

# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機與目的

1999年9月21日凌晨1時47分，台灣地區發生芮氏規模7.3之強烈地震，震央位於北緯 $23.85^{\circ}$ ，東經 $120.81^{\circ}$ ，位在南投日月潭西方12公里附近之位置，其後規模5以上之餘震達數十次之多且持續近月，本次地震除造成至少2200人死亡，七千餘人受傷以及數萬間房屋倒塌損毀，不僅其時間長度為世上罕見，斷層上下盤間形成之高差最大可達7-8公尺，亦為世上罕有之紀錄。

根據國立成功大學防災研究中心所作的調查指出：由地震之主震及餘震之分佈和地表斷層之特性得知，本次集集大地震起因於車籠埔斷層活動，於地表造成長達約105公里以上之地表斷裂或錯移，將原本儲存於中部地區之應變能量釋放出來，但本島其他地區儲存之應變能量，並未能在這次地震中有效的釋放〔國科會,2000〕。

地震屬於天然災害，至今仍無法有效預測；但我們知道如地震的發生、生理學中神經細胞發射之傳導流 (neural spike-trains) 及交通流量 (traffic flow) 等，皆可記錄成點過程 (point process) 資料。地震發生點基本上被認定是隨機的，因此地震發生時點之機率模型是我們研究之標的。

本研究應用群集卜瓦松過程 (clustering Poisson process) 及碎形特性之高斯擾亂 (fractional Gaussian noise) 來建立地震模型，並透過模擬，與此次 921 地震資料做頻譜分析 (spectral analysis)，比較兩者之差異，希望對地震的發生能有更進一步的認識。

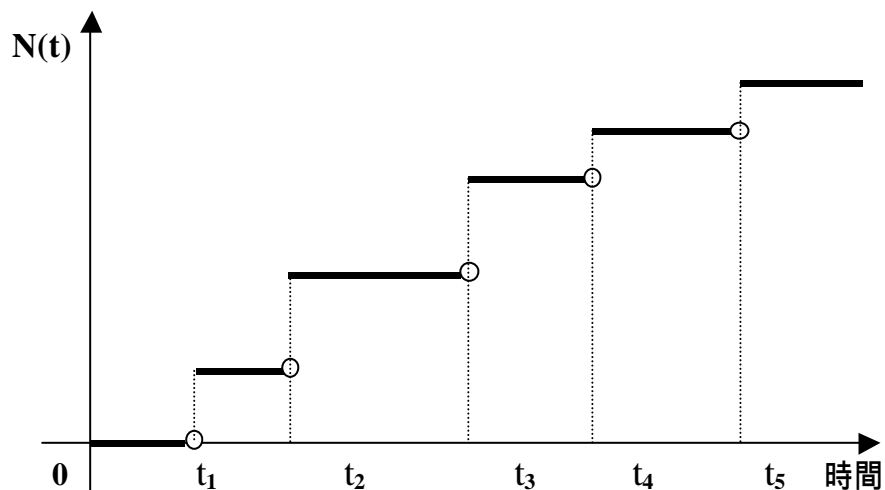
## 1.2 文獻回顧

### 1.2.1 隨機點過程

自然現象中有許多不規則的變動，這些看似雜亂的變動其實是服從某些特定機率分配函數而變化，由此發展出的統計理論稱之為隨機過程 (stochastic process)，隨機過程亦可說是對每一事件發生點的機率描述 [Osaki,1992]，而我們所關心的隨機變數為  $N(t)$ ， $N(t)$  定義為到時間  $t$  為止，某特定事件發生的累積個數，即  $N(t)=0, 1, 2, 3, \dots$

若一隨機過程其現實值 (realizations) 是由一系列的點事件 (a series of point events) 所組成，則稱為隨機點過程 (stochastic point process)。以時間的觀點而言，一個隨機點過程是指在連續時間中某特定事件的隨機發生，範圍落在時間軸的半實數線上  $[0, \infty)$ ，因此點過程可以從計數過程的觀點來解釋 [Bremaud,1981]。

$N(t)$  是一個右連續的階梯函數 (step function)，如下圖所示：



所以一個計數過程  $\{N(t); t \geq 0\}$  乃是定義在時間軸  $T=\{t; t \geq 0\}$  上的隨機過程，因此在時間區間  $(s, t]$  中所發生的點數可以表示為  $N(s, t)=N(t) - N(s)$ ；其中  $t_0 \leq s < t$ 。

### 1.2.2 卜瓦松過程 (Poisson process)

卜瓦松過程是最簡單也是最重要的一個計數過程，它是複雜計數過程的理論基礎，具有精確的模式，也是研究其它更複雜計數過程必提及的主題 [Snyder,1991]。

計數過程  $\{N(t); t \geq 0\}$  若滿足下列條件，則可稱之為卜瓦松過程。

1.  $P[N(0)=0]=1$ 。

2.  $\{N(t); t \geq 0\}$  具有穩定且獨立之增量

即  $N(t)$  與  $N(t+\Delta t) - N(t)$  是相互獨立的。

3.  $P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1 | H_t] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$

其中  $H_t$  為時間  $t$  之前所發生之事件；當  $\Delta t$  趨近於 0 時，極限  $P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1 | H_t] / \Delta t$  是一個存在、可積且收斂與時間  $t$  有關之函數，以  $\lambda(t)$  表示，稱為強度函數 (intensity function)。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1 | H_t] = \lambda(t)$$

4.  $P[N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2 | H_t] = o(\Delta t)$

其中  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ ，此極限式目的在表示  $o(\cdot)$  之定義，表在極小的時間區間內，事件發生兩次的機率幾乎不可能。

### 1.2.3 均齊性卜瓦松過程 (homogenous Poisson process)

若  $\lambda(t)$  與點過程至時間  $t$  為止之歷史  $H_t$  無關，即時間  $t$  之前發生的事件不影響之後發生的事件，且強度函數為一固定值，不隨時間變動而改變，則稱為均齊性卜瓦松過程。

它符合以下三個條件：

1.  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1] = \lambda$ ，其中  $\lambda$  是常數。

2.  $P[N(t+\Delta t) - N(t) \geq 2] = o(\Delta t)$ 。

3.  $P[N(0)=0]=1$ 。

### 1.2.4 非均齊性卜瓦松過程 (nonhomogenous Poisson process)

若  $\lambda(t)$  與點過程至時間  $t$  為止之歷史  $H_t$  無關，但強度函數會隨著時間  $t$  變動而改變，即  $\lambda(t)$  為時間  $t$  之函數。

它符合以下三個條件：

$$1. \quad P\{N(t) = n\} = \frac{1}{n!} \int_0^t \lambda(u) e^{-\int_0^u \lambda(v) dv} \left( \int_0^u \lambda(v) e^{-\int_0^v \lambda(w) dw} \right)^{n-1} du$$

其中  $\lambda(t)$  是時間的函數。

$$2. \quad P\{N(t) = n, N(s) = m\} = \frac{1}{n! m!} \int_0^s \lambda(u) e^{-\int_0^u \lambda(v) dv} \left( \int_u^s \lambda(v) e^{-\int_u^v \lambda(w) dw} \right)^{m-1} du \left( \int_s^t \lambda(v) e^{-\int_s^v \lambda(w) dw} \right)^{n-m} dv$$

$$3. \quad P\{N(t) = n, N(s) = m\} = \frac{1}{n! m!} \int_0^s \lambda(u) e^{-\int_0^u \lambda(v) dv} \left( \int_u^s \lambda(v) e^{-\int_u^v \lambda(w) dw} \right)^{m-1} du \left( \int_s^t \lambda(v) e^{-\int_s^v \lambda(w) dw} \right)^{n-m} dv$$

### 1.2.5 自我引發點過程 (Self-Exciting point process)

自我引發點過程與上述兩者的不同處，在於強度函數同時受到  $H_t$  與時間的影響，亦即在時間  $t$  之前發生的事件會影響  $\lambda(t)$ ，它會滿足下列條件：

$$1. \quad P\{N(t) = n, H_t = h\} = \frac{1}{n!} \int_0^t \lambda(u, h) e^{-\int_0^u \lambda(v, h) dv} \left( \int_0^u \lambda(v, h) e^{-\int_0^v \lambda(w, h) dw} \right)^{n-1} du$$

其中  $\lambda(t, H_t)$  為時間  $t$  與過去發生事件之函數。

$$2. \quad P\{N(t) = n, N(s) = m, H_t = h\} = \frac{1}{n! m!} \int_0^s \lambda(u, h) e^{-\int_0^u \lambda(v, h) dv} \left( \int_u^s \lambda(v, h) e^{-\int_u^v \lambda(w, h) dw} \right)^{m-1} du \left( \int_s^t \lambda(v, h) e^{-\int_s^v \lambda(w, h) dw} \right)^{n-m} dv$$

$$3. \quad P\{N(t) = n, N(s) = m, H_t = h\} = \frac{1}{n! m!} \int_0^s \lambda(u, h) e^{-\int_0^u \lambda(v, h) dv} \left( \int_u^s \lambda(v, h) e^{-\int_u^v \lambda(w, h) dw} \right)^{m-1} du \left( \int_s^t \lambda(v, h) e^{-\int_s^v \lambda(w, h) dw} \right)^{n-m} dv$$

自我引發點過程會因為強度函數的不同而有不同的形態，以下介紹兩種自我引發點過程：

#### (1) Hawkes' 自我引發點過程

Hawkes, 1971 中推導出一般點過程模型，它的強度函數如下：

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \int_0^t g(t-u) \lambda(u) du$$

其中  $g(t)$  我們稱之為反應變數 (response function)，而另一篇文章則是在探討如何使用最大概似法來估計 Hawkes' model 的參數，並考慮反應變數為  $g(t) = e^{-\beta t}$  [Ozaki, 1979]。

若已知在區間 $[0, T]$ 之發生時間為  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ( $T = t_n$ )

$$L = \prod_{i=1}^n g(t_i) \exp\left\{-\int_0^{t_i} g(t) dt\right\} \quad (1.1)$$

取 log 後之概似函數 [Rubin,1972]

$$\log L = \sum_{i=1}^n \log g(t_i) - \int_0^{t_n} g(t) dt \quad (1.2)$$

將反應變數  $g(t) = e^{-t}$  代入並假設  $T = t_n$  化簡後可得

$$\log L = \sum_{i=1}^n \log \left[ \frac{A}{b} e^{-b t_i} \right] - \int_0^{t_n} A e^{-b t} dt \quad (1.3)$$

$$A = \frac{b}{t_j < t_i} e^{-b t_i} \text{ for } i \geq 2; A = \frac{b}{t_1} e^{-b t_1}$$

