過微積分的計算可得到  $C_0^2$ ，其結果如下：

$$C_0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 \int_{S_T=X}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\varepsilon - (\sigma - \frac{\mu-r}{\sigma})\sqrt{T}}{\sigma}\right]^2} d\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} X e^{-rT} \int_{S_T=X}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon + \frac{\mu-r}{\sigma}\sqrt{T}}{\sigma}\right)^2} d\varepsilon \quad (8)$$

此積分區間是符合期望值不為 0 的常態分配。由於在較低邊界可知道  $S_T = X$ ，

故：

$$\ln X = \ln S_T = \ln S_0 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\varepsilon$$

$$\text{且 } \varepsilon = \frac{\ln X - \ln S_0 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

我們將可推導出累積常態分配的式子，

$$\Phi(\mu - a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-(1/2)(\varepsilon - \mu)^2} d\varepsilon$$

$\Phi(\ )$  則為常態分配在左尾的面積，最後加上選擇權在到期時的邊界條件，

Call option =  $\max(S_T - X, 0)$  及 Put option =  $\max(X - S_T, 0)$ ，經由變數轉換，將可

解得選擇權的價格函數，如 (9) (10) 式：

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \Phi\left(-\frac{\ln X - \ln S_0 - (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T-t}} + \left(\sigma - \frac{\mu-r}{\sigma}\right)\sqrt{T}\right) \\ &\quad - X e^{-r(T-t)} \Phi\left(-\frac{\ln X - \ln S_0 - (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\mu-r}{\sigma}\sqrt{T}\right) \\ &= S_0 \Phi\left(\frac{\ln S_0/X + [r + \sigma^2/2]T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - X e^{-rT} \Phi\left(\frac{\ln S_0/X + [r - \sigma^2/2]T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

<sup>2</sup> 計算過程可參照附錄二

$$P_0 = Xe^{-rT} \Phi \left( -\frac{\ln S_0/X + [r - \sigma^2/2]T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - S_0 \Phi \left( -\frac{\ln S_0/X + [r + \sigma^2/2]T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \quad (10)$$

其中

$C_0$  = Call option 的價格

$P_0$  = Put option 的價格

T = 存續期間

$S_0$  = 股價

X = 履約價格

## (二) Hull and White model

Hull and White (1987) 模型假設股價 (S) 與變異數 (波動性) (V) 服從對數常態分配，且符合幾何布朗運動，而股價與變異數之隨機項 dw 與 dz 之相關係數為  $\rho$ ，其隨機過程如下：

$$\frac{dS}{S} = \phi dt + \sigma dw \quad (11)$$

$$\frac{dV}{V} = \mu dt + \xi dz \quad (12)$$

$$Cov(dz, dw) = \rho dt \quad (13)$$

其中：

S = 股價

$\sigma$  = 股票之變異數

$\phi$  = 股票之期望報酬率

$\mu$  = 波動的期望報酬率

$$V = \sigma^2$$

$\xi$  =  $V$  的波動性

$dw, dz$  均為標準 Wiener Process

$\rho$  為  $dw, dz$  的相關係數

$\phi$  受到股價 ( $S$ )、變異數 ( $\sigma$ ) 和時間 ( $t$ ) 三者的影響,  $\mu, \xi$  則會受到變異數 ( $\sigma$ ) 和時間 ( $t$ ) 的影響, 令  $f(S, t, V)$  為選擇權的價格函數, 再對  $f$  進行全微分, 利用 Ito's Lemma<sup>3</sup> 可得下式:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial V} dV + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} dS^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} dV^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial V} dS dV + K \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial S} (\phi S dt + \sigma S dw) + \frac{\partial f}{\partial V} (\mu V dt + \xi V dz) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \xi^2 V^2 dt + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial V} S \xi \sigma^3 \rho dt \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \phi S + \frac{\partial f}{\partial V} \mu V + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \xi^2 V^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial V} S \xi \sigma^3 \rho \right) dt \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dw + \frac{\partial f}{\partial V} \xi V dz \end{aligned} \tag{14}$$

其中,  $dt$  項為非隨機項:  $\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dw$  和  $\frac{\partial f}{\partial V} \xi V dz$  兩者皆有 Wiener Process 存在,

故為隨機項; 根據二因子 CAPM 模型, 可知道 (15) 式:

---

<sup>3</sup> 計算過程請見附錄三

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j} - rf = \sum_i \theta_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} [-\mu_i + \beta_i (\mu^* - r)] \quad (15)$$

其中， $\sigma_i$ 、 $\sigma_j$  分別表示變數  $\theta_i, \theta_j$  的標準差， $\rho_{ij}$  是  $\theta_i$  與  $\theta_j$  的相關係數， $\mu_i$  為  $\theta_i$  的成長率， $r$  為無風險利率，而  $\beta_i$  是變數  $\theta_i$  之報酬對最相關之市場投資組合作迴歸分析， $\mu^*$  為市場投資組合的瞬間報酬率。當  $S = \theta_i$ ， $V = \theta_j$  代入 (15) 式，可得 (16) 式：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + 2\rho\sigma^3 \xi S \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial V} + \xi^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \right] - rf \\ &= -rS \frac{\partial f}{\partial S} - [\mu - \beta_V (\mu^* - r)] \sigma^2 \frac{\partial f}{\partial V} \end{aligned} \quad (16)$$

在 (16) 式中，有兩個主要變數股票 (S) 和股票報酬率的波動性 (V)；其中，假設股票 (S) 是可以交易資產的。且  $r$  為無風險利率， $\beta_V$  為  $dV/V$  對市場投資組合的迴歸值， $\mu^*$  則為市場投資組合的期望報酬率， $\rho$  為 S 和 V 的相關係數。

由於這些期望值是和投資人的風險偏好有關係，為了要使期望值不受偏好的影響，故我們需要假設： $\rho = 0$  且  $\beta_V (\mu^* - r) = 0$  或者是總消費和波動性是獨立無關的。將此假設帶入 (16) 式，將得到 (17) 式：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \xi^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \right] - rf \\ &= -rS \frac{\partial f}{\partial S} - \mu \sigma^2 \frac{\partial f}{\partial V} \end{aligned} \quad (17)$$

即為 Hull and White model 之選擇權偏微分方程式。

依據 Boyle and Emanuel(1985)導出，當  $\mu = 0$  時，

且，

$$E(\bar{V}) = V_0$$

$$E(\bar{V}^2) = \frac{2(e^{\xi^2 T} - \xi^2 T - 1)}{\xi^4 T^2} V_0^2$$

$$E(\bar{V}^3) = \frac{e^{3\xi^2 T} - 9e^{\xi^2 T} + 6\xi^2 T + 8}{3\xi^6 T^3} V_0^3$$

其中  $T$  為選擇權發行日至到期日的時間， $t$  為選擇權發行日至持有日的時間， $T-t$

為存續時間，將  $C(\bar{V})$  在變異數平均的期望值  $\bar{V}$ （即  $E(\bar{V})$ ）做泰勒展開式，結

果如下，

$$\begin{aligned} f(S_t, \sigma_t^2) &= C(\bar{V}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{V}^2} \Big|_{\bar{V}} \int (\bar{V} - \bar{V})^2 h(\bar{V}) d\bar{V} + L \\ &= C(\bar{V}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{V}^2} \Big|_{\bar{V}} \text{Var}(\bar{V}) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C}{\partial \bar{V}^3} \Big|_{\bar{V}} \text{Skew}(\bar{V}) + L \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\text{Var}(\bar{V})$  和  $\text{Skew}(\bar{V})$  為  $\bar{V}$  的二階動差和三階動差，將  $\mu=0$ 、 $\rho=0$  和各

階動差帶入（18）式，可得到（19）式，為選擇權的價格函數：

$$\begin{aligned} f(S, \sigma^2) &= C(\sigma^2) + \frac{1}{2} \frac{S\sqrt{T-t}N'(d_1)(d_1 d_2 - 1)}{4\sigma^3} \times \left[ \frac{2\sigma^4(e^k - k - 1)}{k^2} - \sigma^4 \right] \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{S\sqrt{T-t}N'(d_1)[(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2)]}{8\sigma^5} \\ &\quad \times \sigma^6 \left[ \frac{e^{3k} - (9+18k)e^k + (8+24k+18k^2+6k^3)}{3k^3} \right] + L \end{aligned} \quad (19)$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{\bar{V}}{2}\right)(T-t)}{\sqrt{\bar{V}(T-t)}}$$



$$d_2 = d_1 - \sqrt{\bar{V}(T-t)}$$

$$k = \xi^2 (T-t)$$

$$C(\sigma^2) = C(\bar{V}) = S_i N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

當在  $\rho \neq 0$  和  $\mu$ 、 $\xi$  受到股價 (S) 的影響兩種情形下，運用風險中立評價

(Risk-Neutral Valuation) 可求得股價和波動的函數關係式：

$$V_i = V_{i-1} e^{\left[ \left( \frac{\mu - \xi^2}{2} \right) Vt + \rho u_i \xi \sqrt{Vt} + \sqrt{1 - \rho^2} v_i \xi \sqrt{Vt} \right]} \quad (20)$$

$$S_i = S_{i-1} e^{\left[ \left( r - V_{i-1}/2 \right) Vt + u_i \sqrt{V_{i-1} Vt} \right]} \quad (21)$$

在 (20) (21) 式中  $\mu$  及  $\xi$  的值是受到  $\sigma^2 = V_{i-1}$ 、 $S = S_{i-1}$  的影響，則

買權的價值為：

$$C = e^{-r(T-t)} \max[S_n - X, 0] \quad (22)$$

賣權的價值為：

$$P = e^{-r(T-t)} \max[X - S_n, 0] \quad (23)$$

## 第二節 實証模型

本研究係探討在台灣選擇權市場之模型理論價格是否和實際價格相符合，主要是以 GARCH、Long Memory GARCH 二種參數估計方法來估計參數。故將介紹此二種參數估計方法。

(一) GARCH 模型之參數估計

在 GARCH 模型中，由於以最大概似估計法 (Maximum Likelihood Estimator, 簡稱 MLE) 的效率大於最小平方估計法。故在本研究中，在 GARCH 模型中皆會採用最大概似估計法來估計參數。在 GARCH (p,q) 模型為，

$$y_t = x_t \beta + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | \Omega_{t-1} : N(0, h_t)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} = z_t' \gamma$$

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$\beta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, q$$

$$z_t' = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-p}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-q})$$

$$\gamma = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$$

其中：

$\Omega_{t-1}$  為在 t-1 期所有可利用資訊之集合

$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} : N(0, h_t)$  是在 t-1 期所有可用資訊集合下， $\varepsilon_t$  的期望值為 0，變異數為  $h_t$  的常態分配，且  $h_t$  為  $\varepsilon_t$  之條件異質變異數，受 p 期殘差項與過去 q 期條件變異數的影響。

在 T 個觀察值之概似函數如下：

$$\ln L = \sum_{t=1}^T -\frac{1}{2} \left[ \ln(2\pi) + \ln h_t + \varepsilon_t^2 h_t^{-1} \right] = \sum_{t=1}^T l_t(\theta)$$

其中， $\varepsilon_t = y_t - x_t' \beta$  和  $\theta = (\gamma', \beta')$ ，對參數  $\gamma$  和  $\beta$  取一階偏微分：

$$\frac{\partial l_t}{\partial \beta} = \frac{\varepsilon_t x_t}{h_t} + \frac{1}{2} h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} \left( \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial l_t}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial \gamma} \left( \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right)$$

接著對參數  $\gamma$  與  $\beta$  作二階偏微分：

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \beta \beta'} = -\frac{x_t x_t'}{h_t} - \frac{1}{2} h_t^{-2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} \frac{\partial h_t}{\partial \beta'} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - \frac{\varepsilon_t x_t}{2 h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} + \left( \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \frac{\partial \left( \frac{1}{2 h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \beta} \right)}{\partial \beta'}$$

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \gamma \gamma'} = \left( \frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1 \right) \frac{\partial \left( \frac{1}{2 h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \gamma} \right)}{\partial \gamma'} - \frac{1}{2 h_t^2} \frac{\partial h_t}{\partial \gamma} \frac{\partial h_t}{\partial \gamma'} \frac{\varepsilon_t^2}{h_t}$$

$$\text{而, } \frac{\partial h_t}{\partial \beta} = -2 \sum_{j=1}^p a_j x_{t-j} \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^q b_j \frac{\partial h_{t-j}}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial h_t}{\partial \gamma} = z_t + \sum_{i=1}^q \beta_i \frac{\partial h_{t-i}}{\partial \gamma}$$

$\frac{\partial h_t}{\partial \beta}$  和  $\frac{\partial h_t}{\partial \gamma}$  是 GARCH 模型的遞迴部份。為了取得準確的估計值，Bollerslev

(1986) 建議採用 BHHH (Berndt, Hall, Hall & Hausman, 1974) 演算法方可取得

參數估計值，其方法則令  $\theta^i$  為反覆估計  $i$  次後的參數估計值，

$$\theta^{(i+1)} = \theta^i + \lambda \left( \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t}{\partial \theta} \frac{\partial l_t}{\partial \theta'} \right)^{-1} \sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t}{\partial \theta}$$

上式則是反覆估計求得最大概似估計的漸進估計值。

## (二) Long Memory GARCH (FIGARCH) 參數估計

我們一般常見的參數估計方法有 OLS、MLE、或是 LM test....等等，而在假設條件常態過程的 ARCH 模型中，也是以 MLE (最大概似估計法) 為參數估計方法；本研究在 Long Memory GARCH (FIGARCH) 模型的參數估計，將用

MLE 來估計，其 MLE 的擴展式如下：

$$\begin{aligned} \log L(\theta; \varepsilon_1, \varepsilon_2, K, \varepsilon_T) \\ = -0.5g \log(2\pi) - 0.5g \sum_{i=1}^T [\log(\sigma_i^2) + \varepsilon_i^2 \sigma_i^{-2}] \end{aligned}$$

其中  $\theta' \equiv (\omega, d, \beta_1, K, \beta_p, \phi_1, K, \phi_q)$ ，

根據 Bollerslev and Mikkelsen( 1996 )研究有提到選擇權訂價模型，Black and Scholes 模型和 Hull and White 模型的參數估計，在 Black and Scholes 模型的選擇權買權訂價為  $C(\sigma, \tau, X, P_T, r)$ ，且假設訂價過程  $\{P_{T+t}\}$  之下的變異數  $\sigma^2$  為連續時間隨機漫步 ( random walk ) 過程；選擇權訂價方程式如下：

$$C^{BS}(\tau, X) = C(\sigma^{BS}(\tau), \tau, X, P_T, r)$$

其中：

$\tau$  為交易日距離到期日的天數

$X$  為履約價

$P_T$  為股價

$r$  為無風險利率

$\sigma^{BS}(\tau)^2$  為預期平均每期波動性

在選擇權訂價模型中，最重要為波動性的估計，因為估計準確與否將決定理論價格和市場價格的誤差程度大小，而在 B-S 模型的波動估計函數如下：

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{BS}(\tau)^2 &= [\tau P_T^2 (N-1)]^{-1} \sum_{n=1}^N \left( P_{n, T+\tau} - P_T - N^{-1} \sum_{i=1}^N [P_{i, T+\tau} - P_T] \right)^2 \\ &= [\tau P_T^2 (N-1)]^{-1} \sum_{n=1}^N \left( P_{n, T+\tau} - N^{-1} \sum_{i=1}^N P_{i, T+\tau} \right)^2 \end{aligned}$$

$P_{n,T+\tau}$  為時間在  $T + \tau$  , n 次回應的指數模擬值。

因為在 B-S 模型下，有許多不符合市場情況的假設（如為封閉解，波動性不隨時間變動...等等），導致在參數估計上有不準確的現象發生。針對此種情形，Hull and White (1987) 提出波動性會隨著時間變動來解決此問題，根據 Hull and White 模型，其選擇權訂價模型修改如下：

$$C^{HW}(\tau, X) = N^{-1} \sum_{n=1}^N C(\sigma^{HW}(\tau)_n, \tau, X, P_T, r)$$

在上式中， $\sigma^{HW}(\tau)_n$  為做 n 次模擬的每期波動值，而其估計式如下：

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{HW}(\tau)_n^2 &= [P_T^2(\tau-1)]^{-1} \sum_{i=1}^{\tau} \left( \Delta P_{n,T+\tau} - \tau^{-1} \sum_{i=1}^{\tau} \Delta P_{n,T+i} \right)^2 \\ &= [P_T^2(\tau-1)]^{-1} \sum_{i=1}^{\tau} \left( \Delta P_{n,T+\tau} - \tau^{-1} [P_{n,T+\tau} - P_T] \right)^2 \end{aligned}$$

其中  $\Delta P_{n,T+\tau} \equiv P_{n,T+\tau} - P_{n,T+\tau-1}$ ，在此模型我們可以很清楚了解波動性估計有把具有時間趨勢的變數加入，以便準確估計理論價格。

### 第三節 蒙地卡羅模擬法

在 Hull and White 模型中，說明使用公式計算訂價會較有複雜且麻煩的計算過程，所以假設放寬條件下，可使用蒙地卡羅模擬法來求得選擇權價格。由於，本研究只採用假設  $\rho = 0$  的條件來計算價格，所以簡單介紹在  $\rho = 0$  的條件下，Hull and White 模型的蒙地卡羅模擬法。

我們將允許  $\xi$  和  $\mu$ 、 $\sigma$  和  $t$  有相關性存在，且變異數可以循著均數回轉過程，在此假設  $\mu = a(\sigma^* - \sigma)$ ，而  $\sigma = \sqrt{V_{i-1}}$  且  $\sigma^*$  為長期變異數，將權利時間分為 n

個等長之時間，其波動度的模擬過程為  $V_i = V_{i-1} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\xi^2\right)Vt + v_i\xi\sqrt{Vt}}$ ，其中  $v_i : N(0,1)$ ；

將這每一時點的波動度  $V_i (0 \leq i \leq n)$  做為算術平均數，再將  $\bar{V}$  代入 Black and

Scholes 模型，可得一個價格  $P_1$ 。為了減少誤差的產生，故波動度的模擬過程改

為  $V_i = V_{i-1} e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\xi^2\right)Vt - v_i\xi\sqrt{Vt}}$ ，重複上述相同步驟，可計算得到  $P_2$ 。最後，令  $Z = \frac{P_1 + P_2}{2}$ ，

也是重複相同步驟，可得到  $n$  個  $Z$ ，再加以平均，則求得 Hull and White 模型的價格。

#### 第四節 誤差分析

對於不同理論模型的訂價往往會受到模型的假設及本身考慮因素的受限，導致在不同理論模型的訂價和市場價格有誤差的存在，而在國內外有許多學者針對這方面作了非常多的研究；例如：Long and Officer( 1997 )，以 Black and Scholes 模型之訂價誤差對交易量、價內外程度、距離到期日時間、及報酬率等等變數進行整體迴歸分析。本研究將探討在 Black and Scholes 模型和 Hull and White 模型分別在價平、價內、價外、深度價內及深度價外等，進行訂價誤差的整體迴歸分析，選擇的變數包括交易量、價內外程度、距離到期日時間、及選擇權成交量的平方，再加上價內外程度的平方，進行討論。

誤差分析模型設定如下：

$$\frac{|\text{市場價格} - \text{理論價格}|}{\text{市場價格}} = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \varepsilon_t$$

其中：

$x_1$ :當日距到期日的時間

$x_2$ :選擇權的成交量

$x_3$ :選擇權成交量的平方

$x_4$ :價內外程度

$x_5$ :價內外程度的平方

## 第四章 實證研究

本研究在此章將討論資料的來源與處理，接下討論利用 Black and Scholes 模型和 Hull and White ( $\rho = 0$ ) 模型配合 GARCH 模型、EGARCH 模型及 Long memory GARCH (FIGARCH) 模型所模擬出的理論價格和市場價格作比較，再來將針對訂價誤差作整體的迴歸分析，最後針對為何投資者的會有行為做探討。

### 第一節 資料來源與處理

本研究是以台股指數選擇權為主要的分析資料，資料來源是台灣期貨交易所選擇權每日交易行情下載區<sup>4</sup>，實證分析的期間為 2003 年 11 月 3 日至 2004 年 10 月 29 日，計 247 個營業日。而在估計波動性的樣本則是以台灣股價指數為本研究標的物，其資料選取的期間為 2003 年 11 月 3 日至 2004 年 12 月 31 日，資料來源為台灣證券交易所網站<sup>5</sup>。無風險利率在選擇權訂價模型上也是參數之一，故無風險利率的選取上則採用國庫券的加權平均利率，資源期間為 2003 年 6 月至 2004 年 10 月，資料來源從中央銀行網站<sup>6</sup>，加權平均利率為 1.136%。

在選擇權價位選取方面，許多學者提出不同的選取方法，其中以 Bakshi, Cao, and Chen (1997) 將選擇權分為五大類，分別為價平、價內、價外、深度價內、深度價外。分類的標準則以股價佔履約價的比重，在價平 (At-the-money),  $\frac{S}{K}$  介於 0.97~1.00 之間 價平,  $\frac{S}{K}$  介於 1.00~1.03 價內 (In-the-money),  $\frac{S}{K}$  介於 1.03~1.06

---

<sup>4</sup> <http://www.taifex.com.tw/>

<sup>5</sup> <http://www.tse.com.tw/ch/index.php>

<sup>6</sup> <http://www.cbc.gov.tw/>



表一：GARCH 模型

	AIC	BIC
(1,1)	<b>-1822.966</b>	<b>-1808.929</b>
(1,2)	-1821.689	-1804.142
(2,1)	-1822.654	-1805.107
(2,2)	-1820.701	-1799.645

註：粗體數字為 AIC 和 BIC 最小。

表二：EGARCH 模型

	AIC	BIC
(1,1)	<b>-1827.504</b>	<b>-1809.957</b>
(1,2)	-1284.594	-1263.538
(2,1)	-1818.787	-1794.222
(2,2)	-1296.171	-1268.096

註：粗體數字為 AIC 和 BIC 最小。

表三：FIGARCH 模型

	AIC	BIC
(1,1)	-1821.786	-1804.239
(1,2)	<b>-1828.593</b>	<b>-1807.536</b>
(2,1)	-1820.232	-1799.176
(2,2)	-1826.645	-1802.079

註：粗體數字為 AIC 和 BIC 最小。

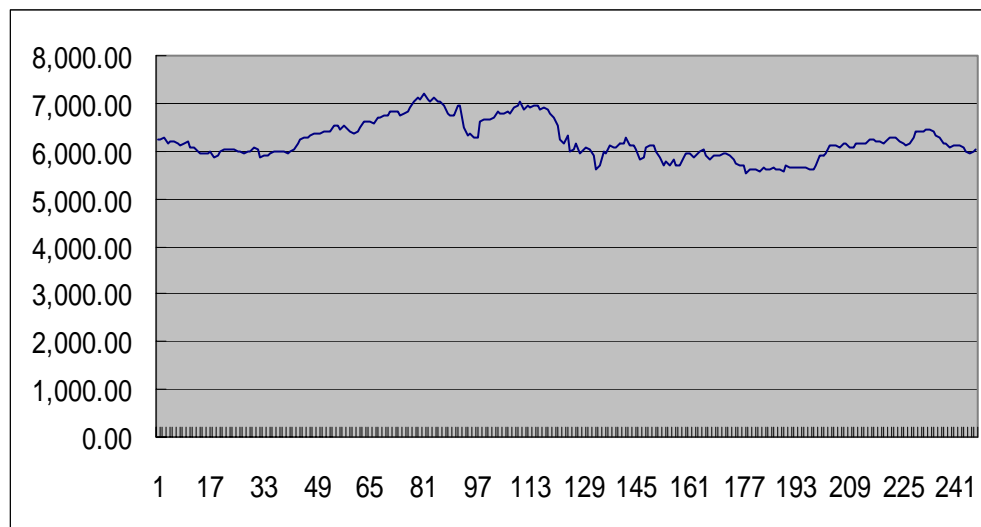
之間、價外 (out-of-the-money),  $\frac{S}{K}$  介於 0.94~0.97 之間、深度價內 (Deep-in-the-money),  $\frac{S}{K} > 1.06$ 、深度價外 (Deep-out-of-the-money),  $\frac{S}{K} < 0.94$  , 等六組。因為台灣加權股價指數選擇權履約價間隔為 100 點和上述分類法的不同, 若使用上述分類法則會出現許多個相同價位的問題, 在資料處理上就會有許多問題; 本研究將根據陳浚宏 (2003) 的分類法, 以最接近加權股價指數之價位的買賣權為價平買賣權: 價平買賣權上下 200 點為價外與價內買賣權: 上下 400 點為深度價外與深度價內買賣權。距離到期日時間長短會影響訂價的準確度, 所以到期日的選取則選取交易量較大的近一月份 (近月) 與近二月分 (遠月) 進行資料分析。在波動估計方面, 針對台股指數日報酬率做波動性之估計, 由於本研究選取的時間從 2003 年 11 月 3 日至 2004 年 12 月 31 日, 資料有 247 筆, 本研究將使用前 100 筆為參數, 運用 S-PLUS 軟體預測估計後 147 筆的波動性, 至於