Hawkes' model 的 log-likelihood 對參數而言是非線性 (non-linear) 的, 非線性的求解方法很多種, 最著名的是 Newton-Raphson method [Ozaki,1979,p147]。在 Ozaki 的文章中亦提到了模擬 Hawkes' 自我引發點過程的方法, 簡介如下:

利用條件風險函數 (conditional Hazard function)

$$h(t_k | t_1, \dots, t_{k-1}, q) = \frac{f(t_k | t_1, \dots, t_{k-1}, q)}{1 - F(t_k | t_1, \dots, t_{k-1}, q)}$$

我們可以得到

$$\log h(t_k | t_1, \dots, t_{k-1}, q) = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{b} e^{-b t_i} - t_k$$

其中  $1 - F(t_k | t_1, \dots, t_{k-1}, q)$  可看作是服從 uniform(0, 1) 之分配, 因此

$$\log U + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{b} e^{-b t_i} - t_k = 0 \quad (1.4)$$

代入反應函數  $g(t) = e^{-t}$

$$\log U + m \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{b} e^{-b t_i} - t_k = 0 \quad (1.5)$$

根據式子(1.5) 即可模擬 Hawkes' 自我引發點過程 [Ozaki,1979,p149]

## (2)Liu's 自我引發點過程

將隨機點過程應用在神經傳導流 (neural spike-train) 的研究中, Liu,1991 利用最大概似估計法 (maximum likelihood estimation) 來估計神經傳導流機率模式之參數, 利用的是非均齊性卜瓦松過程 [Liu,1991]。Liu's model 的強度函數如下:

$$\lambda(t) = \lambda_0 \left[ 1 - a e^{-b(t-t_k)} \right] \mathbb{1}_{t > t_d} \quad (1.6)$$

其中,

$N(s)$ ,  $s \leq t$  為時間  $t$  之前發生的事件,

$\lambda_0$ : 漸近發射率 (asymptotic firing rate),

$a$ : 恢復型態常數 (recovery shape constant),

$b$ : 恢復時間常數 (recovery time constant),

$t_d$ : 無反應時間 (fixed dead-time),

$t_k$ :  $k=1,2,\dots,N(t)$  第  $k$  個點事件發生的時間。

亦有將集群卜瓦松過程 (clustering Poisson process) 之  $1/f$  波動性質 (fluctuation) 應用在神經傳導流研究中 [Gruneis,1989,1990], 這方面屬於頻譜分析 (spectral analysis), 也是本研究模擬地震資料的主要方法, 故於第二章專門討論之。

## 1.3 地震概述與 921 集集大地震

### 1.3.1 地震成因概論

西元 1911 年美國地質學家李德 (Richter) 提出「彈性回跳學說」。根據彈性回跳理論, 就像是一片鋼片被扭曲, 在超過其彈性極限時會突然斷裂, 兩片鋼片會彈跳回原位, 來回發生的振動或釋放出因扭曲所貯藏之能量。

若地層受到地下應力之作用而逐漸發生彎曲或變形, 當能量累積

超過一定限度時，發生斷折並沿斷面滑走，便形成斷層。此時沿斷裂面產生振動，便是地震。

### 1.3.2 地震相關名詞

#### (1)斷層 ( a fault )

岩層斷裂的地方，發生斷層的破裂面稱為斷層面，斷層面以上的岩層叫上盤，斷層面以下的岩層叫下盤。斷層又分為正斷層、逆斷層及平移斷層。

#### (2)震源 ( focus of an earthquake ) 與震央 ( epicenter )

震源指地震發生的位置，震央指震源正上方的地表位置，震源深度指震源與震央之間的距離。

#### (3)震度分級 ( the grade of earthquake intensity )

地震強度 ( 震度 ) 是用來描述一場地震的大小，表示地面的震動或建築物破壞程度。地震規模則是描述地震所釋放能量大小，沒有單位，一般使用芮氏地震規模。

我國震度級數原本共分七級(0-6 級)，但是九二一大地震的震度已經超過原來的設定，因此在 89 年 6 月中央氣象局將震度分級改為八級；第 0 級為「無感」，第七級為「劇震」。

#### (4)芮氏地震規模 ( $M_L$ , CWB )

芮希特教授在 1935 年所提出，根據地震波振幅推算所得。芮氏地震規模每增加 1.0，代表地震所釋放的能量增加約 30 倍。一場規模 6.0 地震所釋放的能量，相當於第二次世界大戰中投擲在日本廣島的一顆原子彈威力。

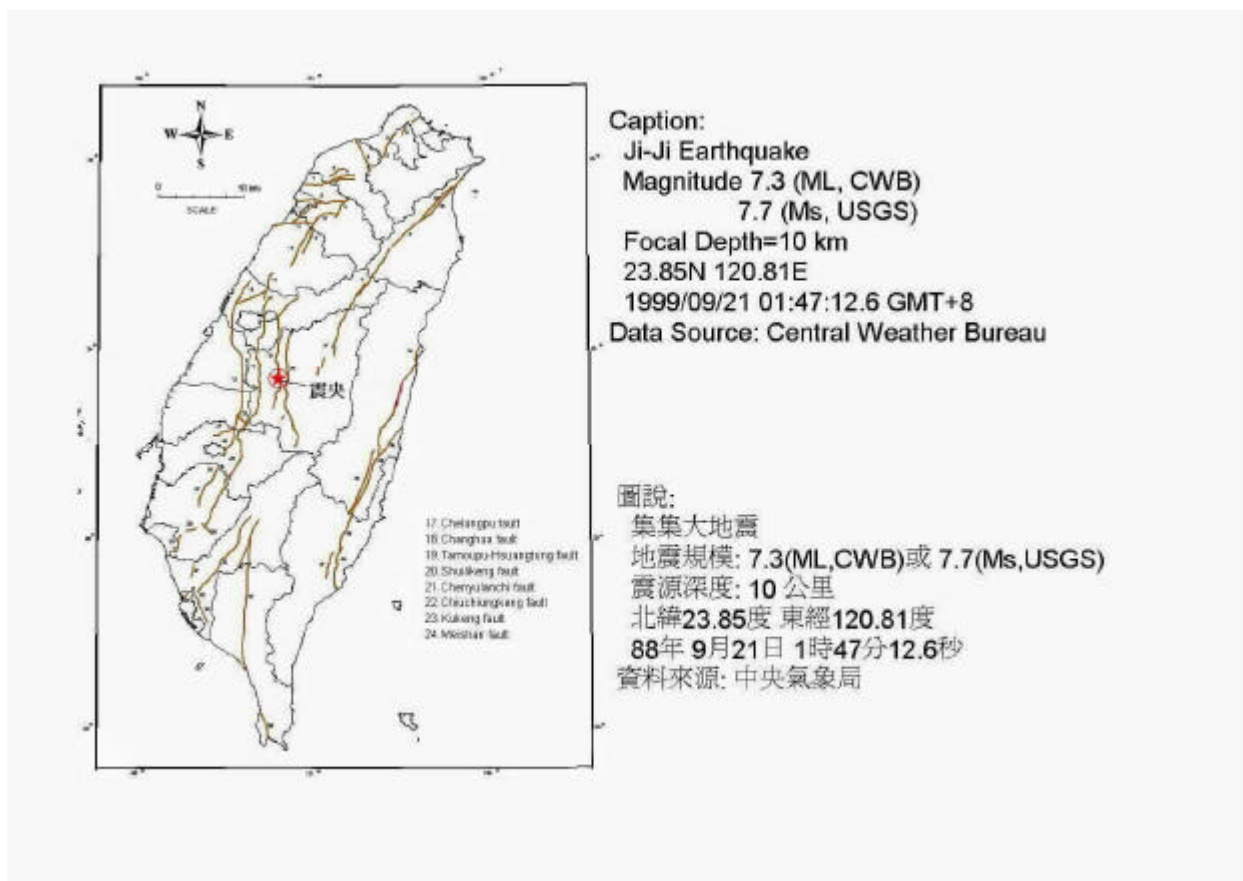
#### (5)地震波的種類 ( the kinds of seismic waves )

P 波 - P 波在傳播時，質點的運動方向與震波傳播的方向一致；如聲波。目前有一個看法，認為 P 波在傳到表面時，會有一部份的能

量轉化成音波，成為大地震前的聲音。

S 波 - S 波在傳播時，質點運動的方向與震波傳播的方向垂直；  
如繩波。S 波無法在液體或氣體中傳播。

### 1.3.3 關於 921 地震及傷亡統計



截至 10/3 10:00 為止，死亡 2246 人，受傷 8735 人，失蹤 38 人，  
埋困 58 人，交通阻絕受困 7 人，救出 4540，房屋全倒 9909 棟，半倒  
7575 棟。〔資料來源:中央氣象局〕



## 第二章 群集卜瓦松過程及其頻譜特性

### 2.1 隨機點過程與地震資料間之關係

上一章已介紹過，若一隨機過程其現實值是由一序列的點事件所組成，稱之為隨機點過程。而實際記錄地震的發生可視為一個點過程的現實值，故以點過程來適配地震資料應屬合理。

一時間數列其統計特性（指分佈之性質）不隨時間之變化而改變者，稱之為平穩型時間數列。一個平穩型時間數列為一隨機過程之特殊現實值，且這種隨機過程之統計特性不隨時間之變化而改變。而一個隨機過程具有如此的統計平衡（statistical equilibrium）狀態稱之為平穩型隨機過程〔林茂文,1992〕。

### 2.2 頻譜分析

#### 2.2.1 資料種類與特性

時間數列分析法可分為兩大類：第一類為時間定義域分析法（time domain），利用自我相關函數（autocorrelation function）作為建立模式之依據。第二類為頻率定義域分析法（frequency domain），以頻率之動量作為觀測對象〔Brockwell,1991〕，以頻譜（spectrum）作為分析之工具，一般又稱頻譜分析（spectral analysis）。兩者分析法在代表資料之特性上雖有差異，惟在數學意義上可互相轉換〔林茂文,1992〕。以下略述兩者之資料特性。