各個參數模型方面係數的選擇，則從表一、表二、表三可知，計算出的 AIC 和 BIC 最小為主要選擇，以便作有效的訂出準確價格。

## 第二節 市場價格和理論價格比較

討論市場價格和理論價格之前，我們知道選擇權的標的物會影響選擇權的市場價格。本研究中，選擇權的標的物為台股指數，所以台灣股價指數的波動，會影響到選擇權的市場價格；從圖（1），可清楚知道台灣股價指數介於 5500 點至 7200 點。

在此章節，本研究將分資料分為近月買權、遠月買權、近月賣權、及遠月賣權...等四部分，加以說明估計的理論價格和市場價格之比較情形。



圖（1）：台股指數分佈圖（2003.11.3~2004.12.31）

### （一）近月買權

本研究中，是以 Black and Scholes 模型、Hull and White 模型配合 GARCH、EGARCH、及 FIGARCH 模型，利用資料的特性加以分為價平、價內、價外、深

度價內和深度價外五組，故在近月買權中，共有 30 組圖形。我們將挑選模型最和市場價格符合的圖形說明之。

在價平買權和價內買權，從圖（2）和圖（3）觀察到在 Black and Scholes 配合 FIGARCH 在起始值有誤差較大的情形出現，所以 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型為最佳的。

在價外買權和深度價內買權方面，從圖（4）和圖（5）觀察到，在 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型，從前五筆可以清楚看到，理論價格明顯高於市場價格許多；相反地，Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型中，理論價格較可以和市場價格相符合。

在深度價外買權方面，從圖（6）圖（7）可知道，Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型在理論價格估計優於 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型所估計的理論價格。

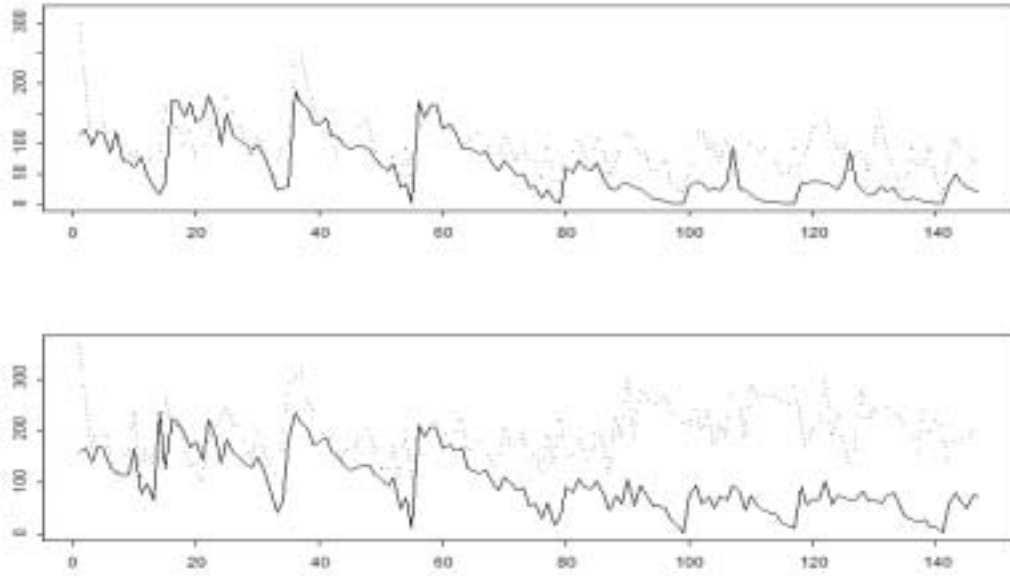


圖 (2): 近月價平買權和近月價內買權 (BS-FIGARCH)(實線:市場價格, 虛線:理論價格)

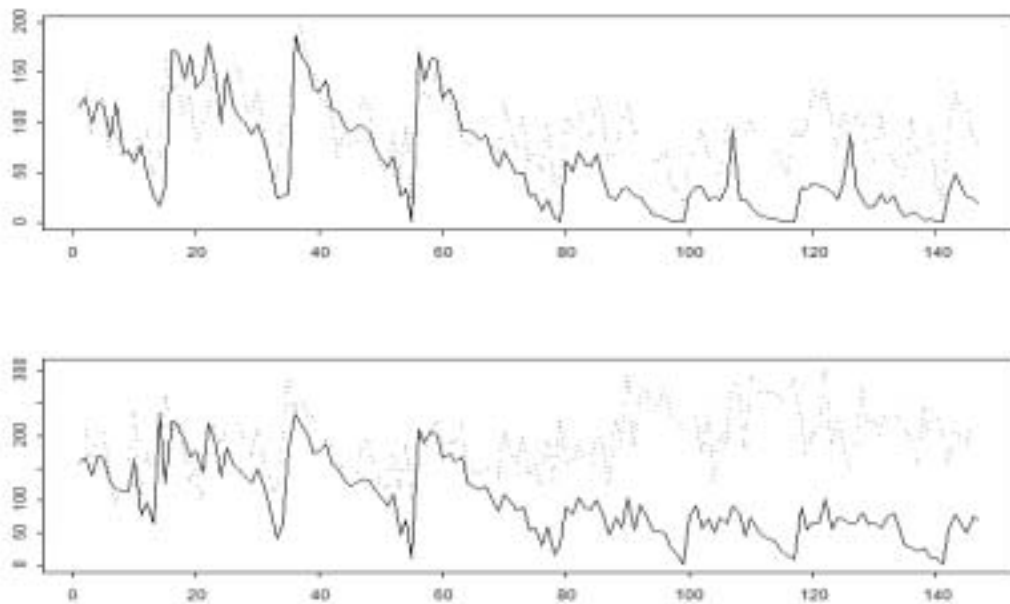
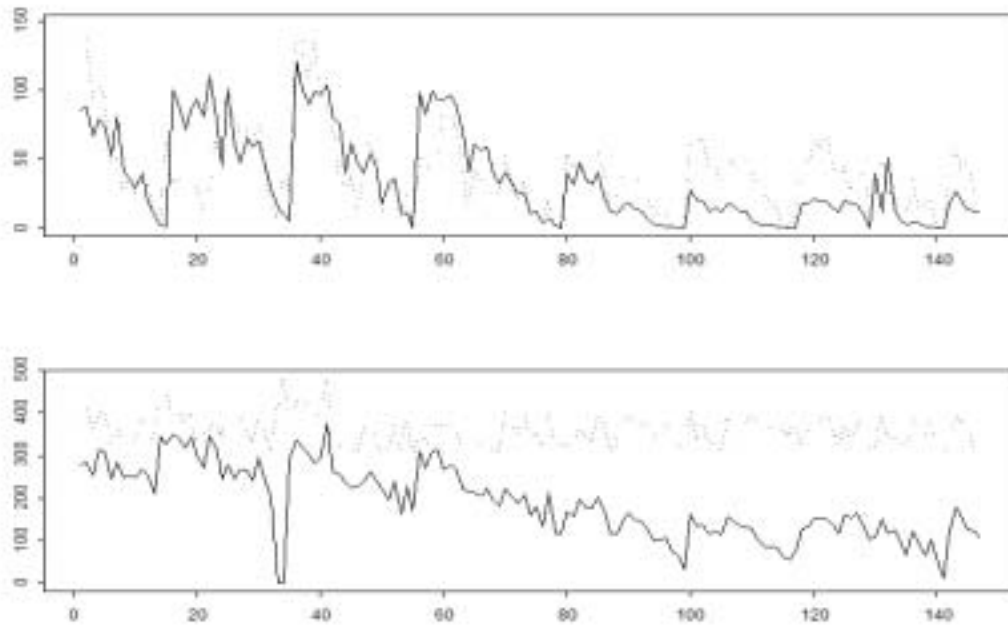
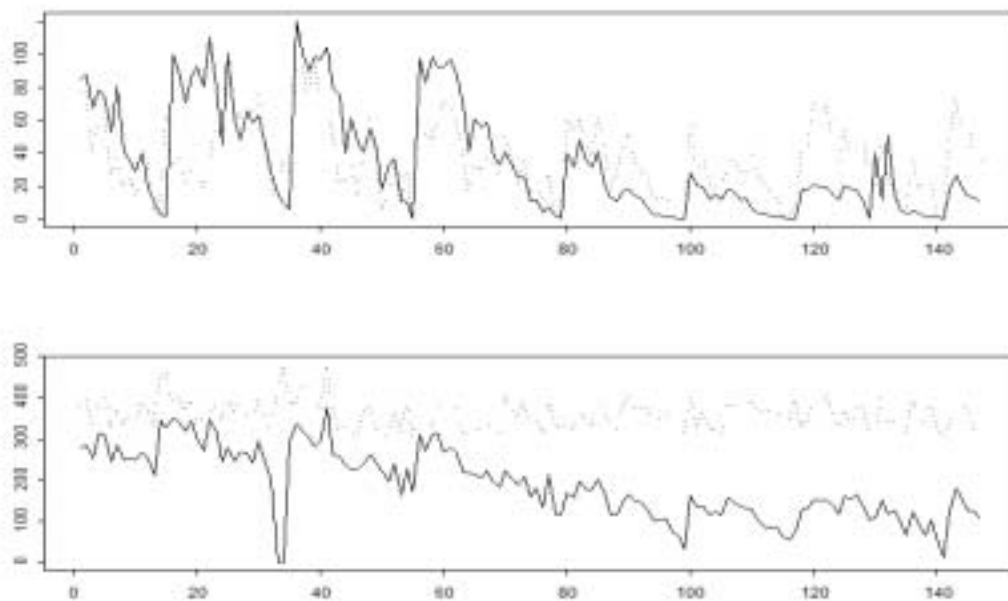


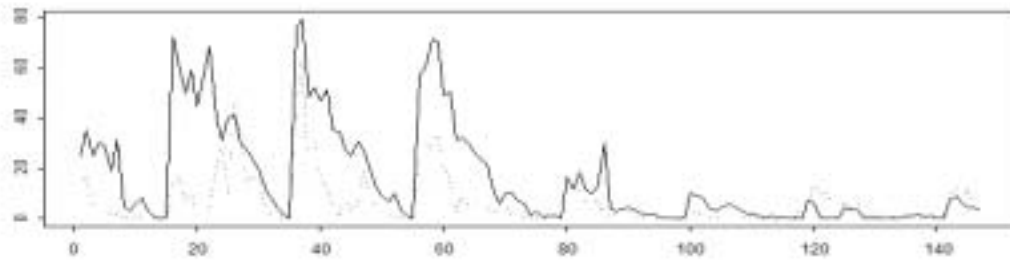
圖 (3): 近月價平買權和近月價內買權 (BS-EGARCH)



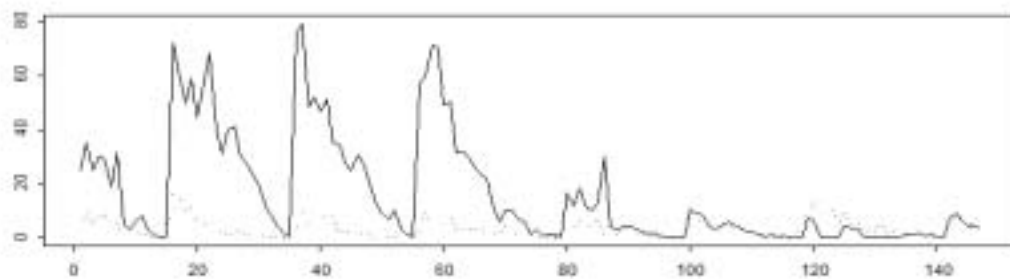
圖(4): 近月價外買權和近月深度價內買權 (BS-GARCH)(實線: 市場價格, 虛線: 理論價格)



圖(5): 近月價外買權和近月深度價內買權 (BS-EGARCH)