其一是以事件的相距時間（interarrival time）記錄之，數列  $\{W_n; n=1, \dots, n_t\}$  為所對應之發生時間（occurrence time），另一種則是以  $N(t)$  表示， $N(t)$  為時間  $t$  之前事件累積發生的次數，它們的關係可寫成  $W_n \quad t \Leftrightarrow N(t) \quad n$ 。

### 2.2.2 自我共變異函數 (autocovariance function)

在平穩數列的前提下，隨機變數  $z_t$  與  $z_{t+k}$  在時距 (lag)  $k$  期之自我共變異函數，以  $\gamma(k)$  表示之，其數學式如下：

$$\gamma(k) = \text{Cov}(z_t, z_{t+k}) = E[(z_t - m)(z_{t+k} - m)],$$

其中  $m = E[z_t]$ ，對於所有時間  $t$  都有相同值，此為平穩型隨機過程之特性。

### 2.2.3 自我相關函數 (autocorrelation function)

在平穩數列的前提下，隨機變數  $z_t$  與  $z_{t+k}$  在時距  $k$  期之自我相關函數，以  $\rho(k)$  表之，其數學式如下：

$$\rho(k) = \frac{\text{Cov}(z_t, z_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(z_t) \text{Var}(z_{t+k})}} = \frac{\gamma(k)}{g^2},$$

其中  $\text{Var}(z_t) = \text{Var}(z_{t+k}) = g^2$ ，即在時間  $t$  及  $t+k$  均具有相同之變異數，此亦為平穩型隨機過程之另一特性。

### 2.2.4 頻譜密度函數 (spectral density function)

在一個平穩的時間數列中，其自我共變異函數為  $\gamma(k)$  存在一個單調遞增 (monotonically increasing) 函數  $S(f)$ ，使得

$$\gamma(k) = \int_{-p}^p e^{ikf} dS(f) \quad (2.1)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad -p < f < p \quad (f: \text{頻率})$$

式子(2.1)稱為自我共變異函數的頻譜展開式。 $S(f)$ 稱之為頻譜分配函數 (spectral distribution function)。

在大部份點過程資料中， $S(f)$ 是連續且處處可微的，故式子(2.1)亦可寫成

$$\gamma(k) = \int_{-p}^p e^{ikf} S(f) df \quad (2.2)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad -p < f < p$$

式子(2.1)經傅立葉轉換 ( Fourier transform ) 後可得

$$s(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-ift} dt \quad (2.3)$$

$$e^{-ift} = \cos(kt) - i \sin(kt)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots ; -\infty < f < \infty,$$

$s(f)$  即為頻譜密度函數 ( spectral density function )。頻譜密度函數是自我共變異函數的一對一傅立葉轉換 [ Chatfield,1984 ]。

$s(f)$  具有偶函數的性質 [ Peter J.,1996 ] , 即  $s(f) = s(-f)$  , 可得

因為  $\sin(\cdot)$  是奇函數而  $\cos(\cdot)$  與  $(\cdot)$  是偶函數

$$s(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-ift} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) [\cos(kt) - i \sin(kt)] dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos(kt) dt$$

$$= s(-f)$$

頻譜分析主要是研究時間數列的頻率特性，將數列中的週期波分離出來，此方法著重在解釋而非預測。頻譜密度函數  $s(f)$  是頻率  $f$  的函數，所以當某個頻率具有大的頻譜密度時，表示它有明顯的週期特徵。

## 2.3 群集卜瓦松過程 ( clustering Poisson process )

### 2.3.1 群集卜瓦松過程之定義

群集卜瓦松過程是以卜瓦松過程為基礎所發展而成。一個群集卜瓦松過程，顧名思義是由許多群集 ( clusters ) 內含不同個數之隨機事件依發生時間所組成；它主要包含兩個重要部份，即主要過程 ( primary process ) 與次要過程 ( secondary process ) [ Gruneis and Baiter;1986 ]，說明如下：

### (1)主要過程 ( primary process )

為一連串主要事件 ( primary events ) 所組成的序列，假設其為平穩的卜瓦松過程，理論上，亦可視為一個再生過程 ( renewal process )。

### (2)次要過程 ( secondary process )

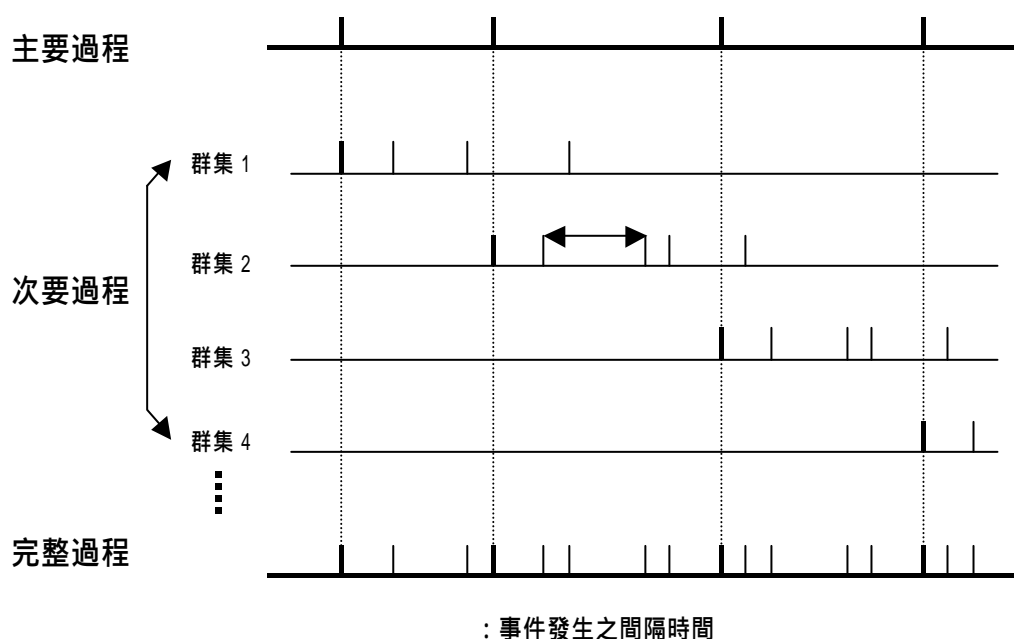
在主要過程中，每個主要事件皆會各自觸發 ( trigger ) 一連串的次要事件 ( secondary events )，稱之為群集 ( cluster )。群集是由  $M$  個隨機事件所組成， $M$  為一隨機變數，具有特殊的機率分配，於下一節詳細介紹之。

群集間彼此是獨立的，具有相同分配，這些群集的集合即為次要過程。

### (3)完整過程 ( complete process )

將所有群集依發生時間排序後，即形成一個由隨機事件所構成的無差別序列 ( indistinguishable sequence )。意即當一完整的群集卜瓦松過程形成後，各群集的結構已不再重要。

以下以圖解方式說明群集卜瓦松過程：



### 2.3.2 群集個數分配 (cluster-size distribution)

群集個數分配是指每個群集中事件發生個數所成的分配，群集個數在此以隨機變數  $M$  來表示，它的特殊機率分配如下：

$$P = \frac{m^z}{N_0 \sum_{m=1}^{N_0} m^z}, \quad (2.4)$$

其中，

$N_0$ ：給定的最大群集個數，

$z$ ：特定實數。

期望值 (expected value) 為

$$E = \sum_{m=1}^{N_0} m P = \sum_{m=1}^{N_0} m \frac{m^z}{N_0 \sum_{m=1}^{N_0} m^z}, \quad (2.5)$$

二次原動差 (second moment) 為

$$E^2 = \sum_{m=1}^{N_0} m^2 P = \sum_{m=1}^{N_0} m^2 \frac{m^z}{N_0 \sum_{m=1}^{N_0} m^z}. \quad (2.6)$$

頻譜密度函數  $s(f)$  的形態 (shape) 與群集個數分配  $P(m)$  密切相關，因此對於尋找  $1/f$  頻譜特性，群集個數分配有其重要性。舉例而言，一個幾何群集個數分配 (geometric cluster-size distribution)，將會引發  $1/f^2$  的頻譜特性 [Gruneis and Baiter, 1986]。

### 2.3.3 主要過程內間隔時間之分配

主要過程是由一序列的主要事件所構成，這些主要事件運用在地震資料上，我們視它為震度較大的主震，意即在時間  $[0, t]$  間主震發生  $k$  次的機率，正符合卜瓦松分配之定義。其機率密度函數如下：

$$P = \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t}; k=0, 1, 2, \dots; 0 \leq t < \infty, \quad (2.7)$$

是卜瓦松分配的唯一參數，稱為強度參數 (intensity parameter)，卜

瓦松分配的期望值與變異數皆為  $\frac{1}{q}$ ，故  $X$  又可視為期望發生次數。

發生次數呈卜瓦松分配，則主要過程內的間隔時間即呈指數分配 (exponential distribution)，其機率密度函數如下：

$$f(x) = \frac{1}{q} e^{-\frac{x}{q}} ; 0 \leq x < \infty ; q > 0 \quad (2.8)$$

$q$  是指數分配的唯一參數，代表平均間隔時間；指數分配的期望值為  $q$ ，變異數是  $q^2$ 。

### 2.3.4 群集內間隔時間之分配

群集內事件發生的間隔時間，以隨機變數  $Y$  來表示，我們假設  $Y$  呈伽瑪分配 (gamma distribution)，其機率密度函數如下：

$$g(y) = \frac{1}{\Gamma(a) b^a} y^{a-1} e^{-\frac{y}{b}} ; 0 \leq y < \infty ; a, b > 0 \quad (2.9)$$

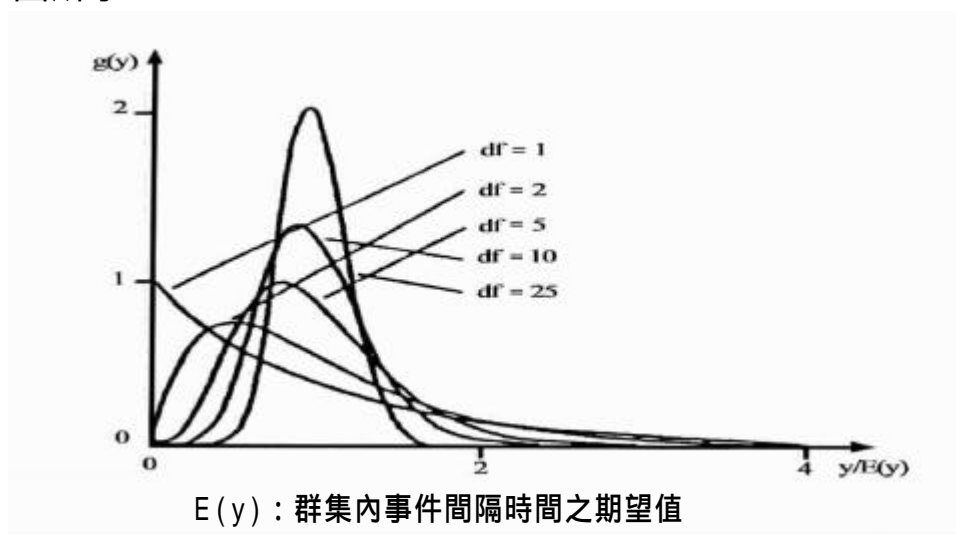
其中  $a$  稱為型態參數 (shape parameter)，  
 $b$  稱為尺度參數 (scale parameter)，  
 $\Gamma(\cdot)$  稱為伽瑪函數 (gamma function)。

伽瑪函數的數學式如下：

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt \quad (2.10)$$

當伽瑪分配的型態參數  $a = 1$  時，函數會退化成指數分配。

如下圖所示：



### 2.3.5 群集卜瓦松過程之頻譜特性

群集卜瓦松過程的頻譜特性已在〔Gruneis,Baiter;1986〕中廣泛討論過，在此精簡整合其結果。

$$s(f) = \frac{c}{f^2} + \frac{E[n_c] E[M]}{f^b} \quad (2.11)$$

其中，

$f$ ：頻率 (frequency)，

$E[n_c]$ ：群集平均發生率 (mean rate of cluster occurrence)，

$E[M]$ ：群集平均個數 (mean of cluster size)，

$E[y]$ ：群集內事件發生之平均間隔時間，

$c$ ：常數 (constant)。

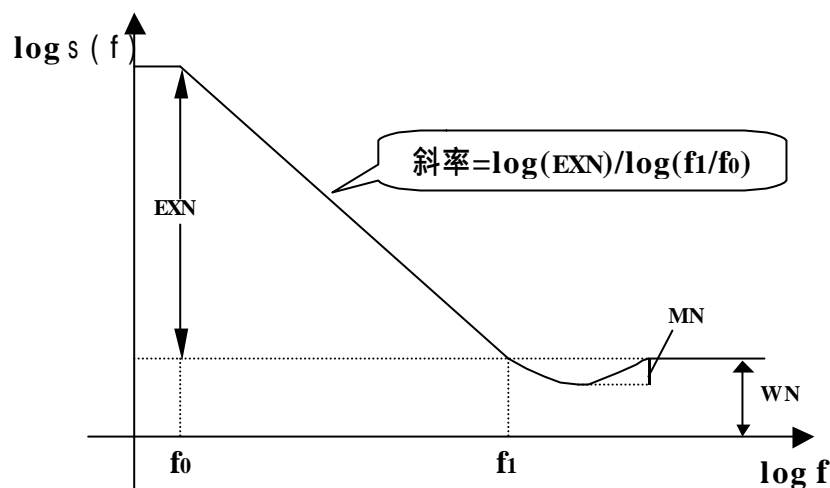
$s(f)$  稱為群集卜瓦松過程的頻譜密度函數，包含兩個部份。 $\frac{c}{f^2}$  為白噪音 (white noise)。 $\frac{E[n_c] E[M]}{f^b}$  為額外噪音 (excess noise)，它是構成頻譜圖  $1/f^b$  波動型態的主要部份，與群集個數分配有強烈相關性。

頻譜圖中  $1/f^b$  波動型態的  $b$  值估計，可利用雙對數尺度頻譜圖 (double-log-scale spectrum) 中，額外噪音的斜率 (slope) 求得。 $b$  值與  $z$  值的關係透過數值運算，已在 1986 年由 Gruneis 與 Baiter 推導出來，它們的關係如下〔Gruneis and Baiter;1986〕：

$$\begin{aligned} b &= 2, & -1 < z < 0, \\ b &= z+3, & -3 < z < -1, \\ b &= 0, & z < -3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

在頻譜分析中，頻率與其頻譜密度呈反比現象，稱之為低頻率波動型態 (low frequency fluctuation) 或  $1/f$  波動型態，群集卜瓦松過程正具備此一特性。

在數學上， $1/f$  波動型態可以被建立為具有碎形特性的隨機過程，其生成機制( generation mechanism )即為一個點過程 [ F. Gruneis,1991 ]，關於碎形特性第三章有詳細說明。



WN：白噪音的範圍 ( white noise )，

EXN：額外噪音的範圍 ( range of excess noise beyond white noise level )，

MIN：超出白噪音水平線的最小值 ( minimum value beyond white noise level )，

$f_1$ ：額外噪音上界 ( upper limit to excess noise )，

$f_0$ ：額外噪音下界 ( lower limit to excess noise )。

### 2.3.6 集集地震資料之頻譜特性

本研究使用之地震資料為民國 88 年 9 月 20 日至民國 89 年 9 月 30 日，台灣地區自 921 大地震後一年的地震資料，共 637 筆 [ 資料來源：中央氣象局 ]。所採用的資料型態為計數資料 ( count data )，作其雙對數尺度頻譜圖後發現：

- (1)微呈正相關 可以考慮使用非均齊性卜瓦松過程來模擬。
- (2)無週期性 並無明顯週期跡象顯示。
- (3)具  $1/f$  波動型態 雙對數尺度頻譜圖明顯呈直線衰退，表示具有強烈  $1/f$  波動型態。因此考慮群集卜瓦松過程應是不錯選擇。

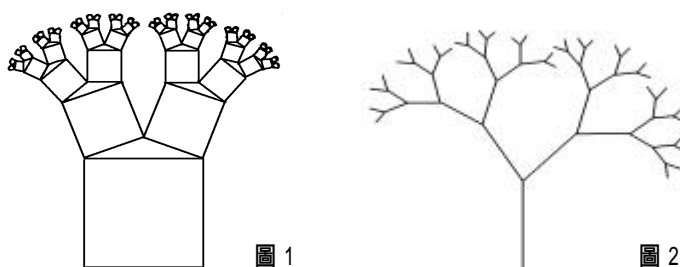


### 第三章 碎形特性之高斯擾亂

#### 3.1 碎形 (fractal)

##### 3.1.1 碎形特性 (fractal property)

關於碎形特性的定義很多，其中最普遍也是最簡單明瞭的定義為：一事物具有自身相似 (self-similarity) 的性質 [Addison Paul S,1997]；換言之，此事物之任何一小部份結構與整個結構相似或為主要結構的複製，具有此性質的事物稱之為具有碎形特性的事物 (fractal object)。碎形特性可以簡單的由以下兩圖形說明之。



自然界中存在著許多具有碎形特性之事物，如海岸線的形狀、蕨類的葉子、雪花結晶..等等。

##### 3.1.2 碎形特性之點過程 (fractal point process)

一個隨機點過程可以用以下數學式表示 [F. Gruneis,1991]。

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - t_n) \tag{3.1}$$

其中，

$\delta$  : Dirac's delta 函數，

$t_n$ : 第  $n$  個事件的發生時間。

在以 power-law 關係式說明碎形點過程之前，先定義一個計數函數  $N(t)$  (counting function)，意思是從時間點  $t_0$  到  $t_0 + t$  的發生次數。

$$N(t) = \sum_{t_0}^{t_0+t} y \tag{3.2}$$

若點過程滿足以下冪次定律 (power-law) 關係式, 則稱之為具有碎形特性之點過程 [ F. Gruneis,1991 ]。

$$N \sim t^{-a} \quad N \sim t_{\min}^H \in t \in t_{\max} \quad (3.3)$$

其中,

$a$  : 尺度因子 (scaling factor),

$H$  : Hurst 指數 (Hurst exponent)。

碎形點過程在時間軸所呈現的結果, 其震動幅度的規模變化 (amplitude-scaled version), 具有自身相似的性質。其頻譜密度函數與 Hurst 指數有下列關係式 [ F. Gruneis,1991 ]:

$$S \sim \frac{1}{f^{2H-1}} \quad ; \quad f_{\min} \in f \in f_{\max} \quad (3.4)$$

當  $H=1/2$  時, 數列是不相關的 (uncorrelation), 可視為一均齊性卜瓦松分配。當  $1/2 < H < 1$  時, 此過程被稱之為具有長期相關 (long-term correlation) 的特性。 $H$  可以由計數次數 (count) 的變方來估計, 其關係式如下:

$$V \sim N^H \quad (3.5)$$

### 3.1.3 群集卜瓦松過程之碎形特性

第二章已詳細說明群集卜瓦松過程, 是由主要過程與次要過程中, 各個不同群集所重疊 (superposition) 而成的無差別序列, 其完整過程  $y(t)$  可由以下數學式表示。

$$y(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \delta(t - t_i - t_j) \quad (3.6)$$

其中,

$t_i$  : 主要過程的發生時間點 (time points of the primary process),

$t_j$  : 次要過程的發生時間點 (time points of the secondary process),

$M$  : 群集個數 (cluster size)。

群集卜瓦松過程的長期相關 ( long-term correlation ) 是由於不同群集重疊所造成，其相關的長度是依據群集最長持續時間  $t_{\max} \approx N_0 \cdot \theta$  與最短持續時間  $t_{\min} \approx \theta$ 。故  $N_0$  可由以下式子估計之：

$$N_0 = t_{\max} / t_{\min} ,$$

其中，

$N_0$ ：群集最大個數 ( maximum cluster-size )，

$\theta$ ：次要過程之平均間隔時間 ( mean interevent time in the secondary process )