圖(6): 近月深度價外買權 (BS-EGARCH)(實線:市場價格,虛線:理論價格)



圖(7): 近月深度價外買權 (HW-EGARCH)

## (二) 遠月買權

在價平買權和價內買權方面,從圖(8)和圖(9)觀察可知,Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型中,估出的理論價格較符合市場價格的波動,而在 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型,在價平買權時理論價格和市場價格差距較大。

在價外買權和深度價內買權,如圖(10)和圖(11)可觀察到,在 Black and Scholes 搭配 EGARCH 模型和 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型比較,清楚看到在圖(11)價外買權部分,前八十筆資料,理論價格被低估的情形較為嚴重,相反地,在圖(10),理論價格和市場價格的誤差明顯較小。

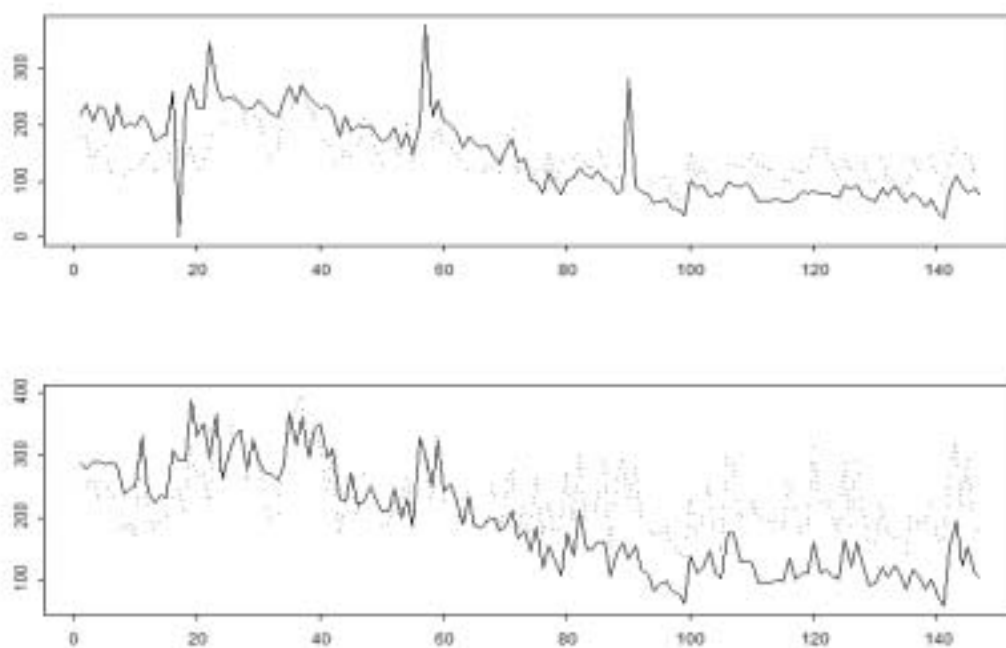


圖 (8): 遠月價平買權和遠月價內買權 (BS-EGARCH)(實線:市場價格,虛線:理論價格)

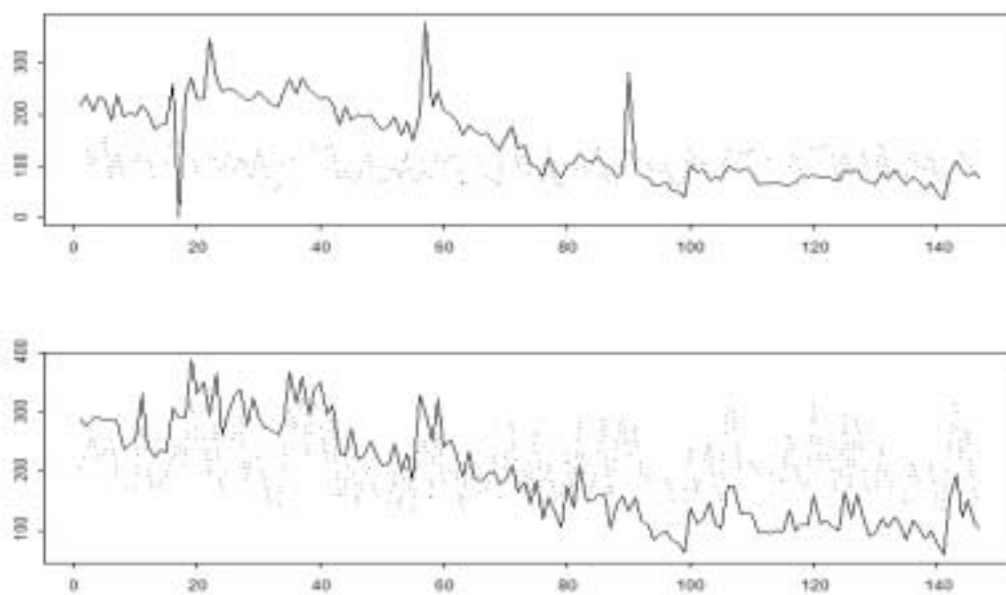


圖 (9): 遠月價平買權和遠月價內買權 (HW-EGARCH)



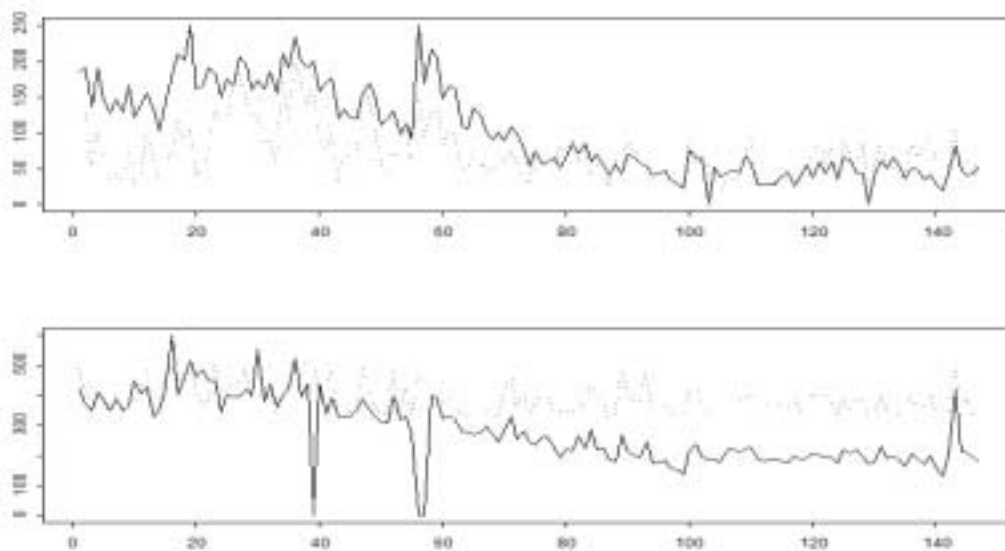


圖 (10): 遠月價外買權和遠月深度價內買權 (BS-EGARCH)(實線:市場價格, 虛線:理論價格)

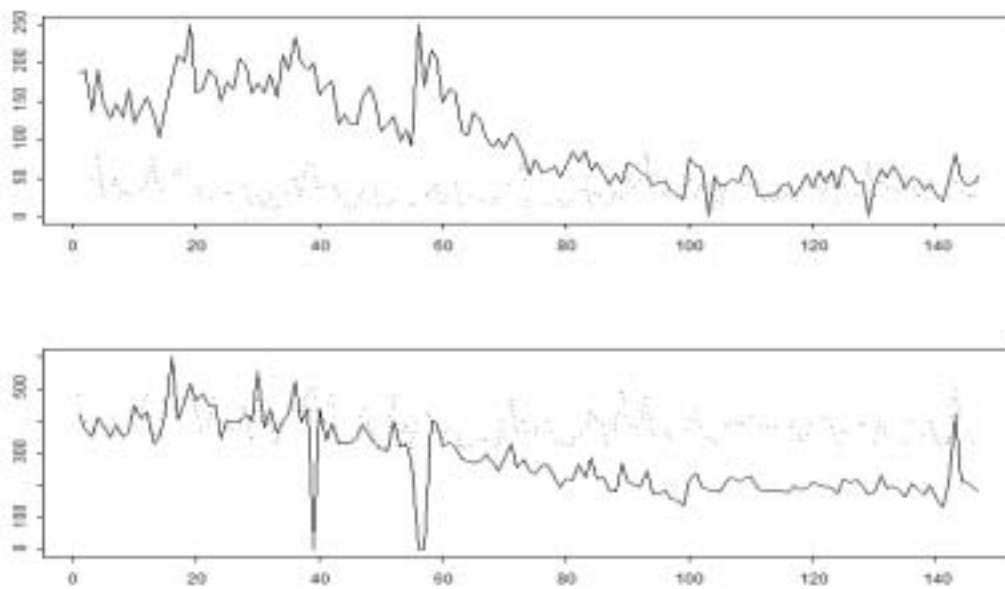


圖 (11): 遠月價外買權和遠月深度價內買權 (HW-FIGARCH)

在深度價外買權方面, 如圖 (12) 圖 (13) 所示, 可以清楚看到, Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型的理論價格和市場價格誤差小於 Hull and White

模型配合 EGARCH 模型的兩者誤差。

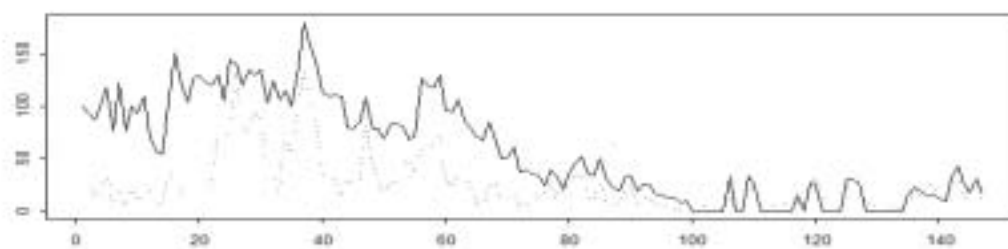


圖 (12): 遠月深度價外買權 (BS-EGARCH)(實線: 市場價格, 虛線: 理論價格)

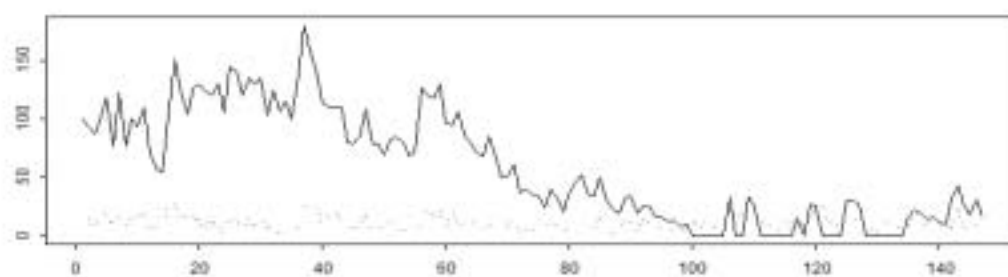


圖 (13): 遠月深度價外買權 (HW-EGARCH)

### (三) 近月賣權

在價平賣權和價內賣權方面, 如圖 (14) 和圖 (15) 所示, Black and Scholes 模型搭配 FIGARCH 模型在理論價格估計比 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型所估的價格還要來得準確。

在價外賣權和深度價內賣權方面, 從圖 (16) 圖 (17) 觀察到, 在價外賣權比較兩種模型, 還是以 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型較好; 在深度價內賣權中, 明顯可以看出 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型較好。

在深度價外賣權方面, 如圖 (18) 和圖 (19) 所示, 兩種模型在理論價格和市場價格的差距不大, 不過圖 (18) 前幾筆的理論價格較可以和市場價格貼近。

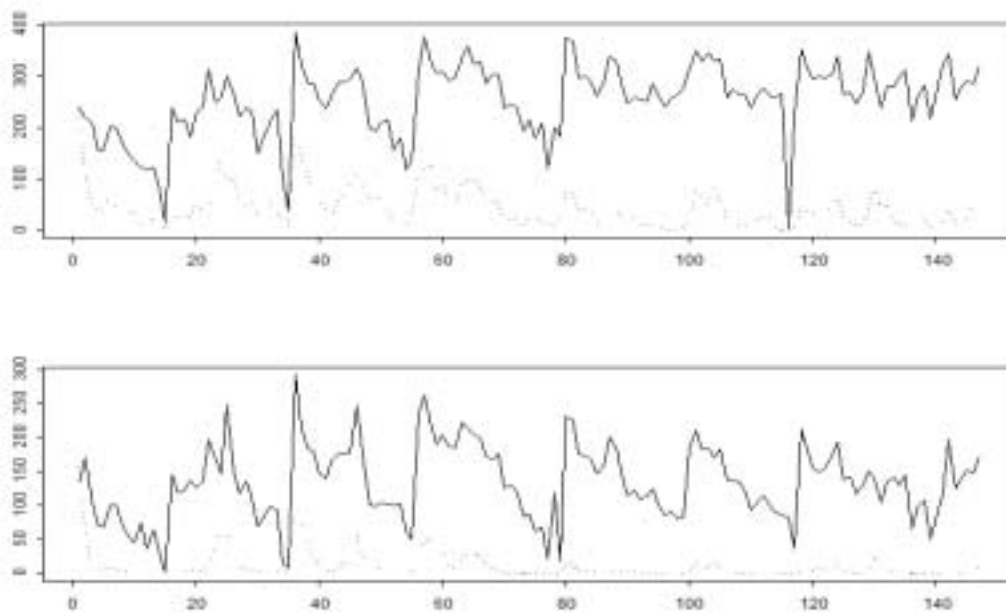


圖 ( 14 ) : 近月價平賣權和近月價內賣權 ( BS-FIGARCH )( 實線 : 市場價格 , 虛線 : 理論價格 )

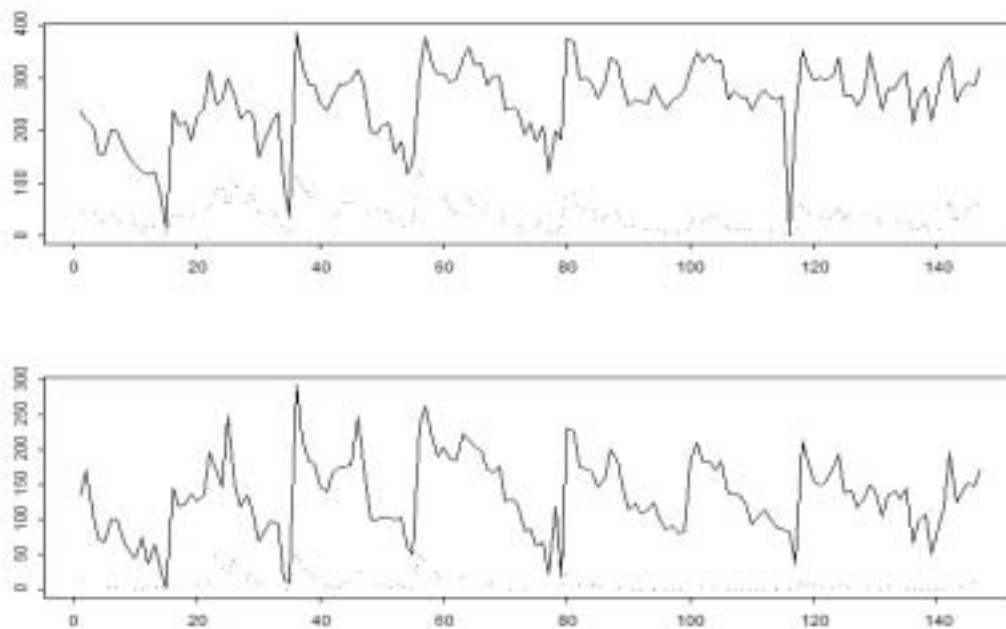


圖 ( 15 ) : 近月價平賣權和近月價內賣權 ( BS-EGARCH )

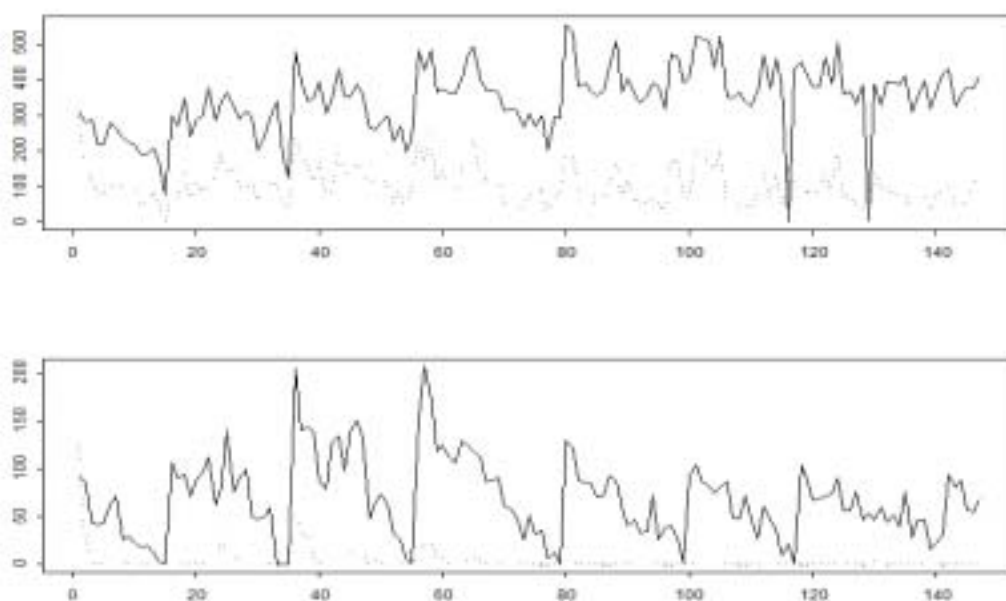


圖 (16): 近月價外賣權和近月深度價內賣權 (BS-FIGARCH)(實線：市場價格，  
虛線：理論價格)

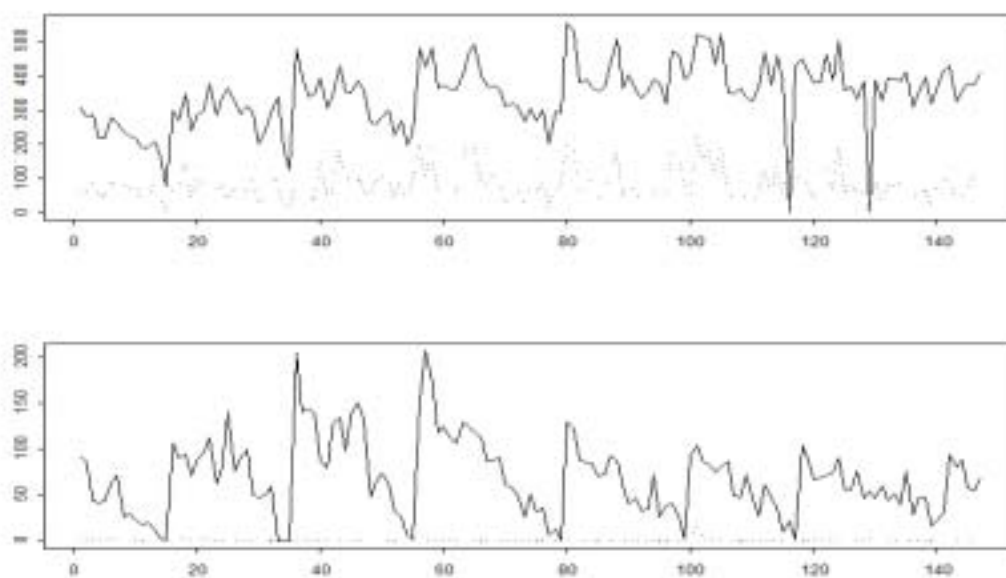


圖 (17): 近月價外賣權和近月深度價內賣權 (HW-FIGARCH)

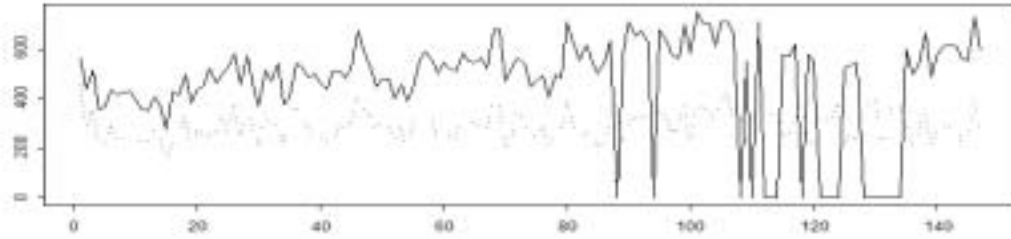


圖 (18): 近月深度價外賣權 (BS-FIGARCH)(實線：市場價格，虛線：理論價格)

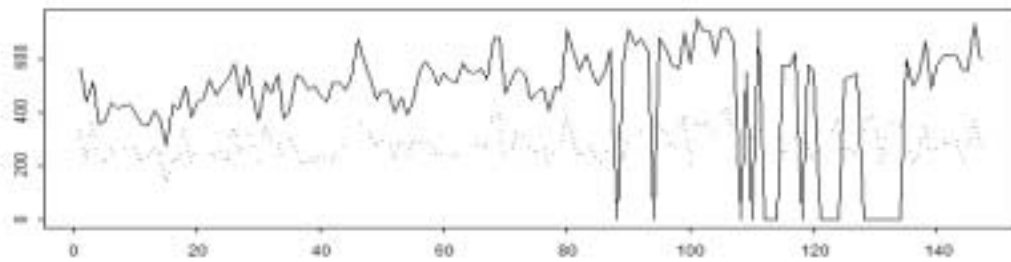


圖 (19): 近月深度價外賣權 (HW-EGARCH)

故 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型比較好。

#### (四) 遠月賣權

在價平賣權和價內賣權方面，如圖 (20) 和圖 (21) 所示，不論在價平或是價內，Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型明顯優於 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。

在價外賣權和深度價內賣權方面，從圖(22)和圖(23)觀察可知，Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型在價格估計上，比較能符合市場價格。

在深度價外賣權方面，如圖 (24) 和圖 (25) 觀察到，其實兩種模型所估計的理論價格和市場價格的差距大小都相同。

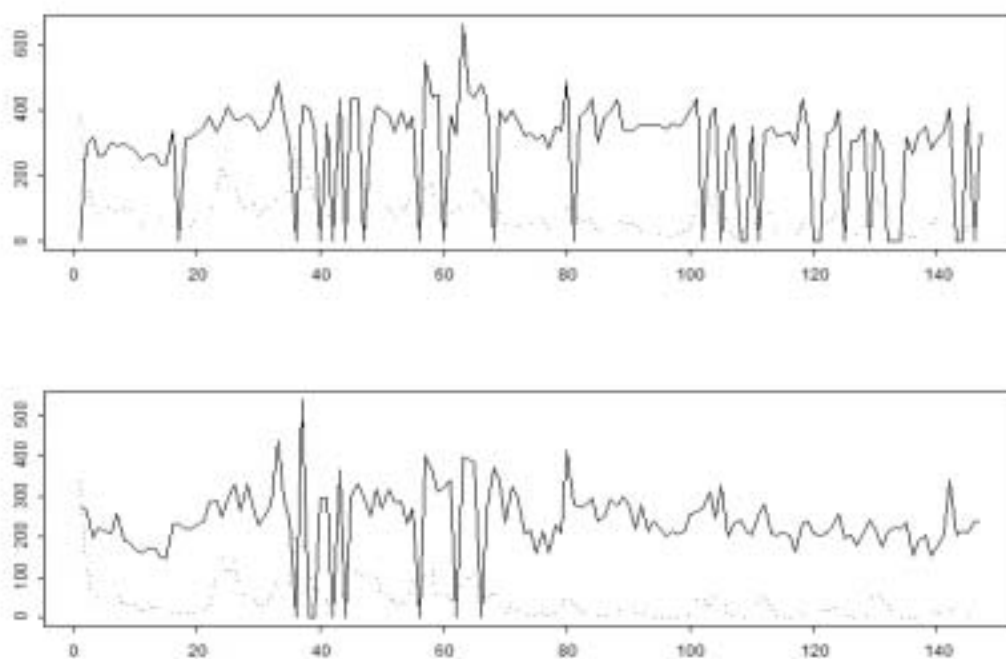


圖 ( 20 ) : 遠月價平賣權和遠月價內賣權 ( BS-FIGARCH )( 實線 : 市場價格 , 虛線 : 理論價格 )