上一章已討論過群集卜瓦松過程的頻譜函數，具有以下性質：

$$S(f) \sim \frac{1}{f^b} ; 0 < b < 2 \quad (3.7)$$

比較式子(3.4)與(3.7)，可以得到  $H=(1+b)/2$ ，因此可以認定群集卜瓦松過程是一個具有碎形特性的隨機過程。

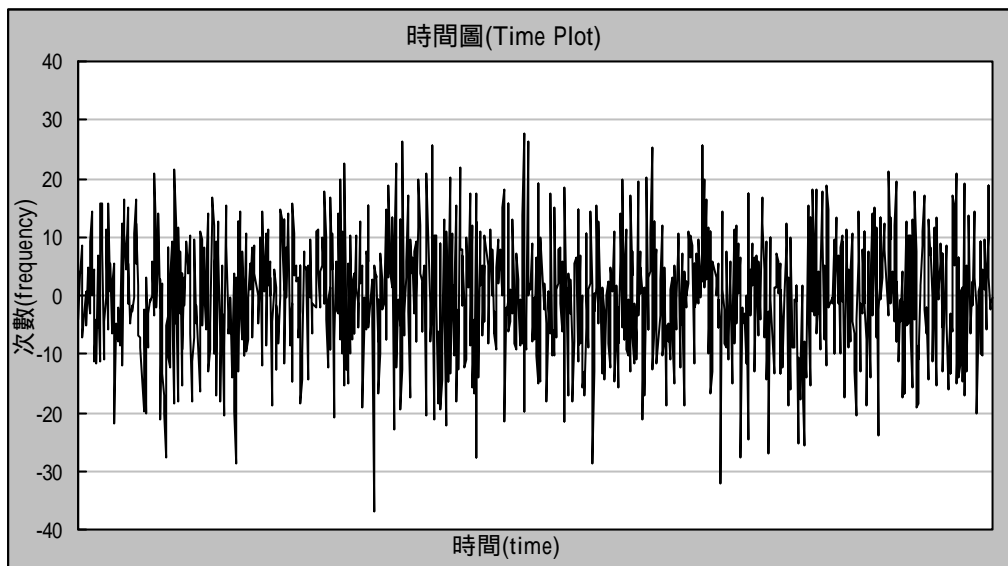
## 3.2 碎形特性之布朗運動 ( fractional Brownian motion )

### 3.2.1 布朗運動 ( Brownian motion )

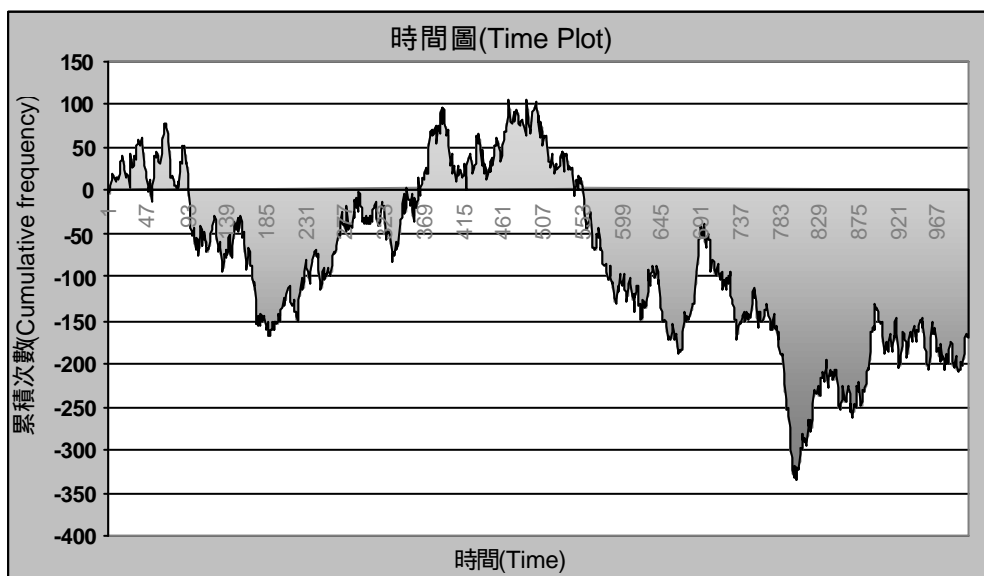
西元 1827 年，英國植物學家布朗 ( R. Brown , 1773-1858 ) 用顯微鏡觀察水中的花粉，發現花粉微粒不停地作不規則運動，這種運動後來稱之為『布朗運動』。西元 1905 年愛因斯坦和奧地利科學家斯莫路霍夫斯基 ( M.von Smoluchowski ) 發表了對布朗運動的研究結果，證明了微粒的運動是由於液體粒子從四面八方對他們的撞擊引起的。

模擬布朗運動不規則的擾動現象方式有很多種，其中最為普遍的方式稱之為隨機組中點取代法 ( random midpoint displacement )，在此我們以另一種方式來模擬一維度的 ( one dimension ) 布朗運動，即是先產生一組獨立的高斯隨機數 ( independent Gaussian random numbers )，再依時間順序加總後即可生成。如下圖所示：

隨機產生 1000 筆高斯隨機數：



依時間順序加總後，累積次數的軌跡( trace ) 即為一維度的布朗運動，以  $B(t)$  表示，無規則的擾動就如同隨機漫步 ( random walk ) 一般，如下圖所示：



### 3.2.2 碎形特性之布朗運動 (fractional Brownian motion)

具有碎形特性之布朗運動與 Hurst 指數有關； $B(t)$  滿足以下 power-law 關係式：

$$B(rt) = r^H B(t), \quad (3.8)$$

其中，

$r$ ：尺度因子 (scaling factor)，

$H$ ：Hurst 指數 (Hurst exponent)。

當  $H=1/2$  時， $B(t)$  稱之為標準布朗運動 (regular Brownian motion)。綜合歸納來說，當  $0 < H < 1$  時，稱為碎形特性之布朗運動。我們可以說  $B(t)$  的增量 (increments) 是具有自身相似 (self-similar) 的特性 [Peitgen H.O. et al.,1992]。換言之，

$$B \left[ \frac{t}{r} \right] \text{ 與 } \frac{B(t)}{r^H},$$

在統計上是無差別的 (statistically indistinguishable)，當假設  $B(t_0)=0$  可化簡如下：

$$B \left[ \frac{t}{r} \right] \text{ 與 } \frac{B(t)}{r^H},$$

此外，碎形維度  $D$  (fractal dimension) 可經由 box-counting graph 的方法求得，與 Hurst 指數有  $D = 2 - H$  關係 [Peitgen H.O. et al.,1992]。

### 3.2.3 碎形特性之高斯擾亂 (fractional Gaussian noise)

構成一維度布朗運動的高斯增量 (Gaussian increment)，其數列同碎形特性之布朗運動皆具有碎形的性質，故稱之為碎形特性之高斯擾亂 (fractional Gaussian noise)，以  $G(t)$  表示，其數學式如下：

$$G \left[ \frac{t}{e} \right] = \frac{B(t) + e^{\alpha} G(t)}{e^{\alpha}}. \quad (3.9)$$

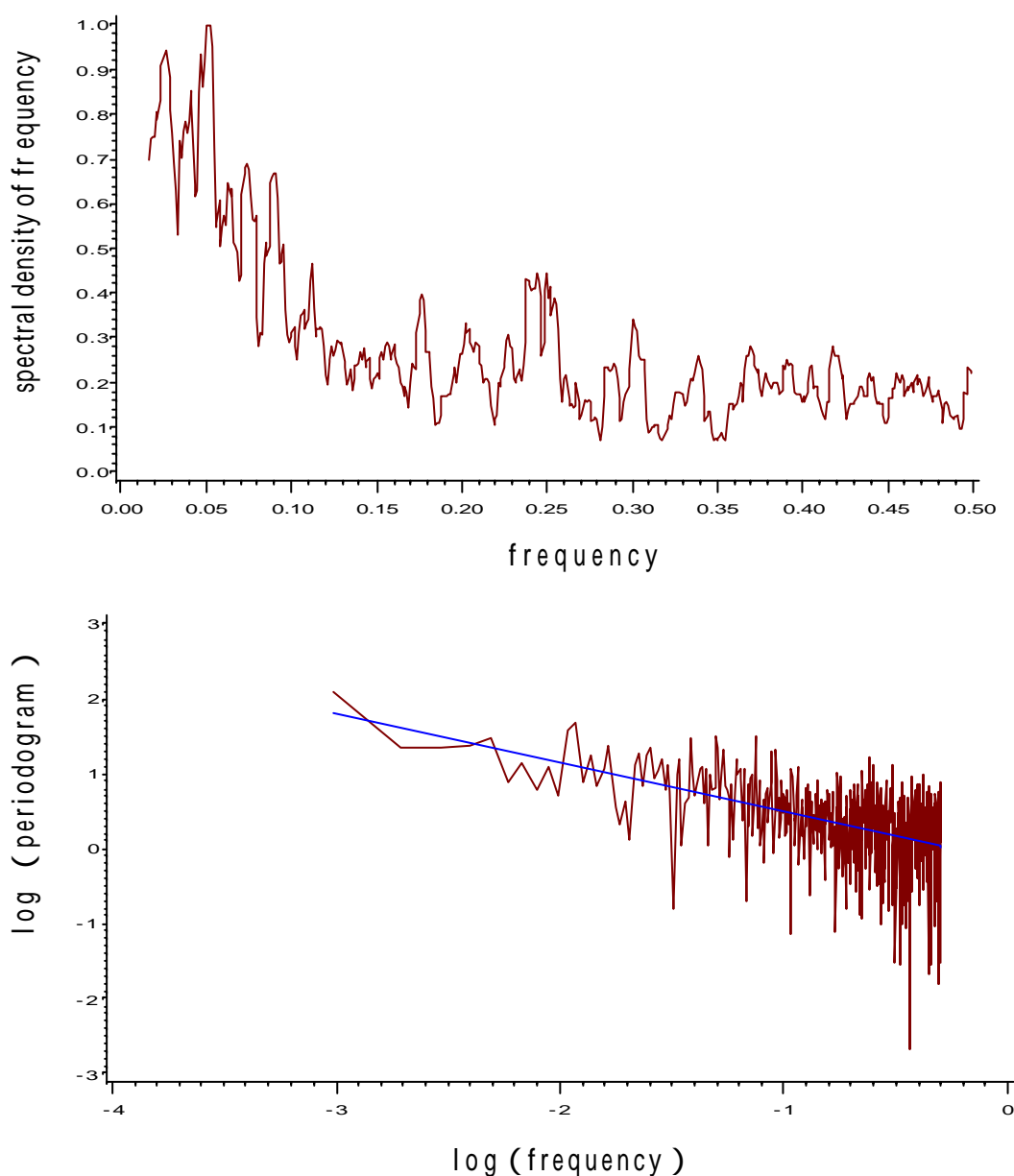
## 第四章 模擬過程與研究方法

在模擬之前，先探討原始地震資料的頻譜特性，依據這些特性以期能達到最佳的模擬結果。

### 4.1 原始地震資料之頻譜特性

#### 4.1.1 頻譜圖、週期圖與迴歸線 ( regression line )

將 88/9/20 至 89/9/30 共 637 筆地震資料經轉換後作頻譜圖發現具有  $1/f^b$  型態，接著作雙對數尺度週期圖 ( double-log-scale periodogram ) 並加入迴歸線，如下圖所示：