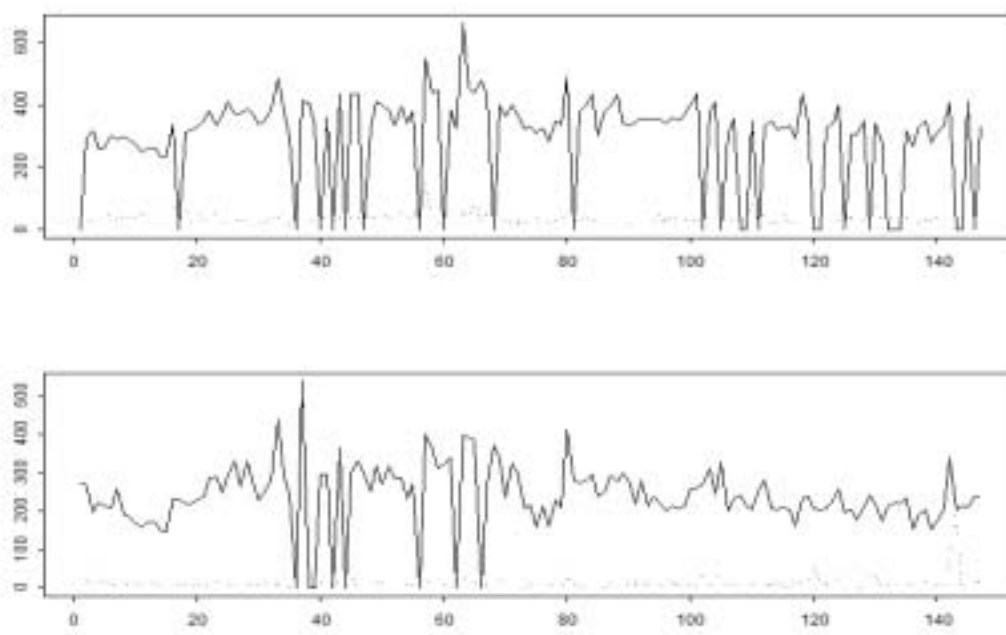


圖 ( 21 ) : 遠月價平賣權和遠月價內賣權 ( HW-FIGARCH )

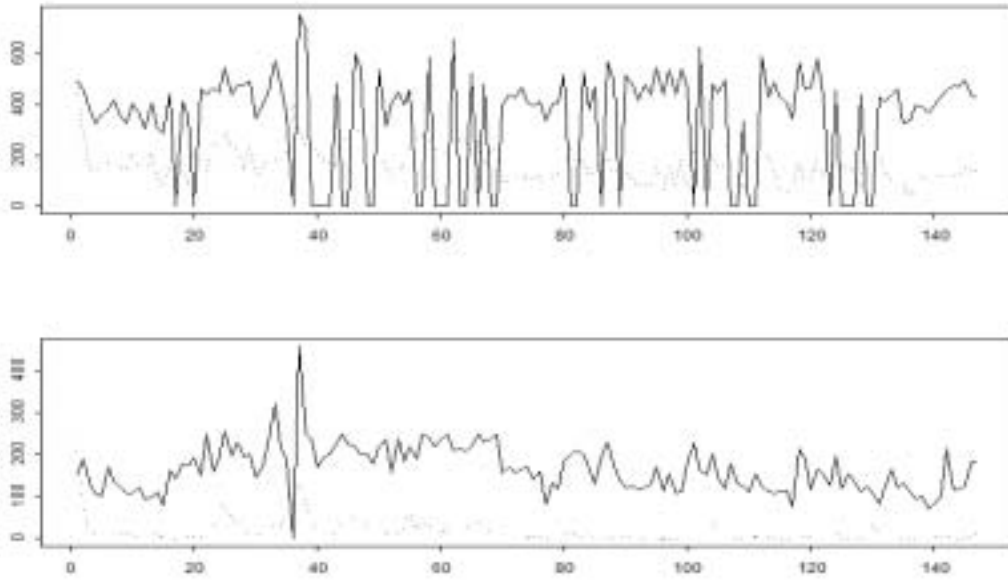


圖 ( 22 ) : 遠月價外賣權和遠月深度價內賣權 ( BS-FIGARCH ) ( 實線 : 市場價格 ,  
 虛線 : 理論價格 )

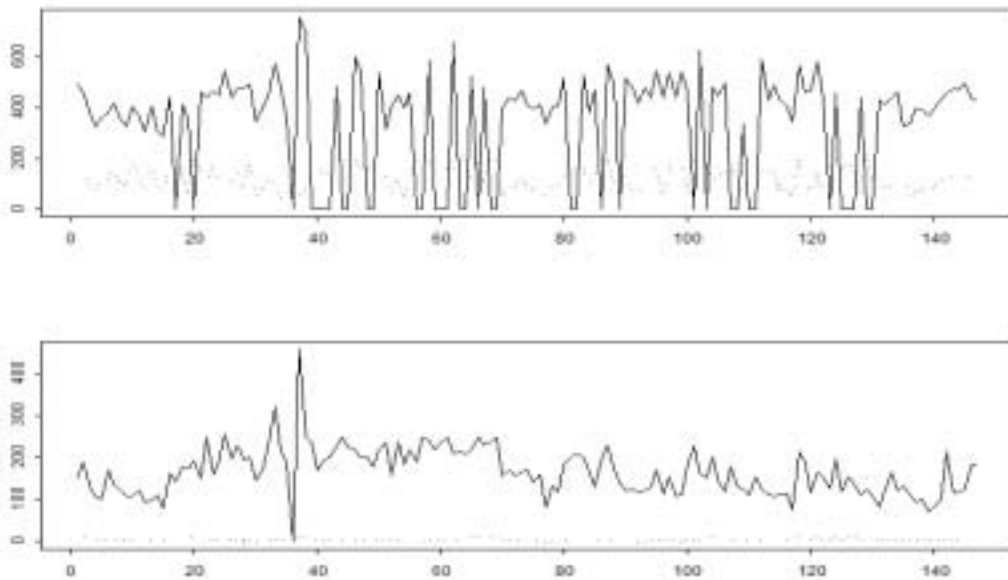


圖 ( 23 ) : 遠月價外賣權和遠月深度價內賣權 ( HW-GARCH )

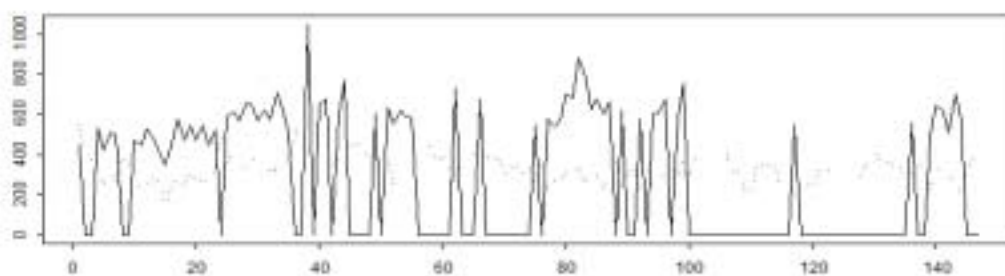


圖 (24): 遠月深度價外賣權 (BS-FIGARCH)(實線：市場價格，虛線：理論價格)

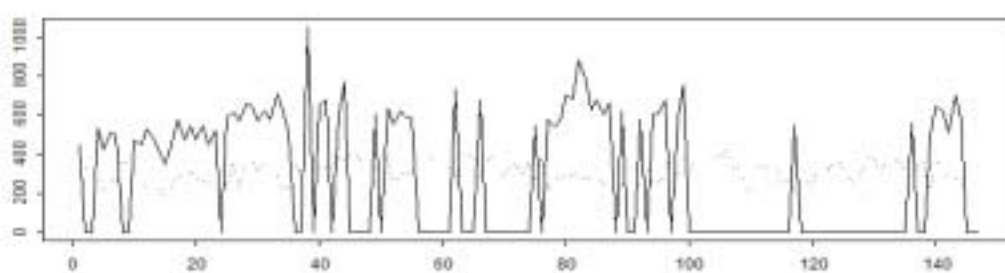


圖 (25): 遠月深度價外賣權 (HW-EGARCH)

根據以上圖形可知道，在近月和遠月買權，皆以 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型為最佳組合；而在近月和遠月賣權，則以 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型為最佳組合。在近月或遠月買權部分，在估計後半段大多都是市場價格高於理論價格，原因在於此時的股票市場處於空頭市場，相對的在買權操作方面困難度較高，所以投資人對買權較不具興趣，導致買權的價格偏低結果。至於在近月和遠月賣權的部份，則在本章最後一節將會詳述。

### 第三節 誤差原因分析

在第二節理論價格和市場價格分析可觀察到，兩種價格有著誤差的存在，為了解誤差來源的原因，本研究將以 MAPE (mean absolute percentage error) 誤



差絕對值百分比做為應變數，誤差原因分為五種自變數，分別為  $X_1$  為當日距到期日的時間、 $X_2$  為選擇權的成交量、 $X_3$  為選擇權成交量的平方、 $X_4$  為價內外程度、 $X_5$  為價內外程度的平方。本研究將分為以下部分來探討：

#### (一) 近月買權

首先針對近月買權誤差來源進行迴歸分析，其結果如表四、表五和表六所示，在價平買權，不論是何種模型搭配，結果都一樣；也就是權利期間 ( $X_1$ ) 對模型誤差的影響，均為顯著，且其迴歸係數皆為負，表示權利期間愈短，誤差愈大。在標的物的成交量 ( $X_2$ ) 對誤差影響，均為顯著且迴歸係數為負的，顯示成交量前小，誤差愈大。相同的，標的物成交量的平分 ( $X_3$ ) 對誤差的影響均為顯著且為正，表示誤差和標的物成交量的平分成正比。

在價內買權，任何的模型配合其結果也是一致，只有在權利期間 ( $X_1$ ) 對誤差有顯著的影響，且為負的；但在其他的自變數均不顯著。價外買權時，標的物成交量 ( $X_2$ ) 對誤差有顯著的影響且迴歸係數為負的；還有價內外程度 ( $X_4$ ) 對誤差有顯著且係數為負的結果，當價內外程度愈小，其誤差愈大；在價內外程度的平方 ( $X_5$ ) 對模型誤差有著正向且顯著的影響，只有在 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型在權利期間有負向顯著的影響。深度價內買權時，在權利期間 ( $X_1$ ) 對誤差有負向且顯著的影響；而標的物的成交量 ( $X_2$ ) 對模型誤差有正向且顯著的影響，和在價平、價內、價外的方向相反；標的物成交量的平方 ( $X_3$ ) 對誤差有負向且顯著的影響。

表四

	價平買權					價內買權								
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$				
HW-GA	*	-	*	-	*	+	-	+	*	-	-	+	+	-
HW-EGA	*	-	*	-	*	+	-	+	*	-	-	+	+	-
HW-FIGA	*	-	*	-	*	+	-	+	*	-	-	+	+	-
BS-GA	*	-	*	-	*	+	-	+	*	-	-	+	+	-
BS-EGA	*	-	*	-	*	+	-	+	*	-	-	+	+	-
BS-FIGA	*	-	*	-	*	+	-	+	*	-	-	+	+	-

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

表五

	價外買權					深度價內買權						
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$		
HW-GA	-	*	-	+	*	-	*	+	*	-	+	-
HW-EGA	-	*	-	+	*	-	*	+	*	-	+	-
HW-FIGA	-	*	-	+	*	-	*	+	*	-	+	-

BS-GA	-	*	-	+	*	-	*	+	*	-	*	+	*	-	+	-
BS-EGA	-	*	-	+	*	-	*	+	*	-	*	+	*	-	+	-
BS-FIGA	*	-	*	-	+	*	-	*	+	*	-	*	+	*	-	-

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

表六

		深度價外買權														
		$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$										
HW-GA	*	-	*	+	*	-	-	-	-	-	+					
HW-EGA	*	-	*	+	*	-	-	-	-	-	+					
HW-FIGA	*	-	*	+	*	-	-	-	-	-	+					
BS-GA	*	-		+		-	-	-	-	-	+					
BS-EGA	*	-		+		-	-	-	-	-	+					
BS-FIGA	*	-		+		-	-	-	-	-	+					

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

最後深度價外買權，在 Hull and White 模型配合任何一種實証模型，有著相同的結果，在權利期間（ $X_1$ ）對模型誤差有負向且顯著的影響；標的物的成交量（ $X_2$ ）對誤差有正向且顯著的關係存在；標的物成交量的平方（ $X_3$ ）對誤差有負向且顯著的影響。在 Black and Scholes 模型配合任何一種實証模型，只有在權利期間對誤差有負向且顯著的影響。