**Parameter Estimates**

Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	T for H <sub>0</sub> Parameter	Prob> T
Intercept	1	-0.165365	0.0452247	-3.657	0.0003
Freq	1	-0.654418	0.05347935	-12.237	0.0001

#### 4.1.2 原始地震資料之頻譜特性

由雙對數尺度週期圖看來，頻率與頻譜密度呈反向變動，而且明顯呈現  $1/f^b$  之波動型態，在此我們採用迴歸線的斜率來估 b 值，作為模擬群集卜瓦松過程及碎形高斯擾亂的參數之用。

### 4.2 群集卜瓦松過程之模擬

#### 4.2.1 參數之選取

根據原始地震資料得到 b 值之後，由式子(2.12)可以算出 z 值。

參數 (parameter)	數值 (value)
$\theta$ (主要過程之平均間隔時間)	1000
(伽瑪分配之參數)	1
(伽瑪分配之參數)	500
$N_0$ (最大群集個數)	30
z (群集個數分配之參數)	-2.3456

#### 4.2.2 模擬之步驟

本模擬是利用統計軟體 SAS8.01 視窗版執行。

##### 1. 產生主要過程

主要過程為一平穩卜瓦松過程，其間隔時間呈指數分配。故利用指數分配生成 500 筆資料作為模擬主震之間隔時間。

## 2. 產生次要過程

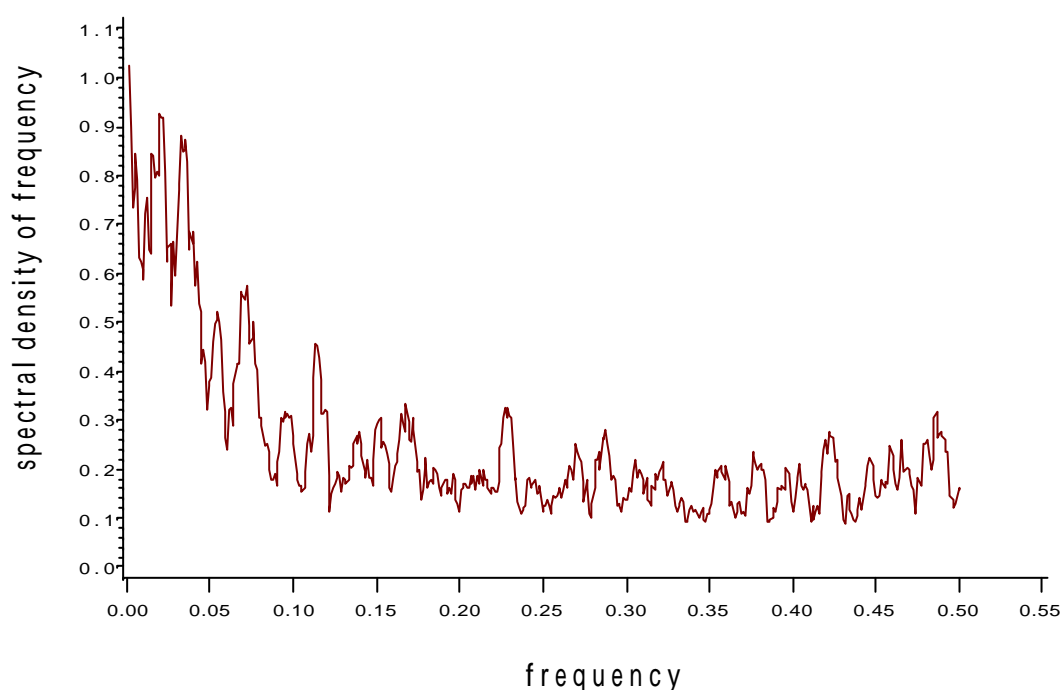
次要過程乃所有群集之集合，此步驟即在生成各主要事件所觸發之群集，群集內之個數服從群集個數分配（2.3.2 節），依據此分配產生 500 個  $m$  值，再利用伽瑪分配生成群集內事件之間隔時間。

## 3. 完整過程

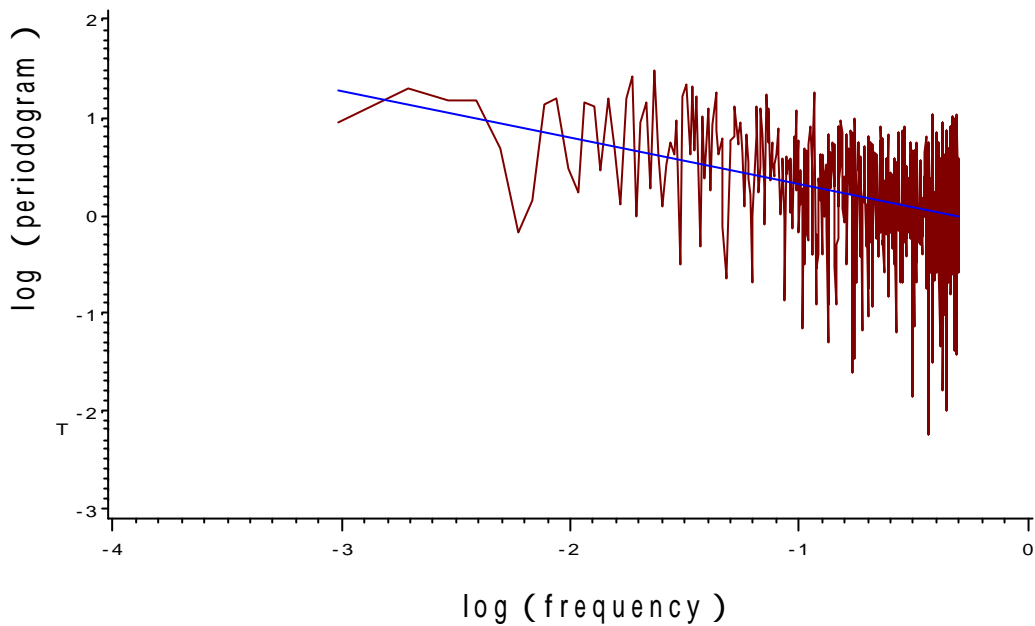
依發生時間排序後即可得到一完整過程，共 1024 筆發生時間。

### 4.2.3 頻譜圖與週期圖

將模擬所得之 1000 筆發生時間，經轉換後成為計數資料（count data），作頻譜圖及雙對數尺度週期圖。頻譜圖明顯呈  $1/f$  波動，雙對數尺度週期圖型態亦與原始地震之圖形相似，皆印證群集卜瓦松過程模擬的合理性。





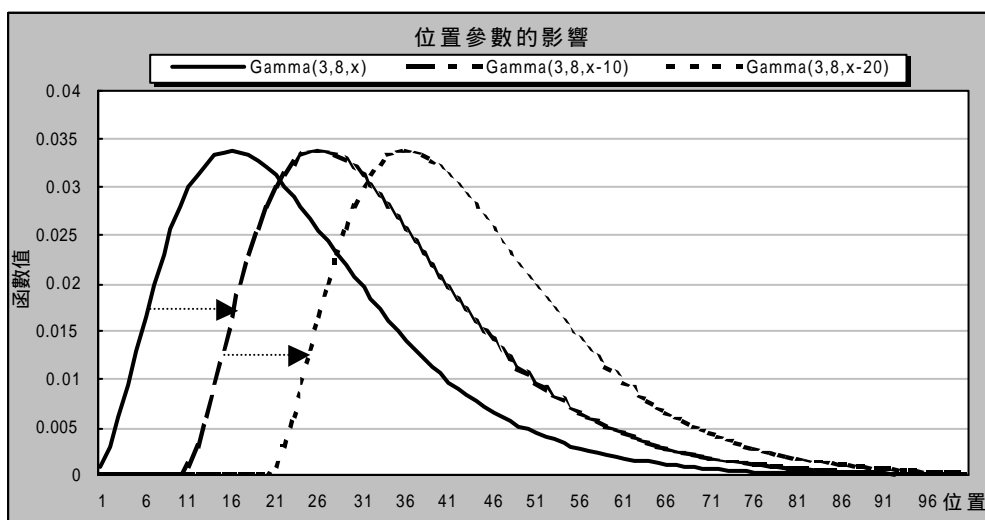


#### 4.2.4 Gamma 參數的影響

在 [Gruneis,Baiter;1986] 的文章中提到， $1/f$  頻譜特性主要是由群集個數分配所決定，因此在模擬  $1/f$  型態之群集卜瓦松過程時，gamma 參數就顯得不那麼重要了，但在此還是探討參數對於其函數的影響。