## （二）遠月買權

接著針對遠月買權進行誤差迴歸分析，由表七、表八和表九將結果歸為以下分析。

在價平買權時，Hull and White 模型配合任何一種實証模型，皆無任何變數對誤差有顯著性的影響，但在 Black and Scholes 模型配合任何一種實証模型，均有相同結果，如權利期間（ $X_1$ ）對模型誤差有正向且顯著的影響，而當標的物的成交量（ $X_2$ ）增加，則誤差就愈大；標的物成交量的平方（ $X_3$ ）對模型誤差有負向且顯著的影響。價內買權時，除了 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型只有變數  $X_2$ 、 $X_3$  對誤差有顯著的影響，在其他的模型配合上，有權利期間（ $X_1$ ）和標的物成交量（ $X_2$ ）對模型誤差有正向且顯著的影響，標的物成交量的平方（ $X_3$ ）對模型誤差有負向且顯著的影響。

表七

	價平買權					價內買權							
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$			
HW-GA	-	+	-	+	-	*	+	*	+	*	-	+	-
HW-EGA	-	+	-	+	-	*	+	*	+	*	-	+	-
HW-FIGA	-	+	-	+	-		+	*	+	*	-	+	-
BS-GA	*	+	*	+	*	-	+						
BS-EGA	*	+	*	+	*	-	+						
BS-FIGA	*	+	*	+	*	-	+						

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

表八

	價外買權					深度價內買權							
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$			
HW-GA	*	-	*	-	*	+	-	*	+	*	-	+	-
HW-EGA	*	-	*	-	*	+	-	*	+	*	-	+	-
HW-FIGA	*	-	*	-	*	+	-	*	+	*	-	+	-

BS-GA	-	+	-	-	+	*	+	*	+	*	-	+	-
BS-EGA	-	-	-	-	+	+	*	+	*	-	+	-	-
BS-FIGA	+	*	+	*	-	+	-	*	+	*	+	*	-

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

表九

深度價外買權						
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
HW-GA	+	*	+	-	-	+
HW-EGA	+		+	-	-	+
HW-FIGA	+	*	+	-	-	+
BS-GA	*	-	+	-	-	+
BS-EGA	-		+	-	-	+
BS-FIGA	-		+	-	-	+

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

由表八，在價外買權，由於幾乎每種模型皆有不盡相同的結果且方向不一定，導致並無一致的結果。在深度價內買權，Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型或 FIGARCH 模型，對誤差有顯著性影響的變數包含權利期間 ( $X_1$ ) 標的物成交量 ( $X_2$ ) 和標的物成交量的平方 ( $X_3$ )。其餘的模型對模型誤差有顯著性的影響包含標的物成交量 ( $X_2$ ) 和標的物成交量的平方 ( $X_3$ )。

由表九觀察，在深度價外買權和在價外買權相同，因為任何一種模型搭配皆有不同的結果且方向也不一定。

### (三) 近月賣權

分析完了買權的部份，接著是針對賣權的部份進行誤差迴歸分析，首先在價平賣權，在 Hull and White 模型中，對誤差皆無顯著性的影響；在 Black and Scholes 模型中，只有在配合 FIGARCH 模型，對模型誤差有影響的只有權利期間 ( $X_1$ )，其餘模型中有影響的變數包含權利期間 ( $X_1$ ) 標的物成交量 ( $X_2$ ) 和標的物成交量的平方 ( $X_3$ ) 且影響方向皆一致。在價內賣權，Hull and White 模型中，只有在搭配 EGARCH 模型，所有的變數對模型誤差有顯著性的影響，其餘的搭配模型只有  $X_1$ 、 $X_2$ 、 $X_3$  等變數對模型誤差有顯著的影響，且影響方向一致，但在 Black and Scholes 模型配合任何實証模型，權利期間 ( $X_1$ ) 是對

表十

	價平賣權					價內賣權							
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$			
HW-GA	-	+	-	-	+	*	-	*	-	+	-	+	
HW-EGA	-	+	-	-	+	*	-	*	-	+	*	-	+
HW-FIGA	-	+	-	-	+	*	-	*	-	+	-	+	
BS-GA	*	-	*	-	+	*	-	-	+	-	-	+	
BS-EGA	*	-	*	-	+	*	-	*	-	+	-	+	
BS-FIGA	*	-	-	+	-	+	*	-	-	+	+	-	

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

表十一

	價外賣權					深度價內賣權								
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$				
HW-GA	+	-	+	*	+	*	-	+	*	+	*	-	+	-
HW-EGA	+	-	+	*	+	*	-	+	*	+	*	-	+	-
HW-FIGA	+	-	+	*	+	*	-	+	*	+	*	-	+	-



BS-GA	-	*	-	*	+	*	+	*	-	+	*	+	*	-	+	-
BS-EGA	-	*	-	*	+	*	+	*	-	+	*	+	*	-	+	-
BS-FIGA	-	*	-	*	+	*	+	*	-	+	*	+	*	-	+	-

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

表十二

深度價外賣權						
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
HW-GA	+	+	-	+	-	
HW-EGA	+	+	-	+	-	
HW-FIGA	+	+	-	+	-	
BS-GA	+	+	+	+	-	
BS-EGA	+	+	+	+	-	
BS-FIGA	+	+	+	+	-	

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

模型誤差的有負向且顯著的影響。

從表十一可知，在價外賣權的部份，Hull and White 模型配合任何一種實証模型，價內外程度 ( $X_4$ ) 對模型誤差有正向顯著性的影響，價內外程度的平方 ( $X_5$ ) 對誤差有負向顯著性的影響；在 Black and Scholes 模型中，對模型誤差有影響的變數包括  $X_2$ 、 $X_3$ 、 $X_4$ 、 $X_5$  且影響方向皆相同。在深度價內賣權，不論是何種模型配合，當標的物成交量 ( $X_2$ ) 愈大時，誤差愈大；且當標的物成交量的平方 ( $X_3$ ) 愈小時，誤差愈大。從表十二觀察，在深度價外賣權，無任何變數對模型誤差有顯著性的影響。

#### (四) 遠月賣權

從表十三觀察，在價平賣權和價內賣權，權利期間 ( $X_1$ ) 對模型誤差有負向且顯著性的影響，亦指當權利期間愈短，誤差則愈大；從表十四可知，在價外賣權和在價平賣權、價內賣權的結果相同，但在深度價內賣權，只有在 Hull and White 模型配合 GARCH 模型或 EGARCH 模型，權利期間 ( $X_1$ ) 對誤差有負向顯著的影響，其他模型皆無顯著的影響。

最後，在深度價外賣權，則以權利期間 ( $X_1$ ) 對模型誤差有負向顯著性的影響，唯獨在 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型，除了  $X_1$  有顯著性負向影

表十三

	價平賣權					價內賣權						
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$		
HW-GA	*	-	+	-	-	+	*	-	+	-	-	+
HW-EGA	*	-	+	-	-	+	*	-	+	-	-	+
HW-FIGA	*	-	+	-	-	+	*	-	+	-	-	+
BS-GA	*	-	+	-	-	+	*	-	-	-	-	+
BS-EGA	*	-	+	-	-	+	*	-	-	+	-	+
BS-FIGA	*	-	+	-	-	+	*	-	+	-	-	+

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

表十四

	價外賣權					深度價內賣權						
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$		
HW-GA	*	-	+	-	-	+	*	-	-	+	-	+
HW-EGA	*	-	+	-	-	+	*	-	-	+	-	+
HW-FIGA	*	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+

BS-GA	*	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+
BS-EGA	*	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+
BS-FIGA	*	-	-	+	-	+	-	+	-	-	+

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

表十五

深度價外賣權						
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	
HW-GA	*	-	+	-	+	-
HW-EGA	*	-	+	-	+	-
HW-FIGA	*	-	*	+	-	+
BS-GA	*	-	+	-	+	-
BS-EGA	*	-	+	-	+	-
BS-FIGA	*	-	+	-	+	-

註：HW-GA 表示為 Hull and White 模型配合 GARCH 模型；HW-EGA 為 Hull and White 模型配合 EGARCH 模型；

HW-FIGA 為 Hull and White 模型配合 FIGARCH 模型。BS-GA 為 Black and Scholes 模型配合 GARCH 模型；

BS-EGA 為 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型；BS-FIGA 為 Black and Scholes 模型配合 FIGARCH 模型

“\*”代表 5%顯著水準；正、負號代表係數的為正或負。

響，還有標的物成交量（ $X_2$ ）有正向顯著的影響。

#### 第四節 投資人的行為分析

投資人行為常常是決定買、賣權價格高低的主因，但投資人的行為又很難去預測，然而現在有許多學者提出關於投資人行為的相關研究。本研究將提出一些看法來說明為何投資人的行為造成選擇權市場價格和理論價格有誤差的原因。針對上述問題，我們透過行為財務學的展望理論和處份效果來加以說明，首先本研究要介紹展望理論。

##### （一）展望理論

Kahneman and Tversky (1979) 指出傳統預期效用理論無法完全描述個人在不確定情況下的決策行為。通常利用兩種函數來描述個人的選擇行為：一種是價值函數 (value function)  $v(x)$ 。另一種是決策權數函數 (decision weighting function)  $\pi(p)$ 。而價值函數取代了傳統的預效用理論中的效用函數，決策權數函數將預期效用函數的機率轉換成決策權數。

在價值函數有下列三個重要的特性：

1. 價值函數是定義在相對於某個參考點的利得和損失，而不是一般傳理論所重視的期末財富或消費。參考點的決定通常是以目前的財富水準為基準，但有時參考點可能會因為投資人對未來財富部位預期的不同，而有不同的考慮。
2.  $v(x)$  為 S 型的函數。在面對利得時是凹函數 (concave、 $v''(x) < 0$ 、 $x > 0$ )，

損失是凸函數 (convex、 $v''(x) > 0$ 、 $x < 0$ )，這表示投資者每增加一單位的利得，其增加的效用低於前一單位所帶來的效用。

3. 價值函數其損失的斜率比利得的斜率陡。即投資者在相對應的利得與損失下，其邊際損失比邊際利得敏感。如：損失一單位的邊際痛苦大於獲取一單位的邊際利潤，也就是個人有損失趨避的傾向。

## (二) 處份效果 (disposition effect)

至於會造成賣權交易量較低的原因，我們可以利用處份效果來說明，Shefrin and Statman(1985)認為投資人為了避免後悔，會傾向繼續持有資本損失的股票，而去實現具有資本利得的股票之狀況，這種現象為處份效果。根據展望理論，價值函數在面對損失時是凸函數，此時投資人為風險愛好者，故此時投資人會不願意實現確定的損失，而會嘗試可能的扳平機會，所以投資人會繼續持有資本損失的股票。若股價目前處於獲利的階段，投資人要決定到底是賣出或繼續持有該股票的決策也可以用價值函數來分析，因為價值函數在面對利得是凹函數，此時投資人為風險趨避者，投資人會傾向實現確定的利得，因此會賣出具有資本利得的股票；我們也可以用準神奇式的思考 (quasi-magical thinking) 來解釋處份效果，假設個人覺得在某種程度上保留損失的東西可以扭轉他們已經損失的事實。當股票已被明顯的高估時，投資大眾對股票的需求可能也有準神奇式的思考，認為如果自己繼續持有，則股票會持續上漲。本研究也可利用此效果來說明賣權交易量低的原因，當台股指數下跌時，由於投資人會繼續持有資本損失的股票，比較不會採取避險的工作，導致賣權的交易量較低的原因。

## 第五章 結論與建議

### 第一節 研究結論

選擇權的價格模型從 Black and Scholes ( 1973 ) 發表後，就一直蓬勃發展至今，國內外更有許多學者針對選擇權訂價模型作研究，包含提出隨機波動模型、隨機利率模型……等等，且大部分研究指出 Black and Scholes 模型的訂價準確度不如其他模型。

本研究利用 Black and Scholes 模型與 Hull and White 模型配合 GARCH、EGARCH 及 FIGARCH 模型所預測出的波動來計算選擇權的訂價，在 Hull and White 模型上，本研究只採用  $\rho = 0$  也就是波動度與股價報酬率的相關係數等於 0，並利用蒙地卡羅模擬求出價格。然後針對各個模型配合加以作比較，選出適合台股指數選擇權的訂價模型；利用計算出的理論價格和市場價格比較，針對誤差來源迴歸分析來找出影響的變數。以下是由本研究結果所歸納之內容：

買權部份：

- (1) 不論是在遠月或近月搭配著價平、價內、價外、深度價內或深度價外各種情況下，皆以 Black and Scholes 模型配合 EGARCH 模型所預測的波動為理論價格誤差最小。
- (2) 理論價格高於市場價格的主要原因，在於台灣股票市場處於空頭市場的情形下，投資人在買權操作上相對的困難，以致投資人對買權不感興趣。

賣權部份：

- (1) 無論是在任何的價內外程度上或近、遠月，皆以 Black and Scholes 模型搭

配 FIGARCH 模型所預測的波動為理論價格誤差最小。

- (2) 理論價格為什麼無法準確預測市場價格，且誤差程度較大的原因，是由於投資人的行為具有處份效果所導致。

誤差來源迴歸分析：

近月買權：

- (1) 在價平和深度價內時，權利期間和標的物成交量對於模型誤差的影響皆為負向且顯著。在標的物成交量的平方有正向且顯著的影響。
- (2) 在價內和深度價外時，只有權利期間對誤差有較顯著的影響。
- (3) 在價外時，無論任何一種模型搭配，結果也相一致。影響到誤差的變數有標的物成交量、價內外程度和價內外程度的平方。

遠月買權：

- (1) 在價平、價外及深度價外，無論在任何模型搭配上，較沒有一致性的結果。
- (2) 在價內時，以權利期間和標的物成交量對誤差有正向顯著的影響，標的物成交量的平方有負向顯著影響。
- (3) 在深度價內，以標的物成交量和標的物成交量的平方有顯著的影響。

近月賣權：

- (1) 在價平和深度價外，沒有較顯著性的影響。
- (2) 在價內時，當權利期間愈短，誤差愈大。
- (3) 價外賣權時，以價內外程度和價內外程度的平方，有方向一致且顯著的影響。



(4) 深度價內賣權時，以標的物成交量和標的物成交量的平方，有方向相同且顯著性的影響。

遠月賣權：

只在深度價內賣權沒有一致明顯的影響，而其他的情形則以權利期間有著負向且顯著的影響。

## 第二節 後續研究發展建議

台灣的選擇權市場現在發展愈來愈健全，投資人也較為接受這個新型金融商品，不過在賣權的部份，投資人接受度還是較低，導致在價格預測上沒有買權來的準確，所以我們建議後續對此市場有興趣的研究者，有下列幾點：

- (1) 在波動度的預測方法上，大部份的研究以單變量模型來做預測，我們建議可以使用多變量模型來做波動度的預測，較能充份捕捉到市場的波動度。
- (2) 在資料的選取上，可以將研究時間拉長，預測出來的價格也較為準確。
- (3) 投資人的行為會影響到選擇權市場的情形，所以對投資人行為加以做完整的分析。

附錄一

台灣證券交易所股價指數選擇權契約規格

交易標的	台灣證券交易所發行量加權股價指數
中文簡稱	台指選擇權（台指買權、台指賣權）
英文代碼	TXO
履約型態	歐式（僅能於到期日行使權利）
契約乘數	指數每點新台幣 50 元
到期月份	自交易當月起連續三個月份，另加上三月、六月、九月、十二月中二個接續的季月，總共有五個份的契約在市場交易
履約價格間距	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 履約價格未達 3000 點以上；近月契約為 50 點，季月契約為 100 點</li> <li>● 履約價格 3000 點以上，未達 8000 點；近月契約為 100 點，季月契約為 200 點</li> <li>● 履約價格 8000 點以上，未達 12000 點；近月契約為 200 點，季月契約為 400 點</li> <li>● 履約價格 12000 以上；近月契約為 400 點</li> </ul>
權利金報價單位	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 報價未滿 10 點：0.1 點（5 元）</li> <li>● 報價 10 點以上，未滿 50 點：0.5 點（25 元）</li> <li>● 報價 50 點以上，未滿 500 點：1 點（50 元）</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 報價 500 點以上，未滿 1000 點：5 點（250 元）</li> <li>● 報價 1000 點以上：10 點（500 元）</li> </ul>
交易時間	交易時間為營業日上午 8：45~13：45
最後交易日	各契約的最後交易日為各該契約交割月份第三個星期三
到期日	最後交易日之次一營業日
最後結算價	前項平均價係採每筆成交價之成交量加權平均，但當日交易時間開始後十五分鐘內仍無成交價者，以當日市價升降幅度之基準價替代之

資料來源：台灣期貨交易所

## 附錄二

我們先分解 (7) 式，分解如下：

$$C_0 = \int_{S_T=X}^{\infty} \frac{\Lambda_T(\varepsilon)}{\Lambda_t} S_T(\varepsilon) df(\varepsilon) - \int_{S_T=X}^{\infty} \frac{\Lambda_T(\varepsilon)}{\Lambda_t} X df(\varepsilon)$$

$S_T$  和  $\Lambda_T$  都為  $\varepsilon$  指數函數，接下來需將 (6) 式代入，且簡化此式，此式如下：

$$\begin{aligned} C_0 &= \int_{S_T=X}^{\infty} e^{-\left(r+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right)T-\frac{\mu-r}{\sigma}\sqrt{T}\varepsilon} S_0 e^{\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)T+\frac{1}{2}\sigma^2} f(\varepsilon) d\varepsilon \\ &\quad - X \int_{S_T=X}^{\infty} e^{-\left(r+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right)T-\frac{\mu-r}{\sigma}\sqrt{T}\varepsilon} f(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= S_0 \int_{S_T=X}^{\infty} e^{\left[\mu-r-\frac{1}{2}\left(\sigma^2+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right)\right]T+\left(\sigma-\frac{\mu-r}{\sigma}\right)\sqrt{T}\varepsilon} f(\varepsilon) d\varepsilon \\ &\quad - X \int_{S_T=X}^{\infty} e^{-\left(r+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right)T-\frac{\mu-r}{\sigma}\sqrt{T}\varepsilon} f(\varepsilon) d\varepsilon \end{aligned} \quad (1)$$

現在將增加  $f(\varepsilon)$  的常態分配公式，其表示如下：

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)\varepsilon^2} \quad (2)$$

將 (2) 式代入 (1)，結果如下：

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 \int_{S_T=X}^{\infty} e^{\left[\mu-r-\frac{1}{2}\left(\sigma^2+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right)\right]T+\left(\sigma-\frac{\mu-r}{\sigma}\right)\sqrt{T}\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} X \int_{S_T=X}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[r+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\right]T-\frac{\mu-r}{\sigma}\sqrt{T}\varepsilon-\frac{1}{2}\varepsilon^2} d\varepsilon \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_0 \int_{S_T=X}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\varepsilon-\left(\sigma-\frac{\mu-r}{\sigma}\right)\sqrt{T}\right]^2} d\varepsilon - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} X e^{-rT} \int_{S_T=X}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\varepsilon+\frac{\mu-r}{\sigma}\sqrt{T}\right)^2} d\varepsilon \end{aligned}$$

即可得到(8)式。

### 附錄三

#### Ito's Lemma

首先我們先定義一個新的變數  $y_t$  ,

$$y_t = f(x_t) \quad (1)$$

由於我們可知  $dz^2 = dt$  ,  $dz = \sqrt{dt}$  , 當  $\Delta t$  趨近於 0 時 , 則  $dt \times dt = dt^2 = 0$ 。

利用二階泰勒展開式對(1)式展開 ,

$$dy = \frac{df(x)}{dx} dx + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dx^2 \quad (2)$$

我們針對變數  $x$  對時間接(t)微分 ,

$$dx = \mu_x dt + \sigma_x dz \quad (3)$$

且從 (3) 式第二項可知 ,

$$dx^2 = [\mu_x dt + \sigma_x dz]^2 = \mu_x^2 dt^2 + \sigma_x^2 dz^2 + 2\mu_x \sigma_x dt dz \quad (4)$$

利用  $dt^2 = 0$  ,  $dz^2 = dt$  和  $dt dz = 0$  的特性代入 (4) 式 , 可得到 (5) 式 ,

$$dx^2 = \sigma_x^2 dt \quad (5)$$

將 (3) 式和 (5) 式代入 (2) 式 , 可得到 ,

$$\begin{aligned} dy &= \frac{df(x)}{dx} (\mu_x dt + \sigma_x dz) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \sigma_x^2 dt \\ &= \left( \frac{df(x)}{dx} \mu_x + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \sigma_x^2 \right) dt + \frac{df(x)}{dx} \sigma_x dz \end{aligned}$$

故導出 Ito's Lemma , 表示如下 :

$$dy = \left( \frac{df(x)}{dx} \mu_x(g) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \sigma_x^2(g) \right) dt + \frac{df(x)}{dx} \sigma_x(g) dz$$

## 參考文獻

### 一、 中文部份

1. 陳香君(2001)，隨機波動選擇權評價模型之實證-以台灣認購權為例，高雄第一科技大學財務管理研究所未出版碩士論文。
2. 楊玉菁(2001)，台灣個股型認購權證評價之研究，彰化師範大學商業教育研究所未出版碩士論文。
3. 陳浚宏(2003)，B-S 模式與隨機波動性定價模式之比較-台灣股價指數選擇權之實證，成功大學企業管理研究所未出版碩士論文。
4. 關旭東(2004)，隨機波動度下選擇權評價之實證-以台灣股價指數選擇權為例，輔仁大學金融學系研究所未出版碩士論文。
5. 李季芳(2004)，台指選擇權的價格行為與 Edgeworth GARCH 選擇權演算法的應用，銘傳大學財務金融學系研究所未出版碩士論文。
6. 黃達業編譯，金融機構與市場，福懋出版社有限公司出版。
7. 黃昭元(2003)，台灣、美國、日本、香港、中國大陸股價報酬與波動性外溢效果之研究-多變量 BEKK-GARCH 模型之應用，東海大學經濟學系研究所未出版碩士論文。

### 二、 英文部分

1. Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein (1979), "Option Pricing: A Simplified Approach", Journal of Financial Economics, Vol.7, pp.229-264.

2. Boyle, P. P. (1977), "Option: A Monte Carlo Approach" , Journal of Financial Economics, Vol.4, pp.323-338.
3. Corrado, C. and T. Su(1998), "An Empirical Test of the Hull-White Option Pricing Model" , The Journal of Futures Markets, Vol.18, No4, pp.363-378.
4. Nandi, S.(1998), "How important is the correlation between returns and Volatility in a stochastic volatility model? Empirical evidence from pricing and hedging in the S&P500 index options market", Journal of Banking and Finance, Vol.22,pp.589-610.
5. Black, F. and M. Scholes(1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, Vol.81, pp.637-659.
6. Hull, J. and A.White(1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", Journal of Finance, Vol.42, pp.281-300.
7. WIGGINS, J.B. (1987), "Option Values Under Stochastic Volatility", Journal of Financial Economics, Vol.19, pp.351-372.
8. Ball, C.A. and A.Roma(1994), "Stochastic Volatility Option Pricing", Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol.29, pp.589-607.
9. Cochrane, J.H. (2001), "Asset Pricing".
10. Engle, R.F. and K.F. Kroner(1995), "Multivariate Simultaneous Generalized Arch", Econometric Theory, Vol.11, pp.122-150.
11. Greene, W.H. (2003), "Econometric Analysis", Fifth Edition.

12. Bakshi, G., Cao, C. and Z. Chen(1997), “Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models”, *Journal of Finance*, Vol.52, pp.2003-2049.
13. Long,D. M. and D. T. Officer(1997), “The Relation Between Option Mispricing and Volume in the Black-Scholes Option Model”, *The Journal of Financial Research*, Vol.20, pp.1-12.
14. Bollerslev, T. and H.O. Mikkelsen(1996), “Modeling and pricing long memory in stock market volatility”, *Journal of Econometrics*, Vol.73, pp.151-184.
15. Baillie, R.T., Bollerslev, T., and H.O. Mikkelsen(1996), “Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”, *Journal of Econometrics*, Vol.74, pp.3-30.
16. Kahneman, Daniel, and A.Tversky(1979), “Prospect theory: An analysis of decision under risk”, *Econometrica*, Vol.47, pp263-291.
17. Shefrin, H. and M. Statman(1985), “The disposition to sell winners too early and ride losers too long: theory and evidence”, *Journal of Finance*, pp.777-790.