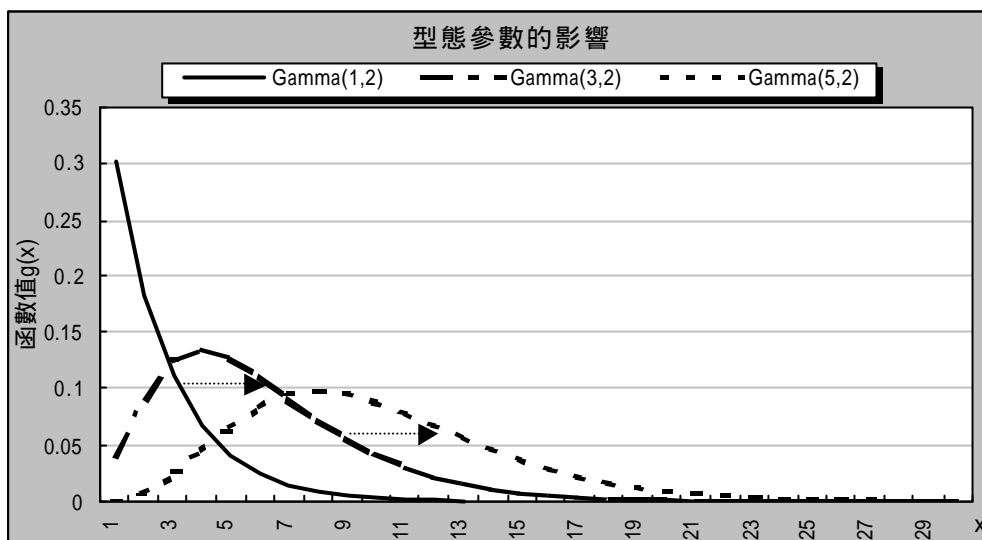
##### 1. 位置參數 $d$ 的影響

若伽瑪分配之型態不變，圖形卻整個向左或向右平移，則可視為受到位置參數的影響。



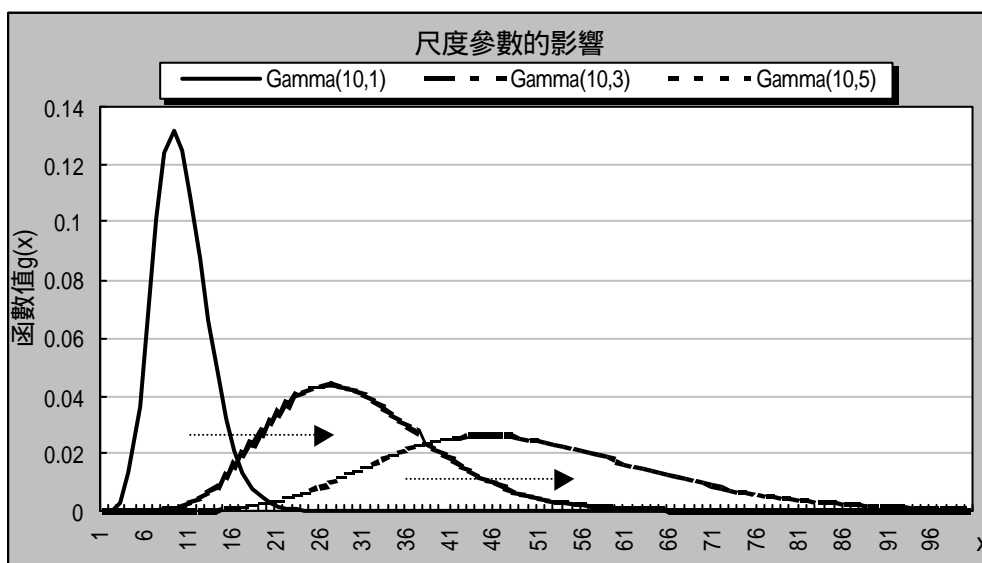
## 2. 型態參數 的影響

若伽瑪分配之偏離型態有明顯的改變，如下圖從極右偏漸趨和緩，此時應是受到型態參數的影響。



## 3. 尺度參數 的影響

若伽瑪分配之型態不變，而寬窄程度有明顯改變時，則可認為受到尺度參數的影響。下圖則是控制型態與位置兩參數下觀察尺度參數的影響。



## 4.3 碎形特性高斯擾亂之模擬

### 4.3.1 參數之選取

在模擬碎形特性之高斯擾亂時，此處以頻譜密度函數為標的，反覆變換參數直到型態最吻合者，作為最後碎形高斯擾亂之參數。

碎形高斯擾亂之頻譜密度函數： $S(f) = c(1/f^{2H-1})$

參數 (parameter)	數值 (value)
c ( 頻譜尺度參數 )	<b>0.0005</b>
b ( 頻率幕次參數 )	<b>0.6544</b>
H ( Hurst 指數 )	<b>0.8272</b>

### 4.3.2 模擬之步驟

本模擬是利用統計軟體 SAS8.01 視窗版執行。

#### 1. 產生一組頻率

模擬頻率的方法有很多種，在此我們以一組正弦波 ( sine wave ) 加上高斯數取其週期 2 之頻率，高斯數以標準常態分配 **Normal(0,1)** 產生。

#### 2. 修正成為碎形高斯擾亂之頻譜密度函數

碎形高斯擾亂之頻譜密度函數為  $S(f)=c \times (1/f^b)$ ，將模擬所得之頻率代入並調整參數使其最近似原始地震資料之頻譜圖。

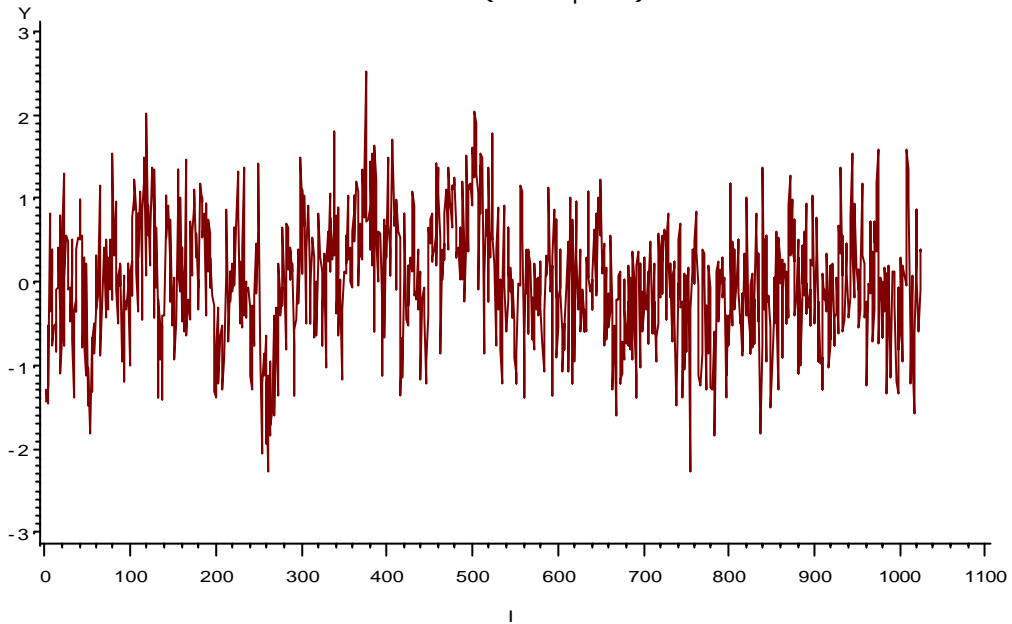
#### 3. 還原成為具有碎形特性之高斯擾亂

將頻譜密度函數開平方之後作為震幅 ( amplitude )，乘上正弦波後還原成為具有碎形特性之高斯擾亂。

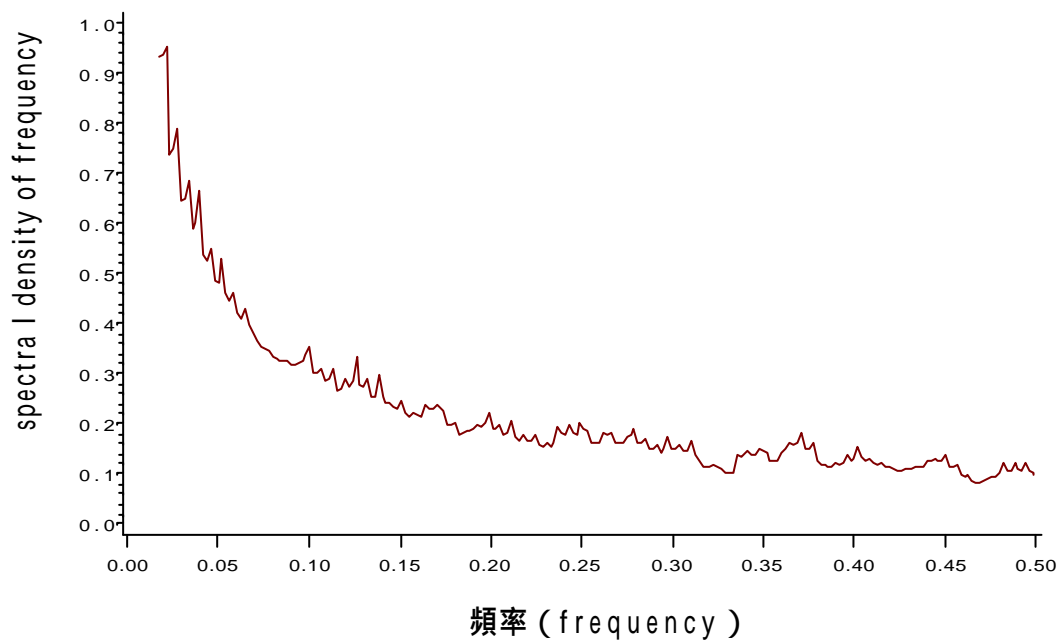
### 4.3.3 時間圖與頻譜圖

將模擬所得之資料作時間圖及頻譜圖。時間圖為具有碎形特性之高斯擾亂，而頻譜圖則明顯呈現  $1/f$  波動，與原始地震之圖形相似。

時間圖 (time plot)



頻譜圖 (Spectrum)



## 第五章 模型比較

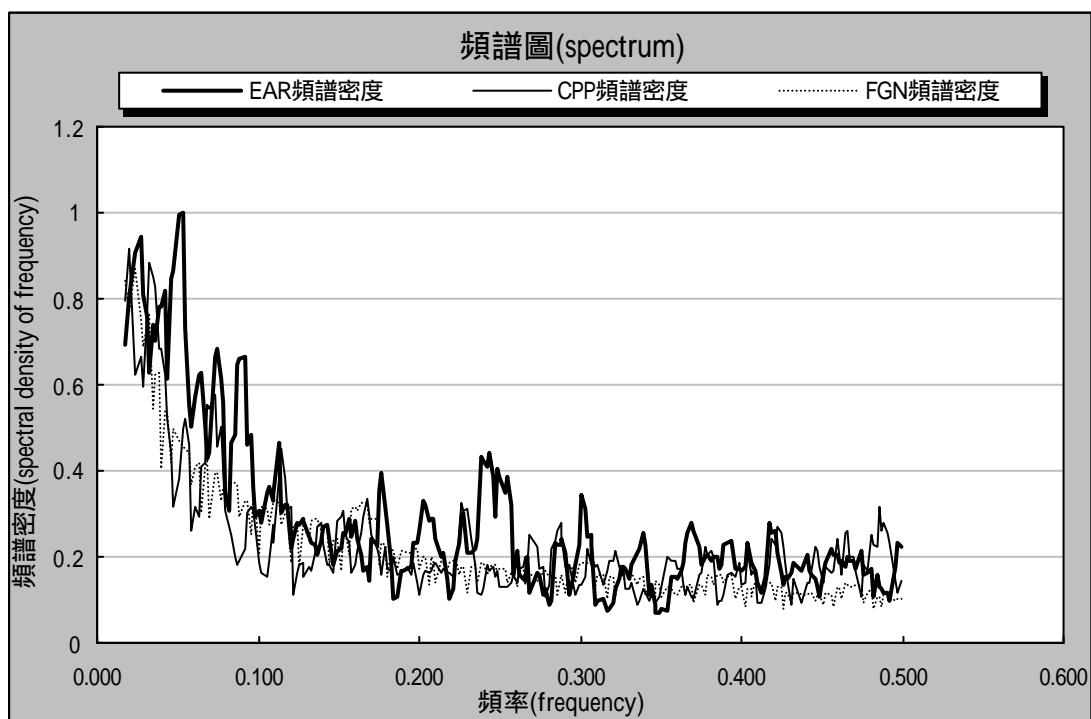
我們已使用了兩種模型來配適地震資料，分別是群集卜瓦松過程與具碎形特性之高斯擾亂，本章將探討兩種方法之模擬何者較接近原始地震資料。

### 5.1 模型比較（以計數資料為對象）

#### 5.1.1 頻譜圖

在比較兩者差異之前，我們先選擇頻譜密度函數做為比較的依據，檢視頻譜圖可以發現三數列的頻譜密度與頻率皆呈反向變動，且具  $1/f$  波動型態。

原始地震（EAR）的震盪幅度略高於其它兩者，群集卜瓦松過程（CPP）次之，碎形高斯擾亂（FGN）顯得較平滑。接下來將使用一些統計量比較何者與原始資料較『相似』。



### 5.1.2 差異量度

以『量』的接近角度來看，我們使用絕對離差、平方離差及平均相對離差和分別探究。

基本統計量

變數	N	Mean	Median	StDev	Sum
EAR	362	1.76	2	1.70	637
CPP	362	1.76	2	0.97	637
FGN	362	1.76	2	0.68	637

變數	Minimum	Maximum	Q1	Q3
EAR	1	19	1	2
CPP	1	5	1	2
FGN	1	3	1	2

差異量表

變數	絕對離差和	平方離差和	平均相對離差和
CPP	298	856	0.278
FGN	364	1288	0.342

從差異量表可以看出，絕對離差和、平方離差和及平均相對離差三者的值皆是群集卜瓦松過程較小，故我們可以說以『量』的角度，群集卜瓦松過程較像原始地震資料。

### 5.1.3 比例量度

如果量不需要「接近」，只要成比例，則可以考慮與原始數列間的相關；若只考慮上下起伏狀況是否一致，則以上下起伏化為 0/1 數列，檢視同升、同降、一升一降及一降一升的次數，作為同步波動量測之依據。

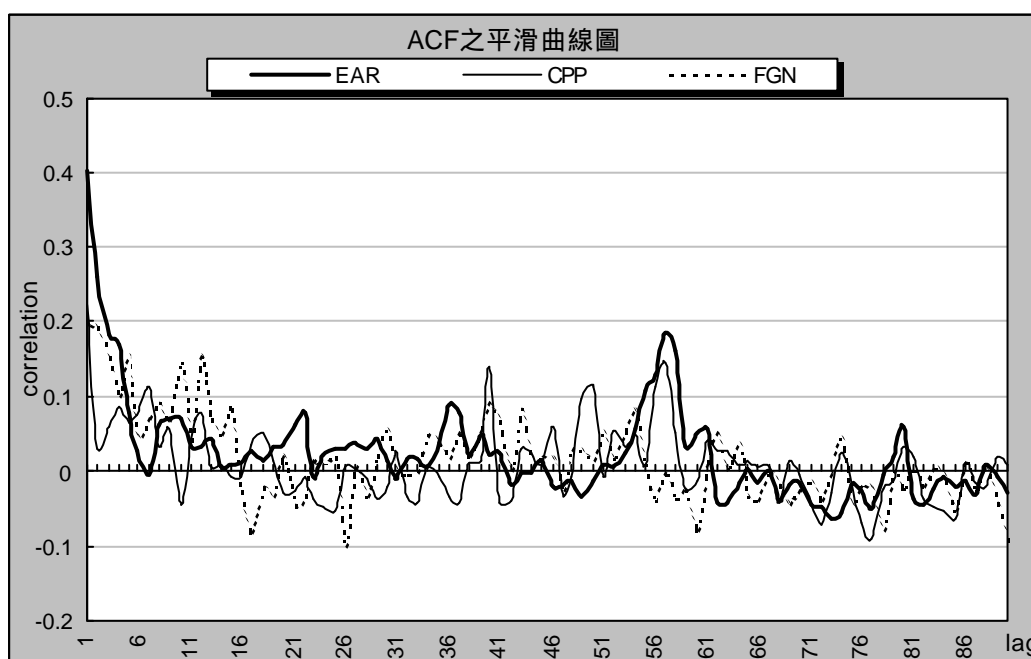
變數	同升同降(正,正)(負,負)(0,0)	一升一降(正,負)(負,正)(有一為0)
CPP	182	180
FGN	122	240

由上表可以看出，群集卜瓦松過程與原始地震資料同升同降的比率為 0.503，而碎形高斯擾亂為 0.337；因此就同步波動的狀況而言，群集卜瓦松過程仍比碎形高斯擾亂配適地震資料要來得好一點。

## 5.2 模型比較（以相關係數為對象）

### 5.2.1 平滑曲線圖

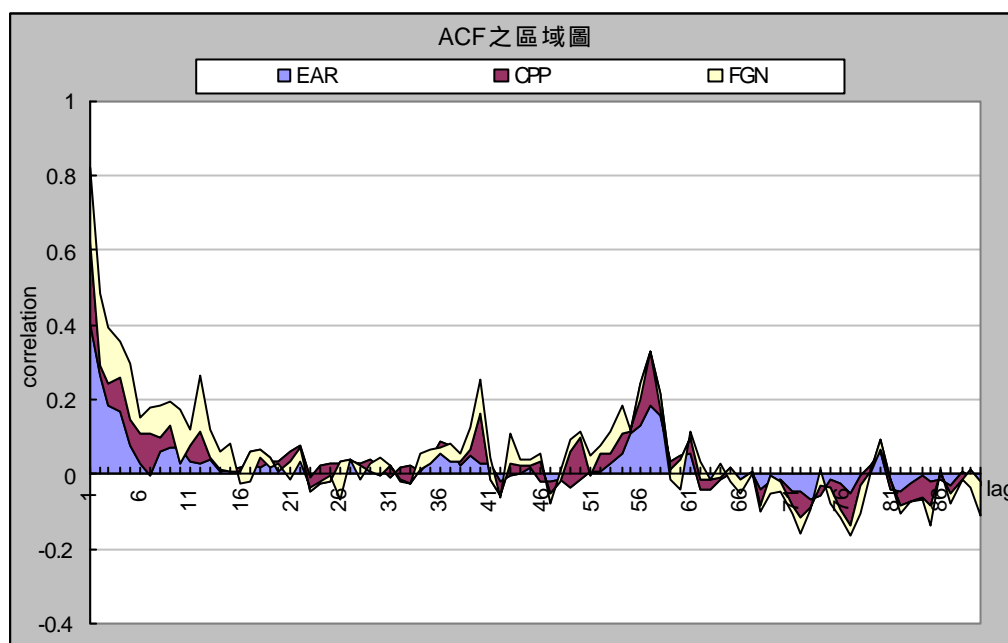
若以相關係數作為比較對象，我們選取 90 期（lag）之自我相關函數，作其平滑曲線圖如下：



由上圖我們可以發現自我相關係數在 -0.1 與 0.2 間上下震盪著，三數列皆微呈正相關。

### 5.2.2 區域圖

若以相關係數作為比較對象，我們選取 90 期 (lag) 之自我相關函數，作其區域圖如下：



三數列之比重雖時有不同，但大致皆往相同方向變動。

### 5.2.3 差異量度

由圖形不易看出群集卜瓦松過程與碎形高斯擾亂的差異，故在此使用絕對離差、平方離差就『量』的角度探究之。

差異量表

變數	絕對離差和	平方離差和
CPP	4.271	0.362
FGN	4.387	0.391

從差異量表可以看出，絕對離差和與平方離差和的值皆是群集卜瓦松過程較小，但兩者差距不大，故以自我相關函數為比較依據時，群集卜瓦松過程仍較像原始地震資料。



## 第六章 結論與後續研究方向

### 6.1 結論

本研究利用 921 地震資料之  $1/f$  頻譜特性為主軸，以群集卜瓦松過程與碎形高斯擾亂兩種方法來模擬，並相互比較，所得結論如下：

#### 1. 模擬的適切性

由於群集卜瓦松過程本身即具備  $1/f$  之頻譜特性，而碎形高斯擾亂經參數調整後亦具有  $1/f$  之頻譜性質，頻譜圖也顯示兩者確實具有此一特性，故以此作為模擬依據，兩者皆適切。

#### 2. 模擬的相似度

我們採用了許多方式進行比較，無論是『量』的角度或『比例』的角度皆是群集卜瓦松過程較好，顯示地震並不是如白噪音般平穩的發生；由主要事件觸發次要事件的發生機制恰好可以說明主震引發餘震的現象，主要事件雖然過多，但地震資料之記錄並無考慮震度的問題，故亦屬合理範圍。

本研究之目標在於探討地震發生時點之機率模型，嘗試說明地震之發生機制，最後得到群集卜瓦松過程為模擬地震之適當模型，但在此並不作預測，地震之預測關係到精確度，因此預測之價值也就降低了，目前世界各國大多朝向建立早期預警及災後防治等工作。

### 6.2 後續研究方向

1. 可以針對台灣地區其它地震進行研究，看是否皆具有  $1/f$  之頻譜特性。
2. 可以依震度不同進行分類，或配合地質學控制群集卜瓦松過程之主要事件數。
3. 可以嘗試其它模型，如自我引發點過程等等。